Werk

Titel: Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern

Autor: Knopp, K.

Jahr: 1929

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0030|log63

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neuere Sätze über Reihen mit positiven Gliedern.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Einleitung.

Im Jahre 1906 hat Herr Hilbert auf sehr weiten Umwegen bewiesen, daß mit $\sum_n x_n^2$ stets auch $\sum_{p,q} \frac{x_p x_q}{p+q}$ konvergiert [1]). Für diesen Satz wurden bald neue, aber immer noch sehr tief fundierte Beweise gegeben [2]). Erst im Jahre 1915 zeigte Herr G. H. Hardy, daß mit $\sum_n x_n^2$ stets auch $\sum_n \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2$ konvergiert $(x_\nu \geqq 0)$ und daß dieser Satz mit dem Hilbertschen äquivalent ist; auch gab er auf diesem Wege einen direkten elementaren Beweis des Hilbertschen Satzes [3]). Wesentlich einfachere Beweise stammen erst aus späteren Jahren [4]). Inzwischen waren auch die ver-

[1]) Vgl. H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen, Dissertation Göttingen 1908, S. 83.

[2]) Zunächst von Hilbert selbst (s. Weyl [1])), sodann von F. Wiener (Elementarer Beweis eines Reihensatzes von Herrn Hilbert, Math. Annalen **68** (1910), S. 361–366) und I. Schur (Bemerkungen zur Theorie der beschränkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veränderlichen, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **140** (1912), S. 1–28).

[3]) G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus XLI. On the convergence of certain integrals and series, Mess. of Math. **45** (1915), S. 163–166.

[4]) a) G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus LI. On Hilbert's double-series theorem and some connected theorems, Mess. of Math. **48** (1918), S. 107 bis 112. b) G. H. Hardy, Note on a theorem of Hilbert, Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 314–317. c) E. Landau, A note on a theorem concerning series of positive terms, Journ. Lond. Math. Soc. **1** (1926), S. 38–39. d) E. B. Elliot, A simple exposition of some recently proved facts as to convergency, ebenda **1** (1926), S. 93–96. e) Th. Kaluza und G. Szegö, Über Reihen mit lauter positiven Gliedern, ebenda **2** (1928), S. 266–272. f) K. Grandjot, On some identities relating to Hardy's convergence theorem, ebenda **3** (1928), S. 114–117. g) K. Knopp, Über Reihen mit positiven Gliedern, ebenda **3** (1928), S. 205–211.

schiedensten Verallgemeinerungen aufgestellt und bewiesen worden [5]). Unter diesen seien zunächst die beiden folgenden genannt, bei denen, wie in allem Folgenden, vorausgesetzt wird, daß die a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ sämtlich nicht-negativ, aber nicht alle $= 0$ sind, und daß $\sum a_n$ konvergiert:

I. *Für* $0 < t < 1$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n} \right)^{\frac{1}{t}} \text{ konvergent und } < \frac{1}{(1-t)^{\frac{1}{t}}} \sum a_n .$$

II. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ *ist konvergent und* $< e \sum a_n$.

Vor kurzem habe ich (s. [4g]) ein in mancher Hinsicht einfacheres Beweisverfahren für diese Sätze mitgeteilt, durch das insbesondere gezeigt wird, daß I auch für $t < 0$ gilt. Dies liefert den Satz

III. *Für* $t > 0$ *ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_1^{-t} + a_2^{-t} + \ldots + a_n^{-t}} \right)^{\frac{1}{t}} \text{ konvergent und } < (1+t)^{\frac{1}{t}} \sum a_n .$$ [6])

In allen drei Sätzen darf die rechts auftretende Konstante durch keine kleinere ersetzt werden.

Durch diese Sätze ist also gezeigt, daß, wenn $\varphi(x)$ eine der Funktionen

$$x^t \text{ mit } 0 < t < 1, \quad \log x, \quad \text{oder} \quad x^{-t} \text{ mit } t > 0$$

bedeutet und $\Phi(x)$ die dazu inverse Funktion ist, die folgenden Sätze gelten:

Satz A. $\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1) + \varphi(a_2) + \ldots + \varphi(a_n)}{n} \right)$ *ist konvergent.*

Satz B. *Es gibt eine nur von* $\varphi(x)$ *abhängige Konstante* $K = K(\varphi)$, *so daß die Summe der in* A *genannten Reihe*

$$< K(\varphi) \sum a_n$$

ist.

Satz C. *Die untere Grenze* $K_*(\varphi)$ *der in* B *zulässigen Konstanten* $K(\varphi)$ *ist*

$$K_*(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1) + \varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \ldots + \varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \right).$$

---

[5]) Vgl. außer den in [4]) genannten Arbeiten: T. Carleman, Sur les fonctions quasi-analytiques, V. Kongreß d. Skand. Math. in Helsingfors (1923), S. 181–186; T. Carleman, Les fonctions quasi analytiques, Paris 1926, S. 112–115. Hier wird II bewiesen; vereinfachte Beweise bei G. Pólya, Proof of an inequality, Proc. Lond. Math. Soc. [2] **24** (1926), Records of Proc. at Meeting LVII, sowie in den unter [4e]) und [4f]) genannten Arbeiten.

[6]) Ist $a_m = 0$, so hat man $\frac{n}{a_1^{-t} + a_2^{-t} + \ldots + a_n^{-t}}$ für $n \geqq m$ gleich 0 zu setzen.

Im folgenden sollen nun zunächst, nachdem in § 1 die Ausdrücke, die die Glieder der Reihe in A bilden, näher untersucht sind, in § 2 umfassendere Klassen von Funktionen $\varphi(x)$ angegeben werden, für die einer der Sätze A, B oder C gilt.

In den weiteren Paragraphen sollen in Kürze gewisse Verallgemeinerungen und Modifikationen der Sätze I, II und III in analoger Weise behandelt werden. Für die speziellen Funktionen x^t mit $0 < t < 1$ und $\log x$ haben nämlich die Herren G. H. Hardy und G. Pólya weiterhin den Satz bewiesen (wir beschränken uns hier auf die Analoga zu B und C):

Satz D. *Sind* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *irgendwelche positive Zahlen* (> 0), *so ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \Phi\left(\frac{\lambda_1 \varphi\left(\frac{a_1}{\lambda_1}\right) + \ldots + \lambda_n \varphi\left(\frac{a_n}{\lambda_n}\right)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \text{ konvergent und } \leqq K(\varphi) \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$ [7])

Hierbei bedeutet $K(\varphi)$ *eine nur von* φ *abhängige Konstante, für die die untere Grenze wieder die in Satz* C *angegebene Konstante* $K_*(\varphi)$ *ist.*

Schließlich sind — besonders in den Arbeiten von Hardy — für die spezielle Funktion x^t, $0 < t < 1$, neben den Reihensätzen die analogen Sätze für Integrale betrachtet worden. Bedeutet $\varphi(x)$ eine dieser Funktionen und ist $f(x)$ eine für $x \geqq 0$ definierte, nicht negative integrierbare Funktion, für die

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx$$

existiert und > 0 ist, so gilt u. a. der

Satz E. *Es existiert auch das Integral*

$$\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} \varphi f(x)\,dx\right)dx \quad \text{und ist} \quad \leqq K(\varphi) \cdot \int_0^{\infty} f(x)\,dx.$$

Hierbei bedeutet $K(\varphi)$ *eine nur von* φ *abhängige Konstante, für die die untere Grenze durch*

$$K_*(\varphi) = \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\log y} \int_0^{y} \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^{x} \varphi\left(\frac{1}{u}\right)du\right)dx$$

geliefert wird (so daß sie bei der jetzigen Bedeutung von $\varphi(x)$ *mit der in Satz* C *genannten übereinstimmt)* [8]).

---

[7]) Vgl. die in Fußnote [4b]) genannte Arbeit sowie die Note von G. H. Hardy, Notes on some points in the integral calculus LX. An inequality between integrals, Mess. of Math. **54** (1925), S. 150–156.

[8]) Vgl. hierzu weiter unten Fußnote [15]).

Im letzten Paragraphen (§ 3) wird die Gültigkeit auch dieser Sätze D und E in analoger Weise wie die der Sätze A, B, C auf umfassendere Klassen von Funktionen $\varphi(x)$ ausgedehnt[9]).

§ 1.

Soll einer der Sätze A, B oder C für alle unsere konvergenten Reihen $\sum a_n$ gelten, so muß man zunächst voraussetzen, daß $\varphi(x)$ für alle $x > 0$ definiert ist und eine eindeutige inverse Funktion besitzt, also *stetig* und *im engeren Sinne monoton* ist[10]).

Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. Gehört nun $\varphi(x)$ zu dieser Klasse, so gehört offenbar auch $\varphi_1(x) = c\varphi(x) + c'$ für beliebiges $c \gtrless 0$ und beliebiges c' zur Klasse $\mathfrak{M}$. Sind Φ und Φ_1 die zu φ und φ_1 inversen Funktionen, so ist überdies für beliebige positive x_ν

$$(1) \qquad \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right) = \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(x_1)+\varphi_1(x_2)+\ldots+\varphi_1(x_n)}{n}\right).$$

Wir können uns also c (etwa $= \pm 1$) und c' immer so gewählt denken, daß $\varphi_1(x)$ *monoton wächst* und daß

$$\lim_{x \to +0} \varphi_1(x) = 0 \quad \text{oder} \quad = -\infty$$

ist. Wir sagen dann kurz, $\varphi_1(x)$ sei eine zu $\varphi(x)$ gehörige normierte Funktion, und nennen $\varphi(x)$ von der *ersten* oder *zweiten Art*, je nachdem dieser Grenzwert $= 0$ oder $= -\infty$ ist. Bei den Funktionen erster Art setzen wir natürlich $\varphi_1(0) = 0$ und bei denen zweiter Art in sinngemäßer Übertragung der in Fußnote [6]) gemachten Bemerkung den gemeinsamen Wert der beiden Seiten von (1)

$$(2) \qquad \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right) = 0,$$

---

[9]) Einer freundlichen Mitteilung des Herrn G. H. Hardy entnehme ich, daß auch er die Frage aufgeworfen hat, für welche Funktionen $\varphi(x)$ außer x^t, $0 < t < 1$, und $\log x$ die Sätze A, B, C noch gelten mögen, und daß er insbesondere, unserem späteren Beispiel § 1, Beispiel 8 entsprechend, gefunden hat, daß die Sätze für die Funktionen $\gamma(x^t)$, $0 < t < 1$, gelten, wenn $\gamma(x)$ die Bedeutung aus § 1, Beispiel 7 hat. Auf seine Anregung hin und im Anschluß an die Arbeit [4g]) hat sich auch Herr L. S. Bosanquet mit diesen Fragen beschäftigt und u. a. Resultate erhalten, die mit den unsrigen in Berührung stehen. — Endlich möchte ich hervorheben, daß ich der regen Mitarbeit des Herrn H. Späth † an dem Problemenkreis manche wertvolle Anregung verdanke; insbesondere rühren die Bemerkungen § 2, A_2, A_3 und in der Hauptsache die Bemerkung B_1 von ihm her.

[10]) D. h. für $0 < x_1 < x_2$ soll unter Ausschluß der Gleichheit stets $\varphi(x_1) < \varphi(x_2)$ oder stets $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$ sein.

wenn eines der Argumente $x_\nu = 0$ ist. Dann gilt (1) für beliebige nichtnegative x_ν. Allgemein setzen wir, wenn $\varphi(x)$ von der zweiten Art ist, $\varphi(0) = \pm\infty$, $\Phi(\pm\infty) = 0$, wobei das obere Zeichen für eine wachsende, das untere für eine fallende Funktion gelten soll.

Für die Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$ gilt nun der folgende einfache, aber für alles Folgende grundlegende

Satz 1. *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$, $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ ihre Inversen, so ist die Ungleichung*

$$\Psi\left(\frac{\psi(x)+\psi(y)}{2}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \tag{2}$$

dann und nur dann für beliebige x, y eines abgeschlossenen Intervalles (a, b) mit $0 \leqq a < b$ stets erfüllt, wenn

$$\psi_1(\Phi(x)) \text{ in } (\varphi(a), \varphi(b)) \text{ von oben konvex}^{11})$$

ist. Hierbei soll $\psi_1(x)$ eine zu $\psi(x)$ gehörige normierte Funktion (oder diejenige der beiden Funktionen $\pm\psi(x)$, welche monoton wächst) bedeuten.

Der Beweis ist überaus einfach. Setzt man $\varphi(x) = x'$, $\varphi(y) = y'$, so sind x' und y' beliebige Zahlen aus $(\varphi(a), \varphi(b))$, und wegen (1) lautet die Bedingung (2)

$$\Psi_1\left(\frac{\psi_1\Phi(x')+\psi_1\Phi(y')}{2}\right) \leqq \Phi\left(\frac{x'+y'}{2}\right)$$

oder also, da $\psi_1(x)$ monoton wächst,

$$\frac{\psi_1\Phi(x')+\psi_1\Phi(y')}{2} \leqq \psi_1\Phi\left(\frac{x'+y'}{2}\right).$$

Das ist aber gerade die Bedingung dafür, daß $\psi_1\Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ von oben konvex ist[12]).

Da nun bekanntlich, wenn eine Funktion $f(x)$ in einem Intervall (a', b') von oben konvex ist, für beliebige Werte $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ dieses Intervalles

$$\frac{f(x_1')+f(x_2')+\ldots+f(x_n')}{n} \leqq f\left(\frac{x_1'+x_2'+\ldots+x_n'}{n}\right)$$

ist, so haben wir noch den folgenden

Zusatz. *Unter den Bedingungen des Satzes 1 ist für beliebige $x_1, x_2, \ldots, x_n$ aus (a, b) stets*

$$\Psi\left(\frac{\psi(x_1)+\psi(x_2)+\ldots+\psi(x_n)}{n}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\ldots+\varphi(x_n)}{n}\right). \tag{3}$$

---

[11]) Dieser Ausdruck ist im folgenden stets im Sinne von „nicht-konkav" gebraucht.

[12]) Analog zeigt man, daß es für die Gültigkeit von (2) notwendig und hinreichend ist, wenn $\varphi_1\Psi$ in $(\psi(a), \psi(b))$ *von unten* konvex ist und hierbei $\varphi_1(x)$ die wachsende der beiden Funktionen $\pm\varphi(x)$ bedeutet.

Da wir mit dieser Beziehung zwischen zwei Funktionen weiterhin beständig zu tun haben, legen wir sie durch eine besondere Definition fest.

Definition. *Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$ und $\Phi(x)$ und $\Psi(x)$ die dazu inversen Funktionen, so soll $\psi(x)$ im abgeschlossenen Intervall (a, b) tiefer als $\varphi(x)$ heißen, in Zeichen*

$$\psi(x) < \varphi(x) \quad in \quad (a, b),$$ [13])

wenn — unter den Bezeichnungen des Satzes 1 — $\psi_1(\Phi(x))$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ von oben konvex oder $\varphi_1(\Psi(x))$ in $(\psi(a), \psi(b))$ von unten konvex ist.

Hiernach können wir Satz 1 auch in folgender Form aussprechen:

Satz 1'. *Die Beziehungen (2) und (3) sind für zwei Funktionen φ und ψ der Klasse $\mathfrak{M}$ dann und nur dann für beliebige Argumente eines Intervalls (a, b) stets erfüllt, wenn in diesem Intervall $\psi < \varphi$ ist*[13a]).

Ist $f(x)$ in (a', b') von oben konvex, so ist es auch in jedem Teilintervall (a'', b'') von (a', b') von oben konvex. Ist ferner $f(x)$ in (a', b') und $g(x)$ in $(f(a'), f(b'))$ von oben konvex, und $g(x)$ überdies *monoton wachsend*, so ist offenbar auch $g(f(x))$ in (a', b') von oben konvex; denn es ist

$$\frac{gf(x')+gf(y')}{2} \leqq g\left(\frac{f(x')+f(y')}{2}\right) \leqq gf\left(\frac{x'+y'}{2}\right).$$

Dies liefert den

Satz 2. *Ist $\psi < \varphi$ in (a, b), so gilt diese Beziehung auch in jedem Teilintervall (a_1, b_1) von (a, b). Ist überdies $\chi < \psi$ in (a, b), so ist auch $\chi < \varphi$ in (a, b).*

Denn nach Voraussetzung ist $\psi_1 \Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ und $\chi_1 \Psi_1$ in $(\psi_1(a), \psi_1(b))$ von oben konvex und die letztere Funktion überdies monoton wachsend. Nach der Vorbemerkung ist also $\chi_1 \Psi_1 \psi_1 \Phi = \chi_1 \Phi$ in $(\varphi(a), \varphi(b))$ von oben konvex. Hierbei sollen χ_1 und ψ_1 natürlich zu χ und ψ gehörige normierte Funktionen bedeuten.

---

[13]) In der Beziehung $\psi < \varphi$ darf $\varphi(x)$ offenbar durch jede Funktion $c\varphi(x)+c'$ mit $c \gtrless 0$ ersetzt werden, und Analoges gilt für $\psi(x)$.

[13a]) Die in (2) und (3) auftretenden Ausdrücke sind als eine (im allgemeinen *nicht-lineare*) *Mittelbildung* aus x und y bzw. aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$ anzusprechen. Wird φ oder ψ der Reihe nach $= x$, $\log x$, $\frac{1}{x}$ genommen, so erhält man das arithmetische, geometrische, harmonische Mittel. Nennen wir den Ausdruck rechts in (3) kurz das φ-Mittel aus $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so kann Satz 1' auch so ausgesprochen werden: *Das ψ-Mittel von n Größen aus (a, b) ist dann und nur dann niemals größer als ihr φ-Mittel, wenn in diesem Intervall $\psi < \varphi$ ist.* Hiernach ist also z. B. das geometrische Mittel aus n nicht-negativen Größen deswegen nicht größer als deren arithmetisches Mittel, weil $\log x$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex ist.

Beispiele. 1. Für $0 < \alpha \leqq \beta$ ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, denn $x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ ist wegen $0 < \frac{\alpha}{\beta} \leqq 1$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

2. Auch für $\alpha \leqq \beta < 0$ ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, denn jetzt ist $-x^{\frac{\alpha}{\beta}}$ wegen $\frac{\alpha}{\beta} \geqq 1$ wieder in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

3. Für $\alpha > 0$ ist $\log x \subset x^\alpha$ in $(0, +\infty)$, denn $\log x^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \log x$ ist wegen $\alpha > 0$ in $(0, +\infty)$ von oben konvex.

4. Für $\alpha < 0$ ist $x^\alpha \subset \log x$ in $(0, +\infty)$, weil $-(e^x)^\alpha$ wegen $\alpha < 0$ in $(-\infty, +\infty)$ von oben konvex ist.

5. Sind α und β von 0 verschieden und $\alpha \leqq \beta$, so ist $x^\alpha \subset x^\beta$ in $(0, +\infty)$, wie sich aus 1. bis 4. nach Satz 2 sofort ergibt.

6. Man prüft leicht nach, daß z. B.

a) $\operatorname{loglog}(1+x) \subset \log x$ in $(0, +\infty)$;

b) $\log x \subset \operatorname{loglog} \frac{1}{x}$ in $(0, 1)$ und $\operatorname{loglog} \frac{1}{x} \subset x^\alpha$ in $\left(0, \frac{1}{e}\right)$, falls $\alpha > 0$ ist[14]);

c) $\left(\log \frac{1}{x}\right)^\alpha \subset x^\varepsilon$ in $(0, 1)$, falls $\alpha \geqq 1$, $\varepsilon > 0$;

d) $x^{-\varepsilon} \subset \left(\log \frac{1}{x}\right)^\alpha$ in $(0, 1)$, falls $\alpha \leqq 1$, $\alpha \gtrless 0$, $\varepsilon > 0$;

e) $(1 - e^{-x})^\alpha \subset x^\alpha$ in $(0, +\infty)$, falls $\alpha > 0$;

f) $x^\beta \subset (1 - e^{-x})^\alpha$ in $(0, \delta)$, falls $0 < \alpha < 1$, $\beta \gtrless 0$, $\beta < \alpha$ und falls $\delta = \delta(\beta) > 0$ hinreichend klein ist;

g) $x^2 \subset e^x$ in $(e, +\infty)$;

h) $e^{\frac{1}{x}} \subset \frac{1}{x}$ in $(0, +\infty)$;

i) $\frac{1}{x^\alpha} \subset e^{\frac{1}{x}}$ in $\left(\frac{1}{\alpha - 1}, +\infty\right)$, falls $\alpha > 1$;

k) $x \subset e^{-x^2}$ in $\left(0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$;

l) $x \subset e^{-\frac{1}{x}}$ in $\left(0, \frac{1}{2}\right)$;

m) $\frac{1}{\log \frac{1}{x}} \subset x^\varepsilon$ in $\left(0, e^{-\frac{2}{\varepsilon}}\right)$ und in $(1, +\infty)$, falls $\varepsilon > 0$.

---

[14]) Daß hier $\operatorname{loglog} \frac{1}{x}$ nur für $0 < x < 1$ definiert ist, ändert offenbar an den Aussagen nichts. Entsprechend würde es genügen, statt $\mathfrak{M}$ die Klasse $\mathfrak{M}'$ derjenigen Funktionen zu betrachten, die in einem festen Intervall der Form $0 < x < A$ definiert und dort stetig und monoton sind, wofern man sich auch weiterhin auf dieses Intervall bzw. auf $0 \leqq x < A$ beschränkt.

7. Ist $\gamma(x)$ irgend eine in (a, b) definierte, monoton wachsende und von oben konvexe (oder monoton fallende und von unten konvexe) stetige Funktion, so ist

$$\gamma(x) \prec x \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Umgekehrt besagt „$\gamma(x) \prec x$ in (a, b)“ nichts anderes, als daß $\gamma(x)$ die eben genannten Eigenschaften hat.

8. Ist $\gamma(x) \prec x$ in (a, b) und $\alpha \gtrless 0$, so ist auch

$$\gamma(x^\alpha) \prec x^\alpha \quad \text{in} \quad (a, b),$$

denn $\gamma_1\left((x^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha\right) = \gamma_1(x)$ ist in (a, b) von oben konvex, wenn γ_1 eine zu γ gehörige normierte Funktion bedeutet.

9. Ist $\gamma(x) \prec x$ in (a, b), vgl. 7., und $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion der Klasse $\mathfrak{M}$, so ist

$$\gamma\varphi(x) \prec \varphi(x) \quad \text{in} \quad (a, b),$$

wie die Prüfung von $\gamma\varphi\Phi(x) = \gamma(x)$ zeigt.

10. Es ist

$$\sqrt{(1+x^2)-1} \prec x^{\frac{2}{3}} \quad \text{in} \quad (0, \delta)$$

bei geeignetem $\delta > 0$. Denn die zweite Ableitung von $\sqrt{\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}$ ist negativ für alle hinreichend kleinen positiven x.

11. Sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ normierte Funktionen erster Art und ist $\psi \prec \varphi$ in (a, b), $0 \leqq a < b$, so ist für $\alpha > 1$ auch

$$\psi^\alpha \prec \varphi^\alpha \quad \text{in} \quad (a, b).$$

Beweis. Der Satz besagt offenbar nur, daß, wenn die Funktion $y = f(x) = \psi\Phi(x)$ in (a', b') mit $0 \leqq a' < b'$ von oben konvex ist, so ist dort für $\alpha > 1$ auch die Funktion

$$y = F(x) = \left(f\left(x^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right)^\alpha$$

von oben konvex. Nun ist für

$$a' \leqq x_1 < x_2 \leqq b', \quad f(x_1) = y_1, \quad f(x_2) = y_2 \tag{4}$$

nach Voraussetzung

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \leqq \frac{y_2}{x_2}, \quad \text{d. h.} \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 \leqq 0. \tag{5}$$

Wir halten jetzt x_1 und x_2 fest und bilden den Bereich

$$(\mathfrak{B}) \qquad \begin{cases} x_1 \leqq x \leqq x_2, \\ \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 \leqq y \leqq f(x) \end{cases}$$

vermöge

$$x' = x^\alpha, \qquad y' = y^\alpha$$

auf den Bereich

$$(\mathfrak{B}') \qquad \begin{cases} x_1^\alpha \leqq x \leqq x_2^\alpha, \\ \left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x^{\frac{1}{\alpha}} - x_1\right) + y_1\right]^\alpha \leqq y \leqq F(x) \end{cases}$$

ab. Dann wird $F(x)$ sicher die behaupteten Konvexitätseigenschaften haben, wenn schon die untere Begrenzung von $\mathfrak{B}'$ von oben konvex ist. Es genügt also zu zeigen, daß unter der Bedingung (4) für $x_1^\alpha \leqq x \leqq x_2^\alpha$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\left(x^{\frac{1}{\alpha}} - x_1\right) + y_1\right]^\alpha \leqq 0$$

ist. Diese zweite Ableitung ist aber, von wesentlich positiven Faktoren abgesehen,

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 - y_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 - x_1},$$

was nach (5) nicht positiv ist.

§ 2.

Auf Grund von § 1 lassen sich nun die bisherigen Gültigkeitsbereiche der Sätze A, B, C erheblich erweitern. Es gilt zunächst der

Satz 3. *Gilt Satz* A *für eine Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *so gilt er auch für jede Funktion* $\psi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in einem Intervall* $(0, \delta)$, $\delta > 0$, *tiefer als* $\varphi(x)$ *ist.*

Beweis. Wir denken uns die beiden Funktionen φ und ψ normiert. Ist dann $\sum a_n$ eine beliebige unserer konvergenten Reihen, so strebt wegen $a_n \to 0$

$$\psi(a_n) \to 0 \quad \text{oder} \quad \to -\infty,$$

je nachdem ψ von der ersten oder zweiten Art ist. Dasselbe Verhalten hat dann auch $\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}$, so daß in beiden Fällen

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right) \to 0$$

strebt. Wir wählen nun p so groß, daß für $n \geqq p$ dieser Ausdruck und auch a_n selbst $< \delta$ ist. Setzen wir speziell

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \ldots + \psi(a_p)}{p}\right) = a,$$

so ist also $a < \delta$ und für $n \geqq p$

$$\Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right) = \Psi\left(\frac{p\,\psi(a) + \psi(a_{p+1}) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right).$$

Da hier rechts alle Argumente von ψ in $0 \ldots \delta$ liegen, so ist dies wegen $\psi < \varphi$ in $(0, \delta)$ nach dem Zusatz zu Satz 1 weiterhin

$$\leqq \Phi\left(\frac{p\,\varphi(a) + \varphi(a_{p+1}) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right).$$

Da aber die Reihe $\overbrace{a + a + \ldots + a}^{p\text{-mal}} + a_{p+1} + \ldots + a_n + \ldots$ konvergiert und für $\varphi(x)$ der Satz A gelten soll, so steht hier das n-te Glied einer konvergenten Reihe. Also ist auch

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi\left(\frac{\psi(a_1) + \psi(a_2) + \ldots + \psi(a_n)}{n}\right)$$

konvergent.

Nun gilt Satz A für die Funktion x^t, $0 < t < 1$. Wir haben daher speziell den

Satz 4. *Satz* A *gilt für jede Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *die in einem Intervall* $(0, \delta)$ *mit* $\delta > 0$ *tiefer ist als eine der Funktionen* x^t *mit* $0 < t < 1$. *Insbesondere gilt also der Satz* A *für alle Funktionen der Form* $\gamma(x^t)$, *bei denen* $0 < t < 1$ *und* $\gamma(x) < x$ *in* $(0, \delta)$ *ist* (vgl. § 1, Beispiele 7 bis 9).

Der Satz ist weit davon entfernt, die von $\varphi(x)$ zu erfüllenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen anzugeben, unter denen Satz A gilt. In dieser Hinsicht seien folgende Bemerkungen eingefügt:

A_1. Für die Gültigkeit von Satz A ist es nicht notwendig, daß die zu $\varphi(x)$ gehörige normierte Funktion $\varphi_1(x)$ in einem Intervall der Form $0 < x < \delta$ von oben konvex ist. In der Tat kann man leicht eine stetige Funktion $\varphi_1(x)$ konstruieren, die monoton wächst, in keinem Intervall der Form $0 < x < \delta$ ständig von oben konvex ist und die stets zwischen $\sqrt{x}$ und $2\sqrt{x}$ liegt. Aus $\sqrt{x} < \varphi_1(x) < 2\sqrt{x}$ folgt dann $\frac{1}{4}x^2 < \Phi_1(x) < x^2$ und

$$\Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_1) + \ldots + \varphi_1(a_n)}{n}\right) < \left(\frac{\varphi(a_1) + \ldots + \varphi(a_n)}{n}\right)^2 < 4\left(\frac{\sqrt{a_1} + \ldots + \sqrt{a_n}}{n}\right)^2.$$

Wegen I (siehe Einleitung) gelten für eine solche Funktion also die Sätze A und B.

A_2. Damit für eine Funktion $\varphi(x)$ erster Art der Klasse $\mathfrak{M}$ der Satz A gelte, ist *notwendig*, daß $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\alpha}{n}\right)$ für ein $\alpha > 0$ konvergiert. Denn soll $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_1) + \ldots + \varphi_1(a_n)}{n}\right)$ konvergieren, so muß, da $\Phi_1(x)$ monoton wächst und $\varphi_1(a_\nu) \geqq 0$ ist, a fortiori $\sum_n \Phi_1\left(\frac{\varphi_1(a_p)}{n}\right)$ konvergieren. Hierbei ist p irgendein Index, für den $a_p > 0$.

A_3. Es gibt wachsende Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, die in $(0, \delta)$ *im engeren Sinne* von oben konvex sind (d. h. $\frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2} < \varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, mit Ausschluß der Gleichheit) und für die der Satz A *nicht* gilt. Ein Beispiel liefert jede Funktion $\varphi(x)$, für die in hinreichender Nähe von 0

$$\Phi(x) = \frac{x}{\log\frac{1}{x}}$$

ist. Denn für diese ist

$$\sum_n \Phi\left(\frac{\alpha}{n}\right) = \sum_n \frac{\alpha}{n \log\frac{n}{\alpha}}$$

bei jedem $\alpha > 0$ divergent.

Eine analoge Erweiterung gestattet nun auch der Satz B; doch ist für den Wert der Konstanten K natürlich nicht nur das Verhalten der Funktionen φ und ψ in der Nähe des Nullpunkts, sondern das auf der ganzen positiven x-Achse von Einfluß. Die Sätze lauten daher:

Satz 5. *Gilt Satz* B *für eine Funktion* $\varphi(x)$ *der Klasse* $\mathfrak{M}$, *so gilt er auch für jede Funktion* $\psi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in* $(0, +\infty)$ *tiefer als* $\varphi(x)$ *ist, wofern* $K(\psi) = K(\varphi)$ *genommen wird.*

Satz 6. *Der Satz* B *gilt für jede Funktion* $\varphi(x)$ *aus* $\mathfrak{M}$, *die in* $(0, +\infty)$ *tiefer ist als eine der Funktionen* x^t *mit* $0 < t < 1$, *wofern* $K(\varphi) = (1-t)^{-\frac{1}{t}}$ *genommen wird.*

Noch weniger als im Falle des Satzes A sind hiermit die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit des Satzes B erfaßt. In dieser Richtung gilt die folgende Bemerkung:

B_1. Es gibt Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$ und sogar solche, die in $(0, +\infty)$ von oben konvex sind, für die zwar Satz A, aber nicht Satz B gilt. — Ein Beispiel bietet die Hyperbel

$$\varphi(x) = \sqrt{(1+x)^2 - 1}, \qquad \Phi(x) = \sqrt{x^2+1} - 1,$$

die für $x \to +0$ sich wie $\sqrt{x}$, für $x \to +\infty$ wie x verhält. In der Tat gilt nach § 1, Beispiel 10 für diese Funktion der Satz A. Ist andererseits

$$a_1 = k, \quad a_2 = a_3 = \ldots = 0,$$

so ist $\sum a_n = k$ und $\sum_n \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) = \sum_n \Phi\left(\frac{\varphi(k)}{n}\right)$. Da nun

$\Phi(x) > x - 1$ ist für $x \geqq 1$, so ist dies

$$\geqq \sum_{n=1}^{[\varphi(k)]} \left(\frac{\varphi(k)}{n} - 1 \right) > \varphi(k) \, (\log [\varphi(k)] - 1).$$

Der Quotient der Summe der transformierten Reihe durch die Summe der ursprünglichen Reihe ist also

$$> \frac{\varphi(k) \, (\log [\varphi(k)] - 1)}{k}$$

und folglich wegen $\frac{\varphi(k)}{k} \to 1$, $\varphi(k) \to +\infty$ für $k \to +\infty$ beliebig großer Werte fähig: Satz B gilt nicht für diese Funktion.

Da bei Satz 5 $K(\psi) = K(\varphi)$ genommen werden durfte, so folgt daraus in Richtung auf Satz C sofort der

Satz 7. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 6 *ist*

$$K_*(\psi) \leqq K_*(\varphi).$$

Um im übrigen den Gültigkeitsbereich des Satzes in analoger Weise auszudehnen, wie den des Satzes B, werden wir den Kreis der zugelassenen Funktionen $\varphi(x)$ noch weiter verengern müssen: Wir betrachten nur solche Funktionen $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, die für jedes $t \gtrless 0$ mit der Funktion x^t im Sinne der Definition des § 1 vergleichbar sind, so daß also entweder $\varphi(x) < x^t$ oder $x^t < \varphi(x)$ in $(0, +\infty)$ ist. *Die Klasse dieser Funktionen bezeichnen wir mit* $\mathfrak{M}_0$.

Ist nun $\varphi(x)$ eine bestimmte Funktion dieser Klasse $\mathfrak{M}_0$, so sei t_1 die obere Grenze der t, für die $x^t < \varphi(x)$ und t_2 die untere Grenze der t, für die $\varphi(x) < x^t$ ist in $(0, +\infty)$. Man überzeugt sich sofort, daß $t_1 = t_2$ sein muß. Bezeichnen wir den gemeinschaftlichen Wert mit t_φ, so gilt der

Satz 8. *Ist* $\varphi(x)$ *eine Funktion der Klasse* $\mathfrak{M}_0$, *so gilt Satz* C (*und auch Satz* B) *für diese Funktion dann und nur dann, wenn* $t_\varphi < 1$ *ist, und es ist in diesem Falle*

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}},$$

ein Wert, unter dem für $t_\varphi = 0$ *die Zahl* e, *für* $t_\varphi = -\infty$ *die Zahl* 1 *verstanden werden soll.*

Beweis. Ist $t_\varphi < 1$ und $t_\varphi < t < 1$, $t \gtrless 0$, so ist $\varphi(x) < x^t$ in $(0, +\infty)$ und demgemäß $K_*(\varphi) \leqq (1-t)^{-\frac{1}{t}}$, also auch $K_*(\varphi) \leqq (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}$. Da man ebenso leicht beweist, daß $K_*(\varphi)$ auch $\geqq$ dem rechtsstehenden Werte sein muß, so ist

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}.$$

Weiter ist nun für $t_\varphi < t < 1$, $t \gtrless 0$, wegen $\varphi(x) \subset x^t$

$$\Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) \leqq \left(\frac{1^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

und also

$$\overline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)$$

$$\leqq \lim_{m\to+\infty} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{1^t+\left(\frac{1}{2}\right)^t+\ldots+\left(\frac{1}{n}\right)^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

d. h.

$$\leqq (1-t)^{-\frac{1}{t}}.$$

Analog ist für $t < t_\varphi$, $t \gtrless 0$, wegen $x^t \subset \varphi(x)$

$$\underline{\lim_{m\to+\infty}} \frac{1}{\log m} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(1)+\varphi\left(\frac{1}{2}\right)+\ldots+\varphi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right) \geqq (1-t)^{-\frac{1}{t}}.$$

Also existiert der in Satz C auftretende Grenzwert und ist

$$= (1-t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}} = K_*(\varphi).$$

Damit ist der eine Teil des Satzes 8 bewiesen.

Gilt andererseits der Satz C für eine Funktion $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}_0$, so gilt für sie auch der Satz B. Es sei $K(\varphi)$ eine dabei zulässige Konstante und t in $0 < t < 1$ so gewählt, daß $(1-t)^{-\frac{1}{t}} > K(\varphi)$ ist. Nach Satz 7 muß dann $\varphi(x) \subset x^t$ sein in $(0, +\infty)$. Wegen $t < 1$ ist daher auch $t_\varphi < 1$.

Dieser Satz läßt sich noch etwas verfeinern; doch soll darauf nicht näher eingegangen werden, sondern der Sachverhalt nur an zwei Beispielen erläutert werden:

1. Es sei $0 < t_0 < 1$ und

$$\varphi(x) = (1-e^{-x})^{t_0}$$

und $\Phi(x)$ dazu invers. Dann zeigt man ganz direkt (vgl. § 1, Beispiel 6e und f), daß einerseits für jedes $t > t_0$

$$\varphi(x) \subset x^t \text{ in } (0, +\infty)$$

und andererseits für jedes $t < t_0$, $t \gtrless 0$

$$x^t \subset \varphi(x) \text{ in } (0, \delta)$$

ist, wenn $\delta = \delta(t) > 0$ passend gewählt wird. Aus dem ersten folgt nach Satz 7

$$K_*(\varphi) \leqq (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}}. \tag{6}$$

Wir wählen nun t in $0 < t < t_0$ fest und m so groß, daß $\frac{1}{m} < \delta(t)$ ist, und setzen für ein $p > m$

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0, \quad a_{m+1} = \frac{1}{m+1}, \quad \ldots, \quad a_p = \frac{1}{p}, \quad a_{p+1} = \ldots = 0.$$

Wegen $t < t_0$ und $x^t < \varphi(x)$ in $(0, \delta)$ ist dann

$$\frac{1}{\log p} \sum_{n=1}^{p} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) \geqq \frac{1}{\log p} \sum_{n=1}^{p} \left(\frac{a_1^t+\ldots+a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}.$$

Der Ausdruck rechts strebt für $p \to +\infty$ gegen $(1-t)^{-\frac{1}{t}}$. Bei gegebenem $\varepsilon > 0$ läßt sich also p, d. h. also die Reihe $\sum a_n$ so wählen, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n}\right) \geqq \left((1-t)^{-\frac{1}{t}} - \varepsilon\right) \cdot \sum a_n$$

ist. Daher ist $K_*(\varphi) \geqq (1-t)^{-\frac{1}{t}} - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $0 < t < t_0$ gilt, so folgt hieraus und aus (6), daß für unsere Funktion $\varphi(x) = (1-e^{-x})^{t_0}$

$$K_*(\varphi) = (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}}$$

ist. Es gilt also unter den bisherigen Voraussetzungen über $\sum a_n$ der

Satz 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{1}{1-\left(\frac{(1-e^{-a_1})^{t_0}+\ldots+(1-e^{-a_n})^{t_0}}{n}\right)^{1:t_0}}$ *ist konvergent und* $\leqq (1-t_0)^{-\frac{1}{t_0}} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} a_n$. *Hierbei darf die rechtsstehende Konstante durch keine kleinere ersetzt werden.*

2. Wenn $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$ gewählt wird, so ist (vgl. § 1, Beispiel 6 h und i) einerseits

$$\varphi(x) < \frac{1}{x} \text{ in } (0, +\infty)$$

und andererseits für jedes $t > 1$

$$\frac{1}{x^t} < \varphi(x) \text{ in } \left(\frac{1}{t-1}, +\infty\right). \tag{7}$$

Aus dem ersten folgt nach Satz 7, daß

$$K_*(\varphi) \leqq 2 \tag{8}$$

ist. Wählen wir andererseits $t > 1$ und $\varepsilon > 0$ fest, aber sonst beliebig, so können wir m so groß machen, daß

$$\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{m}} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{1^t+2^t+\ldots+n^t} \right)^{\frac{1}{t}} > (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon$$

ausfällt. Wählen wir nun $c > 0$ so groß, daß $\frac{c}{m} > \frac{1}{t-1}$ ist, so ist nach (7) für die Reihe $\sum a_n$, deren Glieder

$$a_1 = c, \quad a_2 = \frac{c}{2}, \quad \ldots, \quad a_m = \frac{c}{m}, \quad a_{m+1} = \ldots = 0$$

sind,

$$\frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n} \right) \geqq \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \sum_{n=1}^{m} \Phi\left(\frac{\varphi(a_1)+\ldots+\varphi(a_n)}{n} \right)$$

$$\geqq \frac{1}{c+\frac{c}{2}+\ldots+\frac{c}{m}} \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{n}{\left(\frac{1}{c}\right)^t+\left(\frac{2}{c}\right)^t+\ldots+\left(\frac{n}{c}\right)^t} \right)^{\frac{1}{t}} > (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon.$$

Daher ist für $\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$

$$K_*(\varphi) \geqq (1+t)^{\frac{1}{t}} - \varepsilon.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $t > 1$ gilt, so folgt hieraus zusammen mit (8), daß $K_*(\varphi) = 2$ ist. Es gilt also unter den bisherigen Voraussetzungen über $\sum a_n$ der

Satz 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log\left(\frac{e^{1:a_1}+\ldots+e^{1:a_n}}{n} \right)}$ *ist konvergent und* $\leqq 2 \sum a_n$.

Hierbei darf die Konstante 2 durch keine kleinere ersetzt werden.

§ 3.

Die analoge Behandlung der Sätze D und E der Einleitung macht nun keine Schwierigkeiten: Ist $F(x)$ in (a, b) von oben konvex, so ist für beliebige x_ν aus (a, b) und beliebige positive λ_ν bekanntlich auch

$$\frac{\lambda_1 F(x_1)+\ldots+\lambda_n F(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} \leqq F\left(\frac{\lambda_1 x_1+\ldots+\lambda_n x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} \right).$$

Ist weiter $f(x)$ irgendeine über $x_1 \ldots x_2$ integrierbare Funktion, deren dortige Werte dem Definitionsintervall von F angehören, so ist auch

$$\frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} F(f(x))\,dx \leqq F\left(\frac{1}{x_2-x_1} \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \right).$$

Dem Satz 1 bzw. 1′ entsprechend gilt daher der

Satz 11. *Sind φ und ψ zwei Funktionen der Klasse $\mathfrak{M}$, so ist für beliebige x_ν aus (a, b) mit $0 \leqq a < b$ und beliebige positive λ_ν die Beziehung*

$$\Psi\left(\frac{\lambda_1 \psi(x_1) + \ldots + \lambda_n \psi(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right) \leqq \Phi\left(\frac{\lambda_1 \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \varphi(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\right)$$

sowie für eine beliebige nicht-negative integrierbare Funktion $f(x)$ die Beziehung

$$\Psi\left(\frac{1}{x}\int_0^x \psi f(x)\,dx\right) \leqq \Phi\left(\frac{1}{x}\int_0^x \varphi f(x)\,dx\right)$$

dann und nur dann erfüllt, wenn

$$\psi < \varphi \quad \text{in} \quad (a, b)$$

ist[15]*.*

Hiernach gelten, den Sätzen 5 bis 8 entsprechend und mit genau analog verlaufenden Beweisen die folgenden Sätze:

Satz 12. *Gilt Satz* D *oder* E *— von der Aussage über die untere Grenze der $K(\varphi)$ noch abgesehen — für eine Funktion $\varphi(x)$ der Klasse $\mathfrak{M}$, so gilt er auch für jede Funktion $\psi(x)$ aus $\mathfrak{M}$, die in $(0, +\infty)$ tiefer als $\varphi(x)$ ist, wofern $K(\psi) = K(\varphi)$ angenommen wird.*

Satz 13. *Die Sätze* D *und* E *gelten — von der Aussage über die untere Grenze der $K(\varphi)$ noch abgesehen — für jede Funktion $\varphi(x)$ aus $\mathfrak{M}$, die in $(0, +\infty)$ tiefer ist als eine der Funktionen x^t mit $0 < t < 1$, wofern $K(\varphi) = (1-t)^{-\frac{1}{t}}$ genommen wird.*

Satz 14. *Sind, unter den Voraussetzungen des Satzes* 12, *$K_*(\varphi)$ und $K_*(\psi)$ die unteren Grenzen der dort zulässigen Konstanten $K(\varphi)$ bzw. $K(\psi)$, so ist*

$$K_*(\psi) \leqq K_*(\varphi).$$

Satz 15. *Ist $\varphi(x)$ eine Funktion der Klasse $\mathfrak{M}_0$ und hat t_φ dieselbe Bedeutung wie in Satz* 8, *so gelten die (vollständigen) Sätze* D *und* E *dann und nur dann für diese Funktion $\varphi(x)$, wenn $t_\varphi < 1$ ist, und es ist in diesem Falle*

$$K_*(\varphi) = (1 - t_\varphi)^{-\frac{1}{t_\varphi}}.$$

Natürlich hat auch die Situation der Sätze 9 und 10 ihr genaues Analogon. So gelten z. B. die folgenden Sätze:

---

[15]) Der hier bei den Funktionen zweiter Art etwa auftretende Wert $\pm\infty$ macht offenbar keine Schwierigkeiten.

Satz 16. *Die Sätze* D *und* E *gelten auch für die Funktion*

$$\varphi(x) = (1 - e^{-x})^{t_0}, \qquad 0 < t_0 < 1,$$

und für sie ist

$$K_*(\varphi) = (1 - t_0)^{-\frac{1}{t_0}}.$$

Satz 17. *Die Sätze* D *und* E *gelten auch für die Funktion*

$$\varphi(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

und für sie ist

$$K_*(\varphi) = 2.$$

Diesen Sätzen ließen sich beliebig viele ähnliche an die Seite stellen.

Tübingen, den 5. Oktober 1928.

(Eingegangen am 7. Oktober 1928.)