Werk

Titel: Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen

Autor: Wintner, A.

Jahr: 1929

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0030|log29

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Theorie der beschränkten Bilinearformen.

Von

Aurel Wintner in Leipzig.

Inhalt.

Seite

Einleitung 228
§ 1. Grundbegriffe 232
§ 2. Das Spektrum 237
§ 3. Die Funktionentheorie der Resolventenmatrix . . . 245
§ 4. Die Abschnittsspektra 249
§ 5. Die Konvexitätsregel 252
§ 6. Die unitären Matrizen 255
§ 7. Das allgemeine Abbildungsprinzip 261
§ 8. Spektraltheorie der unitären Matrizen 268
Anhang. Anwendung des Spektrumbegriffes auf die Matrizentheorie der regulären Potenzreihen 277
Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie 281

Einleitung.

Im nachstehenden sollen einige Sätze, die im Falle von endlichen oder Laurentschen bzw. Hermiteschen unendlichen beschränkten Matrizen bekannt sind, auf beschränkte Matrizen in möglichst großer Allgemeinheit sinngemäß übertragen werden. In den genannten Spezialfällen stützen sich die üblichen Beweise auf algebraische oder funktionentheoretische Hilfsmittel, welche in dem allgemeinen Falle nicht zur Verfügung stehen (z. T. heute nicht, z. T. überhaupt nicht). Auch das Abschnittsprinzip kann dabei, wie Beispiele zeigen (§ 2, § 4), versagen. Merkwürdigerweise sind die allgemein gültigen Beweise zum Teil übersichtlicher als diejenigen, welche auf die Eigenschaften der erwähnten spezielleren Matrizenklassen zugeschnitten sind.

Es scheint bisher nicht beachtet worden zu sein[1]), daß — in Ver-

[1]) Vgl. z. B. F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues, Paris 1913 (Collection Borel), S. 114ff.

allgemeinerung des Fundamentalsatzes der Algebra — jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat (§ 2). Allerdings wird dieser Satz durch eigentümliche, zum Teil miteinander kombinierende Umstände verhüllt.

Einerseits kann nämlich die Theorie des Spektrums ihren Parallelismus mit derjenigen der Eigenlösungen einbüßen, wenn beliebige (nicht Hermitesche, oder wenigstens nicht normale) beschränkte Matrizen zugelassen werden. Bei endlichen Gleichungssystemen gibt es stets eine Eigenlösung, wenn der Eigenwertparameter dem Spektrum angehört, d. h. eine (durch den Fundamentalsatz gesicherte) Nullstelle des Säkularpolynoms ist[2]), unabhängig davon, ob die Martix Hermitesch ist oder nicht. Entsprechendes läßt sich, wie Herr Hellinger mittels seiner Theorie der Differentiallösungen gezeigt hat, z. B. über alle Hermiteschen Streckenspektra behaupten. Nun gibt es aber nach den Herren E. Schmidt und Toeplitz[3]) (freilich nicht Hermitesche) beschränkte Matrizen, die bei keinem Werte des Eigenwertparameters eine Eigenlösung haben, wie allgemein man auch den Begriff der Eigenlösung fassen mag. Man könnte also erwarten, daß diese Matrizen kein Spektrum haben. Tatsächlich handelt es sich aber nur darum, daß der erwähnte Parallelismus nicht so weit reicht, daß er sich auch auf diese Matrizen beziehen könnte. Wir werden ja sehen, daß jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat. Das Spektrum ist dabei als die Gesamtheit derjenigen Parameterwerte erklärt, für welche es keine eindeutige und beschränkte Reziproke (Resolvente) gibt, es ist also auf dieselbe Weise festgelegt wie in der klassischen Theorie der Integralgleichungen oder in der Hilbert-Hellingerschen Theorie der beschränkten Hermiteschen Formen. [Die vorher gesperrt gesetzte Einschränkung, einer der methodischen Grundgedanken der ganzen Hilbertschen Lehre über unendlich viele Variablen, liegt in der Natur der Sache, die Preisgabe dieser Einschränkung läuft auf die Preisgabe der Hilbert-Hellingerschen, auch in der Theorie der

---

[2]) Den Eigenwertparameter wollen wir stets so wählen, wie dies in der Algebra zu geschehen pflegt. Es handelt sich also um $\lambda f(s) - \int K(s,t) f(t)\, dt = 0$ und nicht um $f(s) - \lambda \int K(s,t) f(t)\, dt = 0$. Sonst würde ja nicht einmal bei den endlichen Gleichungssystemen der Satz gelten, daß ein Spektrum stets vorhanden ist. Bei der nicht-algebraischen Normierung braucht nämlich, wenn n die Anzahl der Unbekannten ist, das Säkularpolynom nicht vom Grade n zu sein, und die Säkulargleichung einer „Volterraschen" Matrix $\|a_{ik}\|$, wobei $a_{ik} = 0$ ist für $i \geqq k$, hat keine Wurzel. Die Säkulargleichung wäre dann nämlich $1 = 0 \cdot \lambda$. — Für uns wird hingegen das Spektrum stets im Endlichen liegen, und in den Volterraschen Fällen nicht den unendlich fernen Punkt, sondern den Nullpunkt enthalten. — Wir werden übrigens sehen, daß es beschränkte „Volterrasche" Matrizen gibt, deren Spektrum — im Gegensatz zu der klassischen Theorie der Integralgleichungen — außer dem Nullpunkt noch weitere Punkte enthält; vgl. (18) oder den Anhang.

[3]) Enc. d. math. Wiss. 2C (1928), S. 1575.

Laurentmatrizen[4]) üblichen Terminologie hinaus; man denke nur an die Hilbertsche Integraldarstellung einer Hermiteschen Resolvente, und zwar bei einer beschränkten Matrix, die kein Punktspektrum hat[5]). Die Natürlichkeit unserer Festsetzung ist aus dem Anhang (S. 277ff.) besonders ersichtlich.] — Aus dem Vorstehenden geht hervor, daß das Ausbleiben des eingangs erwähnten Parallelismus einfach durch die Ungültigkeit des Alternativsatzes (bezüglich homogene und inhomogene Gleichungen) bedingt ist, ja sogar nur darauf hinausgeht, daß es beschränkte (und übrigens auch vollstetige) Matrizen gibt, bei welchen der Alternativsatz in keinem Punkte des stets vorhandenen Spektrums gilt. — Vgl. auch die Fußnote [39]).

Andererseits kann die Existenz gewisser Punkte des Spektrums durch den Umstand verschleiert sein, daß sie nicht bereits funktionentheoretisch in Evidenz tritt: Bei beliebigen endlichen Matrizen oder bei den der Fredholmschen Theorie unmittelbar zugänglichen Integralgleichungen, ferner bei den beschränkten Hermiteschen Matrizen kann das Spektrum dahin charakterisiert werden, daß es aus den Singularitäten der Resolvente besteht (welche bei Fredholm (für $\lambda \neq 0$) Pole, bei den beschränkten Hermiteschen Matrizen aber eventuell von komplizierterer Beschaffenheit sind); bei beliebigen beschränkten Matrizen ist auch dieser Satz ungültig (§ 3). Eine Resolventensingularität ist nämlich in diesem Rahmen nur ein hinreichendes, aber kein notwendiges Kennzeichen für die in dem Spektrum gelegenen Punkte. Bei den C. Neumannschen Reihen kann also eine Art Überkonvergenz stattfinden. Allen Punkten des Spektrums kann daher nur eine (in dem klassischen Fredholm-Schmidtschen Rahmen noch überflüssige) spezifische Matrizenfunktionentheorie[6]) gerecht werden (§ 3). Durch diese Überlegungen wird man zu einer Verschärfung der Schur-Toeplitzschen Theorie der regulären Potenzreihen geführt (Anhang).

In § 5 wird eine Konvexitätsregel bewiesen, die sich auf die gegenseitige Lage des Spektrums und des Wertevorrates bezieht. Im Falle der

[4]) O. Toeplitz. Math. Annalen **70** (1910), S. 351—376.

[5]) Die Integrale können etwa in dem Cauchyschen Sinne der Hauptwerte auch in einem Punkte des Spektrums konvergieren und dabei eine vordere und zugleich hintere Reziproke liefern, die aber nicht beschränkt sein kann, so daß sie nicht für alle quadratisch konvergenten rechten Seiten in Betracht kommt. — So haben unlängst Frl. R. C. Young und Herr Pollard im Auschluß an die Herren Plessner, Titchmarch und Besicovitch den höchst merkwürdigen Satz bewiesen, daß die unter (48) [S. 262 weiter unten] stehenden Resolventenintegrale, als Cauchysche Hauptwerte aufgefaßt, bis auf eine Nullmenge der reellen λ-Achse konvergent sind; s. Proc. Lond. Math. Soc. (2) **28** (1928), S. 293ff. — Vgl. auch die unter [45]) zitierte Arbeit von G. H. Hardy, ferner eine Untersuchung von G. Herglotz über die Kroneckersche Grenzformel in reellen quadratischen Körpern, Sächs. Sitzungsber. 1923, insb. S. 31ff.

[6]) Vgl. z. B. A. Wintner, Math. Annalen **95** (1926), S. 553ff.; Math. Zeitschr. **28** (1928), S. 451ff., oder die general analysis von E. H. Moore.

endlichen und der Laurentschen Matrizen ist der Satz von Herrn Toeplitz[7]) gefunden worden. Da für den allgemeinen Fall die Toeplitzsche Schlußweise samt dem Abschnittsprinzip bei dem heutigen Stand der Dinge ganz wesentlich zu versagen scheint, so mußte auch dieser Satz auf eine „primitive" Weise behandelt werden. Der Weg führt durch den Begriff der normaloiden Matrix hindurch. Die Klasse der normaloiden Matrizen, auf welche sich die Konvexitätsregel bezieht, umfaßt z. B. die von Toeplitz behandelten Fälle, also die Laurentmatrizen und diejenigen endlichen Matrizen, die normal sind (das sind im Bereiche der endlichen Matrizen diejenigen Matrizen, bei welchen das Spektrum und seine Zerlegungen das *vollständige* Invariantensystem der unitären Gruppe bilden). Es gibt jedoch normale, d. h. mit ihrer „begleitenden" Matrix $\overline{\mathfrak{A}}' = \|\bar{a}_{qp}\|$ vertauschbare beschränkte Matrizen $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, deren kein Abschnitt normal ist. Es gibt ferner (§ 4) beschränkte normaloide Matrizen, die nicht normal sind (ob auch die Umkehrung davon gilt, bleibt dahingestellt, ist aber unwahrscheinlich). Da andererseits die beiden von Toeplitz behandelten Fälle nicht nur normal, sondern auch normaloid sind, so ist in dem normaloiden und nicht in dem normalen Charakter die wahre Wurzel der Konvexitätsregel zu erblicken.

Die Entwicklungen des § 7 setzen diese Betrachtungen nicht voraus. — Bekanntlich hat Herr F. Riesz[8]) die Hilbertsche Theorie der beschränkten Hermiteschen (oder eigentlich reell-symmetrischen) Matrizen, oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation mittels eines funktionalen Korrespondenzprinzips von neuem hergeleitet. Es handelt sich um das formale Grundprinzip der Heisenbergschen Mechanik[9]). Für die Zwecke von Herrn Riesz war es wesentlich, das Korrespondenzprinzip nur für reellwertige Funktionen in Anspruch zu nehmen. Denn läßt man auch komplexwertige Funktionen zu, so werden Hermitesche Matrizen auf nicht Hermitesche abgebildet, während Herr Riesz den Raum der Hermiteschen Matrizen nicht verlassen durfte. — Dies läßt sich nun beheben, und zwar auf die folgende Weise. Wir stellen uns gewissermaßen auf den umgekehrten Standpunkt: die Hilbertsche Vollständigkeitsrelation der Hermitschen Matrizen soll nicht mittels des Korrespondenzprinzips von neuem begründet, sondern als natürliches Hilfsmittel korrespondenzmäßiger Betrachtungen an die Spitze der Untersuchung gestellt werden. Dann hat man es von vornherein mit *expliziten* Formeln zu tun und *so* steht dann freilich nichts im Wege, diese auf eine definitorische Weise auch bei nicht reellen Abbildungen in Anspruch zu nehmen und dadurch den Bereich der

[7]) O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **2** (1918), S. 187—197.

[8]) Loc. cit. [1]), S. 128ff.; vgl. Ann. de l'Éc. Norm. Sup. **31** (1914), S. 9—14.

[9]) W. Heisenberg, Math. Annalen **95** (1926), S. 694.

Hermiteschen Matrizen zu verlassen. Es handelt sich also um einen fast selbstverständlichen Ansatz, der bisher des näheren nicht verfolgt worden ist, trotzdem er eine ziemlich naheliegende Verallgemeinerung der Toeplitzschen Theorie der Fourierreihen darstellt. In den §§ 6 und 8 wird durch trigonometrische Spezialisierung des Ansatzes und unter Heranziehung des Carathéodory-Toeplitzschen Gedankenkreises gezeigt, daß sich so eine der Hermiteschen (Hilbert-Hellinger) völlig parallellaufende Invarianten- und Transformationstheorie der unitären Matrizen, d. h. der Drehungen des (komplexen) Hilbertschen Raumes ergibt. — Ob es beschränkte Matrizen gibt, die überhaupt eine Art Spektraltheorie zulassen (d. h. bei welchen das Spektrum und seine Zerlegungen das vollständige unitäre Invariantensystem enthalten), und die aus den Hermiteschen Matrizen nicht mittels einer korrespondenzmäßigen (nötigenfalls unstetigen) Abbildung gewonnen werden können, bleibt dahingestellt. Die Frage hängt mit dem Momentenproblem

$$\int_0^1 (F(\mu))^n \, d\varrho(\mu) = c_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots; \quad d\varrho(\mu) \geqq 0$$

zusammen, wobei ϱ gesucht wird, während F nicht *vorgeschrieben*[10]) ist, sondern eine *verfügbare* beschränkte und entsprechenden Integrabilitätsvoraussetzungen genügende, nicht reellwertige Funktion bezeichnet. — In dem Falle $F(\mu) = e^{i\mu}$ des trigonometrischen Momentenproblems ergibt sich in § 8 aus der Hilbert-Hellingerschen Theorie die Spektraltheorie der unitären Matrizen. Das gewöhnliche Momentenproblem, $F(\mu) = \mu$, ist von Herrn F. Riesz[11]) zur Herleitung der Hilbertschen „Partialbruchzerlegung" der Resolvente auf dieselbe Weise benutzt worden.

§ 1.

Grundbegriffe.

Es sei $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine beschränkte Matrix[12]), wobei die Zeiger von 1 bis $+\infty$ laufen, und es bezeichne $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ einen Vektor mit unendlich vielen, nicht notwendig reellen Komponenten; sein Betrag ist $|\mathfrak{x}| = \sqrt{\sum |x_p|^2}$. Wenn nichts anderes vermerkt ist, möge $\mathfrak{x}$ (und ebenso $\mathfrak{y}$) stets einen normierten Vektor bedeuten, $|\mathfrak{x}| = 1$. Durch $\mathfrak{A}\mathfrak{x}$ bezeichnen wir den Vektor, dessen p-te Komponente gleich $\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$ ist. Diese Reihe

[10]) Vgl. F. Riesz, Ann. de l'Éc. Norm. Sup. 28 (1911), S. 54ff.; vgl. jedoch J. Radon, Wiener Sitzber. 1913 und 1919.

[11]) F. Riesz, Gött. Nachr. 1910, S. 190—195.

[12]) Die Beweise der Sätze dieses Paragraphen findet man bei E. Hellinger und O. Toeplitz, Math. Annalen 69 (1910), S. 289—330.

konvergiert, da $\mathfrak{A}$ beschränkt und $|\mathfrak{x}|$ endlich ist. Aus demselben Grunde ist $|\mathfrak{A}\mathfrak{x}|$ endlich, und die Bilinearform

$$(1) \qquad \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_p y_q = \mathfrak{x}\cdot\mathfrak{A}\mathfrak{y}$$

konvergiert im Sinne der Konvergenz der Doppelreihen (jedoch nicht notwendig absolut). Insbesondere gilt also

$$(2) \qquad \lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q = \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) \qquad (|\mathfrak{x}|=1,\ |\mathfrak{y}|=1).$$

Es bezeichne $\mathbf{r}(\mathfrak{A})$ die obere Grenze des absoluten Betrages der Funktion (1) unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$, $|\mathfrak{y}|=1$. Die Beschränktheit von $\mathfrak{A}$ besagt, daß $\mathbf{r}(\mathfrak{A})$ endlich ist. Es bezeiche $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ die abgeschlossene Hülle derjenigen Werte, derer (1) unter dieser Nebenbedingung fähig ist. Man überzeugt sich leicht, daß $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit dem Kreisbereiche $|\Psi| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ der komplexen Ψ-Ebene. Ist $\mathfrak{B}$ eine andere beschränkte Matrix, so gilt für das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Ungleichung[12])

$$(3) \qquad \mathbf{r}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})\,\mathbf{r}(\mathfrak{B}).$$

Die Form, die aus (1) durch die Kopplung $\mathfrak{y}=\bar{\mathfrak{x}}$ entsteht, wobei $\bar{\mathfrak{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots)$ der zu $\mathfrak{x}$ konjugierte Vektor ist, möge „Kopplungsform von $\mathfrak{A}$" genannt und durch $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ bezeichnet werden. Die Kopplungsform

$$(4) \qquad \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\bar{\mathfrak{x}}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_p\bar{x}_q$$

ist bei passendem $\mathfrak{A}$ nicht nur reeller Werte fähig, da sie nicht Hermitesch zu sein braucht. Insbesondere ist also $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ im allgemeinen $\neq \Phi(\mathfrak{A};\bar{\mathfrak{x}})$. Aus (1) und (4) folgt leicht

$$(5) \qquad \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{y},\mathfrak{x}) = \frac{1}{2}[\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}+\mathfrak{y}) - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}-\mathfrak{y})].$$

Es bezeichne $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ die obere, $\mathbf{n}(\mathfrak{A})$ die untere Grenze von $|\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})|$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$. Offenbar ist

$$(6) \qquad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}),$$

es gilt ferner aus Gründen der Homogenität $|\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{z})| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})|\mathfrak{z}|^2$, auch wenn $\mathfrak{z}$ nicht normiert ist. Die rechte Seite von (5) ist also absolut

$$\leqq \frac{1}{2}\mathbf{m}(\mathfrak{A})(|\mathfrak{x}+\mathfrak{y}|^2 + |\mathfrak{x}-\mathfrak{y}|^2] = \mathbf{m}(\mathfrak{A})[|\mathfrak{x}|^2 + |\mathfrak{y}|^2],$$

so daß für $|\mathfrak{x}|=1$, $|\mathfrak{y}|=1$

$$(7) \qquad |\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{y},\mathfrak{x})| \leqq 2\,\mathbf{m}(\mathfrak{A})$$

gilt.

Es bezeichne $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ den „Wertevorrat" der Kopplungsform, das ist die abgeschlossene Hülle derjenigen Werte, derer $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}|=1$ fähig ist. Aus einem von Herrn Toeplitz[7]) vermuteten, von Herrn Hausdorff[13]) bewiesenen Satz folgt mit Rücksicht auf (2) nach bekannten Sätzen (etwa unter Beachtung des weitergehenden Blaschkeschen Auswahlsatzes), daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein konvexer Bereich ist; er liegt stets in dem Kreise $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ und ist davon im allgemeinen verschieden. $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ braucht nämlich kein Kreis zu sein, und wenn auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein Kreis ist, brauchte in (6) nicht das Gleichheitszeichen zu gelten, während doch $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ der Radius des kleinsten, alle Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenden Kreises um den Nullpunkt ist. — Eine Matrix, bei welcher

$$\mathbf{m}(\mathfrak{A})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \tag{8}$$

ausfällt, möge normaloid heißen.

Man setze bei jeder Matrix $\mathfrak{A}=\|a_{pq}\|$

$$\mathfrak{A}'=\|a_{qp}\|,\quad \overline{\mathfrak{A}}=\|\bar{a}_{pq}\|,\quad \mathfrak{A}^*=\|\bar{a}_{qp}\|;\quad \mathfrak{A}^*=\overline{\mathfrak{A}}'=\overline{\mathfrak{A}'}.$$

$\mathfrak{A}'$ ist die transponierte, $\overline{\mathfrak{A}}$ die konjugierte, $\mathfrak{A}^*$ die „begleitende" Matrix von $\mathfrak{A}$. Offenbar gilt

$$\mathbf{r}(\mathfrak{A})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}')=\mathbf{r}(\overline{\mathfrak{A}})=\mathbf{r}(\mathfrak{A}^*),\quad \mathbf{m}(\mathfrak{A})=\ldots=\mathbf{m}(\mathfrak{A}^*),\quad \mathbf{n}(\mathfrak{A})=\ldots. \tag{9}$$

Man hat ferner[12])

$$(\mathbf{r}(\mathfrak{A}))^2=\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*), \tag{10}$$

d. h. wegen (9)

$$\mathbf{r}(\mathfrak{A})\,\mathbf{r}(\mathfrak{A}^*)=\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*); \tag{10a}$$

mithin gilt

$$\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)=\mathbf{m}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}), \tag{11}$$

trotzdem im allgemeinen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^*$ nicht vertauschbar ist. Gilt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}, \tag{12}$$

so heißt $\mathfrak{A}$ normal; doch soll (12) zunächst nicht vorausgesetzt werden. — Offenbar ist

$$\overline{\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})}=\Psi(\mathfrak{A}^*;\bar{\mathfrak{y}},\bar{\mathfrak{x}}), \tag{13}$$

was für $\mathfrak{y}=\bar{\mathfrak{x}}$ wegen (4) in

$$\overline{\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})}=\Phi(\mathfrak{A}^*;\mathfrak{x}) \tag{14}$$

übergeht.

---

[13]) F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 3 (1919), S. 314–316.

Man kann jede Matrix $\mathfrak{A}$ auf genau eine Weise in der Gestalt $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$ schreiben, wobei $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ Hermitesch sind ($\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$). Offenbar ist $\Phi(\mathfrak{G}; \mathfrak{x})$ der Realteil, $\Phi(\mathfrak{H}; \mathfrak{x})$ die imaginäre Komponente der Zahl $\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}) = \Phi(\mathfrak{G}; \mathfrak{x}) + i\Phi(\mathfrak{H}; \mathfrak{x})$. Sind daher μ und ν reell, so liegt $\lambda = \mu + i\nu$ dann und nur dann in dem Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, wenn $\mathfrak{n}((\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{G}) + i(\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{H})) = 0$ ist. Hierbei hat $\mathfrak{n}$ die oben erklärte Bedeutung und $\mathfrak{E} = \|\delta_{ik}\|$ ist die Einheitsmatrix. — Man hat $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^* - i\mathfrak{H}^*$, so daß die Bedingung (12) des normalen Charakters auf

$$(12)' \qquad \mathfrak{G}\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\mathfrak{G}$$

hinausgeht, so daß dann auch

$$(15) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^2 + \mathfrak{H}^2$$

gilt.

Der normale Charakter ist unitären[14]) Transformationen gegenüber invariant[7]). Da jede Diagonalmatrix normal ist, so sind also die Matrizen, die mit einer Diagonalmatrix unitär äquivalent sind, gewiß normal. Eine Matrix, in welcher alle oberhalb der Diagonale stehenden Elemente verschwinden, ist nur dann normal, wenn sie eine Diagonalmatrix ist[7]). Nach einem Satze von Herrn Schur[15]) kann man jede endliche Matrix unitär in eine Matrix transformieren, in welcher alle oberhalb der Diagonale gelegenen Elemente verschwinden. Folglich ist eine endliche Matrix dann und nur dann normal, wenn sie unitär in eine Diagonalmatrix übergeführt werden kann. Dieser Satz gilt auch im Bereiche der (unendlichen) vollstetigen Matrizen[16]). Es scheint jedoch nicht bekannt zu sein, ob es nicht bereits vollstetige Matrizen gibt, für welche der Schursche Satz ungültig ist. Im Bereiche der beschränkten Matrizen ist die Antwort gewiß bejahend. Denn sonst könnte man jede beschränkte normale Matrix unitär in eine Diagonalmatrix transformieren, was nicht der Fall ist. Denn die Hermiteschen Matrizen sind mit ihrer begleitenden Matrix identisch, also gewiß vertauschbar und daher normal, und sie können, wenn sie ein Streckenspektrum haben, in keine Diagonalmatrix übergeführt werden. Hingegen kann man jede normale vollstetige Matrix gewiß in eine Diagonalmatrix unitär überführen[16]).

Der normaloide Charakter ist, wie man sich leicht überzeugt, unitären Transformationen gegenüber invariant. Es ist ferner trivial, daß jede Diagonalmatrix normaloid ist. Die endlichen (und die vollstetigen) normalen Matrizen

---

[14]) Eine Matrix $\mathfrak{A}$ unitär zu transformieren heißt, $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{U}\mathfrak{A}\mathfrak{U}^{-1}$ zu ersetzen, wobei $\mathfrak{U}$ unitär (= komplex-orthogonal) ist, d. h. der Bedingung $\mathfrak{U}^{-1} = \mathfrak{U}^*$ genügt.

[15]) I. Schur, Math. Annalen **66** (1909), S. 489 ff.

[16]) Siehe loc. cit. [3]), S. 1563.

sind also gewiß normaloid. Wegen (2) sind daher alle unendlichen Matrizen, die, wie z. B. die Hermiteschen, unendlich viele normale Abschnitte haben, ebenfalls normaloid [und übrigens auch normal]. Auch die Laurentmatrizen sowie ihre Analogien[17]) sind (nicht nur normal, sondern auch) normaloid. Man erkennt dies am einfachsten, wenn man in der Kopplungsform bzw. in der Bilinearform die Variablenfolgen nach dem Fischer-Rieszschen Satz als Fouriersche Koeffizientenfolgen auffaßt und sodann je zweimal die Vollständigkeitsrelation anwendet. Wir werden sehen, daß die (stets beschränkten) unitären Matrizen ebenfalls nicht nur normal, sondern auch normaloid sind. Es ist überhaupt keine beschränkte normale Matrix bekannt, die nicht normaloid ist [NB. das Abschnittsprinzip kann hier nicht herangezogen werden, da es beschränkte normale, ja unitäre Matrizen gibt, von denen kein Abschnitt normal ist]. Mit Rücksicht auf bekannte Vorkommnisse[18]) bei den Schwarzschen Ungleichungen[19])

$$(16)\quad |\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*;\mathfrak{x}), \qquad |\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A};\mathfrak{x});$$
$$|\mathfrak{x}|=1, \quad |\mathfrak{y}|=1$$

[vgl. (10)] ist die Existenz von beschränkten normalen Matrizen, die nicht normaloid sind, nicht zu erwarten. Hingegen gibt es beschränkte normaloide Matrizen, die nicht normal sind. Dies wird, wie man auch direkt verifizieren kann, durch das Beispiel

$$\Psi(\mathfrak{A};\mathfrak{x},\mathfrak{y}) = x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + \ldots$$

belegt, worauf wir übrigens in § 4 noch zurückkommen.

Es sei noch erwähnt, daß aus dem normaloiden Charakter aller (unendlichen) Hermiteschen Matrizen die für jede Matrix gültige Toeplitzsche Ungleichung[7])

$$(6)' \qquad \mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 2\,\mathbf{m}(\mathfrak{A})$$

leicht geschlossen werden kann. Denn sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ die Hermiteschen Komponenten von $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$, so gilt offenbar

$$\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{G}) + \mathbf{r}(\mathfrak{H}) = \mathbf{m}(\mathfrak{G}) + \mathbf{m}(\mathfrak{H}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A}) + \mathbf{m}(\mathfrak{A}).$$

---

[17]) D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, S. 206ff.; E. Hellinger, Diss., Göttingen 1907, S. 61ff.; O. Toeplitz, loc. cit. [4]), S. 353; E. Hellinger, Journ. f. Math. **136** (1909), S. 210ff.; F. Riesz, loc. c. [1]), S. 150ff.; E. Hellinger und O. Toeplitz, Journ. f. Math. **144** (1914), S. 212ff.; A. Wintner, Zeitschr. f. Phys. **48** (1928), S. 149ff.

[18]) Die obere Grenze der nichtnegativ definiten Hermiteschen Form $|\sum \alpha_j \xi_j|^2$ unter der Nebenbedingung $\sum |\xi_j|^2 = 1$ ist gleich der trivialen Schranke $\sum |\alpha_j|^2$.

[19]) Beim Beweis von (16) ist freilich auch der erste Hilbertsche Faltungssatz zu verwerten.

Wie Herr Toeplitz bemerkt hat[7]), kann in (6)′ auch das Gleichheitszeichen gelten. Eine solche Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ ist z. B. diejenige, in welcher außer a_{21} alle Elemente verschwinden.

§ 2.

Das Spektrum.

Ist $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix und $\mathfrak{B}$ eine andere, so heißt $\mathfrak{A}$ eine vordere Reziproke von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ eine hintere Reziproke von $\mathfrak{A}$, wenn $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ (= Einheitsmatrix) gilt. Es sei ein für allemal angenommen, daß $\mathfrak{A}$ beschränkt ist. Es sind dann nach den sogenannten Formalsätzen[20]) [welchen freilich die Hilbertschen Faltungssätze zugrunde liegen[21])] nur die folgenden vier Fälle möglich: 1. Die Matrix $\mathfrak{A}$ hat eine und nur eine vordere beschränkte Reziproke, eine und nur eine hintere beschränkte Reziproke und die hintere Reziproke ist gleich der vorderen; 2. es gibt keine vordere und keine hintere beschränkte Reziproke; 3a. es gibt unendlich viele hintere beschränkte Reziproken und keine einzige beschränkte vordere Reziproke, oder 3b. es tritt das Umgekehrte ein. Die beiden letzten dieser vier Fälle sind voneinander nicht wesentlich verschieden, da der Übergang von 3a. zu 3b. nur auf die Vertauschung von $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}'$ (oder mit $\mathfrak{A}^*$) hinausgeht. Damit also die pathologischen Fälle 3. nicht vorliegen, ist hinreichend (jedoch keinesfalls notwendig), daß $\mathfrak{A}$ normal ist.

Es sei $\mathfrak{A}$ irgendeine beschränkte Matrix. Dann sind die beiden, voneinander im allgemeinen verschiedenen Matrizen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ wegen (3), (9) beschränkt, wegen $(\mathfrak{M}\mathfrak{N})^* = \mathfrak{N}^*\mathfrak{M}^*$ Hermitesch und wegen (16) nichtnegativ definit. Wir haben in § 1 zu jeder beschränkten Matrix $\mathfrak{C}$ eine Zahl $\mathfrak{n}(\mathfrak{C}) \geqq 0$ zugeordnet. Nach Herrn Toeplitz[22]) lassen sich nun die vier vorher aufgezählten Fälle mittels des Wertepaares

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*), \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) \tag{17}$$

durch die folgenden notwendigen und zugleich hinreichenden Kriterien kennzeichnen:

1. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) > 0;$
2. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) = 0;$
3a. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) > 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) = 0;$
3b. $\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = 0, \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}) > 0.$

---

[20]) Siehe loc. cit. [12]).

[21]) Für nicht beschränkte, jedoch sonst ganz natürliche Matrizen sind die Formalsätze ungültig; vgl. z. B. T. Carleman, C. R. **171** (1920), S. 383–386, oder Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala 1923.

[22]) O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1907, S. 101–109.

Bei einer endlichen Matrix sind die pathologischen Fälle ausgeschlossen, da sie höchstens eine Reziproke hat; dem entspricht es, daß bei jeder endlichen Matrix $\mathfrak{A}$

$$(11)^* \qquad \mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*) = \mathfrak{n}(\mathfrak{A}^*\mathfrak{A})$$

gilt. Bei passenden beschränkten $\mathfrak{A}$ ist $(11)^*$ unrichtig. Denn die Matrix

$$(18) \qquad \mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix}$$

ist beschränkt und sie läßt, wie Herr Toeplitz[22]) bemerkt hat, die beschränkte Matrix

$$(18)' \qquad \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \gamma_2 & 0 & 1 & 0 & \\ \gamma_3 & 0 & 0 & 1 & \\ \gamma_4 & 0 & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \end{Vmatrix} \qquad \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2 < +\infty\right)$$

als vordere Reziproke zu, wobei die γ_j willkürlich sind, so daß für die Matrix (18) der Fall 3b., also für ihre transponierte oder begleitende Matrix der Fall 3a. vorliegt. Die unter (11) stehenden beiden Zahlen ($\geqq 0$) können also verschieden sein. Sind sie aber von dem gleichen Signum, so sind sie gleich. Anders ausgedrückt, sind sie *beide* von Null verschieden, so daß der Fall 1. vorliegt und daher eine und nur eine beschränkte Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ mit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$ vorhanden ist, so gilt $(11)^*$. Für eine solche Matrix $\mathfrak{A}^{-1}$ gilt nämlich[23])

$$(10)^* \qquad (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{-1}))^2 = \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)}.$$

Da nach den Formalsätzen $(\mathfrak{A}^{-1})^* = \mathfrak{A}^{*-1}$ ist und wegen (9) stets $\mathfrak{r}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{r}(\mathfrak{C}^*)$ gilt, so kann man hierfür auch

$$(10\,\mathrm{a})^* \qquad \mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{-1})\,\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^{*-1}) = \frac{1}{\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)}$$

schreiben, woraus $(11)^*$ ersichtlich ist.

Wir wollen $\mathfrak{B}$, wie vorhin, nur dann eine Reziproke der beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ nennen und mit $\mathfrak{A}^{-1}$ bezeichnen, wenn die folgenden drei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind: a) die Matrix $\mathfrak{B}$ ist beschränkt, b) es gilt $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und c) endlich $\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \mathfrak{E}$. Diese Bedingungen sind, wie sich

---

[23]) Vgl. weiter unten (S. 241).

zeigen läßt, unabhängig voneinander. Nach den vorangehenden gibt es höchstens ein $\mathfrak{A}^{-1}$. Aus den Formalsätzen folgt unter Beachtung von

$$\mathfrak{E}' = \overline{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}, \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{N})' = \mathfrak{N}'\mathfrak{M}', \quad \overline{(\mathfrak{M}\mathfrak{N})} = \overline{\mathfrak{M}}\,\overline{\mathfrak{N}}, \quad \mathfrak{C}^* = \overline{\mathfrak{C}}' = \overline{\mathfrak{C}'}$$

unmittelbar

$$\overline{\mathfrak{B}}^{-1} = \overline{(\mathfrak{B}^{-1})}, \quad \mathfrak{B}'^{-1} = (\mathfrak{B}^{-1})', \quad \mathfrak{B}^{*-1} = (\mathfrak{B}^{-1})^*, \tag{19}$$

die Existenz von $\mathfrak{B}^{-1}$ vorausgesetzt. Eine beschränkte Matrix hat also [da wir außer b) auch c) vorausgesetzt haben] nur dann eine (also nur eine) Reziproke, wenn dies auch von der transponierten Matrix gilt [bei Hermiteschen, Laurentschen, und allgemeiner bei normalen Matrix ist freilich die Bedingung c) überflüssig]. Für unsere Zwecke, insbesondere für den Existenzbeweis des Spektrums, ist dies sehr wesentlich, und zwar bereits in dem vollstetigen Spezialfall, trotzdem bei den Matrizen, die sich von der Einheitsmatrix nur um eine vollstetige Matrix unterscheiden, die pathologischen Fälle 3a., 3b. ausgeschlossen sind[24]) [ein Widerspruch zu den Schmidt-Toeplitzschen Beispielen[3]) liegt nicht vor, vgl. nämlich [2]) und [39])].

Aus Hilbertschen Konvergenzsätzen folgt ohne weiteres, daß, wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt ist, $\mathfrak{A}^{-1}$ dann und nur dann existiert, wenn das zu der Matrix $\mathfrak{A}$ und zu irgendeiner quadratisch konvergenten, d. h. der Bedingung $|\mathfrak{c}|^2 = \sum |c_p|^2 < +\infty$ genügenden Folge $\{c_p\}$ gehörige Gleichungssystem $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ genau eine quadratisch konvergente Lösung $\mathfrak{x}$ hat (und zwar ist dann diese quadratisch konvergente Lösung $\mathfrak{x} = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{c}$). Doch kann dieser Satz nicht mittels des Alternativprinzips irgendwie umgekehrt werden; es gibt nämlich beschränkte Matrizen $\mathfrak{A}$, die keine Reziproke haben und trotzdem derart sind, daß weder die zu $\mathfrak{A}$ noch die zu $\mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}^*$ gehörigen homogenen Gleichungen eine auch nur der Bedingung $0 < |\mathfrak{x}| \leqq +\infty$ genügende Lösung hätten[3]).

Wir definieren nun, in voller Übereinstimmung mit der Terminologie bei denjenigen beschränkten Matrizen, die bisher spektral untersucht worden sind, das Spektrum einer beliebigen beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ wie folgt: die Zahl λ liegt dann und nur dann in dem Spektrum, wenn $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ nicht existiert; $\lambda = \infty$ gehört also nicht dem Spektrum an und soll überhaupt nicht als ein Punkt gelten. — Nach der Toeplitzschen Tabelle ist also λ dann und nur dann in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ gelegen, wenn mindestens eine der beiden Zahlen $(\geqq 0)$

$$\mathfrak{n}\,((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*), \quad \mathfrak{n}\,((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})) \tag{20}$$

verschwindet. Hierbei kann man die Multiplikationen ausführen, wenn man beachtet, daß $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^* = \bar{\lambda}\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^*$ gilt.

---

[24]) D. Hilbert, Gött. Nachr. 1906, S. 218ff.

Ist $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^*$ vertauschbar, so ist, da $c\mathfrak{E}$ mit jeder Matrix vertauschbar ist, auch $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})$ mit $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^*$ vertauschbar, so daß die beiden Zahlen (20) gewiß gleich sind. Mithin liegt λ dann und nur dann außerhalb des Spektrums einer normalen Matrix $\mathfrak{A}$, wenn

$$\mathfrak{n}(|\lambda|^2\mathfrak{E}-\lambda\mathfrak{A}^*-\lambda\mathfrak{A}+\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)>0 \tag{20}$$

ausfällt, und dann und nur dann in dem Spektrum, wenn hierbei nicht >0, sondern $=0$ gilt, oder, was wegen (15) auf dasselbe hinausgeht, $\mathfrak{n}((\mu\mathfrak{E}-\mathfrak{G})^2+(\nu\mathfrak{E}-\mathfrak{H})^2)=0$ ist, wobei wieder $\mathfrak{A}=\mathfrak{G}+i\mathfrak{H}$, $\lambda=\mu+i\nu$, $\mathfrak{G}=\mathfrak{G}^*$, $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}^*$, $\mu\gtreqless 0$, $\nu\gtreqless 0$ gesetzt wurde. Da die Matrizen $|\lambda|^2\mathfrak{E}$, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ nichtnegativ definit sind, so ist in (20)′ der Ausdruck linkerhand gewiß

$$\begin{aligned}&\geqq \mathfrak{n}(|\lambda|^2\mathfrak{E})+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-\mathfrak{m}(-\lambda\mathfrak{A}^*)-\mathfrak{m}(-\lambda\mathfrak{A})\\&=|\lambda|^2+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-|-\lambda|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A}^*)-|-\bar{\lambda}|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A}).\end{aligned}$$

Nun ist aber $\mathfrak{m}(\mathfrak{A}^*)=\mathfrak{m}(\mathfrak{A})$. Damit also λ außerhalb des Spektrums der normalen Matrix $\mathfrak{A}$ liegt, ist hinreichend, daß

$$|\lambda|^2+\mathfrak{n}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)-2|\lambda|\,\mathfrak{m}(\mathfrak{A})>0 \tag{21}$$

ausfällt; notwendig ist diese Bedingung nicht. — Doch wollen wir jetzt die normalen Matrizen wieder verlassen.

Es sei $\mathfrak{A}$ beschränkt und derart, daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, und es möge λ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ liegen und $\neq 0$ sein. Dann ist auch $(\lambda^{-1}\mathfrak{E}-\mathfrak{A}^{-1})^{-1}$ vorhanden, d. h. λ^{-1} liegt außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}^{-1}$. Man erkennt dies mittels der Neumann-Hilbschen Reihen, auf welche wir noch zurückkommen. Wegen $(\mathfrak{A}^{-1})^{-1}=\mathfrak{A}$ können wir also behaupten, daß λ dann und nur dann in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt, wenn λ^{-1} in dem Spektrum von $\mathfrak{A}^{-1}$ enthalten ist. Denn die Existenz von $\mathfrak{A}^{-1}$ ist vorausgesetzt und $\mathfrak{A}^{-1}$ ist wegen $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1}_{\lambda=0}=-\mathfrak{A}^{-1}$ dann und nur dann vorhanden, wenn $\lambda=0$ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ liegt. Bezeichnet $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ die Punktmenge, welche aus den Punkten des Spektrums von $\mathfrak{A}$ besteht, so können wir also symbolisch

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\frac{1}{\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^{-1})} \tag{22}$$

schreiben. — Mit Rücksicht auf das bei (20) Gesagte gehen die beiden Punktmengen $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^*)$ durch Spiegelung an der reellen Achse ineinander über,

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{S}(\mathfrak{A}^*)}. \tag{23}$$

Es ergibt sich ferner aus der ersten Relation (19), wobei man $\mathfrak{B}=\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ zu setzen hat, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\overline{\mathfrak{S}(\mathfrak{A})}$ ist. Mit Rücksicht auf $\overline{\mathfrak{C}'}=\mathfrak{C}^*$ folgt daraus wegen (23) offenbar $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})=\mathfrak{S}(\mathfrak{A}')$. — Es verhält sich mithin

alles so, als ob der Determinantenapparat auch jetzt zur Verfügung stehen würde.

Herr F. Levi machte mich freundlichst darauf aufmerksam, daß die Relationen (11), (11)* nach einer wohlbekannten gruppentheoretischen Schlußweise wesentlich verallgemeinert werden können, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert. Sind nämlich zwei beschränkte Matrizen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ in dem Sinne äquivalent („ähnlich"), daß es eine beschränkte Matrix $\mathfrak{C}$ gibt derart, daß $\mathfrak{M} = \mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{C}^{-1}$ gilt ($\mathfrak{C}\mathfrak{C}^{-1} = \mathfrak{C}^{-1}\mathfrak{C} = \mathfrak{E}$), so haben die beiden Matrizen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ wegen

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{M})^{-1} = (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{C}\mathfrak{N}\mathfrak{C}^{-1})^{-1} = \mathfrak{C}(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{N})^{-1}\mathfrak{C}^{-1}$$

offenbar dasselbe Spektrum. Setzt man nun

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*, \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{A}^{-1},$$

so folgt daraus, daß die beiden (nichtnegativ definiten Hermiteschen) Matrizen $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ dasselbe Spektrum haben, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert und $\mathfrak{A}$ beschränkt und sonst beliebig ist [während (11) und (11)* nur darauf hinauslaufen (§ 4), daß die extremen Punkte der beiden Spektra übereinstimmen]. — Ist $\mathfrak{A}$ beschränkt und $\mathfrak{A}^{-1}$ nicht vorhanden, so brauchen die Spektra von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ nicht übereinzustimmen; dies wird, wie man leicht ausrechnet, bereits durch das Beispiel (18) belegt.

Es sei noch erwähnt, daß der pathologische Fall 3. nur dann vorliegen, d. h. (11)* höchstens dann unrichtig sein kann, wenn es ein $\eta > 0$ gibt derart, daß das ganze Kreisgebiet $|\lambda| < \eta$ in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt. Es sei nämlich $\{\varepsilon_\nu\}$ eine (nicht notwendig reelle) gegen Null konvergierende und außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{A}$ gelegene Zahlenfolge, d. h. es sei $(\varepsilon_\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ bei jedem ν vorhanden und $\varepsilon_\nu \to 0, \nu \to +\infty$. Nach den vorhergehenden erhält man eine richtige Gleichung, wenn man in (11)* von der Matrix $\mathfrak{A}$ zu $\varepsilon_\nu\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ übergeht. Nimmt man aber in dieser Gleichung den Grenzübergang $\nu \to +\infty$ vor, so folgt aus ersichtlichen Stetigkeitsgründen, daß auch die beiden Zahlen (17) gleich sein müssen. — Analog erkennt man den spektralen Grund des Umstandes, daß (11) bei jeder beschränkten Matrix richtig ist. — Ebenso folgt, daß die charakteristischen Polynome von $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{A}^*\mathfrak{A}$ bei endlichen Matrizen auch dann übereinstimmen, wenn $\mathfrak{A}^{-1}$ nicht existiert, so daß dabei diese beiden Hermiteschen Matrizen stets unitär äquivalent sind.

Wir zeigen nun mittels einer sinngemäßen Anpassung des geläufigsten funktionentheoretischen Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra, daß die Punktmenge $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ nie leer ist, mit andern Worten, daß jede beschränkte Matrix ein Spektrum hat. Wir bemerken vorerst, daß das Spektrum (sofern es existiert) gewiß eine beschränkte Punktmenge ist und genauer in dem vorher (§ 1) mit $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ bezeichneten Kreise $|\lambda| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$

liegt. Aus (3) folgt nämlich, unter $\mathfrak{A}^0$ die Einheitsmatrix $\mathfrak{E}$ verstanden,

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^n) \leqq (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}))^n \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

so daß die C. Neumannsche [bei beliebigen beschränkten Matrizen zuerst von Herrn Hilb[25]) benutzte] Reihe

$$\mathfrak{R}_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{\lambda^{n+1}}$$

für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$ eine Matrix $\mathfrak{R}_\lambda$ erklärt, und zwar eine beschränkte, da offenbar

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{R}_\lambda) \leqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{r}(\mathfrak{A})^n}{|\lambda|^{n+1}} = \frac{1}{|\lambda| - \mathfrak{r}(\mathfrak{A})}$$

gilt, wobei der letzte Nenner > 0 ist. Nun findet man durch gliedweise Multiplikation mit $\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$, was offenbar gestattet ist, daß $\mathfrak{R}_\lambda(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = \mathfrak{E}$ und ebenso auch $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\mathfrak{R}_\lambda = \mathfrak{E}$ ausfällt, so daß $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$, wie behauptet, gewiß existiert. —

Außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ möge

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = \|R_{pq}(\lambda)\| \tag{25}$$

gesetzt und die Matrix (25), als Funktion von λ aufgefaßt, als Resolvente von $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Da für die Resolvente die Entwicklung

$$\|R_{pq}(\lambda)\| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{\lambda^{n+1}}; \quad |\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A}) \tag{26}$$

gilt, so folgt aus (24) unmittelbar, daß für $|\lambda| > \mathfrak{r}(\mathfrak{A})$ jedes Element $R_{pq}(\lambda)$ der Resolvente eine reguläre Funktion ist, die sich auch für $\lambda = \infty$ regulär verhält und für $|\lambda| \to +\infty$ verschwindet. — Wir bedienen uns nun des projektiven Kunstgriffes von Herrn Hilb[25]), indem wir jetzt die Resolvente nicht, wie in (26), in der Umgebung des unendlich fernen Punktes, sondern in der Umgebung einer im Endlichen und außerhalb des Spektrums gelegenen Stelle λ_0 entwickeln. Da λ_0 außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegt, so ist $(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ vorhanden. Man erkennt wie vorher, daß

$$\|R_{pq}(\lambda)\| \equiv (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n (-(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1})^{n+1} \tag{27}$$

$$\text{gilt für} \quad |\lambda - \lambda_0| < \mathfrak{r}((\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}),$$

da die Reihe rechterhand in diesem Kreise eine beschränkte Matrix darstellt, die mit $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ von rechts oder links multipliziert die Einheitsmatrix ergibt, und daß in diesem Kreise jedes $R_{pq}(\lambda)$ regulär ist. — Setzen wir nun zwecks Zurückführung ad absurdum voraus, daß es kein Spektrum

---

[25]) E. Hilb, Erlang. Sitzber. 1908, S. 84–89.

gibt, so daß $(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ bei jedem λ_0 existiert. Dann ist jedes $R_{pq}(\lambda)$ eine ganze Funktion, die außerdem, wie wir gesehen haben, auch für $\lambda = \infty$ regulär ist und für $|\lambda| \to \infty$ gegen Null strebt, also nach dem Liouvilleschen Satze identisch verschwindet, so daß (25) für alle λ existiert und identisch gleich der Nullmatrix $\|0\|$ ist — was jedoch einen Widerspruch enthält. Denn ist λ derart, daß (25) existiert, so muß diese Matrix, die ja mit $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ multipliziert nicht die Nullmatrix, sondern die Einheitsmatrix ergeben soll, von der Nullmatrix gewiß verschieden sein. Nun gibt es aber, da das Spektrum (sofern es überhaupt existiert) ganz im Endlichen, nämlich in $\mathbf{V}(\mathfrak{A})$ liegen muß, stets Werte λ, für welche (25) existiert. Damit ist die Existenz des Spektrums bewiesen.

Ist λ_0 derart, daß $(\lambda_0 \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ existiert, so gibt es wegen (27) ein Kreisgebiet $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ um λ_0, in welchem $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ vorhanden ist. Das Spektrum einer beschränkten Matrix ist also eine abgeschlossene, und, wie wir wissen, beschränkte Punktmenge in der komplexen λ-Ebene. Mehr läßt sich nicht behaupten. Betrachten wir nämlich eine (nicht notwendig reelle) Diagonalmatrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, so daß $a_{pq} = \lambda_p \delta_{pq}$ ($\|\delta_{pq}\| = \mathfrak{E}$) gesetzt werden kann. Sie ist dann und nur dann beschränkt, wenn λ_p absolut unterhalb einer von p unabhängigen Schranke bleibt. Das Spektrum besteht aus den Punkten λ, für welche (25) nicht existiert, d. h. [vgl. S. 239] bei welchen die zu der Matrix $\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ gehörigen Gleichungen

$$\sum_{q=1}^{\infty} (\lambda \delta_{pq} - a_{pq}) x_q = c_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{28}$$

nicht bei jedem der Bedingung $\sum |c_p|^2 < +\infty$ genügenden Wertsystem $\{c_p\}$ genau eine der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügende Lösung haben [für spätere Zwecke bemerken wir, daß, wenn λ außerhalb des Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegt, die quadratisch konvergente Lösung $\{x_p\}$ von (28) wegen der auf S. 239 gemachten Bemerkung und mit Rücksicht auf (25) in der Gestalt

$$x_p = \sum_{q=1}^{\infty} R_{pq}(\lambda) c_q \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{29}$$

geschrieben werden kann]. Nun geht (28) in dem diagonalen Falle $a_{pq} = \lambda_p \delta_{pq}$ einfach in

$$(\lambda - \lambda_p) x_p = c_p \qquad (p = 1, 2, \ldots) \tag{28'}$$

über. Diese Gleichungen haben bei einer willkürlichen quadratisch konvergenten Folge $\{c_p\}$ nur dann eine Lösung, wenn $\lambda \neq \lambda_p$ $(p = 1, 2, \ldots)$ gilt, so daß die λ_p gewiß dem Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ angehören. Da $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ abgeschlossen ist, so gilt dies auch von den Häufungsstellen der λ_p (dem entspricht es, daß, wenn λ von allen λ_p verschieden, jedoch eine Häufungsstelle der λ_p ist, die Lösung $\{x_p\}$ wegen (28)' nicht bei allen quadratisch

konvergenten Folgen $\{c_p\}$ der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügen kann). Ist umgekehrt λ von den λ_p und von ihren Häufungsstellen verschieden, gibt es also ein $\varepsilon > 0$ mit $|\lambda - \lambda_p| > \varepsilon$ $(p = 1, 2, \ldots)$, so folgt aus (28)'

$$x_p = \frac{c_p}{\lambda - \lambda_p}, \qquad \sum_p |x_p|^2 \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum |c_p|^2 < +\infty,$$

so daß λ außerhalb $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegt. Das Spektrum einer beschränkten Diagonalmatrix besteht also aus ihren Diagonalelementen und aus deren Häufungsstellen. Folglich kann jede beschränkte und abgeschlossene Punktmenge der komplexen Ebene das Spektrum einer beschränkten Matrix sein, w. z. b. w. — Das Spektrum der Nullmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist, besteht aus dem Punkte $\lambda = 0$; doch ist dies für die Nullmatrix ebensowenig charakteristisch, wie in dem Bereiche der endlichen Matrizen. Denn ist $\mathfrak{A} = \| a_{pq} \|$ beschränkt und $a_{pq} = 0$ für $p \geqq q$, genügen endlich die a_{pq} etwa der zusätzlichen (etwas mehr als die Vollstetigkeit enthaltenden) Bedingung $\sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2 < +\infty$, so besteht auch das Spektrum dieser Matrix aus dem einzigen Punkte $\lambda = 0$ (man erkennt dies durch eine leichte Modifikation der für den Diagonalfall durchgeführten Schlußweise); eine zusätzliche Bedingung ist dabei, wie in § 3 das Beispiel (18) zeigen wird, sehr wesentlich.

Herr Toeplitz[7]) hat gezeigt, daß die n Eigenwerte einer endlichen Matrix $\mathfrak{A}_{[n]}$ (von n^2 Elementen) stets in dem Bereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ der komplexen $\Phi_{[n]}$-Ebene liegen, auf welche die komplexe Einheitskugel $\sum_{p=1}^{n} |x_p|^2 = 1$ mittels der Kopplungsform $\Phi_{[n]} = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} a_{pq} x_p \bar{x}_q$ abgebildet wird. Bezeichnet $\mathfrak{A}_{[n]}$ den n-ten Abschnitt der unendlichen (beschränkten) Matrix $\mathfrak{A}$, so liegt offenbar

(30) $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ in $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n+1]})$ und es gilt $\lim_{n=\infty} \mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$

[die Grenzgleichung, worin man von den Randpunkten von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ evtl. abzusehen hat, folgt unmittelbar aus (2)]. Betrachtet man nun die Neumann-Hilbschen Reihen, die zu dem Abschnitt $\mathfrak{A}_{[n]}$ gehören, und nimmt sodann den Grenzübergang $n \to \infty$ auf eine vorsichtige Weise vor, so gewinnt man den Eindruck, daß das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ der unendlichen Matrix stets in ihrem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt. So wird man nämlich zu der Vermutung geführt, daß eine Zahl nur dann dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ angehören kann, wenn sie Häufungsstelle der Eigenwerte der Abschnitte $\mathfrak{A}_{[1]}, \mathfrak{A}_{[2]}, \ldots$ ist, wobei die Zahlen, die in der unendlichen Folge der Abschnittseigenwerte mehrfach eintreten, mit der entsprechenden Vielfachheit $(\leqq +\infty)$ zu zählen wären. Doch ist dieser Satz [ebenso wie seine Umkehrung; vgl. (34) weiter

unten] geradezu falsch: die Matrix (18) liefert ein Gegenbeispiel. Aus (32) oder aus dem Anhang wird nämlich hervorgehen, daß alle Abschnittseigenwerte von (18) gleich Null sind, während das Spektrum von (18) auch weitere Punkte, ja ein zweidimensionales Kontinuum enthält (dies folgt übrigens, wie wir wissen, bereits daraus, daß für (18) der pathologische Fall vorliegt). — Ich gehe also über den erwähnten Toeplitzschen Satz über endliche Matrizen wesentlich hinaus, wenn ich jetzt auf eine direkte Weise zeige, daß der Satz — trotz der Unbrauchbarkeit des Abschnittsprinzips — auch im Bereiche der beschränkten Matrizen richtig ist: das Spektrum liegt stets in dem Wertevorrat.

Setzt man in (16) den Vektor $\mathfrak{y}$ gleich $\bar{\mathfrak{x}}$, schreibt man ferner $\mathfrak{B}$ an Stelle von $\mathfrak{A}$, so folgt wegen (4)

$$|\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*;\mathfrak{x}), \quad |\Phi(\mathfrak{B};\mathfrak{x})|^2 \leqq \Phi(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B};\mathfrak{x}) \text{ für } |\mathfrak{x}| = 1,$$

also auch

$$(31) \qquad (\mathfrak{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{B}\mathfrak{B}^*), \quad (\mathfrak{n}(\mathfrak{B}))^2 \leqq \mathfrak{n}(\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}),$$

da $\mathfrak{n}(\mathfrak{C})$ nach Definition die untere Grenze von $|\Phi(\mathfrak{C};\mathfrak{x})|$ auf der komplexen Hilbertschen Kugel $|\mathfrak{x}| = 1$ bezeichnet. Es sei nun $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix, und λ eine Zahl aus dem Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$. Dann ist, wie wir wissen, mindestens eine der beiden Zahlen (20) gleich Null. Wegen (31) wobei $\mathfrak{B} = \lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ zu setzen ist, folgt daraus $\mathfrak{n}(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$. Dies besagt, daß die untere Grenze des Betrages von

$$\Phi(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda\Phi(\mathfrak{E};\mathfrak{x}) - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) = \lambda - \Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x}) \quad (\mathfrak{x}' = 1)$$

unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ verschwindet, so daß also $\Phi(\mathfrak{A};\mathfrak{x})$ unter dieser Nebenbedingung der Zahl λ beliebig nahe kommen kann und daher λ in dem abgeschlossenen Wertbereiche $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ gewiß enthalten ist. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ liegt. — Daraus folgt, daß der kleinste konvexe Bereich $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$, welcher alle Punkte des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ enthält, ebenfalls in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ liegt. Denn $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ ist konvex (§ 1). Bei der Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet, hat $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ auch solche Punkte, die nicht in $\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ liegen[7]). Wir werden aber in § 5 beweisen, daß bei den normaloiden Matrizen $\mathfrak{T}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ ist.

§ 3.

Die Funktionentheorie der Resolventenmatrix.

Ist die Zahl λ_0 außerhalb des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ gelegen, so gibt es nach § 2 ein von p und q unabhängiges $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ jedes Element $R_{pq}(\lambda)$ der Resolventenmatrix regulär ist. Andererseits ist bei den endlichen Matrizen jede Wurzel der charak-

teristischen Gleichung ein Pol für mindestens ein Element der Resolventenmatrix. Dadurch wird die folgende Vermutung nahegelegt: gehört λ_0 dem Spektrum einer beschränkten Matrix an, so gibt es kein $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ alle $R_{pq}(\lambda)$ regulär sind. Doch ist dieser Satz nicht allgemein richtig (hinreichende Kriterien findet man in § 7). Die beschränkte Matrix (18) liefert nämlich ein einfaches Gegenbeispiel. Um dies zu zeigen, beachte man zunächst, daß die Gleichungen (28) für die Matrix (18) in

$$\lambda x_1 = c_1, \quad \lambda x_2 - x_1 = c_2, \quad \lambda x_3 - x_2 = c_3, \quad \ldots$$

übergehen, woraus

$$x_p = \sum_{q=1}^{p} \frac{c_q}{\lambda^{p-q+1}}, \qquad (p = 1, 2, \ldots),$$

also nach Vergleich mit (29)

$$(32) \qquad R_{pq}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{p-q+1}} \text{ für } q \leqq p; \qquad R_{pq}(\lambda) \equiv 0 \text{ für } q > p$$

ersichtlich ist, da die c_p nur an die Bedingung $\sum |c_p|^2 < +\infty$ gebunden sind. Nun ist dafür, daß eine Matrix $\|b_{pq}\|$ beschränkt ist, bekanntlich notwendig, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}|^2 < \Omega$$

gilt, und hinreichend, daß

$$\sum_{p=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega, \qquad \sum_{q=1}^{\infty} |b_{pq}| < \Omega$$

ausfällt, wobei Ω eine von p und q unabhängige, sonst beliebige Schranke bezeichnet[26]). Folglich ist die durch (32) für alle $\lambda \neq 0$ erklärte Matrix $\|R_{pq}(\lambda)\|$ dann und nur dann beschränkt, wenn $|\lambda| > 1$ gewählt wird. Mit Rücksicht auf (25) besagt dies, daß das Spektrum der Matrix (18) identisch ist mit der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$. Und trotzdem ist nach (32) jedes $R_{pq}(\lambda)$ für $|\lambda| > 0$ durchweg regulär. Analoge Verhältnisse liegen vor bei allen (zu „Summengleichungen" gehörigen) Matrizen, bei welchen die Resolvente der transponierten Matrix, also auch die Resolvente selbst, ebenfalls rekursiv berechnet werden kann. Vgl. auch den Anhang.

Da demnach für die Neumann-Hilbschen Reihen eine Art Überkonvergenz stattfinden kann, so muß man den Begriff des Konvergenzradius ϱ einer Matrizenpotenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \mathfrak{A}_n$, wobei die $\mathfrak{A}_n$ beschränkte Matrizen sein mögen, wie folgt festlegen: ϱ ist die obere Grenze der Radien

[26]) I. Schur, Journ. f. Math. **140** (1910), S. 6–7 ff. — Wählt man hingegen den Exponenten zwischen 1 und 2, so erhält man eine Bedingung, die für die Beschränktheit weder notwendig noch hinreichend ist.

$\varrho'(\geqq 0)$ derjenigen Kreise $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varrho'$, in welchen die Reihe nicht nur konvergiert, sondern außerdem eine ***beschränkte*** Matrix darstellt. ***Dann und nur dann*** kann man nämlich den Komplex der Cauchy-Weierstraßschen Potenzreihensätze auf die Neumann-Hilbschen Reihen sinngemäß übertragen: am Rande des Konvergenzkreises liegt stets mindestens eine matrizentheoretisch singuläre Stelle (d. h. ein Punkt des Spektrums), über welche hindurch keine unmittelbare analytische Fortsetzung der Matrix möglich ist; innerhalb des Konvergenzkreises darf man die Potenzreihe umordnen, usw. — Die am Rande des Konvergenzkreises gelegene Matrizensingularität braucht nicht bereits durch die *einzelnen* $R_{pq}(\lambda)$ in Evidenz zu treten. Sie kann ferner, wie die Jacobische Matrix des Gaußschen assoziierten Kettenbruches für die erzeugende Funktion der Legendreschen Polynome belegt, auch den Charakter einer Verzweigungsstelle haben (vgl. übrigens die Habilitationsschrift von Herrn Hellinger), trotzdem eigentlich nur eine einzige Bestimmung in Betracht kommt, da ja $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})$ höchstens eine Reziproke hat. Eine bei jedem $\mathfrak{A}$ gültige matrizentheoretische Deutung der übrigen Zweige ist mir nicht gelungen, und so will ich auf diese Matrizenfunktionentheorie nicht näher eingehen. — Es können übrigens für eine rein matrizentheoretische Deutung der Verhältnisse auch dann gewisse Schwierigkeiten vorliegen, wenn es keine Verzweigungsstelle gibt. So braucht z. B. das Gebiet der matrizentheoretisch regulären (d. h. außerhalb des Spektrums gelegenen) Stellen nicht zusammenhängend zu sein [trotzdem es sich um eine und dieselbe Matrix $\mathfrak{A}$ handelt]. Es kann ferner, wie wir wissen, jede beschränkte abgeschlossene Punktmenge das Spektrum einer beschränkten Matrix bilden. — Diese Fragen, deren Behandlung (bei normalen Matrizen) u. a. eine restlose Übertragung der Stieltjes-Helly-Grommerschen Integrationstheorie auf zweifache Integrale erfordern würde, scheinen im Falle normaler Matrizen von zweidimensionalem Spektrum mit gewissen schwierigen Fortsetzungsproblemen der Theorie des logarithmischen Potentials zusammenzuhängen, und sie erfordern eine zu den vorliegenden Zwecken angepaßte explizite Ausgestaltung der groß angelegten Untersuchungen von Herrn Radon[10]).

In § 1 ist die Existenz von beschränkten normaloiden Matrizen behauptet worden, die nicht normal sind. Es soll jetzt der Beweis hierfür nachgeholt werden. — Die Matrix (18) ist nicht normal, da für sie mit Rücksicht auf (18)′ der pathologische Fall 3. des § 1 vorliegt, was bei normalen Matrizen, wie erwähnt, von vornherein ausgeschlossen ist. Um zu zeigen, daß die Matrix (18) dennoch normaloid ist, beachte man zunächst, daß ihr Spektrum aus der Kreisscheibe $|\lambda| \leqq 1$ besteht, also Zahlen von dem Betrage Eins enthält. Da das Spektrum stets in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, so enthält auch $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ Zahlen, die absolut $\geqq 1$ sind. Ferner ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ nach Definition der Maximalbetrag der in der abgeschlossenen

Zahlenmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenen Zahlen. Folglich gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq 1$. Da andererseits die zu (18) gehörige Bilinearform

$$x_2 y_1 + x_3 y_2 + x_4 y_3 + \ldots \quad \text{für} \quad \sum_{p=1}^{\infty} |x_p|^2 = 1, \quad \sum_{q=1}^{\infty} |y_p|^2 = 1$$

nach der Schwarzschen Ungleichung absolut $\leqq 1$ ist, d. h. $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 1$ ausfällt, so gilt $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) \geqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erst recht. In Verbindung mit (6) folgt daraus (8), w. z. b. w. Vgl. übrigens den Anhang.

Was die (matrizentheoretischen) Konvergenzverhältnisse der Neumann-Hilbschen Reihen bei einer beliebigen beschränkten Matrix $\mathfrak{A}$ anlangt, so läßt sich folgendes behaupten. Bezeichnet $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ den matrizentheoretischen Konvergenzradius von (26), d. h. die obere Grenze derjenigen Zahlen ϱ', welche die Eigenschaft haben, daß die Reihe (26) für $|\lambda^{-1}| \leqq \varrho'$ konvergiert und eine beschränkte Matrix darstellt, so gilt $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, also wegen (6)

$$\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}), \tag{33}$$

während aus § 2 nur $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt. Die schärfere Ungleichung $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist aus den folgenden drei Bemerkungen unmittelbar ersichtlich:

I.) Die Reihe (26) konvergiert matrizentheoretisch so lange, bis λ von dem Nullpunkt ferner liegt als ein beliebiger Punkt des Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$, so daß also $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ der Radius des kleinsten, das Spektrum enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises ist.

II.) Die Zahl $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist nach Definition der Radius des kleinsten, den Wertbereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthaltenden, um den Nullpunkt geschlagenen Kreises.

III.) Nach § 2 liegt $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ gewiß in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. —

Ist $\mathfrak{A}$ normaloid, so kann noch mehr als (33) behauptet werden. Denn bei normaloiden Matrizen ist, nach der am Schluß von § 2 erwähnten, in § 5 zu beweisenden Konvexitätsregel, die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Mit Rücksicht auf I.) und II.) ergibt dies offenbar, daß für jede normaloide Matrix $\mathbf{p}(\mathfrak{A}) = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ gilt. Anders ausgedrückt:

$$\text{aus} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A}) \quad \text{folgt} \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{p}(\mathfrak{A}). \tag{33'}$$

Bei nicht normaloiden $\mathfrak{A}$ kann in (33) beidemal das Zeichen $<$ gelten, so z. B. bei der mehrfach erwähnten Matrix $\mathfrak{A} = \| a_{pq} \|$, in welcher außer a_{21} jedes a_{pq} verschwindet; hier ist nämlich

$$\mathbf{p}(\mathfrak{A}) = 0, \quad \mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \frac{|a_{21}|}{2}, \quad \mathbf{r}(\mathfrak{A}) = |a_{21}|. \tag{33''}$$

Aus diesem Beispiel geht sogar hervor, daß $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{p}(\mathfrak{A})$ nicht limitiert werden kann [wohl aber $\mathbf{r}(\mathfrak{A})$ mittels $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, da, wie erwähnt, $\mathbf{r}(\mathfrak{A}) \leqq 2\,\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ist].

§ 4. Die Abschnittsspektra.

Es sei $\mathfrak{A}$ eine beschränkte Matrix und $\lambda_1^{[n]}, \lambda_2^{[n]}, \ldots, \lambda_n^{[n]}$ das Spektrum ihres n-ten Abschnittes $\mathfrak{A}_{[n]}$. Die Gesamtheit aller $\lambda_\nu^{[n]}$ $(1 \leqq \nu \leqq n = 1, 2, \ldots)$ heiße $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$, und es bezeichne $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ die Gesamtheit der Häufungsstellen der $\lambda_\nu^{[n]}$, wobei mehrfach eintretende Zahlen mit der entsprechenden Vielfachheit gezählt werden mögen, so daß also $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ nie leer ist, indem z. B. $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{E})$ aus dem Punkte $\lambda = 1$ besteht. Es ist in § 2 erwähnt worden, daß das Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ nicht notwendig in $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ liegt. Ebenso kann $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ Punkte haben, die außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegen [so daß die Existenz des Spektrums $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ weitaus nicht trivial ist, trotzdem die Matrix nur dann beschränkt sein kann, wenn die Abschnittseigenwerte ganz im Endlichen liegen (vgl. den nächsten Absatz, S. 250)]. Dies gilt, wie das Toeplitzsche Beispiel[21])

$$\mathfrak{A} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{Vmatrix} \tag{34}$$

(das durch Verschiebung von $\mathfrak{A}_{[2]}$ längs der Diagonale dadurch entsteht, daß man die fehlenden Elemente gleich Null setzt) belegt, bereits dann, wenn die beschränkte Matrix Hermitesch ist. Für (34) gilt nämlich $\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{E}$, so daß $\mathfrak{A}^{-1} (= \mathfrak{A})$ vorhanden ist und daher $\lambda = 0$ wegen $(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A})_{\lambda=0}^{-1} = -\mathfrak{A}^{-1}$ außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ liegt. Und trotzdem liegt $\lambda = 0$ in $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$. Zu diesem Ende braucht man nur $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ zu bestimmen, was ohne weiteres möglich ist. Zunächst folgt nämlich durch binäre Drehung der irreduziblen Quadrate, daß unter den $2n$ Zahlen $\lambda_\nu^{[2n]}$ je n gleich ± 1 sind. Ferner gilt, wenn man die λ gemäß $\lambda_\nu^{[n]} \leqq \lambda_{\nu+1}^{[n]}$ numeriert, auch $\lambda_\nu^{[2n+1]} = \pm 1$, je nachdem $\nu <$ oder $> n+1$ ist. Endlich enthält die letzte Kolonne in $\mathfrak{A}_{[2n+1]}$ nur Nullen, so daß $\det \mathfrak{A}_{[2n+1]} = 0$ ist und daher ein $\lambda_\nu^{[2n+1]}$ verschwinden muß (was bereits aus der Hauptachsendarstellung hervorgeht). Man hat daher $\lambda_{n+1}^{[2n+1]} = 0$ bei jedem n, womit alles bewiesen ist. — Die beiden anderen Punkte von $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$, nämlich $\lambda = \pm 1$, gehören aber, wie man leicht ausrechnet, auch dem Spektrum $\mathfrak{S}(\mathfrak{A})$ an. Es handelt sich dabei, wie wir auf S. 250 sehen werden, um einen allgemeinen Satz.

Die Punktmengen $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ sind auch dann erklärt, wenn $\mathfrak{A}$ nicht beschränkt ist. Für solche Matrizen möge man den (abgeschlossenen) Bereich $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$ einfach mittels (30) definieren. Dann liegen $\mathfrak{S}_0'(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{S}_0(\mathfrak{A})$ mit Rücksicht auf bei (30) Gesagte stets in $\mathfrak{W}(\mathfrak{A})$, und die

Matrix $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn die Punktmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ganz im Endlichen liegt. Hingegen kann man [etwa auf Grund der bei (33)″ benutzten Matrix] ohne weiteres nichtbeschränkte Matrizen herstellen, bei welchen $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ ganz im Endlichen liegen. Erst recht ist es also nicht möglich, $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auf Grund des Abschnittseigenwertesystems $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$ der (beschränkten oder nicht beschränkten) Matrix $\mathfrak{A}$ zu bestimmen.

[Man erkennt aber leicht, daß bei jeder beschränkten normaloiden Matrix $\mathfrak{A}$ der Bereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, der bei beliebigen beschränkten $\mathfrak{A}$ das System der Abschnittseigenwerte ganz in seinem Innern enthalten kann, durch $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$, also erst recht durch $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$, vollständig bestimmt wird, wenn das Spektrum — nicht wie bei (18) — in dem abgeschlossenen Abschnittsspektrum liegt (diese Voraussetzung ließe sich, wie aus dem Beweise hervorgeht, auf verschiedene Weisen verschärfen). Um dies zu zeigen, stützen wir uns auf die später zu beweisende Konvexitätsregel, wonach die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ von $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ (die Beschränktheit der normaloiden Matrix $\mathfrak{A}$ vorausgesetzt). Offenbar ist also jeder Randpunkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, der nicht in dem Innern eines eventuellen geradlinigen Begrenzungsstückes von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, d. h. jeder sogenannter extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$, auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten. Daraus folgt aber, da $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ in $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ liegt, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ die konvexe Hülle von $\mathbf{S}_0'(\mathfrak{A})$ darstellt, woraus die Behauptung folgt.]

Wir betrachten nun die Hermiteschen Matrizen. Da jetzt $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ gilt, so ist der beschränkte Bereich $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ wegen (14) ein auf der reellen Achse gelegenes Intervall (von dem trivialen Fall $\mathfrak{A} = c\mathfrak{E}$, $c \gtreqless 0$, wo es auf einen Punkt zusammenschrumpft, wollen wir absehen). Ebenso ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A}_{[n]})$ bekanntlich das Intervall $\lambda_1^{[n]} \leqq \lambda \leqq \lambda_n^{[n]}$, wenn $\lambda_1^{[n]}$ wieder den kleinsten, $\lambda_n^{[n]}$ den größten (stets reellen) Eigenwert von $\mathfrak{A}_{[n]}$ bedeutet. Aus (30) folgt also zunächst, daß

$$\lambda_1^{[n+1]} \leqq \lambda_1^{[n]}, \quad \lambda_n^{[n]} \leqq \lambda_{n+1}^{[n+1]} \qquad (\lambda_1^{[n]} \leqq \lambda_2^{[n]} \leqq \ldots \leqq \lambda_n^{[n]})$$

gilt, und sodann, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ aus dem Intervalle $\lim \lambda_1^{[n]} \leqq \lambda \leqq \lim \lambda_n^{[n]}$ besteht, also durch die beiden extremen Häufungsstellen der Abschnittseigenwerte begrenzt wird. Es ist also trivial, daß $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ identisch ist mit der konvexen Hülle der Abschnittseigenwerte. Nun ist aber $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch mit $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$, d. h. mit der konvexen Hülle des eigentlichen Spektrums $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ identisch. Wir erhalten also den gewiß bekannten Satz [vgl. loc. cit. [4]), S. 363], daß die beiden extremen Häufungspunkte $\lambda = \lim \lambda_1^{[n]}$, $\lambda = \lim \lambda_n^{[n]}$ stets in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ liegen. Wie wenig selbstverständlich dies ist, haben wir bei (34) gesehen. — Der Satz kann auf nicht beschränkte Hermitesche Matrizen über-

tragen werden[27]), wobei der Einfachheit halber die Konvergenz einer jeden Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$; $p = 1, 2, \ldots$ ein für allemal angenommen sein möge.

Es handelt sich dabei um folgendes. Nach dem Vorangehenden ist die Hermitesche Matrix $\mathfrak{A}$ dann und nur dann beschränkt, wenn die $\lambda_\nu^{[n]}$ in einem endlichen Intervall liegen. Dementsprechend möge $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt genannt werden, wenn $\mathbf{S}_0(\mathfrak{A})$ mittels einer Halbgeraden überdeckt werden kann. Es möge ferner — aus Gründen, die ich in meinem Aufsatz[27b]) näher ausgeführt habe — eine Hermitesche Matrix $\mathfrak{A}$ als statistisch sinnvoll bezeichnet werden, wenn das Hilbertsche Auswahlverfahren[28]) überflüssig ist (also z. B. wenn $\mathfrak{A}$ beschränkt ist). Zu jeder Hermiteschen Matrix kann man mittels des Auswahlverfahrens Spektra $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ zuordnen, so daß $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ eindeutig bestimmt ist, wenn das Auswahlverfahren überflüssig ist; im Spezialfall der beschränkten Matrizen geht dieses $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ in die in § 2 erklärte Punktmenge über. Es gelten nun die folgenden Sätze:

I. Die halbbeschränkten Matrizen sind statistisch sinnvoll[27a]).

II. Liegen alle $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ von $\mathfrak{A}$ auf einer Halbgerade, so ist $\mathfrak{A}$ halbbeschränkt[27c]). — Die Umkehrung von Satz II, der bis zum Übereinstimmen der extremen Punkte verschärft werden kann, ist trivial.

Es seien hier die folgenden Anwendungen dieser Sätze zusammengestellt.

A. Nehmen wir an, daß die Hermitesche Matrix $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine sogenannte Jacobische Matrix ist[29]):

$$a_{pq} = 0 \quad \text{für} \quad |p - q| > 1; \qquad a_{p\,p-1} = \bar{a}_{p-1\,p} \neq 0; \qquad a_{pp} \gtreqless 0.$$

In diesem Spezialfall kann II. aus der Kettenbruchtheorie entnommen werden (Heine), während I. in ein gut brauchbares Konvergenzkriterium für assoziierte Kettenbrüche übergeht[30]).

B. In dem Toeplitzschen Spezialfall folgt, wie man sich leicht überzeugt, der folgende bekannte Satz[31]): Sind für alle Abschnitte der formal gebildeten Potenzreihe $f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ die Toeplitzschen Determinantenkriterien des Carathéodoryschen Problems erfüllt, so ist $f(z)$ für $|z| < 1$ konvergent und von positivem Realteil.

---

[27]) Vgl. A. Wintner: a) Sächs. Sitzber. 1927, S. 145 ff.; b) Zeitschr. f. Phys. **49** (1928) S. 684 ff.; c) Einführung in den mathematischen Apparat der Quantenmechanik, Leipzig, S. Hirzel, 1929.

[28]) Gött. Nachr. 1906, S. 164 ff. In meiner Note [27a]) habe ich gezeigt, daß das Auswahlverfahren bei allen von Hilbert (loc. cit.) betrachteten (auch nicht beschränkten) Matrizen überflüssig ist. Doch gibt es auch weitere Hermitesche Matrizen; vgl. z. B. [27b]).

[29]) E. Hellinger und O. Toeplitz, J. f. Math. **144** (1914), S. 219—238, 318, ferner O. Toeplitz, Gött. Nachr. 1910, S. 489 ff.

[30]) A. Wintner, Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 285—289.

[31]) Vgl. insb. C. Carathéodory, Rend. Palermo **32** (1911), S. 213—217; G. Herglotz, Sächs. Sitzber. 1911, S. 501—511.

C. Die Spektra der quantenmechanischen Matrizen (gemeint sind die Energiematrizen) liegen bekanntlich nicht im Endlichen, jedoch meistens — z. B. bei dem Wasserstoff — auf einer Halbgerade[32]). Diese Matrizen sind also nicht beschränkt, jedoch wegen II. gewiß halbbeschränkt. Mit Rücksicht auf I. sind also die wasserstoffähnlichen Energiematrizen statistisch sinnvoll.

D. Vor einiger Zeit habe ich das Differentialsystem der kleinen freien Schwingen eines (nicht notwendig stabilen) Oszillators unter gewissen Voraussetzungen (z. B. unter der Voraussetzung der Beschränktheit der nicht notwendig Hermiteschen Matrix) mittels Fourierscher Integrale auf Grund der „Spektralmatrix" integriert[33]). Herr Murray[34]) hat diese Formeln unter der Stabilitätsannahme, daß $-\lambda_\nu^{[n]} > \text{Konst.} > 0$ ist, auf die Klasse derjenigen Hermiteschen Matrizen übertragen, bei welchen jede Reihe $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}|^2$ konvergiert. Herr Murray bedient sich dabei des Auswahlverfahrens, und die Eindeutigkeit der Zerlegung des Fourierschen Wellenpakets in Elementarwellen (Hellingersche Differentiallösungen) blieb dabei unerledigt. Aus I. folgt nun, daß dies behoben werden kann[35]): nach der Stabilitätsannahme ist die Matrix halbbeschränkt, also statistisch sinnvoll, das Auswahlverfahren ist daher überflüssig, da sich bei dem Grenzübergang $\mathfrak{A}_{[n]} \to \mathfrak{A}$ nur *eine* Spektralmatrix ergibt. — Der Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung selbst ließe sich (unter der Voraussetzung, daß nur für alle t gleichmäßig beschränkte Linearformen zugelassen werden) nach der bekannten C. Jordanschen Schlußweise erbringen.

§ 5.

Die Konvexitätsregel.

Es sei wieder $\mathfrak{A}$, wie im folgenden stets, eine beschränkte Matrix. Wie wir wissen, ist $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ ein beschränkter konvexer Bereich, der das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und daher auch die konvexe Hülle $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ des Spektrums enthält. Es gilt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$ offenbar dann und nur dann, wenn jeder extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten ist. Unter einem extremen Punkt ist dabei, wie erwähnt, ein Punkt einer abgeschlossenen konvexen Menge zu verstehen, der am Rande, aber nicht im Innern eines

---

[32]) Vgl. W. Heisenberg, loc. cit. [9]), S. 702–703.

[33]) Vgl. meine unter [45]) zitierten Noten sowie Ann. d. Phys. **82** (1927), S. 346–354.

[34]) F. H. Murray, Annals of Math. **29** (1928), S. 133–139.

[35]) Es ist jedoch, mit Rücksicht auf die Theorie von Herrn Carleman[21]), wesentlich, daß wir uns auf Zerlegungen beschränken, die sich mittels des speziellen Grenzüberganges $\mathfrak{A}_{[n]} \to \mathfrak{A}_{[n]}$ ergeben. Vgl. [27b]).

eventuellen geradlinigen Begrenzungsstückes liegt. Wir wollen beweisen, daß bei jedem normaloiden $\mathfrak{A}$ die extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ auch in $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ enthalten sind. Anders ausgedrückt: aus $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ folgt $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) = \mathbf{W}(\mathfrak{A})$.

Der Übersicht halber führen wir diese Konvexitätsregel auf einen scheinbar weniger besagenden Spezialfall zurück. — Mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ bzw. $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt es keinen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ außerhalb des Kreises $|\lambda| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, während dieser auf seinem Rande mindestens einen Punkt des abgeschlossenen Bildbereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ enthält. Ist $\mathfrak{A}$ derart, daß es nur einen einzigen Punkt in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ gibt, der auf der Kreislinie $|\lambda| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ liegt, so wollen wir diesen Punkt als den Hauptpunkt von $\mathfrak{A}$ bezeichnen. Dieser ist offenbar ein extremer Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$. Wir beweisen nun die Konvexitätsregel zunächst in der folgenden speziellen Fassung:

Hat die Matrix einen Hauptpunkt, und ist sie normaloid, so liegt der Hauptpunkt in dem Spektrum.

Beweis. Die obere Grenze des absoluten Betrages der Zahlen $\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})$, derer die Kopplungsform unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ fähig ist, ist nach Definition gleich $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ besteht aus diesen Zahlen und aus ihren Häufungspunkten. Es gilt also $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq \mathbf{m}(\mathfrak{A})$, und es gibt eine Folge $\{\mathfrak{x}_n\}$ derart, daß $|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n)|$ für $n \to \infty$ gegen $\mathbf{m}(\mathfrak{A})$ strebt; hierbei und auch später ist $|\mathfrak{x}| = 1$, $|\mathfrak{x}_n| = 1$. Da nun $\mathfrak{A}$ einen Hauptpunkt haben soll, so gibt es in $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ einen und nur einen Punkt $\lambda = \lambda_0$ derart, daß $|\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A})$ ausfällt. Offenbar gilt also die Ungleichheit

$$|\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x})| \leqq |\lambda_0| = \mathbf{m}(\mathfrak{A}) \tag{35}$$

für alle $\mathfrak{x}$ und die Grenzgleichung

$$\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n) \to \lambda_0 \tag{36}$$

für passende $\mathfrak{x}_n$, und es gibt nur eine Zahl λ_0 von dieser Beschaffenheit, so daß mit Rücksicht auf (14) auch

$$\Phi(\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to \bar{\lambda}_0 \tag{37}$$

gilt. Aus (4), (16), (35), (36) folgt ferner

$$\liminf_{n=\infty} \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \geqq (\mathbf{m}(\mathfrak{A}))^2 = |\lambda_0|^2. \tag{38}$$

Andererseits ist $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ nach Definition die obere Grenze des Betrages[36]) von $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$, und $\mathbf{m}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*)$ ist nach (10) immer $= (\mathbf{r}(\mathfrak{A}))^2$, mithin

$$\limsup_{n=\infty} |\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n)| \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{A}). \tag{39}$$

---

[36]) Übrigens ist $\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x})$ wegen (16) stets $\geqq 0$.

Da nun $\mathfrak{A}$ nach Voraussetzung normaloid ist, d. h. $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ gilt, so können wir mit Rücksicht auf (39) an Stelle von (38) einfach

$$\Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to |\lambda_0|^2 \tag{40}$$

schreiben. Endlich ist

$$\Phi(\mathfrak{E}; \mathfrak{x}_n) \to 1 \tag{41}$$

wegen $|\mathfrak{x}_n| = 1$ trivial. Aus (41), (36), (37), (38) folgt nun

$$|\lambda_0|^2 \Phi(\mathfrak{E}; \mathfrak{x}_n) - \bar{\lambda}_0 \Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}_n) - \lambda_0 \Phi(\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) + \Phi(\mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to 0,$$

oder wegen $\Phi(\alpha\mathfrak{M} + \beta\mathfrak{N}; \mathfrak{x}) = \alpha\Phi(\mathfrak{M}; \mathfrak{x}) + \beta\Phi(\mathfrak{N}; \mathfrak{x})$

$$\Phi(|\lambda_0|^2\mathfrak{E} - \bar{\lambda}_0\mathfrak{A} - \lambda_0\mathfrak{A}^* + \mathfrak{A}\mathfrak{A}^*; \mathfrak{x}_n) \to 0,$$

also mit Rücksicht $(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^* = \bar{\lambda}_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A}^*$

$$\Phi((\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})(\lambda_0\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*; \mathfrak{x}_n) \to 0; \quad |\mathfrak{x}_n| = 1,$$

so daß die unter (20) stehende erste Zahl[37]) in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ mit Rücksicht auf die Definition von $\mathbf{n}(\mathfrak{C})$ verschwindet und daher $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^{-1}$ in dem Hauptpunkt $\lambda = \lambda_0$ nicht existiert. Damit ist die Konvexitätsregel für den Spezialfall eines Hauptpunktes bewiesen.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ irgendeine normaloide Matrix. Ersetzt man $\mathfrak{A}$ durch $\eta\mathfrak{A}$, so bleibt der normaloide Charakter $\mathbf{m}(\mathfrak{A}) = \mathbf{r}(\mathfrak{A})$ erhalten, da

$$\mathbf{m}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\,\mathbf{m}(\mathfrak{A}), \quad \mathbf{r}(\eta\mathfrak{A}) = |\eta|\,\mathbf{r}(\mathfrak{A})$$

gilt, und zwar entsteht $\mathbf{W}(\eta\mathfrak{A})$ aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Drehung um den Punkt $\lambda = 0$, wenn $|\eta| = 1$ ist. — Von der translatorischen Transformation läßt sich ebenso behaupten, daß $\mathfrak{A} + l\mathfrak{E}$ normaloid ist, wenn $\mathfrak{A}$ es ist und $|l|$ hinreichend groß gewählt wird; $\mathbf{W}(\mathfrak{A} + l\mathfrak{E})$ entsteht aus $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ durch eine Verschiebung um den Betrag $|l|$ in der durch $\arg l$ festgelegten Richtung. Die beiden Transformationen

$$\mathfrak{A} \rightrightarrows \eta\mathfrak{A}, \quad |\eta| = 1; \qquad \mathfrak{A} \rightrightarrows \mathfrak{A} + l\mathfrak{E}, \quad |l| > \text{konst.},$$

welchen gegenüber die Eigenschaft (8) invariant ist, mögen als die zulässigen Bewegungen von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ bezeichnet werden. Bei diesen bleiben die Punktmengen $\mathbf{S}(\mathfrak{A})$ und $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ mit $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ starr verbunden. Offenbar kann man nun zu jedem extremen Punkte P des (stets konvexen) Bereiches $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ eine zulässige Bewegung angeben, welche den Bereich in eine Lage überführt, in welcher dieser einen Hauptpunkt hat, der in die neue Lage von P hineinfällt (die Drehungen sind für die vorliegenden Zwecke entbehrlich). Würde es also eine normaloide Matrix $\mathfrak{A}$ geben, bei welcher nicht alle extremen Punkte von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ in dem Spektrum liegen, so würde es auch eine nor-

[37]) Und übrigens, wie aus dem Beweise hervorgeht, auch die zweite.

maloide Matrix geben, der einen außerhalb ihres Spektrums gelegenen Hauptpunkt hat. Folglich gibt es keine normaloide Matrix $\mathfrak{A}$, bei welcher nicht jeder extreme Punkt von $\mathbf{W}(\mathfrak{A})$ in dem Spektrum liegt. Damit ist die Konvexitätsregel bewiesen.

§ 6.

Die unitären Matrizen.

Die Matrix $\mathfrak{U}$ heißt unitär, wenn[38])

$$\mathfrak{U}\mathfrak{U}^* = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad \mathfrak{U}^*\mathfrak{U} = \mathfrak{E} \tag{42}$$

gilt. Es gibt keine unitäre Matrix, die nicht beschränkt ist, aber auch keine, die vollstetig wäre[39]). $\mathfrak{U}$ ist wegen (42) dann und nur dann unitär, wenn $\mathfrak{U}^{-1}$ vorhanden und $=\mathfrak{U}^*$ ist. Mit Rücksicht auf (22), (23) folgt daraus

$$\mathbf{S}(\mathfrak{U}) = \frac{1}{\mathbf{S}(\mathfrak{U}^*)} = \overline{\mathbf{S}(\mathfrak{U}^*)},$$

so daß $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ auf dem Rande des Einheitskreises liegt. Man kann dies auch wie folgt einsehen. Da wegen (42) und mit Rücksicht auf die Definition (12) jede unitäre Matrix normal ist, so können wir das Kriterium (21) anwenden. Dieses besagt jetzt, da ja $\mathbf{n}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*) = \mathbf{n}(\mathfrak{E}) = 1$ ist, daß λ gewiß außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{U}$ liegt, wenn $|\lambda|^2 + 1 - 2\lambda\,\mathbf{m}(\mathfrak{U}) > 0$ ausfällt. Nun ist aber wegen (6), (10), (42)

$$(0 \leqq)\ \mathbf{m}(\mathfrak{U}) \leqq \mathbf{r}(\mathfrak{U}) = \sqrt{\mathbf{m}(\mathfrak{U}\mathfrak{U}^*)} = \sqrt{\mathbf{m}(\mathfrak{E})} = 1, \tag{43}$$

so daß λ erst recht außerhalb des Spektrums liegt, wenn $|\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda| > 0$ gilt. Damit also λ in dem Spektrum liegt, muß $(1 - |\lambda|)^2 \leqq 0$ und daher

---

[38]) Wie das bekannte Beispiel (18) zeigt, sind die beiden Bedingungen (42) voneinander unabhängig.

[39]) Denn der Punkt $\lambda = 0$ liegt in dem Spektrum einer jeden vollstetigen Matrix, so daß sie keine beschränkte Reziproke haben kann (das Produkt einer vollstetigen Matrix in eine beschränkte ist nämlich, wie bekannt, stets vollstetig und kann daher nicht die Einheitsmatrix sein). — Da jede normale vollstetige Matrix unitär auf die Diagonalform gebracht werden kann[16]), so enthält daher das Spektrum jeder *normalen*, von der Nullmatrix verschiedenen vollstetigen Matrix mindestens zwei Punkte, nämlich mindestens einen von dem Nullpunkt verschiedenen Punkt. Ist $\mathfrak{C}$ vollstetig, so gilt für $\mathfrak{E} + \mathfrak{C}$ der Alternativsatz auch dann, wenn $\mathfrak{C}$ nicht normal ist (Hilbert). Mit $\mathfrak{C} = -\lambda^{-1}\mathfrak{A}$ folgt daraus, daß die Alternative bei jedem vollstetigen $\mathfrak{A}$ für $\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ gewiß richtig ist, wenn $\lambda \neq 0$ gewählt wird. Für $\lambda = 0$ ist sie aber im allgemeinen (z. B. in dem normalen Falle bei den „abgeschlossenen" $\mathfrak{A}$) unrichtig, und zwar bereits dann, wenn man sich auf (nicht normale) „Volterrasche" vollstetige Matrizen $\mathfrak{A}$ beschränkt, deren Spektrum *nur* den trivialen Punkt $\lambda = 0$ enthält. Vgl. übrigens die Einleitung.

$|\lambda| = 1$ gelten, w. z. b. w. — Da das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ stets in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ liegt (§ 2), der jetzt mindestens eine Zahl von dem Betrag Eins enthält, und da nach der Definition von $\mathbf{m}(\mathfrak{U})$ in dem Wertbereiche $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ mindestens eine Zahl von dem Betrag $\mathbf{m}(\mathfrak{U})$ liegt (§ 1), so gilt offenbar $\mathbf{m}(\mathfrak{U}) \geqq 1$, und daher wegen (43) einfach $\mathbf{m}(\mathfrak{U}) = \mathbf{r}(\mathfrak{U}) = 1$, so daß die unitären Matrizen laut Definition (8) normaloid sind. Wir können daher die Konvexitätsregel anwenden. So folgt, da das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$, das stets vorhanden ist, auf dem Rande des Einheitskreises liegt, daß nur die folgenden drei Fälle möglich sind. Entweder besteht $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ aus einem einzigen Punkt, der sodann mit $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ identisch ist; übrigens ist in diesem Falle $\mathfrak{U} = c\mathfrak{E}$, $|c| = 1$. Oder $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ besteht aus zwei Punkten, und $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ ist die diese verbindende Sehne. Drittens ist es möglich, daß $\mathbf{S}(\mathfrak{U})$ mindestens drei Punkte enthält; dann ist $\mathbf{W}(\mathfrak{U})$ derjenige Jordansche Bereich, der begrenzt wird durch die kürzeste[40]) unter den [doppelpunktfreien[41])] Kurven, die durch jeden Punkt des Spektrums hindurchgehen, so daß also der Rand des Wertbereiches von endlich oder abzählbar unendlich vielen Sehnen oder Bögen oder Sehnen *und* Bögen der Einheitskreislinie (eventuell von dieser selbst) gebildet wird. — Da eine Diagonalmatrix unitär ist, wenn alle ihre Diagonalelemente vom Betrage Eins sind, und da das Spektrum einer Diagonalmatrix aus den in der Diagonale liegenden Zahlen und ihren Häufungsstellen besteht, so kann jede auf dem Rande des Einheitskreises gelegene abgeschlossene Punktmenge das Spektrum einer unitären Matrix sein; es wird sich übrigens herausstellen, daß es — im Gegensatz zu den endlichen unitären Matrizen — unitäre Matrizen gibt, die durch keine unitäre Transformation auf die Diagonalform gebracht werden können (Streckenspektrum). — Das Spektrum einer reellen unitären Matrix (das ist eine sogenannte vollständig orthogonale Matrix) ist symmetrisch in bezug auf die reelle Achse; dies [und wesentlich mehr; vgl. übrigens die Schlußbemerkungen von § 8] wird aus der spektralen Zerlegung der Resolvente hervorgehen. Vgl. übrigens (22), (23).

Die beiden Matrizen $\mathfrak{A} = \| a_{pq} \|$, $\mathfrak{B} = \| b_{pq} \|$ mögen als *voneinander getrennt* bezeichnet werden, wenn ihre Kopplungsformen nur von verschiedenen Variablen x_p abhängen, d. h. wenn folgendes gilt: Ist das Zeigerpaar (p_0, q_0) derart, daß es in der p_0-ten Zeile oder in der q_0-ten Spalte von $\mathfrak{A}$ mindestens ein Element verschwindet, so verschwinden alle Elemente sowohl in der p_0-ten Zeile als auch in der q_0-ten Spalte von $\mathfrak{B}$; und ist umgekehrt mindestens eine der 2∞ Zahlen $b_{p_0 q}$, $b_{p q_0}$ von Null verschieden, so verschwinden alle 2∞ Zahlen $a_{p_0 q}$, $a_{p q_0}$. Aus dem bei (44a), (44b)

[40]) Die Bogenlänge des Randes ist $\leqq 2\pi$.

[41]) Vgl. jedoch F. Levi, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 148ff.

Gesagten einerseits, aus der zu (45) gemachten Bemerkung andererseits wird hervorgehen, daß man jede unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ mittels einer unitären Matrix $\mathfrak{V}$ in eine andere transformieren kann, die in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens drei von Null verschiedene Elemente enthält. Eine Matrix $\mathfrak{A}$ mit der unitären Matrix $\mathfrak{V}$ zu transformieren, bedeutet dabei den Ersatz von $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{V}^* = \mathfrak{V}\mathfrak{A}\mathfrak{V}^{-1}$. Da die unitären Matrizen offenbar eine Gruppe bilden, so ist der unitäre Charakter unitären Transformationen gegenüber invariant.

Durch Vergleich der Ergebnisse der Dissertation von Herrn Hellinger mit denjenigen, die wir in § 8 erhalten werden, ergibt sich nun folgendes: Zu jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ gibt es eine unitäre Matrix $\mathfrak{V}$ derart, daß

$$\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{V}^{-1} = \mathfrak{W}_0 + \mathfrak{W} \tag{44a}$$

gilt, wobei $\mathfrak{W}_0$ entweder die Nullmatrix oder eine unitäre Diagonalmatrix $(= \| e^{i\lambda_p}\delta_{pq} \|,\ 0 \leqq \lambda_p < 2\pi)$, und $\mathfrak{W}$ entweder die Nullmatrix oder eine von $\mathfrak{W}_0$ getrennte unitäre Matrix ist, die in dem letzteren Falle kein Punktspektrum hat[42]) und eine Zerlegung

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_2 + \ldots \tag{44b}$$

in die Summe von höchstens abzählbar vielen, voneinander paarweise getrennten unitären Matrizen gestattet, die kein Punktspektrum und ein (in einem der Dissertation von Herrn Hellinger entsprechenden Sinne) *einfaches* Streckenspektrum haben; diese Zerlegung ist nicht eindeutig bestimmt, doch kann man das Hellinger-Hahnsche Äquivalenzkriterium[43]) auf die unitären Matrizen ohne Schwierigkeit ebenso übertragen, wie die Theorie der Jacobischen Matrizen[29]), welchen jetzt die unter (45) stehenden entsprechen.

Es handelt sich dabei um folgendes. Bezeichnet $\varrho(\mu)$ eine für $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ erklärte, reellwertige, monoton nicht abnehmende, von links stetige Funktion, die keine Treppenfunktion ist, d. h. mindestens abzählbar unendlich viele Nichtkonstanzstellen hat, so kann man nach dem Schmidtschen Orthogonalisierungsprozeß auf genau eine Weise zu jedem $n \geqq 1$ ein trigonometrisches „ganzes" Polynom

$$\chi_n(\mu) = \sum_{m=0}^{n-1} \gamma_m^{(n)} e^{im\mu}; \qquad \gamma_{n-1}^{(n)} > 0,$$

---

[42]) D. h. es ist nicht möglich, aus der Matrix auch nur irgendein „Kreuz" $p = p_0$, $q = q_0$ „abzutrennen" (vgl. oben), also erst recht ist es nicht möglich, sie unitär in eine Diagonalmatrix zu transformieren.

[43]) E. Hellinger, Diss. Göttingen 1907; H. Hahn, Monatshefte f. Math. **23** (1912), S. 161—224.

wobei also $m \geqq 0$ ist, derart bestimmen, daß

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \chi_p(\mu)\,\bar{\chi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu) = \delta_{pq}, \qquad p, q = 1, 2, \ldots,$$

also für ein beliebiges trigonometrisches ganzes Polynom

$$\theta_k(\mu) = \sum_{m=0}^{k-1} C_m\, e^{im\mu}; \qquad C_{k-1} \neq 0$$

offenbar

$$\int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\chi_n(\mu)\,d\varrho(\mu) = \int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\bar{\chi}_n(\mu)\,d\varrho(\mu) = 0, \qquad k \neq n;$$

$$\int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\chi_k(\mu)\,d\varrho(\mu) \neq 0, \qquad \int_0^{2\pi} \theta_k(\mu)\,\bar{\chi}_k(\mu)\,d\varrho(\mu) \neq 0,$$

und daher insbesondere in der Matrix

$$(45) \qquad \mathfrak{Z} = \|z_{pq}\|, \qquad z_{pq} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\mu}\,\chi_p(\mu)\,\bar{\chi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu)$$

ersichtlich

$$z_{pq} = 0, \quad |p-q| > 1; \qquad z_{pq} \neq 0, \quad |p-q| = 1; \qquad z_{pp} = \text{ oder } \neq 0$$

gilt. Diese Matrix ist unitär (§ 7) und kann außer einem Punktspektrum nur ein einfaches Streckenspektrum haben; umgekehrt läßt sich jede unitäre Matrix, deren Spektrum etwa ein einfaches Streckenspektrum ist, mittels einer unitären Transformation in eine Matrix $\mathfrak{Z}$ überführen, wobei $\varrho(\mu)$ stetig, jedoch nicht eindeutig bestimmt ist[44]). —

Es sei $\mathfrak{A}$ irgendeine beschränkte Matrix. Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Phi(\mathfrak{A}^n; \mathfrak{x})}{n!}$$

mit Rücksicht auf die aus (3) folgende Ungleichung $\mathfrak{r}(\mathfrak{A}^n) \leqq (\mathfrak{r}(\mathfrak{A}))^n$ für alle normierten $\mathfrak{x}$ sogar absolut und gleichmäßig konvergiert, so können wir eindeutig eine Matrix

$$(46) \qquad e^{\mathfrak{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}^n}{n!}$$

einführen, die wegen $\mathfrak{r}(e^{\mathfrak{A}}) \leqq e^{\mathfrak{r}(\mathfrak{A})} < +\infty$ beschränkt ist. Man schließt

[44]) Wir werden in § 8 jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ mittels (72) eine Spektralmatrix zuordnen. — Berechnet man auf bekannte Weise (unter Benutzung der Parsevalschen Vollständigkeitsrelation) die Potenzen der unter (45) stehenden „unitären Jacobischen Matrix", so folgt aus (72), daß die Spektralmatrix von (45) sich aus $d\tau_{pq} = \chi_p \bar{\chi}_q\, d\varrho$ berechnet. — Über die Beziehungen der obigen zu den polynomischen Untersuchungen von Herrn Szegö vgl. S. 281 weiter unten.

aus (46), ebenso wie bei der gewöhnlichen Exponentialreihe, daß

$$e^{\mathfrak{A}+2\pi i m\mathfrak{E}} = e^{\mathfrak{A}} \qquad m = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

ferner $e^{\pi i\mathfrak{E}} = -\mathfrak{E}$ und offenbar $e^{\mathfrak{O}} = \mathfrak{E}$ gilt, wenn $\mathfrak{O}$ die Nullmatrix $\|0\|$ bezeichnet. Da die Binomialregel

$$(\mathfrak{A}+\mathfrak{B})^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \mathfrak{A}^{n-m}\mathfrak{B}^m$$

bereits für $n = 2$ nur dann richtig ist, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ vertauschbar ist, so kann

$$e^{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}} = e^{\mathfrak{A}} e^{\mathfrak{B}}, \tag{47}$$

wobei rechterhand Matrizenmultiplikation gemeint ist, mittels (46) nur dann — und dann offenbar — verifiziert werden, wenn die beiden beschränkten Matrizen der Bedingung $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$ genügen. Ohne diese Annahme kann (47) unrichtig sein (denn es gibt nicht vertauschbare Paare unitärer Matrizen, und jede unitäre Matrix kann, wie wir sehen werden, in der Gestalt $e^{\mathfrak{A}}$ dargestellt werden). — Aus $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ folgt, wie man sich leicht überzeugt, daß für die Matrix $\mathfrak{A} = i\mathfrak{H}$ bei jedem $n \gtrless 0$ die Beziehung $(-\mathfrak{A})^n = (\mathfrak{A}^*)^n$ gilt, und daher $e^{-\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{A}^*}$ wird. Nun ist $\mathfrak{A}$ wegen $\mathfrak{A} = i\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}^* = -i\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{A}^*$ gewiß vertauschbar, so daß aus (47) wegen $e^{\mathfrak{A}-\mathfrak{A}} = e^{\mathfrak{O}} = \mathfrak{E}$ offenbar $e^{\mathfrak{A}}e^{\mathfrak{A}^*} = e^{\mathfrak{A}^*}e^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ folgt. Wegen $e^{\mathfrak{A}^*} = (e^{\mathfrak{A}})^*$ können wir dies auch so ausdrücken: ist die beschränkte Matrix $\mathfrak{H}$ Hermitesch, so ist $e^{i\mathfrak{H}}$ unitär. Daß auch die Umkehrung gilt (§ 8), daß nämlich jede unitäre Matrix mittels einer passenden beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ in der Gestalt $e^{i\mathfrak{H}}$ dargestellt werden kann, erweist sich bei endlichen Matrizen nach einer unitären Transformation auf die Diagonale als eine Trivialität, bei den unendlichen Matrizen aber, wo diese Schlußweise mit Rücksicht auf die Streckenspektra (und da die Abschnitte nicht unitär zu sein brauchen) wesentlich versagt, scheint sehr tief zu liegen und erfordert einen unvergleichbar feineren Apparat, als unser bisheriger war.

In § 7 werden wir bei jeder beschränkten Hermiteschen Matrix $\mathfrak{H}$ zu jeder, etwa stetigen, für alle $\mu (\gtrless 0)$ erklärten, nicht notwendig reellwertigen Funktion $F(\mu)$ eindeutig eine beschränkte Matrix $F(\mathfrak{H})$ derart zuordnen, daß die Zuordnung die folgenden Eigenschaften hat: 1. sie ordnet dem Produkte $F_1(\mu)\,F_2(\mu)$ zweier Funktionen das Matrizenprodukt $F_1(\mathfrak{H})\,F_2(\mathfrak{H})$ zu, so daß $F_1(\mathfrak{H})$ mit $F_2(\mathfrak{H})$ offenbar vertauschbar ist; 2. sie ordnet der zu $F(\mu)$ konjugierten Funktion die begleitende Matrix von $F(\mathfrak{H})$ zu, so daß $F(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf 1. normal ist; 3. die Funktion $F(\mu) \equiv 1$ läßt der Matrix $\mathfrak{H}$ die Einheitsmatrix entsprechen; 4. das Spektrum von

$F(\mathfrak{H})$ besteht aus derjenigen Punktmenge in der komplexen F-Ebene, auf welche das auf der reellen μ-Gerade gelegene Spektrum von $\mathfrak{H}$ vermöge der Beziehung $F = F(\mu)$ abgebildet wird; 5. die Werte, welche $F(\mu)$ außerhalb des Spektrums von $\mathfrak{H}$ annimmt, sind für die Zuordnung im wesentlichen belanglos. — Damit also $F(\mathfrak{H})$ unitär ist, muß, da das Spektrum von $F(\mathfrak{H})$ nur auf dem Rande des Einheitskreises liegen kann, $|F(\mu)| \equiv 1$ sein. Ist umgekehrt diese Bedingung erfüllt, so gilt $\overline{F}(\mu) F(\mu) \equiv 1$, wofür mit Rücksicht auf 1., 2., 3. auch

$$(F(\mathfrak{H}))^* (F(\mathfrak{H})) = (F(\mathfrak{H})) (F(\mathfrak{H}))^* = \mathfrak{E}$$

geschrieben werden kann, so daß $F(\mathfrak{H})$ unitär ist. Es ergibt sich aber so nicht einmal, daß jede unitäre Matrix in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ geschrieben werden kann, wenn man über $\mathfrak{H}(= \mathfrak{H}^*)$ und $F(\mu)$ unter Berücksichtigung der notwendigen Bedingung $|F(\mu)| \equiv 1$ passend verfügt. — Nun werden wir zeigen, daß man einfach mit der Funktion $F(\mu) = e^{i\mu}$ stets auskommt, und wir werden sogar eine *ein*eindeutige Korrespondenz herstellen.

Der Übergang von den unitären Matrizen zu den Hermiteschen (oder von dem trigonometrischen Momentenproblem zu dem gewöhnlichen) beruht dabei auf einer Laplaceschen Transformation[45]), während andererseits der Zusammenhang der unitären Matrizen mit dem trigonometrischen Momentenproblem durch einen Vergleich des komplex geschriebenen Poissonschen Integrals[46]) mit der (noch nicht alle unitären Matrizen umfassenden) Cayley-Hermiteschen Formel[47]) nahegelegt ist. Die Durchführung dieses Ansatzes erfolgt in § 8. Das Schlußergebnis könnte auf eine geläufige Weise[48]) im Rahmen der Lieschen Theorie veranschaulicht werden.

Es handelt sich dabei um folgendes[33]). Es sei $\mathfrak{A} = \|a_{pq}\|$ eine beschränkte Hermitesche Matrix und $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ ihre Spektralmatrix (vgl. § 7). Dann ist die allgemeine Lösung des Differentialsystems $\dot{\mathfrak{y}}_t = \mathfrak{A}\,\mathfrak{y}_t$, d. h. von

$$\frac{dy_p(t)}{dt} = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}\, y_q(t); \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

---

[45]) A. Wintner, Annalen d. Phys. **81** (1926), S. 577ff., S. 854; vgl. G. Doetsch, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Ver. **36** (1927), S. 24. Hierher gehört auch eine interessante Bemerkung von Herrn Hardy über den Zusammenhang der Fourierschen Umkehrformel mit den unter (48) stehenden Resolventenintegralen, Messenger of Math. **54** (1924), S. 22.

[46]) G. Herglotz, loc. cit. [31]), Formel (60). — Vgl. E. Study, Vorlesungen über ausgewählte Fragen der Geometrie. Zweites Heft, herausgegeben unter Mitwirkung von W. Blaschke, Teubner 1913, S. 94ff. — Siehe auch I. Schur, l. c. [56]), insb. § 8 [zu § 1 vgl. [29])].

[47]) Siehe insb. G. Frobenius, Journ. f. Math. **84** (1878), S. 37–38.

[48]) Vgl. G. Kowalewski, Wiener Sitzungsberichte **120** (1911), S. 103ff.; H. Weyl, Zeitschr. f. Phys. **46** (1927), S. 21ff.

gegeben durch $\mathfrak{y}_t = e^{\mathfrak{A}t}\mathfrak{y}_0$ oder

$$y_p(t) = \sum_{q=1}^{\infty} y_q(0) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t} d\sigma_{pq}(\mu); \quad p = 1, 2, \ldots,$$

wobei nur $|\mathfrak{y}_0|^2 = \sum_{q=1}^{\infty} |y_q(0)|^2 < +\infty$ vorausgesetzt ist. Für t sind beliebige, auch komplexe Werte zulässig, und es gilt $|\mathfrak{y}_t|^2 < +\infty$ bei jedem t. Um aus

$$e^{\mathfrak{A}t} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu t} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

die unitären Matrizen zu erhalten, haben wir t auf der imaginären Achse zu wählen. — Ebenso ist die allgemeine Lösung auch des unendlichen Differentialsystems $\ddot{\mathfrak{x}}_t = \mathfrak{A}\mathfrak{x}_t$, d. h. von $\ddot{x}_p = \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} x_q$, durch Fourierintegrale darstellbar:

$$(*) \quad x_p(t) = \sum_{q=1}^{\infty} \left(x_p(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) + \dot{x}_q(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{-\mu} \sin \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right),$$

wobei $|\mathfrak{x}_0| < +\infty$, $|\dot{\mathfrak{x}}_0| < +\infty$ vorausgesetzt ist. Aus (*) ist es ersichtlich, daß das schwingende System nur solche „ebenen Wellen“

$$\left\| \cos \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|, \qquad \left\| \sqrt{-\mu} \sin \frac{t}{\sqrt{-\mu}} d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

emittieren kann, deren μ in dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ liegt (vgl. § 7). Diese Wellen, aus welchen sich die allgemeine Lösung, nämlich (*), gemäß dem Superpositionsprinzip aufbaut, liefern ebenfalls Lösungen von (*): sie entstehen aus den Hellingerschen Differentiallösungen. Die Wellenlösungen, die aus den Hellingerschen Differentiallösungen durch Umkehrung einer Laplaceschen Transformation entstehen, sind freilich nicht quadratisch konvergent. Sie sind für das Anfangsproblem erst nach ihrer („richtig normierten“) Superponierung vom Belang.

§ 7.

Das allgemeine Abbildungsprinzip.

Es soll zunächst an die Grundtatsachen der Hilbertschen Theorie der beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H} = \|h_{pq}\|$ erinnert werden[49]). Bezeichnet $\|R_{pq}(\lambda)\|$ die Resolvente $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{H})^{-1}$ von $\mathfrak{H}$, so gibt es eine Matrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ von für $-\infty < \mu < +\infty$ erklärten Funktionen von

[49]) Vgl. loc. cit. [3]), S. 1575 ff., oder mein unter [27]) zitiertes Buch.

beschränkter Schwankung derart, daß (außerhalb des Spektrums)

$$R_{pq}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\mu - \lambda} \tag{48}$$

gilt, und zwar ist mit Rücksicht auf eine von Stieltjes herrührende Umkehrformel die Funktion $\sigma_{pq}(\mu)$ durch $R_{pq}(\lambda)$, also $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ durch $\mathfrak{H}$ eindeutig bestimmt, wenn man die normierenden Nebenbedingungen

$$\sigma_{pq}(\mu) = \sigma_{pq}(\mu - 0), \qquad \sigma_{pq}(-\infty) = 0 \tag{49}$$

vorschreibt; $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ heißt Spektralmatrix von $\mathfrak{H}$; sie ist beschränkt. Setzt man zur Abkürzung

$$\Delta f(\mu) = f(\mu + \Delta\mu) - f(\mu), \qquad \Delta\mu > 0,$$

ferner

$$\Phi(\mu; \mathfrak{x}) = \Phi(\|\sigma_{pq}(\mu)\|; \mathfrak{x}) \equiv \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sigma_{pq}(\mu)\, x_p \bar{x}_q, \tag{50}$$

so gilt

$$\Delta\Phi(\mu; \mathfrak{x}) \geqq 0, \tag{51}$$

also z. B.

$$|\Delta\sigma_{pq}|^2 \leqq (\Delta\sigma_{pp})(\Delta\sigma_{qq}), \qquad \Delta\sigma_{pp} \geqq 0, \tag{52}$$

da $\|\Delta\sigma_{pq}(\mu)\|$ wegen (51) eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist. Mit Rücksicht auf (49) gilt dies auch von $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$, so daß

$$\sigma_{pq}(\mu) = \bar{\sigma}_{qp}(\mu) \tag{53}$$

wird. Man hat

$$\lim_{\mu=-\infty} \Phi(\mu; \mathfrak{x}) \equiv 0, \qquad \lim_{\mu=+\infty} \Phi(\mu; \mathfrak{x}) \equiv |\mathfrak{x}|^2. \tag{54}$$

Das Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ besteht aus denjenigen Zahlen μ_0, zu welchen es kein $\varepsilon > 0$ gibt derart, daß in dem Intervall $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$ die Funktion $\Phi(\mu; \mathfrak{x})$ bei jedem $\mathfrak{x}$, oder, was — wie sich leicht zeigen läßt — auf dasselbe hinausläuft, die Funktion $\sigma_{pq}(\mu)$ bei jedem p und q konstant ist [das sogenannte Punktspektrum besteht aus denjenigen (eventuellen) Punkten des Spektrums, an welchen mindestens ein σ einen Sprung erleidet; die Zahl μ liegt dann und nur dann in dem Punktspektrum, wenn die zu $\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen eine Lösung mit der absoluten Quadratsumme 1 zulassen]. Man hat daher wegen (54)

$$\sigma_{pq}(\mu) \equiv 0 \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{pq}(\mu) \equiv \delta_{pq}, \tag{55}$$

je nachdem μ ganz links oder ganz rechts von $\mathbf{T}(\mathfrak{H}) = \mathbf{W}(\mathfrak{H})$ liegt. Mit

Rücksicht auf (25), (26), (48) folgt daraus nach Entwicklung in (48)

$$\mathfrak{H}^n = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu^n \, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{56}$$

also, da

$$F_1(\mathfrak{H})\, F_2(\mathfrak{H}) = F_3(\mathfrak{H}); \qquad F_3(\mu) = F_1(\mu)\, F_2(\mu) \tag{57}$$

für Polynome $F_\nu(\mu) = \sum_{j=0}^{k} c_j^{(\nu)} \mu^j$ trivial ist, auch

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \cdot \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\mu)\, F_2(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\|, \tag{58}$$

wenn die F Polynome sind. Ist nun $F(\mu)$ eine etwa für alle μ erklärte und der Einfachheit halber stetige Funktion, so können wir, da die Nichtkonstanzstellen der σ_{pq} ganz im Endlichen, nämlich in $\mathbf{T}(\mathfrak{H}) = \mathbf{W}(\mathfrak{H})$ liegen, in Verallgemeinerung von (56) per definitionem eine Matrix

$$F(\mathfrak{H}) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \tag{59}$$

einführen. Ihre Kopplungsform kann mit Rücksicht auf den Hellyschen Satz über gliedweise Integration unter Beachtung von (2), (50), (51), (54) in der Gestalt

$$\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, d\Phi(\mu; \mathfrak{x}) \tag{60}$$

geschrieben werden, woraus wegen (51), (54) folgt, daß $\mathfrak{m}(F(\mathfrak{H})) \leqq$ ist als das Maximum von $|F(\mu)|$ [auf der Punktmenge $\mathbf{W}(\mathfrak{H})$ oder auf $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$]. Mithin ist $F(\mathfrak{H})$ beschränkt. Sind nun $F_1(\mu)$ und $F_2(\mu)$ stetige Funktionen, so kann man zunächst F_1 und sodann F_2 nach dem Weierstraßschen Satz mittels Polynome derart approximieren, daß sich die Richtigkeit von (58) für alle stetige F ergibt; denn die Nichtkonstanzstellen der σ_{pq} liegen ganz im Endlichen. Folglich gilt (57) allgemein, und wegen (48), (59) ersichtlich auch

$$F(\mathfrak{E}) = F(1)\,\mathfrak{E}, \qquad F(c\,\mathfrak{H}) = c\,F(\mathfrak{H}); \tag{61}$$

$$F_1(\mathfrak{H}) + F_2(\mathfrak{H}) = F_3(\mathfrak{H}), \qquad F_3(\mu) = F_1(\mu) + F_2(\mu).$$

Die konjugierte Matrix $\overline{F(\mathfrak{H})}$ ist offenbar gleich $\bar{F}(\bar{\mathfrak{H}})$. Wegen $\mathfrak{A}^* = \bar{\mathfrak{A}}'$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}^*$ folgt daraus, daß die begleitende Matrix

$$(F(\mathfrak{H}))^* = \bar{F}(\mathfrak{H}) \tag{62}$$

ist, wobei $\bar{F}(\mathfrak{H})$ die zu der Funktion $\bar{F}(\mu)$ gehörige „Bildmatrix" von $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Aus (62) ist ersichtlich, daß reellwertige Abbildungsfunktionen F jede Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ in eine ebensolche überführen. Es ist nun für

uns der springende Punkt, daß wir bei der Definition (59) offenbar auch nicht reellwertige Abbildungsfunktionen heranziehen und dadurch den Bereich der Hermiteschen Matrizen verlassen können.

Es bezeichne $\Omega(F(\mu))$ die Klasse der Matrizen, die in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ geschrieben werden können, wobei $\mathfrak{H}$ eine passend wählbare Hermitesche Matrix bedeutet. Wegen (53), (56) ist eine Matrix dann und nur dann Hermitesch, wenn sie der Klasse $\Omega(\mu)$ angehört, so daß also $\Omega(F(\mu))$ das durch die Funktion F entworfene Bild von $\Omega(\mu)$ ist. Wir werden sehen, daß eine Matrix dann und nur dann unitär ist, wenn sie in $\Omega(e^{i\mu})$ liegt (der erste Teil des Satzes ist, wie wir wissen, trivial). $\Omega(e^{\mu})$ ist die Klasse der positiven, $\Omega(\mu^2)$ die Klasse der nichtnegativ definiten Hermiteschen Matrizen (vgl. weiter unten). Die Beantwortung der Frage, wann eine Matrix in mindestens einem $\Omega(F(\mu))$ liegt, führt zu dem am Schluß der Einleitung formulierten Momentenproblem. So viel ist, wie erwähnt, gewiß, daß die $\Omega(F(\mu))$ nur normale Matrizen enthalten. Die durch ein F entworfene Abbildung von $\Omega(\mu)$ braucht nicht schlicht zu sein, vgl. § 8. Auch kann eine und dieselbe Matrix zwei verschiedenen $\Omega(F(\mu))$ angehören, da z. B. (34) Hermitesch und zugleich unitär ist. Die Klasse $\Omega(1)$ enthält nur die Matrix $\mathfrak{E}$.

Bezeichnet $\mathbf{t}(F)$ die konvexe Hülle derjenigen Punktmenge $\mathbf{s}(F)$ der komplexen Ebene, auf welche das auf der μ-Gerade gelegene Spektrum $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$ vermöge der Beziehung $F = F(\mu)$ abgebildet wird, so liegt der Wertbereich $\mathbf{W}(F(\mathfrak{H}))$ der Matrix $F(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf (51), (54), (60) und nach einem bekannten Schwerpunktsatz gewiß in $\mathbf{t}(F)$. Wir werden nun sehen, daß das Bild $\mathbf{s}(F)$ des Spektrums von $\mathfrak{H}$ identisch ist mit dem Spektrum $\mathbf{S}(F(\mathfrak{H}))$ des Bildes $F(\mathfrak{H})$ von $\mathfrak{H}$. Folglich gilt auch $\mathbf{t}(F) = \mathbf{T}(F(\mathfrak{H}))$, so daß $\mathbf{W}(F(\mathfrak{H}))$ in $\mathbf{T}(F(\mathfrak{H}))$ liegt. Da aber die konvexe Hülle des Spektrums bei jeder Matrix in dem Wertbereiche liegt, so muß $\mathbf{W}(F(\mathfrak{H})) = \mathbf{T}(F(\mathfrak{H}))$ sein. Die Konvexitätsregel gilt also für jede in der Gestalt $F(\mathfrak{H})$ darstellbare Matrix (jedoch, wie das Beispiel (18) gezeigt hat, auch für weitere Matrizen; vgl. auch den Anhang).

Ist $F(\mu) \geqq 0$, so ist $\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x})$ wegen (51), (60) eine nichtnegativ definite Hermitesche Form. Aus (60) kann man leicht entnehmen, daß die untere Grenze von $\Phi(F(\mathfrak{H}); \mathfrak{x})$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ gleich ist dem Minimum $\mathbf{N}(F)$ von $F(\mu)$ auf der Punktmenge $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ der μ-Gerade:

$$\mathbf{n}(F(\mathfrak{H})) = \mathbf{N}(F), \quad \text{wenn} \quad F \geqq 0.$$

Auf den Beweis, der entweder mittels der Spektralmatrix, oder auf Grund der Resolvente geführt werden kann, will ich hier nicht im einzelnen eingehen, da ich in einer mit der vorliegenden gleichzeitig erscheinenden Arbeit über fastperiodische Matrizen auch sonst eine wesentlich feinere derartige Betrachtung durchführen muß. Für den erwähnten unitären Fall gibt § 8

eine explizite Begründung. — Es sei nun $F(\mu)$ beliebig, also nicht notwendig reellwertig, und es sei λ irgendeine Zahl. Die Funktion $|\lambda - F(\mu)|^2$ ist $\geqq 0$, also gilt

$$\mathfrak{n}(|\lambda - F|^2(\mathfrak{H})) = \mathbf{N}(|\lambda - F|^2),$$

unter $|\lambda - F|^2(\mathfrak{H})$ das durch die Funktion

$$|\lambda - F(\mu)|^2 = (\lambda - F(\mu))\,\overline{(\lambda - F(\mu))}$$

entworfene Bild von $\mathfrak{H}$ verstanden. Dieses Bild ist aber wegen (57), (61), (62) offenbar die Matrix

$$(\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))\,(\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))^*,$$

mithin gilt

$$\mathfrak{n}((\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})\,(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{A})^*) = \mathbf{N}(|\lambda - F|^2),$$

wobei $\mathfrak{A} = F(\mathfrak{H})$ normal ist, also die beiden unter (20) stehenden Zahlen gleich sind. Wir wissen aber, daß das Verschwinden mindestens einer der beiden Zahlen (20) notwendig und hinreichend ist dafür, daß λ dem Spektrum von $\mathfrak{A}$ angehört. Folglich liegt λ dann und nur dann in $\mathbf{S}(F(\mathfrak{H}))$, wenn $\mathbf{N}(|\lambda - F|^2)$ verschwindet, d. h. wenn es einen Punkt μ auf $\mathbf{S}(\mathfrak{H})$ gibt, für welchen $|\lambda - F(\mu)|^2 \doteq 0$ ist, m. a. W., wenn λ in $\mathbf{s}(F)$ liegt. Mithin ist $\mathbf{s}(F) = \mathbf{S}(F(\mathfrak{H}))$, w. z. b. w.

Übrigens gilt, wie aus (57), (61), (62), (59) unmittelbar folgt,

$$(48)' \qquad (\lambda\mathfrak{E} - F(\mathfrak{H}))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda - F(\mu)} \right\|,$$

woraus ersichtlich ist, daß bei Bildmatrizen die in § 3 erwähnte Überkonvergenz der Neumann-Hilbschen Reihen ausgeschlossen ist.

Die einfachste Zuordnung (59) erhält man bekanntlich dadurch, daß man in (59)

$$(45)' \qquad d\sigma_{pq}(\mu) = \psi_p(\mu)\,\overline{\psi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu), \qquad d\varrho(\mu) \geqq 0$$

setzt, wo $\{\psi_n(\mu)\}$ ein gemäß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(\mu)\,\overline{\psi}_q(\mu)\,d\varrho(\mu) = \delta_{pq}$$

normiertes und in dem Sinne vollständiges Orthogonalsystem bezeichnet, daß die Parsevalsche Relation für jede stetige Funktion gilt[17]).

* * *

Wesentlich einfacher als die unitäre Abbildung $F(\mathfrak{H}) = e^{i\mathfrak{H}}$ ist die zu $\dot{\mathfrak{x}} = \mathfrak{H}\mathfrak{x}$ für $t \gtrless 0$ gehörige: $F(\mathfrak{H}) = e^{\mathfrak{H}}$, die der Behandlung des unitären Falles vorausgeschickt werden möge. Man wird so zu dem „Hauptzweig des Logarithmus“ der beschränkten positiv definiten Matrizen geführt, der

unmittelbar gestattet, das sich auf „zyklische“ Matrizen beziehende Born-Kármánsche Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen (Toeplitzsches Trägheitsgesetz) sinngemäß auf beliebige Matrizen zu übertragen. Durch $\mathfrak{H}$ soll, wie früher, eine beliebige beschränkte Hermitesche Matrix bezeichnet werden. Ist $\mathfrak{H}$ nichtnegativ definit und derart, daß $\mathfrak{H}^{-1}$ existiert, d. h. der Nullpunkt außerhalb des Spektrums, oder, was dasselbe ist, das Spektrum oder der Wertevorrat der Kopplungsform ($|\mathfrak{x}| = 1$) ganz im Innern der positiven Halbachse liegt, so heißt $\mathfrak{H}$ positiv definit und soll auch durch $\mathfrak{P}$ bezeichnet werden. — Wird eine beschränkte Matrix $\mathfrak{R}$ rekursiv genannt, wenn $\mathfrak{R}^{-1}$ existiert und $\mathfrak{R}$ derart ist, daß alle oberhalb der Diagonale gelegenen Elemente verschwinden („Dreiecksmatrix“), so kann ein Jacobi-Toeplitzsches Ergebnis[22]) wie folgt ausgesprochen werden: Jede positiv definite Matrix $\mathfrak{P}$ läßt sich mittels einer passend zu wählenden rekursiven Matrix $\mathfrak{R}$ in der Gestalt $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}\mathfrak{R}^*$ darstellen. Ist umgekehrt $\mathfrak{C}$ irgendeine beschränkte Matrix, für welche $\mathfrak{C}^{-1}$ existiert, so ist die Matrix $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ wegen (16) nichtnegativ definit, also Hermitesch, sie läßt ferner nach den Formalsätzen eine Reziproke ($= \mathfrak{C}^{-1*}\mathfrak{C}^{-1}$) zu, ist also positiv definit. Die Jacobi-Toeplitzsche Produktzerlegung kann daher als eine Parameterdarstellung der Mannigfaltigkeit der Matrizen $\mathfrak{P}$ gedeutet werden [ein „Phasenfaktor“ bleibt dabei ebenso unbestimmt, wie bei dem äquivalenten E. Schmidtschen Prozeß: die Abbildung der $\mathfrak{R}$ auf die $\mathfrak{P}$ ist eindeutig, aber nicht eineindeutig]. Im nachstehenden wird es sich um eine andere Parameterdarstellung derselben Mannigfaltigkeit handeln.

I. Es sei zunächst irgendeine beschränkte Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ mit der Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ gegeben. Wegen (59) und mit Rücksicht auf $(e^{\mathfrak{H}})^n = e^{n\mathfrak{H}}$ gilt offenbar

$$(E(\mathfrak{H}))^n = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{n\mu}\, d\sigma_{pq}(\mu) \right\| \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

wenn $E(\mathfrak{H}) = e^{\mathfrak{H}}$ gesetzt wird. Für die Resolvente der beschränkten Hermiteschen Matrix $E(\mathfrak{H})$ folgt aus (48)′, S. 265 die Integraldarstellung

$$(\lambda\mathfrak{E} - E(\mathfrak{H}))^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda - e^{\mu}} \right\| = \left\| \int_{0}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\log\mu)}{\lambda - \mu} \right\|,$$

so daß sich die Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ von $E(\mathfrak{H})$ mit Rücksicht auf den bei (48), S. 262 erwähnten Stieltjesschen Eindeutigkeitssatz aus

$$\pi_{pq}(\mu) = \int_{0}^{\mu} d\sigma_{pq}(\log\nu), \quad \mu \geqq 0; \qquad \pi_{pq}(\mu) \equiv 0, \quad \mu \leqq 0$$

bestimmt und daher, da die Sprungstellen der $\pi_{pq}(\mu)$ auf der nichtnegativen Halbachse liegen und $(E(\mathfrak{H}))^{-1} = E(-\mathfrak{H})$ existiert, $E(\mathfrak{H})$ positiv definit sein muß.

II. Es sei jetzt umgekehrt eine positiv definite Hermitesche Matrix $\mathfrak{P}$ mit der Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ gegeben. Da das Spektrum im Innern der positiven Halbachse liegt, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\pi_{pq}(\mu) \equiv 0$ ist für $-\infty < \mu \leqq \varepsilon$. Da die (reelle) Funktion $F(\mu) = \log \mu$ für $\mu \geqq \varepsilon$ stetig ist, so können wir also mit Rücksicht auf das bei (59) Gesagte eine beschränkte Hermitesche Matrix

$$\log \mathfrak{P} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \log \mu \, d\pi_{pq}(\mu) \right\| \qquad (\log \mu \gtreqless 0, \ \mu \geqq \varepsilon)$$

definieren, deren Resolvente sich mit Rücksicht auf (48)′, S. 265 zu

$$(\lambda \mathfrak{E} - \log \mathfrak{P})^{-1} = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\pi_{pq}(\mu)}{\lambda - \log \mu} \right\| = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\pi_{pq}(e^{\mu})}{\lambda - \mu} \right\|,$$

und daher die Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ von $\log \mathfrak{P}$ zu

$$\sigma_{pq}(\mu) = \int_{-\infty}^{\mu} d\pi_{pq}(e^{\nu})$$

berechnet (von den Sprungstellen können wir in diesem Paragraph absehen).

Der Vergleich von I. mit II. ergibt nun unter zweimal wiederholter Beachtung von (59) (vgl. eine analoge Schlußweise in § 8), daß die Mannigfaltigkeit aller positiv definiten beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{P}$ auf die Mannigfaltigkeit aller beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H}$ durch die Abbildung $\mathfrak{P} = E(\mathfrak{H})$ *eineindeutig* bezogen wird; und zwar ist dabei $\mathfrak{H} = \log \mathfrak{P}$ die inverse Abbildung. —

Analog erkennt man, daß die Spektralmatrix $\|\varrho_{pq}(\mu)\|$ von $\mathfrak{P}^{-1}$ aus der Spektralmatrix $\|\pi_{pq}(\mu)\|$ von $\mathfrak{P}$ in den auf der Halbachse $\mu > 0$ gelegenen Stetigkeitsstellen μ sich aus

$$\varrho_{pq}(\mu) = \int_{\frac{1}{\mu}}^{} \frac{d\pi_{pq}(\nu)}{\nu^2}$$

bestimmt [so daß

$$\varrho_{pq}\left(\frac{1}{\mu}\right) = -\int^{\mu} \frac{d\pi_{pq}(\nu)}{\nu^2}$$

ist], während für $-\infty < \mu < \frac{1}{\varepsilon}$ (> 0)

$$\varrho_{pq}(\mu) \equiv 0$$

sein muß. Um dies einzusehen, braucht man nur die vorangehende elementare Überlegung mit der Abbildungsfunktion $F(\mu) = \mu^{\delta}$ vorzunehmen $(\delta \gtrless 0$, hier $\delta = -1)$.

§ 8.

Spektraltheorie der unitären Matrizen.

Zur Illustration der vorstehenden Skizze soll nun der interessanteste Spezialfall $F(\mu) = e^{i\mu}$ des näheren durchgerechnet werden. Das Korrespondenzprinzip liefert so die restlose Übertragung der Hilbert-Hellingerschen Theorie der Hermiteschen Formen auf unitäre Matrizen. Bei der Begründung hat das Carathéodory-Toeplitzsche Problem dieselbe Rolle, wie bekanntlich (vgl. loc. cit. [3]), Fußnote [546])) die Kettenbruchtheorie in dem Hermiteschen Fall. Z. B. die Elemente der Resolvente haben jetzt nicht die Gestalt (48) der erzeugenden Funktion eines assoziierten Kettenbruches, sondern ihr Kern ist einer der beiden Partialbrüche des Poissonschen Kernes. — Schlägt man bei den unitären Matrizen den von Hilbert in dem Hermiteschen Fall gefolgten Weg der Abschnitte ein, so stößt man sofort auf die Schwierigkeit, daß es unitäre Matrizen gibt, deren kein Abschnitt unitär ist. So ist die direkte Stellung eines Momentenproblems für unsere Zwecke viel wesentlicher als in dem Hermiteschen Fall.

Es handelt sich dabei um das trigonometrische Momentenproblem[50])

$$(63) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\varrho(\varphi) = \alpha_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad d\varrho(\varphi) \geqq 0,$$

wobei zur Abkürzung $e(x) = e^{ix}$ gesetzt ist; die α sind gegeben, und es wird eine reellwertige, monoton nicht abnehmende Funktion $\varrho(\varphi)$ gesucht, die diese Gleichungen befriedigt. Setzt man

$$(64) \qquad \alpha_n = \bar{\alpha}_{-n}; \qquad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

so ist (63) wegen $e(x) = \bar{e}(-x)$ auch für $n < 0$ erfüllt, wenn es für $n \geqq 0$ erfüllt ist. Damit es eine Lösung $\varrho(\varphi)$ gibt, ist notwendig und hinreichend, daß die Hermiteschen, nach Herrn Toeplitz benannten Formen

$$(65) \qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \alpha_{j-l}\xi_j\bar{\xi}_l,$$

wobei man (64) als die Definition von $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ aufzufassen hat, bei jedem m nichtnegativ definit sind. Gibt es eine Lösung, so können wir, da es sich um Stieltjessche Integrationen handelt, annehmen, daß $\varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi)$ in jedem *inneren* Punkte des Intervalles $[0, 2\pi]$ gilt. Der Periodizität zufolge können wir ferner annehmen, daß auch $\varrho(2\pi - 0) = \varrho(2\pi)$ gilt, da ja der Sprung $\varrho(+0) - \varrho(0)$ zur Verfügung steht. Endlich können

---

[50]) Vgl. G. Herglotz, loc. cit. [30]), wo auch die weitere Literatur [insb. [10])] angegeben ist, ferner F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 240 ff.

wir die für die Stieltjessche Integration belanglose additive Konstante durch $\varrho(0) = 0$ festlegen. Damit ist die Lösung eindeutig bestimmt, d. h. es gibt entweder gar keine Lösung, oder es gibt genau eine derart normierte Lösung. Der Eindeutigkeitssatz folgt aus (63) nach einer partiellen Integration auf bekannte Weise[51]) nach dem Vorgang von M. Lerch aus dem Weierstraßschen Approximationssatz, oder auch aus dem Eindeutigkeitssatz der gewöhnlichen Fourierreihen. Die Totalschwankung von $\varrho(\varphi)$ ist gleich α_0, man setze nämlich in (63) den Exponenten $n = 0$.

Wir stellen nun das zu den Zahlen

$$\alpha_n = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, 1, \ldots \tag{66}$$

gehörige Momentenproblem, wobei $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix und $\mathfrak{x}$ irgendeinen festgewählten Vektor ($|\mathfrak{x}| < +\infty$) bezeichnet, so daß die Lösung $\varrho(\varphi)$ auch von $\mathfrak{x}$ abhängt, und behaupten, daß dann die Formen (65) nichtnegativ definit sind, daß also das Momentenproblem eine Lösung $\varrho = \varrho(\varphi; x_1, x_2, \ldots)$ hat. Auf den höchst einfachen Beweis kommen wir sogleich zurück. Die Lösung muß bei jedem $\mathfrak{x}$ die Totalschwankung $|\mathfrak{x}|^2$ haben, und nicht abnehmend, also insbesondere reellwertig sein. Ist sie also eine ganze homogene Funktion der x_p und $\bar{x}_p$ von dem Grade zwei, so muß sie wegen $\varrho(0) = 0$ und $\varrho(2\pi) = \alpha_0 = \Phi(\mathfrak{U}^0; \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2$ eine beschränkte und nichtnegativ definite Hermitesche Form

$$\varrho = \varrho(\varphi; \mathfrak{x}) = \varrho(\varphi; x_1, x_2, \ldots) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \tau_{pq}(\varphi)\, x_p \bar{x}_q; \quad \tau_{pq} = \bar{\tau}_{qp} \tag{67}$$

sein, die den Bedingungen

$$\Delta\varrho \geqq 0; \quad \varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi), \; 0 < \varphi \leqq 2\pi; \quad \varrho(0) = 0, \; \varrho(2\pi) = |\mathfrak{x}|^2 \tag{68}$$

genügt und dadurch eindeutig bestimmt ist. Nun muß aber die Lösung, wenn sie überhaupt existiert, die erwähnte Homogenitätseigenschaft haben. Dies folgt mit Rücksicht auf (14), (64), (66) nach einer geläufigen, in dem Hermiteschen Fall auch von Herrn F. Riesz[11]) benutzten Schlußweise einfach aus der Unität der Lösung (das Erfülltsein der normierenden Nebenbedingungen $\varrho(0) = 0$; $\varrho(\varphi - 0) = \varrho(\varphi)$, $0 < \varphi \leqq 2\pi$ vorausgesetzt).

Die Zahlen $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots$ sind mittels (64) zu definieren. Wir haben also wegen (14)

$$\alpha_{-n} = \overline{\Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x})} = \Phi(\mathfrak{U}^{n*}; \mathfrak{x}); \quad n = 1, 2, \ldots$$

zu setzen. Nun ist aber $\mathfrak{U}$, also auch $\mathfrak{U}^n$ unitär, also ist $\mathfrak{U}^{n*} = (\mathfrak{U}^n)^{-1} = \mathfrak{U}^{-n}$, mithin $\alpha_{-n} = \Phi(\mathfrak{U}^{-n}; \mathfrak{x})$, so daß (66) auch für $n < 0$ gilt. Wir wissen ferner, daß die Gleichungen (63) auch für $n < 0$ erfüllt sind, wenn sie für

[51]) Vgl. F. Hausdorff, loc. cit. [50]).

$n \geqq 0$ richtig sind. Wir haben es also mit dem Momentenproblem

$$(69) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\varrho(\varphi; \mathfrak{x}) = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, \pm 1, \pm 2; \quad d\varrho \geqq 0$$

zu tun, wobei $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ der Bedingung $\sum |x_p|^2 < +\infty$ genügt und sonst willkürlich ist.

Nun zum Existenzbeweis. Das Momentenproblem (69) ist mit Rücksicht auf das bei (65) Gesagte dann und nur dann lösbar, wenn

$$(70) \qquad \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \alpha_{j-l}\, \xi_j\, \bar{\xi}_l \geqq 0 \quad \text{gilt für} \quad \alpha_n = \Phi(\mathfrak{U}^n; \mathfrak{x}); \quad n = 0, \pm 1, \ldots,$$

wenn nur $\mathfrak{U}$ unitär ist; m, $\mathfrak{x}$ und die ξ sind dabei willkürlich. Wir haben also folgendes zu beweisen: Sind m, $\mathfrak{x}$ und die ξ beliebig festgehalten, und bezeichnet T die unter (70) stehende endliche Summe, so gilt $T \geqq 0$, wenn $\mathfrak{U}$ unitär ist. Diese Ungleichung ist aber leicht zu verifizieren. Zunächst ist

$$T = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \Phi(\mathfrak{U}^{j-l}; \mathfrak{x})\, \xi_j\, \bar{\xi}_l,$$

also wegen $\Phi(\alpha\mathfrak{A} + \beta\mathfrak{B}; \mathfrak{x}) = \alpha\Phi(\mathfrak{A}; \mathfrak{x}) + \beta\Phi(\mathfrak{B}; \mathfrak{x})$

$$T = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \Phi(\mathfrak{T}; \mathfrak{x}),$$

wenn

$$(71) \qquad \mathfrak{T} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \xi_j\, \bar{\xi}_l\, \mathfrak{U}^{j-l}$$

gesetzt wird. Die Behauptung $T \geqq 0$ läuft also darauf hinaus, daß die (offenbar beschränkte) Matrix $\mathfrak{T}$ eine nichtnegativ definite Hermitesche Matrix ist. Ist nun $\mathfrak{C}$ irgendeine beschränkte Matrix, so ist das Produkt $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ gewiß Hermitesch und wegen (16) nichtnegativ definit. Mithin genügt es zu zeigen, daß es eine beschränkte Matrix $\mathfrak{C}$ gibt, mit deren Hilfe die unter (71) stehende Matrix $\mathfrak{T}$ in der Gestalt $\mathfrak{C}\mathfrak{C}^*$ dargestellt werden kann. Setzt man nun

$$\mathfrak{C} = \sum_{j=0}^{m} \xi_j\, \mathfrak{U}^j,$$

so gilt

$$\mathfrak{C}^* = \overline{\mathfrak{C}}' = \sum_{j=0}^{m} \bar{\xi}_j\, \overline{(\mathfrak{U}^j)}' = \sum_{j=0}^{m} \bar{\xi}_j\, (\overline{\mathfrak{U}}')^j,$$

also, da $\mathfrak{U}$ unitär, d. h. $\overline{\mathfrak{U}}' = \mathfrak{U}^* = \mathfrak{U}^{-1}$ ist,

$$\mathfrak{C}^* = \sum_{l=1}^{m} \bar{\xi}_l\, \mathfrak{U}^{-l},$$

mithin

$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}^* = \Big(\sum_{j=0}^{m} \xi_j \mathfrak{U}^j\Big)\Big(\sum_{l=0}^{m} \bar{\xi}_l \mathfrak{U}^{-l}\Big) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{l=0}^{m} \xi_j \bar{\xi}_l \mathfrak{U}^{j-l} = \mathfrak{T}.$$

Damit ist alles bewiesen. —

Setzt man (67) in (69) ein, so folgt

$$\mathfrak{U}^n = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\|; \qquad n = 0, \pm 1, \ldots. \tag{72}$$

Mit Rücksicht auf (67), (68), (69) gibt es also zu jeder unitären Matrix $\mathfrak{U}$ eine und nur eine[52]) Funktionenmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ von der folgenden Beschaffenheit: Die τ sind für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärt, sie bilden bei jedem φ eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Kopplungsform

$$\varphi(\varphi; \mathfrak{x}) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \tau_{pq}(\varphi)\, x_p \bar{x}_q$$

den Bedingungen

$$\Delta\varphi \geqq 0, \tag{73}$$

$$\varphi(0, \mathfrak{x}) = 0, \qquad \frac{1}{2\pi}\varphi(2\pi; \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2 \tag{74}$$

genügt, es gilt (72), und endlich

$$\tau_{pq}(\varphi - 0) = \tau_{pq}(\varphi), \qquad 0 < \varphi \leqq 2\pi. \tag{75}$$

Aus (74) und (73) folgt übrigens

$$\tau_{pq}(0) = 0, \qquad \tau_{pq}(2\pi) = 2\pi\delta_{pq} \tag{76}$$

und

$$|\Delta\tau_{pq}|^2 \leqq (\Delta\tau_{pp})(\Delta\tau_{qq}); \qquad \Delta\tau_{pp} \geqq 0. \tag{77}$$

Die Matrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ möge die Spektralmatrix der unitären Matrix $\mathfrak{U}$ genannt werden.

In Verallgemeinerung von (72) können wir zu jeder, für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärten, der Bedingung $G(0) = G(2\pi)$ nicht notwendig genügenden Funktion $G(\varphi)$ die Matrix

$$G(\mathfrak{U}) = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\| \tag{78}$$

zuordnen; sie ist, aus denselben Gründen wie (59), offenbar beschränkt. Sie ist ferner für reellwertige $G(\varphi)$ wegen $\tau_{pq} = \bar{\tau}_{qp}$ gewiß Hermitesch. Insbesondere ist also

$$\varphi(\mathfrak{U}) = \Big\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\, d\tau_{pq}(\varphi) \Big\| \tag{79}$$

---

[52]) Dieser Eindeutigkeitssatz wird für uns wertvoll sein.

eine beschränkte Hermitesche Matrix. Ich behaupte nun, daß die Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(p)\|$ von $\varphi(\mathfrak{U})$ für

$$\mu \leqq 0, \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi, \quad \mu \geqq 2\pi \quad \text{bzw. gleich} \quad \|0\|, \quad \left\|\frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu)\right\|, \quad \|\delta_{pq}\|$$

ist, so daß das Spektrum von $\varphi(\mathfrak{U})$ gewiß auf $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ und dabei $\mu = 2\pi$ außerhalb des (eventuellen) Punktspektrums liegt (d. h. eine Stetigkeitsstelle aller σ_{pq} ist).

Sind $G_1(\varphi)$, $G_2(\varphi)$ trigonometrische Polynome, so ist

$$G_1(\mathfrak{U})\,G_2(\mathfrak{U}) = G_3(\mathfrak{U}); \qquad G_3(\varphi) = G_1(\varphi)\,G_2(\varphi) \tag{80}$$

wegen (72) trivial, d. h. man hat dann

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_1(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\|\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_2(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G_1(\varphi)\,G_2(\varphi)\,d\tau_{pq}(\varphi)\right\|. \tag{81}$$

Dies überträgt sich mittels des Weierstraßschen Approximationssatzes [vgl. dieselbe Schlußweise bei (57)] auf den Fall, wo die $G(\varphi)$ stetig sind und der Bedingung $G(0) = G(2\pi)$ genügen, die sich jedoch nachträglich als überflüssig erweist[53]). Folglich gilt (80), (81), wenn $G_1(\varphi)$, $G_2(\varphi)$ irgendwelche stetige Funktionen bezeichnen. Es sei nun λ nicht reell und man setze

$$G_1(\varphi) = \lambda - \varphi, \qquad G_2(\varphi) = \frac{1}{\lambda - \varphi},$$

was wegen $\varphi \geqq 0$ gestattet ist. Aus (78), (80) folgt dann

$$\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - \varphi}\right\|\left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\lambda - \varphi)\,d\tau_{vq}(\varphi)\right\| = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau_{pq}(\varphi)\right\|,$$

wobei linkerhand wegen (80) vertauschbare Matrizen stehen. Da hierbei die rechte Seite nach (72) gleich der Einheitsmatrix, und linkerhand der zweite Faktor wegen (72) und (79) gleich

$$\left\|\lambda\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\tau_{pq}(\varphi)\right\| - \varphi(\mathfrak{U}) = \lambda\mathfrak{E} - \varphi(\mathfrak{U})$$

ist, so gilt

$$(\lambda\mathfrak{E} - \varphi(\mathfrak{U}))^{-1} = \left\|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - \varphi}\right\|. \tag{82}$$

Bezeichnet also $\|R_{pq}(\lambda)\|$ die Resolvente der Hermiteschen Matrix (79), und setzt man

$$\begin{aligned} \sigma_{pq}(\mu) &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq 0, \\ &= \frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi, \\ &= \delta_{pq} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2\pi, \end{aligned}$$

[53]) Vgl. eine analoge Schlußweise z. B. bei E. Hellinger, loc. cit. [43]), S. 15–16.

so daß die σ_{pq} im Punkte $\mu = 2\pi$ auch von rechts stetig sind, so folgt aus (82) und (76)

$$R_{pq}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_{pq}(\mu)}{\lambda - \mu},$$

so daß $\| \sigma_{pq}(\mu) \|$ mit Rücksicht auf die Eindeutigkeit der Darstellung (48) bzw. auf die dort erwähnte Stieltjessche Umkehrformel die Spektralmatrix von $\varphi(\mathfrak{U})$ sein muß, w. z. b. w.

Es sei jetzt umgekehrt eine beschränkte Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ *gegeben.* Und zwar soll das Spektrum von $\mathfrak{H}$ auf dem Intervalle $0 \leqq \mu \leqq 2\pi$ liegen, so daß in der Spektralmatrix $\| \sigma_{pq}(\mu) \|$ von $\mathfrak{H}$ das Element $\sigma_{pq}(\mu)$ für $\mu \leqq 0$ verschwindet und für $\mu \geqq 2\pi$ gleich δ_{pq} ist; und außerdem soll die Spektralform (50) in dem Punkte $\mu = 2\pi$ bei keinem $\mathfrak{x}$ einen Sprung aufweisen, d. h. dieser Punkt möge außerhalb des (eventuellen) Punktspektrums von $\mathfrak{H}$ liegen. Die Matrix $e(\mathfrak{H})$ ist, wie wir aus § 6 wissen, jedenfalls unitär, und es gilt wegen (78), (80)

$$[e(\mathfrak{H})]^n = e(\mathfrak{H}^n) = \| \int_{-\infty}^{+\infty} e(n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \|, \tag{83}$$

für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Denn es ist ja $e(x+y) = e(x)\,e(y)$. Nun ist $e(\mathfrak{H})$ unitär, d. h. $[e(\mathfrak{H})]^{-1} = (e(\mathfrak{H}))^*$, und daher $[e(\mathfrak{H})]^{-n} = [e(\mathfrak{H})^n]^*$, also wegen (83)

$$[e(\mathfrak{H})]^{-n} = \| \int_{-\infty}^{+\infty} e(n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \|^*, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

und daher wegen (62) und mit Rücksicht auf $\bar{e}(x) = e(-x)$

$$[e(\mathfrak{H})]^{-n} = \| \int_{-\infty}^{+\infty} e(-n\mu)\, d\sigma_{pq}(\mu) \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

so daß also (83) auch für $n < 0$ gilt. Nun sind aber die $\sigma_{pq}(\mu)$ außerhalb des Intervalles $[0, 2\pi]$ konstant, ferner sind sie von links stetig, und im Punkte $\mu = 2\pi$ nach Voraussetzung auch von rechts stetig, so daß, wenn

$$\tau_{pq}(\varphi) = 2\pi\, \sigma_{pq}(\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi \tag{84}$$

gesetzt wird, für (83) auch

$$(e(\mathfrak{H}))^n = \| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(n\varphi)\, d\tau_{pq}(\varphi) \|, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

geschrieben werden kann. Offenbar hat also die durch (84) erklärte Matrix $\| \tau_{pq}(\varphi) \|$ alle charakteristischen Eigenschaften der Spektralmatrix der unitären Matrix $e(\mathfrak{H})$, sie muß also, wie bei [52]) betont wurde, die Spektralmatrix von $e(\mathfrak{H})$ sein.

Fassen wir nun unsere Resultate zusammen: Ist $\mathfrak{U}$ eine unitäre Matrix mit der Spektralmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$, und führt man eine Matrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ mittels der Definition

$$\begin{aligned}\sigma_{pq}(\mu) &= 0 \quad \text{für} \quad \mu \leqq 0,\\ &= \frac{1}{2\pi}\tau_{pq}(\mu) \quad \text{für} \quad 0 \leqq \mu \leqq 2\pi,\\ &= \delta_{pq} \quad \text{für} \quad \mu \geqq 2\pi\end{aligned}$$

ein, so ist

$$\mathfrak{H} = \varphi(\mathfrak{U}) = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \, d\sigma_{pq}(\mu) \right\|$$

eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Spektralmatrix gleich $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ ist, so daß also das Spektrum von $\mathfrak{H}$ zwischen den beiden Punkten $\mu = 0$, $\mu = 2\pi$ und letzterer nicht im Punktspektrum liegt; ist umgekehrt $\mathfrak{H}$ eine beschränkte Hermitesche Matrix, deren Spektralmatrix $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ für $\mu \leqq 0$ und für $\mu \geqq 2\pi$ konstant ist, d. h. ist $\mathfrak{H}$ derart, daß das Spektrum zwischen den beiden Punkten $\mu = 0$, $\mu = 2\pi$ liegt (die Grenzen nach wie vor miterlaubt), und ist außerdem der Punkt $\mu = 2\pi$ außerhalb des Punktspektrums gelegen, so ist, wenn die Matrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ mittels der Definition

$$\tau_{pq}(\varphi) = 2\pi\sigma_{pq}(\varphi), \qquad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

eingeführt wird, die Matrix

$$\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H}) = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e(\varphi) \, d\tau_{pq}(\varphi) \right\|$$

eine unitäre Matrix mit der Spektralmatrix $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$. —

Da nun jede (unitäre oder Hermitesche) Matrix eine und nur eine Spektralmatrix hat, und da die Matrix durch ihre Spektralmatrix wegen (56) und (72), wobei man beidemal $n = 1$ zu setzen hat, vollständig bestimmt ist, so folgt offenbar, daß wir die Mannigfaltigkeit derjenigen beschränkten Hermiteschen Matrizen $\mathfrak{H}$, deren Spektrum eine auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gelegene Punktmenge ist und bei welchen $\mu = 2\pi$ nicht in dem Punktspektrum liegt, auf die Mannigfaltigkeit aller unitären Matrizen $\mathfrak{U}$ *eineindeutig* abbilden, wenn wir $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ setzen. —

An Stelle von $\mu = 2\pi$ können wir freilich auch den Punkt $\mu = 0$ aus dem (eventuellen) Punktspektrum ausschließen. Bekanntlich liegt die Zahl μ dann und nur dann in dem Punktspektrum von $\mathfrak{H}$, wenn die zu $\mu\mathfrak{E} - \mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen eine normierte Lösung zulassen. Die Matrix $\mathfrak{H}$ heißt abgeschlossen, wenn $\mu = 0$ nicht in dem Punktspektrum liegt, d. h. wenn die zu $\mathfrak{H}$ gehörigen homogenen Gleichungen keine nicht triviale quadratisch konvergente Lösung haben. Bezeichnet man also die

Hermitesche Matrix $\mathfrak{H}$ als *reduziert*, wenn sie abgeschlossen, nichtnegativ definit und derart ist, daß ihre Kopplungsform auf der komplexen Einheitskugel durchweg $\leqq 2\pi$ ausfällt, so können wir die vorangehenden mit Rücksicht auf S. 250 auch wie folgt formulieren: Durch die Abbildung $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ wird die Mannigfaltigkeit der reduzierten Hermiteschen Matrizen auf die Mannigfaltigkeit der unitären Matrizen eineindeutig bezogen. — Die Notwendigkeit der „Reduktion“ für das Schlichtsein der Abbildung wird nicht nur durch die Periodizitätseigenschaft $e(\mathfrak{H} + 2\pi i\mathfrak{E}) = e(\mathfrak{H})$ bedingt. Denn es gibt beschränkte Hermitesche Matrizen, deren Spektrum eine beliebig große Breite hat, während die Spektra der beiden Matrizen $e(\mathfrak{H} + c\mathfrak{E})$, $e(\mathfrak{H})$ offenbar kongruente Punktmengen sind.

Die Formeln (72) können wir auf die folgende Weise in eine erzeugende Relation zusammenfassen. Es bezeichne $\| Q_{pq}(\lambda)\|$ die Resolvente $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1}$ von $\mathfrak{U}$. Da nach § 6

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{U}^n) = 1, \qquad n = 0, \pm 1, \ldots$$

gilt, so folgt aus (27) bzw. (26)

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathfrak{U}^{-n-1} \quad \text{für} \quad |\lambda| < 1,$$

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \mathfrak{U}^n \quad \text{für} \quad |\lambda| > 1.$$

Setzt man hierin (72) ein, so folgt beidemal

$$\| Q_{pq}(\lambda)\| \equiv (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U})^{-1} = \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \right\| \qquad \text{(vgl. (82))}, \tag{85}$$

da wegen $\mathfrak{r}(\mathfrak{U}^m) = 1$ die gliedweise Integration gestattet ist. Man beachte, daß daraus, daß die Formel (85) für $|\lambda| < 1$ gilt, noch nicht folgen müßte, daß sie auch für $|\lambda| > 1$ richtig ist, so daß wir beide Reihen in Betracht ziehen mußten. Denn $|\lambda| = 1$ kann eine natürliche Grenze sein.

Nehmen wir nun an, daß eine Zahl $\lambda_0 = e(\varphi_0)$ vorhanden ist derart, daß in einem Intervalle $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ alle $\tau_{pq}(\varphi)$ konstant sind. Dann ist die unter (85) stehende Integralmatrix für $\lambda = \lambda_0$ gewiß eine beschränkte Matrix, und zwar gilt (85) auch für $\lambda = \lambda_0$. Der erste Teil der Behauptung ist aus der Monotonieeigenschaft der Spektralmatrix ersichtlich, der zweite Teil folgt aber aus

$$\left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau_{pq}(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \right\| (\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{U}) = \mathfrak{E}, \qquad |\lambda| \neq 1, \tag{86}$$

wenn man hierbei den Grenzübergang $\lambda \to \lambda_0$ unter Beachtung des Hellyschen Satzes über gliedweise Integration vornimmt. Folglich liegt λ_0 außer-

halb des Spektrums. — Gibt es aber kein ε von der erwähnten Beschaffenheit, so liegt λ_0 in dem Spektrum, das also aus den Nichtkonstanzstellen der $\tau_{pq}(\varphi)$ und ihren Häufungsstellen besteht und das durch die Abbildung $e(\varphi)$ entworfene Bild von $\mathfrak{S}(\mathfrak{H})$ darstellt. Denn wie wir aus § 2 wissen, gibt es zu jedem außerhalb $\mathfrak{S}(\mathfrak{U})$ gelegenen λ_0 ein $\eta > 0$ derart, daß in dem Kreise $|\lambda - \lambda_0| < \eta$ jedes $Q_{pq}(\lambda)$ regulär ist. Es genügt also zu beweisen, daß es kein $\eta > 0$ gibt, wenn es kein $\varepsilon > 0$ gibt. Die Voraussetzung, daß es kein $\varepsilon > 0$ gibt, besagt dabei wegen (77) folgendes: es gibt kein $\varepsilon > 0$ derart, daß in dem Intervalle $\varphi_0 - \varepsilon < \varphi < \varphi_0 + \varepsilon$ jedes $\tau_{pp}(\varphi)$ konstant ist [das Spektrum verrät sich also bereits aus den diagonalen τ_{pq}; dies gilt wegen (52) auch in dem Hermiteschen Fall]. Nun sind aber die $\tau_{pp}(\varphi)$ nach (77) reellwertig und monoton. Es genügt also folgendes zu zeigen: Ist $\tau(\varphi)$ eine für $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ erklärte, reellwertige, monoton nicht abnehmende Funktion, und ist $\varphi = \varphi_0$ eine Nichtkonstanzstelle von $\tau(\varphi)$, so ist die durch das Integral

$$Q(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\tau(\varphi)}{\lambda - e(\varphi)} \tag{87}$$

dargestellte Funktion für $\lambda = \lambda_0 = e(\varphi_0)$ nicht regulär [NB. wir müssen von der Funktion sprechen, die durch das Integral unmittelbar dargestellt wird; es wäre z. B. möglich, daß $Q(\lambda)$ für $|\lambda| \geqq 1$ eine unmittelbare analytische Fortsetzung zuläßt, während das Integral für $|\lambda| \geqq 1$ eine andere Funktion darstellt].

Nehmen wir nun zwecks Zurückführung ad absurdum die Unrichtigkeit der Behauptung an. Da das Integral für $|\lambda| \neq 1$ gewiß regulär ist, so gilt dann

$$Q(\lambda) - Q\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) \to 0, \qquad |\lambda| \to 1, \tag{88}$$

gleichmäßig auf einem φ_0 enthaltenden Bogen des Einheitskreises. Nun gilt aber wegen (87), wenn

$$\lambda = |\lambda| e(\theta) \quad \text{und} \quad \zeta(\varphi) = -\int e(\varphi)\, d\tau(\varphi) \tag{89}$$

gesetzt wird,

$$Q(\lambda) - Q\left(\frac{1}{\bar{\lambda}}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |\lambda|^2}{1 - 2\,|\lambda| \cos(\varphi - \theta) + |\lambda|^2}\, d\zeta(\varphi). \tag{90}$$

Da (90) für $|\lambda| \to 1$ auf dem Bogen gleichmäßig nach Null gehen soll, so folgt nach bekannten Sätzen[46], [54], daß auf dem Bogen die Funktion $\zeta(\varphi)$, also wegen (89) offenbar auch $\tau(\varphi)$, konstant sein muß, im Widerspruch mit der Voraussetzung.

[54]) Vgl. z. B. G. C. Evans, The logarithmical potential, New York 1927 (Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., Vol. VI.).

Der Satz, daß sich jede unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ und jede nur einmal ergibt, wenn in $\mathfrak{U} = e(\mathfrak{H})$ das Argument die Mannigfaltigkeit der reduzierten Hermiteschen Matrizen durchläuft, kann wohl als sinngemäßes Analogon (ja sogar einfach als eine Verallgemeinerung) der Euler-Hurwitzschen Parameterdarstellung aufgefaßt werden, die hier — nicht erst in Anbetracht der Streckenspektra — grundsätzlich versagt. Es wäre in diesem Gedankenkreis vor allem wünschenswert, die Gruppe der linearen Transformationen der reellen Hilbertschen Kugel in sich zu beschreiben, d. h. die Mannigfaltigkeit derjenigen reduzierten $\mathfrak{H}$ zu bestimmen, deren unitäres Bild reell ist. Die Frage hat nämlich außer dem gruppentheoretischen auch ein topologisches Interesse. Die Durchführung dieser Realitätsdiskussion und ähnlicher Rechnungen dürfte stets unter Zugrundelegung der Herglotzschen Fourierentwicklung[31]) für die Lösung des trigonometrischen Momentenproblems gelingen.

Anhang.

Anwendung des Spektrumbegriffes auf die Matrizentheorie der regulären Potenzreihen.

In Verallgemeinerung der Matrix (18), welche der identischen konformen Abbildung $w = z$ entspricht, will ich hier die Brauchbarkeit und Natürlichkeit des oben (§ 2) eingeführten Spektrumbegriffes an der Hand der Matrizentheorie der Potenzreihen[55]) illustrieren (ohne auf Anwendungen auf die Wachstumstheorie der Potenzreihen[55]) einzugehen). Man hat sich dabei — im Gegensatz zu den aus mehreren Gründen prinzipiell harmloseren (normalen) Laurentmatrizen[4]) — meines Wissens stets auf die Untersuchung des Wertbereiches der Kopplungsform beschränkt. Dementsprechend ist wohl eine matrizentheoretische Charakterisierung für die konvexe Hülle des Wertevorrates der Potenzreihe, aber nicht eine entsprechende Kennzeichnung dieses Wertevorrates selbst bekannt. — Da die fraglichen Matrizen normaloid sind, so gehe ich über diese Untersuchungen mit Rücksicht auf § 5 erheblich hinaus, wenn ich das Spektrum bestimme. Daß man sich bisher auf den Wertbereich der Kopplungsform beschränkt hat, ist wohl dadurch bedingt, daß man das Spektrum einer beliebigen beschränkten Matrix nicht oder wenigstens nicht *so* definiert hat, wie es der Natur der Sache entspricht (nämlich so, wie dies in § 2 geschehen ist).

---

[55]) Vgl. I. Schur, Journ. für Math. **147** (1917), S. 205 ff., ferner O. Toeplitz, Math. Zeitschr. **12** (1922), S. 193 ff., wo auch die Literatur angegeben ist. Die formal entsprechenden (nichtsingulären) Integralgleichungen der Elektronentheorie sind zuerst von G. Herglotz [Math. Annalen **67** (1908), S. 87 ff.] untersucht worden.

Dies um so mehr, da der Sinn unserer Definition eben bei diesen Potenzreihenmatrizen beim ersten Anblick zu unerwünschten Folgerungen zu führen scheint, deren Natürlichkeit und Notwendigkeit erst in der Funktionentheorie der Resolventenmatrix zutage tritt; die ausführlich besprochene pathologische Matrix (18) ist ja die einfachste unter diesen Matrizen (sofern sie nicht Diagonalmatrizen und damit von der Gestalt $c\,\mathfrak{E}$ sind). Ich schreibe diese, explizit wohl von Herrn Schur eingeführten Matrizen, wie üblich, nicht so:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \alpha_1 & \alpha_0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \vdots & & & \end{matrix} \right\|,$$

sondern gehe durch Transposition zu der „Volterraschen“ Matrix

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(f) = \left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \dots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_0 \\ \vdots & & & \end{matrix} \right\|; \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

über, wodurch — wider Erwarten — das Spektrum nicht alteriert wird (§ 2). Diese Schreibweise hat gegenüber der ersten für uns u. a. den Vorteil, daß sie einen Vergleich mit der bekannten, sich auf Summengleichungen und dergleichen beziehenden Theorie der Herren Hilb und Perron[56]) ermöglicht (es liegen freilich diesen Untersuchungen nicht von vornherein die allgemeinen Hilbertschen Bedingungen zugrunde).

Bekanntlich ist die Matrix $\mathfrak{S}(f)$ dann und nur dann beschränkt, wenn die Potenzreihe $f(z)$ für $|z| < 1$ konvergent und beschränkt ist, und zwar ist die obere Grenze des Betrages der Kopplungsform von $\mathfrak{S}(f)$ unter der Nebenbedingung $|\mathfrak{x}| = 1$ identisch mit der oberen Grenze von $|f(z)|$ für $|z| < 1$.[55]) Die Matrizen $\mathfrak{S}(f)$, deren Beschränktheit vorausgesetzt werden möge, sind, wie bereits das Beispiel $f(z) = z$ [vgl. (18)] zeigt, (mit ersichtlichen Ausnahmen) nicht normal, jedoch stets normaloid[55]).

Es bezeichne Γ die Gesamtheit der Werte, welche die Potenzreihe $f(z)$ im Innern des Einheitskreises annimmt, und es sei Γ' der durch das offene Gebiet Γ bestimmte abgeschlossene Bereich (Γ kann auch ein Punkt sein, wenn nämlich $f(z) \equiv \alpha_0$ ist). — Es gilt dann der folgende

---

[56]) Vgl. z. B. E. Hilb, Math. Annalen **82** (1921), S. 1 ff.; O. Perron, Math. Annalen **84** (1921), S. 1 ff. Einer dritten Art von Konvergenzbedingungen begegnet man sich in der Theorie der divergenten Reihen; vgl. insb. I. Schur, Journ. f. Math. **151** (1921), S. 95–100; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. **9** (1921), S. 74 ff.

Satz. *Das Spektrum von $\mathfrak{S}(f)$ ist identisch mit dem Bereiche Γ', auf dessen Innere $(=\Gamma)$ das Kreisgebiet $|z|<1$ durch die (nicht notwendig schlichte) Funktion $w=f(z)$ abgebildet wird.*

Der Satz kann freilich nur unter Zugrundelegung der von mir benutzten Spektrumdefinition richtig sein (man denke nur wieder an den Fall $w=z$). — Alle Abschnittseigenwerte von $\mathfrak{S}(f)$ sind gleich $\alpha_0=f(0)$, und die Elemente $R_{pq}(\lambda)$ der Resolventenmatrix $(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{S}(f))^{-1}$ sind rationale Funktionen, deren Pole nur in demselben Punkte $\lambda=\alpha_0$ liegen können. Man erkennt dies, wenn man vorher die Resolvente der transponierten Matrix, die auf eine rekursive Weise behandelt werden kann, berechnet, und sodann die Transposition rückgängig macht. —

Da die Zuordnung

$$f(z)\rightleftarrows\mathfrak{S}(f)$$

offenbar derart ist, daß

(I) $\quad\mathfrak{S}(cf)=c\,\mathfrak{S}(f),\quad \mathfrak{S}(f_1+f_2)=\mathfrak{S}(f_1)+\mathfrak{S}(f_2),\quad \mathfrak{S}(1)=\mathfrak{E}$

gilt, so hat man

(II) $$\mathfrak{S}(\lambda-f)=\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{S}(f).$$

Bildet man ferner einerseits die zu dem Cauchyschen Produkt $f_1(z)\,f_2(z)$ zweier Potenzreihen gehörige Matrix $\mathfrak{S}(f_1f_2)$, und andererseits das Matrizenprodukt $\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)$, so erkennt man leicht, daß

(III) $\mathfrak{S}(f_1f_2)=\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)$, also insbesondere $\mathfrak{S}(f_1)\,\mathfrak{S}(f_2)=\mathfrak{S}(f_2)\,\mathfrak{S}(f_1)$ ist.

Man beachte nun, daß, wenn $f(z)$ im Kreise $|z|<1$ eine Nullstelle Z hat, die zu $\mathfrak{S}(f)$ gehörigen homogenen Gleichungen

$$\sum_{q=0}^{\infty}\alpha_q x_{p+q}=0,\qquad p=0,1,2,\ldots$$

wegen

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n Z^n=f(Z)=0,\qquad |Z|<1$$

außer der trivialen Lösung $x_0=0, x_1=0,\ldots$ die quadratisch konvergente Eigenlösung

$$x_n=Z^n,\qquad n=0,1,2,\ldots\qquad\qquad (0^0=1\neq 0)$$

zulassen[57]), so daß $\mathfrak{S}(f)$ keine beschränkte Reziproke hat (vgl. § 2). Da

---

[57]) Zu dieser Schlußweise vgl. H. v. Koch, Proc. of the 5th International Congress, Cambridge 1913, Bd. I, S. 375. — Koch hat etwas andere Konvergenzbedingungen als ich. Auch nimmt er an, daß die fragliche Nullstelle nicht in den Nullpunkt $z=0$ hineinfällt. — Ist $0=f(0)=\alpha_0$, so ist

$$x_0=1,\quad x_1=0,\quad x_2=0,\ldots,$$

wie bereits oben angegeben, offenbar eine normierte Eigenlösung.

demnach der Punkt $\lambda = 0$ gewiß in dem Spektrum von $\mathfrak{S}(f)$ liegt, wenn $f(z)$ im Innern des Einheitskreises verschwinden kann, und da andererseits das Spektrum von $w\mathfrak{E} - \mathfrak{A}$ aus demjenigen von $\mathfrak{A}$ stets durch die um die komplexe Konstante w bestimmte Translation entsteht, so folgt aus (II), daß das ganze Wertgebiet Γ von $f(z)$ in dem Spektrum von $\mathfrak{S}(f)$ liegen muß. Da aber das Spektrum stets abgeschlossen ist, so ist auch Γ' eine Teilmenge des Spektrums.

Um auch die zweite Hälfte des Satzes zu beweisen, wähle man eine Zahl λ außerhalb Γ'. Dann ist $\frac{1}{\lambda - f(z)}$ für $|z| < 1$ regulär und beschränkt, also ist $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$ eine beschränkte Matrix. Setzt man ferner in der Schurschen Beziehung (III)

$$f_1 = \lambda - f, \quad f_2 = \frac{1}{\lambda - f},$$

so folgt aus (II) mit Rücksicht die letzte der unter (I) stehenden drei Relationen offenbar

$$(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f))\,\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right) = \mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f)) = \mathfrak{E}.$$

Mithin ist $(\lambda\mathfrak{E} - \mathfrak{S}(f))^{-1}$ vorhanden, es ist nämlich gleich $\mathfrak{S}\left(\frac{1}{\lambda - f}\right)$. Die außerhalb Γ' gelegenen Zahlen liegen also außerhalb des Spektrums, d. h. das Spektrum ist eine Teilmenge von Γ', w. z. b. w.

Wie sehr diese Charakterisierung des Spektrums von $\mathfrak{S}(f)$ über die Bestimmung des Wertevorrates der Kopplungsform hinausgeht, erkennt man am besten, wenn man $\mathfrak{S}(f)$ mit der (offenbar ebenfalls beschränkten und bekanntlich normaloiden) Matrix vergleicht, die aus $\mathfrak{S}(f)$ dadurch entsteht, daß man die diagonalparallelen Strahlen auch nach oben unbegrenzt fortsetzt — d. i. die Laurentmatrix der Fatouschen Randfunktion von $f(z)$. Ist nun diese Randfunktion stetig, so ist das Spektrum der Laurentmatrix bekanntlich diejenige (nicht notwendig Jordansche) stetige geschlossene Kurve C, auf welche der *Rand* des Einheitskreises abgebildet wird, so daß die Wertevorräte der beiden Kopplungsformen gewiß übereinstimmen (da ja Γ' und C offenbar dieselbe konvexe Hülle haben), während dies von den Spektren im allgemeinen nicht behauptet werden kann, da $\Gamma' + C$ in dem Spezialfall einer Jordanschen Schlichtabbildung wegen $\Gamma' = \Gamma + C$ selbstverständlich ist.

Auch die nach Herrn Toeplitz benannten Matrizen des Carathéodoryschen Problems[58]) sind von den Schurschen Matrizen wohl zu unterscheiden. Sie entstehen nämlich aus den Schurschen durch künstliches Hermitesieren, und haben, sobald die Randfunktion etwa stetig ist, den Wertbereich der reellen Komponente der Randfunktion zum Spektrum; die zu (III) analoge

[58]) O. Toeplitz, Rend. Palermo **32** (1911), S. 191–192; vgl. ferner [50]).

multiplikative Eigenschaft kommt aber ihnen nicht zu, und eine [in dem Laurentschen Falle der Toeplitz-Hellingerschen Spektralregel[4]), im Jacobischen Fall[17]) der Regel $(45)'$ entsprechende] Beherrschung der Spektralmatrix steht noch aus. Die Schwierigkeit rührt ausschließlich davon her, daß das orthogonale Funktionensystem

$$e(n\varphi), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad 0 \leqq \varphi < 2\pi$$

nicht vollständig ist[17]). Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hankelschen Formen, deren Analogie mit den Toeplitzschen von Herrn Fischer[59]) erkannt worden ist. — Eine Spektraltheorie dieser beiden Matrizenklassen ließe sich wohl dadurch erreichen, daß man die wesentlich anders gerichteten Untersuchungen von Herrn Szegö[60]) in die allgemeine Spektraltheorie einordnet. Es sei hier noch erwähnt, daß das Abbildungsprinzip des § 7 auf unitäre Argumente leicht übertragen werden kann.

Leipzig, den 13. Januar 1929.

(Eingegangen am 13. Januar 1929.)

Zusatz (1. Mai 1929).
Radonsche Integrale und normale Spektraltheorie.

Nach Beendigung der Drucklegung habe ich bemerkt, daß auf die Hermitesche und auf die unitäre Spektraltheorie eine solche aller normalen Matrizen gegründet werden kann.

Zunächst kann man nämlich zu jeder beschränkten normalen Matrix $\mathfrak{A}$, für welche $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, auf genau eine Weise eine positiv definite Matrix $\mathfrak{P}$ und eine unitäre Matrix $\mathfrak{U}$ derart angeben, daß $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{U} = \mathfrak{U}\mathfrak{P}$ wird (während umgekehrt jede Matrix $\mathfrak{A}$, die auf diese Weise zerlegbar ist, normal ist und eine Reziproke hat). Aus leicht ersichtlichen Gründen soll $\mathfrak{P}$ als der Absolutbetrag, $\mathfrak{U}$ als das Azimut von $\mathfrak{A}$ bezeichnet werden. Ist z. B. $\mathfrak{A}$ die fastperiodische Matrix der fastperiodischen Funktion $f(t)$, die der Null nicht beliebig nahe kommen kann, so daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert, so ist die fastperiodische Matrix von $|f(t)|$ der Absolutbetrag, diejenige von $f(t)|f(t|^{-1}$ das Azimut von $\mathfrak{A}$; vgl. die Schlußbemerkung meines auf S. 264 erwähnten Aufsatzes, woselbst (§ 9) nicht diese, sondern eine kompliziertere, „kartesische“ Zerlegung angedeutet wird (siehe weiter unten).

Es sei nun $\|\sigma_{pq}(\mu)\|$ die Spektralmatrix des Absolutbetrages, $\|\tau_{pq}(\varphi)\|$ diejenige des Azimuts der normalen Matrix $\mathfrak{A}$. Da die beiden Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{U}$ vertauschbar sind, so sind es auch ihre Resolventen, und daher, wie die sinngemäße

---

[59]) E. Fischer, Rend. Palermo **32** (1911), S. 240 ff.

[60]) G. Szegö, Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 167 ff.; Math. Annalen **82** (1921), S. 188 ff., usw.

Wiederholung einer Hilbertschen Schlußweise zeigt, auch ihre Spektralmatrizen $||\sigma_{pq}||$, $||\tau_{pq}||$, und zwar bei jedem Wertepaare (μ, φ). Da diese beiden Spektralmatrizen Hermitesch sind, so ist es mithin auch ihr Produkt

$$||\zeta_{pq}(\mu,\varphi)|| = ||\sigma_{pq}(\mu)|| \cdot ||\tau_{pq}(\varphi)||; \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi.$$

Die Matrix $||\zeta_{pq}||$ ist nun als die Spektralmatrix der normalen Matrix $\mathfrak{A}$ anzusprechen. Es zeigt sich nämlich, daß für hinreichend große $|\lambda|$

$$(\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1} = \left|\left| \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} \frac{d\zeta_{pq}(\mu,\varphi)}{\lambda-\mu e^{i\varphi}} \right|\right|$$

gilt, wobei das Integral, wie bereits aus der Schreibweise hervorgeht, *nicht als wiederholtes Stieltjessches Integral*, sondern als Radonsches Doppelintegral zu verstehen ist [die Radonsche Monotonieeigenschaft der Kopplungsform von $||\zeta_{pq}(\mu,\varphi)||$ kann aus bekannten Eigenschaften der klassischen Spektralmatrix leicht geschlossen werden]. Da $\mathfrak{P}$ beschränkt ist, so gilt für hinreichend große $|\mu|$, wie wir wissen, $d\sigma_{pq}(\mu) \equiv 0$, und daher *in dem Radonschen Sinne* $d\zeta_{pq}(\mu,\varphi) \equiv 0$, so daß der Integrationsbereich ganz im Endlichen liegt. Da ferner $\mathfrak{P}$ positiv definit ist, so gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $d\sigma_{pq}(\mu) \equiv d\zeta_{pq}(\mu,\varphi) \equiv 0$ wird für $-\infty < \mu < \varepsilon$. Wir können daher, wenn wir noch den Buchstaben μ auf ϱ vertauschen, einfach

$$(*) \qquad (\lambda\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1} = \left|\left| \int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi} \frac{d\zeta_{pq}(\varrho,\varphi)}{\lambda-\varrho e^{i\varphi}} \right|\right|; \qquad \zeta_{pq}(\varrho,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_{pj}(\varrho)\,\tau_{jq}(\varphi)$$

setzen. Es handelt sich also bei der Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}\mathfrak{U}$ tatsächlich um die „Polarkoordinaten" von $\mathfrak{A}$. Bei der „kartesischen" Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{H}$ in Hermitesche Komponenten baut sich die Spektralmatrix von $\mathfrak{A}$ aus denjenigen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ auf eine viel kompliziertere Weise auf (was davon herrührt, daß die kartesische Zerlegung additiv und nicht multiplikativ ist). Die Existenz einer solchen kartesischen Integraldarstellung der Resolvente *aller* normalen Matrizen haben von Neumann und ich in während der zweiten Hälfte vom Januar d. J. stattgefundenen Gesprächen mit Bestimmtheit vermutet. Die Existenz dieser Formel kann jetzt auf Grund von (*) sichergestellt werden, doch ist (*) viel bequemer, so daß ich nunmehr auch bei den fastperiodischen Matrizen die Darstellung (*) bevorzugen werde.

Es war bisher vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A}^{-1}$ existiert. Ist dies nicht der Fall, so wähle man eine reelle Zahl ν derart, daß die (offenbar normale) Matrix $\mathfrak{A}+\nu\mathfrak{E}$ eine Reziproke hat, und bezeichne durch $||\zeta^{(\nu)}_{pq}(\varrho,\varphi)||$ die Spektralmatrix von $\mathfrak{A}+\nu\mathfrak{E}$. Dann hängt die Matrix $||\zeta^{(\nu)}_{pq}(\varrho-\nu,\varphi)||$ von ν gar nicht ab, und bezeichnet man sie durch $||\zeta_{pq}(\varrho,\varphi)||$, so bleibt die Integraldarstellung (*) bestehen.

Das Spektrum von $\mathfrak{A}$ besteht jetzt nicht mehr aus allen, sondern nur aus den „zweidimensionalen" Nichtkonstanzstellen der ζ_{pq} und aus deren Häufungsstellen, das Punktspektrum entsprechend nicht aus allen, sondern nur aus denjenigen Unstetigkeitsstellen, in welchen „$d\zeta_{pq}(\varrho,\varphi) \neq 0$" gilt bei mindestens einem Wertepaare (p, q). — Nach Herrn Radon sind sogar alle Unstetigkeitsstellen auf einer Halbstrahlenfolge $\varphi = \varphi_m$; $m = 1, 2, \ldots$ und auf einer Kreislinienfolge $\varrho = \varrho_n$; $n = 1, 2, \ldots$ gelegen.