unten] geradezu falsch: die Matrix (18) liefert ein Gegenbeispiel. Aus (32) oder aus dem Anhang wird nämlich hervorgehen, daß alle Abschnittseigenwerte von (18) gleich Null sind, während das Spektrum von (18) auch weitere Punkte, ja ein zweidimensionales Kontinuum enthält (dies folgt übrigens, wie wir wissen, bereits daraus, daß für (18) der pathologische Fall vorliegt). — Ich gehe also über den erwähnten Toeplitzschen Satz über endliche Matrizen wesentlich hinaus, wenn ich jetzt auf eine direkte Weise zeige, daß der Satz — trotz der Unbrauchbarkeit des Abschnittsprinzips — auch im Bereiche der beschränkten Matrizen richtig ist: das Spektrum liegt stets in dem Wertevorrat.

Setzt man in (16) den Vektor $\mathfrak{y}$ gleich $\bar{\mathfrak{x}}$, schreibt man ferner $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$, so folgt wegen (4)

$$|\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*;\mathfrak{x}), \quad |\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B};\mathfrak{x}) \text{ für } |\mathfrak{x}|=1,$$

also auch

$$(31) \qquad (\mathsf{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathsf{n}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*), \quad (\mathsf{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathsf{n}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}),$$

da $\mathsf{n}(\mathfrak{C})$ nach Definition die untere Grenze von $|\Phi(\mathfrak{C};\mathfrak{x})|$ auf der komplexen Hilbertschen Kugel $|\mathfrak{x}|=1$ bezeichnet. Es sei nun $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix, und λ eine Zahl aus dem Spektrum $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$. Dann ist, wie wir wissen, mindestens eine der beiden Zahlen (20) gleich Null. Wegen (31) wobei $\mathfrak{B}=\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ zu setzen ist, folgt daraus $\mathsf{n}(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})=0$. Dies besagt, daß die untere Grenze des Betrages von

$$\Phi(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda\Phi(\mathfrak{E};\mathfrak{x}) - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) \qquad (|\mathfrak{x}|=1)$$

unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$ verschwindet, so daß also $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ unter dieser Nebenbedingung der Zahl λ beliebig nahe kommen kann und daher λ in dem abgeschlossenen Wertbereiche $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ gewiß enthalten ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ liegt. — Daraus folgt, daß der kleinste konvexe Bereich $\mathsf{T}(\mathfrak{A})$, welcher alle Punkte des Spektrums $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ enthält, ebenfalls in $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ liegt. Denn $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ ist konvex (§ 1). Bei der Matrix $\mathfrak{A}=\|a_{pq}\|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet, hat $\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ auch solche Punkte, die nicht in $\mathsf{T}(\mathfrak{A})$ liegen[7]). Wir werden aber in § 5 beweisen, daß bei den normaloiden Matrizen $\mathsf{T}(\mathfrak{A})=\mathsf{W}(\mathfrak{A})$ ist.

§ 3.

Die Funktionentheorie der Resolventenmatrix.

Ist die Zahl λ_0 außerhalb des Spektrums $\mathsf{S}(\mathfrak{A})$ gelegen, so gibt es nach § 2 ein von p und q unabhängiges $\varepsilon>0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ jedes Element $R_{pq}(\lambda)$ der Resolventenmatrix regulär ist. Andererseits ist bei den endlichen Matrizen jede Wurzel der charakteristischen Gleichung ein Pol für mindestens ein Element der Resolventenmatrix. Dadurch wird die folgende Vermutung nahegelegt: gehört λ_0 dem Spektrum einer beschränkten Matrix an, so gibt es kein $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ alle $R_{pq}(\lambda)$ regulär sind. Doch ist dieser Satz nicht allgemein richtig (hinreichende Kriterien findet man in § 7). Die beschränkte Matrix (18) liefert nämlich ein einfaches Gegenbeispiel. Um dies zu zeigen, beachte man zunächst, daß die Gleichungen (28) für die Matrix (18) in

$$\lambda x_1 = c_1, \quad \lambda x_2 - x_1 = c_2, \quad \lambda x_3 - x_2 = c_3, \quad \ldots$$

übergehen, woraus

$$x_p = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{\lambda^{p-q+1}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

also nach Vergleich mit (29)

$$(32) \qquad R_{pq}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{p-q+1}} \text{ für } q \leqq p; \qquad R_{pq}(\lambda) \equiv 0 \text{ für } q > p$$

ersichtlich ist, da die c_p nur an die Bedingung $\sum |c_p|^2 < +\infty$ gebunden sind. Nun ist dafür, daß eine Matrix $\|b_{pq}\|$ beschränkt ist, bekanntlich notwendig, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega$$

gilt, und hinreichend, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega$$

ausfällt, wobei Ω eine von p und q unabhängige, sonst beliebige Schranke bezeichnet[26]). Folglich ist die durch (32) für alle $\lambda \neq 0$ erklärte Matrix $\|R_{pq}(\lambda)\|$ dann und nur dann beschränkt, wenn $|\lambda| > 1$ gewählt wird. Mit Rücksicht auf (25) besagt dies, daß das Spektrum der Matrix (18) identisch ist mit der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$. Und trotzdem ist nach (32) jedes $R_{pq}(\lambda)$ für $|\lambda| > 0$ durchweg regulär. Analoge Verhältnisse liegen vor bei allen (zu „Summengleichungen" gehörigen) Matrizen, bei welchen die Resolvente der transponierten Matrix, also auch die Resolvente selbst, ebenfalls rekursiv berechnet werden kann. Vgl. auch den Anhang.

Da demnach für die Neumann-Hilbschen Reihen eine Art Überkonvergenz stattfinden kann, so muß man den Begriff des Konvergenzradius ϱ einer Matrizenpotenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathfrak{A}_n$, wobei die $\mathfrak{A}_n$ beschränkte Matrizen sein mögen, wie folgt festlegen: ϱ ist die obere Grenze der Radien

---

26) I. Schur, Journ. f. Math. **140** (1910), S. 6–7 ff. — Wählt man hingegen den Exponenten zwischen 1 und 2, so erhält man eine Bedingung, die für die Beschränktheit weder notwendig noch hinreichend ist.

$\varrho'(\geqq 0)$ derjenigen Kreise $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho'$, in welchen die Reihe nicht nur konvergiert, sondern außerdem eine *beschränkte* Matrix darstellt. *Dann und nur dann* kann man nämlich den Komplex der Cauchy-Weierstraßschen Potenzreihensätze auf die Neumann-Hilbschen Reihen sinngemäß übertragen: am Rande des Konvergenzkreises liegt stets mindestens eine matrizentheoretisch singuläre Stelle (d. h. ein Punkt des Spektrums), über welche hindurch keine unmittelbare analytische Fortsetzung der Matrix möglich ist; innerhalb des Konvergenzkreises darf man die Potenzreihe umordnen, usw. — Die am Rande des Konvergenzkreises gelegene Matrizensingularität braucht nicht bereits durch die *einzelnen* $R_{pq}(\lambda)$ in Evidenz zu treten. Sie kann ferner, wie die Jacobische Matrix des Gaußschen assoziierten Kettenbruches für die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome belegt, auch den Charakter einer Verzweigungsstelle haben (vgl. übrigens die Habilitationsschrift von Herrn Hellinger), trotzdem eigentlich nur eine einzige Bestimmung in Betracht kommt, da ja $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ höchstens eine Reziproke hat. Eine bei jedem $\mathfrak{A}$ gültige matrizentheoretische Deutung der übrigen Zweige ist mir nicht gelungen, und so will ich auf diese Matrizenfunktionentheorie nicht näher eingehen. — Es können übrigens für eine rein matrizentheoretische Deutung der Verhältnisse auch dann gewisse Schwierigkeiten vorliegen, wenn es keine Verzweigungsstelle gibt. So braucht z. B. das Gebiet der matrizentheoretisch regulären (d. h. außerhalb des Spektrums gelegenen) Stellen nicht zusammenhängend zu sein [trotzdem es sich um eine und dieselbe Matrix $\mathfrak{A}$ handelt]. Es kann ferner, wie wir wissen, jede beschränkte abgeschlossene Punktmenge das Spektrum einer beschränkten Matrix bilden. — Diese Fragen, deren Behandlung (bei normalen Matrizen) u. a. eine restlose Übertragung der Stieltjes-Helly-Grommerschen Integrationstheorie auf zweifache Integrale erfordern würde, scheinen im Falle normaler Matrizen von zweidimensionalem Spektrum mit gewissen schwierigen Fortsetzungsproblemen der Theorie des logarithmischen Potentials zusammenzuhängen, und sie erfordern eine zu den vorliegenden Zwecken angepaßte explizite Ausgestaltung der groß angelegten Untersuchungen von Herrn Radon[10]).

In § 1 ist die Existenz von beschränkten normaloiden Matrizen behauptet worden, die nicht normal sind. Es soll jetzt der Beweis hierfür nachgeholt werden. — Die Matrix (18) ist nicht normal, da für sie mit Rücksicht auf (18)′ der pathologische Fall 3. des § 1 vorliegt, was bei normalen Matrizen, wie erwähnt, von vornherein ausgeschlossen ist. Um zu zeigen, daß die Matrix (18) dennoch normaloid ist, beachte man zunächst, daß ihr Spektrum aus der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$ besteht, also Zahlen von dem Betrage Eins enthält. Da das Spektrum stets in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, so enthält auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ Zahlen, die absolut $\geqq 1$ sind. Ferner ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ nach Definition der Maximalbetrag der in der abgeschlossenen

Zahlenmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenen Zahlen. Folglich gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq 1$. Da andererseits die zu (18) gehörige Bilinearform

$$x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + \dots \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 = 1, \quad \sum_{q=1}^{\infty} |y_p|^2 = 1$$

nach der Schwarzschen Ungleichung absolut $\leqq 1$ ist, d. h. $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 1$ ausfällt, so gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erst recht. In Verbindung mit (6) folgt daraus (8), w. z. b. w. Vgl. übrigens den Anhang.

Was die (matrizentheoretischen) Konvergenzverhältnisse der Neumann-Hilbschen Reihen bei einer beliebigen beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ anlangt, so läßt sich folgendes behaupten. Bezeichnet $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ den matrizentheoretischen Konvergenzradius von (26), d. h. die obere Grenze derjenigen Zahlen ϱ', welche die Eigenschaft haben, daß die Reihe (26) für $|\lambda^{-1}| \leqq \varrho'$ konvergiert und eine beschränkte Matrix darstellt, so gilt $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, also wegen (6)

$$(33) \qquad \mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}),$$

während aus § 2 nur $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt. Die schärfere Ungleichung $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist aus den folgenden drei Bemerkungen unmittelbar ersichtlich:

I.) Die Reihe (26) konvergiert matrizentheoretisch so lange, bis λ von dem Nullpunkt ferner liegt als ein beliebiger Punkt des Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, so daß also $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ der Radius des kleinsten, das Spektrum enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises ist.

II.) Die Zahl $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist nach Definition der Radius des kleinsten, den Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises.

III.) Nach § 2 liegt $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ gewiß in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. —

Ist $\mathfrak{A}$ normaloid, so kann noch mehr als (33) behauptet werden. Denn bei normaloiden Matrizen ist, nach der am Schluß von § 2 erwähnten, in § 5 zu beweisenden Konvexitätsregel, die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Mit Rücksicht auf I.) und II.) ergibt dies offenbar, daß für jede normaloide Matrix $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ gilt. Anders ausgedrückt:

$$(33)' \qquad \text{aus} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A}) \quad \text{folgt} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{p}(\mathfrak{A}).$$

Bei nicht normaloiden $\mathfrak{A}$ kann in (33) beidemal das Zeichen $<$ gelten, so z. B. bei der mehrfach erwähnten Matrix $\mathfrak{A} = \| a_{pq} \|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet; hier ist nämlich

$$(33)'' \qquad \mathbf{p}(\mathfrak{A}) = 0, \qquad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \frac{|a_{21}|}{2}, \qquad \mathbf{r}(\mathfrak{A}) = |a_{21}|.$$

Aus diesem Beispiel geht sogar hervor, daß $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ nicht limitiert werden kann [wohl aber $\mathbf{r}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, da, wie erwähnt, $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 2\,\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist].