C. Die Spektra der quantenmechanischen Matrizen (gemeint sind die Energiematrizen) liegen bekanntlich nicht im Endlichen, jedoch meistens — z. B. bei dem Wasserstoff — auf einer Halbgerade[32]). Diese Matrizen sind also nicht beschränkt, jedoch wegen II. gewiß halbbeschränkt. Mit Rücksicht auf I. sind also die wasserstoffähnlichen Energiematrizen statistisch sinnvoll.

D. Vor einiger Zeit habe ich das Differentialsystem der kleinen freien Schwingen eines (nicht notwendig stabilen) Oszillators unter gewissen Voraussetzungen (z. B. unter der Voraussetzung der Beschränktheit der nicht notwendig Hermiteschen Matrix) mittels Fourierscher Integrale auf Grund der „Spektralmatrix" integriert[33]). Herr Murray[34]) hat diese Formeln unter der Stabilitätsannahme, daß $-\lambda_\nu^{[n]} >$ Konst. > 0 ist, auf die Klasse derjenigen Hermiteschen Matrizen übertragen, bei welchen jede Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ konvergiert. Herr Murray bedient sich dabei des Auswahlverfahrens, und die Eindeutigkeit der Zerlegung des Fourierschen Wellenpakets in Elementarwellen (Hellingersche Differentiallösungen) blieb dabei unerledigt. Aus I. folgt nun, daß dies behoben werden kann[35]): nach der Stabilitätsannahme ist die Matrix halbbeschränkt, also statistisch sinnvoll, das Auswahlverfahren ist daher überflüssig, da sich bei dem Grenzübergang $\mathfrak{A}_{[n]} \rightarrow \mathfrak{A}$ nur *eine* Spektralmatrix ergibt. — Der Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung selbst ließe sich (unter der Voraussetzung, daß nur für alle t gleichmäßig beschränkte Linearformen zugelassen werden) nach der bekannten C. Jordanschen Schlußweise erbringen.

§ 5.

Die Konvexitätsregel.

Es sei wieder $\mathfrak{A}$, wie im folgenden stets, eine beschränkte Matrix. Wie wir wissen, ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein beschränkter konvexer Bereich, der das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und daher auch die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ des Spektrums enthält. Es gilt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$ offenbar dann und nur dann, wenn jeder extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten ist. Unter einem extremen Punkt ist dabei, wie erwähnt, ein Punkt einer abgeschlossenen konvexen Menge zu verstehen, der am Rande, aber nicht im Innern eines

[32]) Vgl. W. Heisenberg, loc. cit. [9]), S. 702—703.

[33]) Vgl. meine unter [45]) zitierten Noten sowie Ann. d. Phys. **82** (1927), S. 346—354.

[34]) F. H. Murray, Annals of Math. **29** (1928), S. 133—139.

[35]) Es ist jedoch, mit Rücksicht auf die Theorie von Herrn Carleman[21]), wesentlich, daß wir uns auf Zerlegungen beschränken, die sich mittels des speziellen Grenzüberganges $\mathfrak{A}_{[n]} \rightarrow \mathfrak{A}_{[n]}$ ergeben. Vgl. [27b]).

eventuellen geradlinigen Begrenzungsstückes liegt. Wir wollen beweisen, daß bei jedem normaloiden $\mathfrak{A}$ die extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten sind. Anders ausgedrückt: aus $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$.

Der Übersicht halber führen wir diese Konvexitätsregel auf einen scheinbar weniger besagenden Spezialfall zurück. — Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt es keinen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ außerhalb des Kreises $|\lambda| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, während dieser auf seinem Rande mindestens einen Punkt des abgeschlossenen Bildbereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthält. Ist $\mathfrak{A}$ derart, daß es nur einen einzigen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt, der auf der Kreislinie $|\lambda| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ liegt, so wollen wir diesen Punkt als den Hauptpunkt von $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Dieser ist offenbar ein extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Wir beweisen nun die Konvexitätsregel zunächst in der folgenden speziellen Fassung:

Hat die Matrix einen Hauptpunkt, und ist sie normaloid, so liegt der Hauptpunkt in dem Spektrum.

Beweis. Die obere Grenze des absoluten Betrages der Zahlen $\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})$, derer die Kopplungsform unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ fähig ist, ist nach Definition gleich $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ besteht aus diesen Zahlen und aus ihren Häufungspunkten. Es gilt also $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und es gibt eine Folge $\{\mathfrak{x}_n\}$ derart, daß $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n)|$ für $n \to \infty$ gegen $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ strebt; hierbei und auch später ist $|\mathfrak{x}| = 1$, $|\mathfrak{x}_n| = 1$. Da nun $\mathfrak{A}$ einen Hauptpunkt haben soll, so gibt es in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ einen und nur einen Punkt $\lambda = \lambda_0$ derart, daß $|\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ausfällt. Offenbar gilt also die Ungleichheit

$$(35) \qquad |\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq |\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$$

für alle $\mathfrak{x}$ und die Grenzgleichung

$$(36) \qquad \Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n) \to \lambda_0$$

für passende $\mathfrak{x}_n$, und es gibt nur eine Zahl λ_0 von dieser Beschaffenheit, so daß mit Rücksicht auf (14) auch

$$(37) \qquad \Phi(\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to \bar{\lambda}_0$$

gilt. Aus (4), (16), (35), (36) folgt ferner

$$(38) \qquad \liminf_{n=\infty} \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \geqq (\mathbf{m}(\mathfrak{A}))^2 = |\lambda_0|^2.$$

Andererseits ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ nach Definition die obere Grenze des Betrages[36]) von $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$, und $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ ist nach (10) immer $= (\mathbf{r}(\mathfrak{A}))^2$, mithin

$$(39) \qquad \limsup_{n=\infty} |\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n)| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}).$$

---

[36]) Übrigens ist $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ wegen (16) stets $\geqq 0$.

Da nun $\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung normaloid ist, d. h. $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ gilt, so können wir mit Rücksicht auf (39) an Stelle von (38) einfach

(40) $$\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to |\lambda_0|^2$$

schreiben. Endlich ist

(41) $$\Phi(\mathfrak{E}; \mathfrak{x}_n) \to 1$$

wegen $|\mathfrak{x}_n| = 1$ trivial. Aus (41), (36), (37), (38) folgt nun

$$|\lambda_0|^2 \Phi(\mathfrak{E}; \mathfrak{x}_n) - \bar{\lambda}_0 \Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n) - \lambda_0 \Phi(\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) + \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to 0,$$

oder wegen $\Phi(\alpha\mathfrak{M} + \beta\mathfrak{N}; \mathfrak{x}) = \alpha\Phi(\mathfrak{M}; \mathfrak{x}) + \beta\Phi(\mathfrak{N}; \mathfrak{x})$

$$\Phi(|\lambda_0|^2 \mathfrak{E} - \bar{\lambda}_0 \mathfrak{A} - \lambda_0 \mathfrak{A}^* + \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to 0,$$

also mit Rücksicht $(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^* = \bar{\lambda}_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A}^*$

$$\Phi((\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*; \mathfrak{x}_n) \to 0; \quad |\mathfrak{x}_n| = 1,$$

so daß die unter (20) stehende erste Zahl[37]) in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{n}(\mathfrak{C})$ verschwindet und daher $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ nicht existiert. Damit ist die Konvexitätsregel für den Spezialfall eines Hauptpunktes bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ irgendeine normaloide Matrix. Ersetzt man $\mathfrak{A}$ durch $\eta\mathfrak{A}$, so bleibt der normaloide Charakter $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erhalten, da

$$\mathbf{m}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\, \mathbf{m}(\mathfrak{A}), \quad \mathbf{r}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\, \mathbf{r}(\mathfrak{A})$$

gilt, und zwar entsteht $\mathbf{W}(\eta\mathfrak{A})$ aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Drehung um den Punkt $\lambda = 0$, wenn $|\eta| = 1$ ist. — Von der translatorischen Transformation läßt sich ebenso behaupten, daß $\mathfrak{A} + l\mathfrak{E}$ normaloid ist, wenn $\mathfrak{A}$ es ist und $|l|$ hinreichend groß gewählt wird; $\mathbf{W}(\mathfrak{A} + l\mathfrak{E})$ entsteht aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Verschiebung um den Betrag $|l|$ in der durch $\arg l$ festgelegten Richtung. Die beiden Transformationen

$$\mathfrak{A} \rightrightarrows \eta\mathfrak{A}, \quad |\eta| = 1; \qquad \mathfrak{A} \rightrightarrows \mathfrak{A} + l\mathfrak{E}, \quad |l| > \text{konst.},$$

welchen gegenüber die Eigenschaft (8) invariant ist, mögen als die zulässigen Bewegungen von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden. Bei diesen bleiben die Punktmengen $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ starr verbunden. Offenbar kann man nun zu jedem extremen Punkte P des (stets konvexen) Bereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ eine zulässige Bewegung angeben, welche den Bereich in eine Lage überführt, in welcher dieser einen Hauptpunkt hat, der in die neue Lage von P hineinfällt (die Drehungen sind für die vorliegenden Zwecke entbehrlich). Würde es also eine normaloide Matrix $\mathfrak{A}$ geben, bei welcher nicht alle extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ in dem Spektrum liegen, so würde es auch eine nor-

[37]) Und übrigens, wie aus dem Beweise hervorgeht, auch die zweite.