Werk

Titel: Die Analogie zwischen den singulären Punkten auf dem Konvergenzkreis und den Juli...

Jahr: 1929

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0029|log64

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die nächste Behauptung des Satzes I betrifft die Abgeschlossenheit. Ist $\mathfrak{S}$ ein Halbstrahl, $\mathfrak{W}$ ein durch $\mathfrak{S}$ halbierter Winkelraum und $\mathfrak{S}_1$ ein im Innern von $\mathfrak{W}$ liegender Halbstrahl, der der im Satz I′ genannten Eigenschaft teilhaftig ist, so grenze man einen so kleinen von $\mathfrak{S}_1$ halbierten Winkelraum $\mathfrak{W}_1$ ab, daß $\mathfrak{W}_1$ ganz in $\mathfrak{W}$ liegt. Nun erreicht die Funktion $G(z)$ in $\mathfrak{W}_1$ und somit auch in dem umfassenderen $\mathfrak{W}$ die Ordnung ϱ, die sie in der vollen Ebene besitzt. Enthält jeder durch $\mathfrak{S}$ halbierte Winkelraum $\mathfrak{W}$ einen Halbstrahl von der Art von $\mathfrak{S}_1$, so ist in jedem solchen $\mathfrak{W}$ die Funktion $G(z)$ von der Ordnung ϱ. Hiermit ist auch die zweite Behauptung von Satz I bewiesen.

Die dritte und letzte Behauptung von Satz I ist durch sinngemäße Übertragung der in Nr. 34 dargestellten Konstruktion zu beweisen. Es sei $\mathfrak{M}$ eine nicht leere, abgeschlossene, sonst beliebige Menge von Richtungen. Es gibt bekanntlich eine in $\mathfrak{M}$ enthaltene abzählbare Untermenge $\mathfrak{Z}$, so daß $\mathfrak{M}$ die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{Z}$ und der Ableitung von $\mathfrak{Z}$ ist. Es seien $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ die zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Richtungen (ψ_n bezeichnet den Winkel der betreffenden Richtung mit der positiven reellen Achse). Unter $E(z)$ die in (8) angegebene Funktion verstanden, setze man

$$(9) \quad G(z) = E(ze^{-i\psi_0}) + 2^{-1}E(ze^{-i\psi_1}) + \ldots + 2^{-n}E(ze^{-i\psi_n}) + \ldots .$$

Es ist unmittelbar zu sehen, daß $G(z)$ in einem zur offenen Komplementärmenge von $\mathfrak{M}$ gehörigen abgeschlossenen Winkelraum zu 0 strebt und längs eines zu $\mathfrak{Z}$ gehörigen Halbstrahls von unendlicher Ordnung ist. Alle Halbstrahlen von $\mathfrak{M}$ und nur diese Halbstrahlen sind so beschaffen, daß $G(z)$ in jedem durch den Halbstrahl halbierten Winkel von Ordnung ∞ ist.

Die Analogie zwischen den singulären Punkten auf dem Konvergenzkreis und den Juliaschen Richtungen der ganzen Funktionen unendlicher Ordnung.

50. Es soll im folgenden das Anwachsen von ganzen Funktionen längs der Halbstrahlen untersucht werden, die von dem Nullpunkt auslaufen, und in Winkelräumen, die von zwei solchen Halbstrahlen eingeschlossen werden. Die zu gewinnenden Sätze werden immer in doppelter Weise anwendbar sein, indem sie für zwei spezielle Klassen von ganzen Funktionen eine besondere Interpretation gestatten.

Einerseits können nämlich, nach Borel, die Singularitäten auf dem Konvergenzkreis einer Potenzreihe mit den Richtungen stärksten Anwachsens einer gewissen ganzen Funktion vom Normaltypus der Ordnung 1 in Beziehung gesetzt werden. Was wir im folgenden brauchen, wurde schon in Nr. 27 bewiesen und soll jetzt in anderer, hier bequemerer Terminologie so gefaßt werden:

Hilfssatz 2. *Es sei*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine ganze Funktion vom Normaltypus der Ordnung 1. *Der Typus von* $G(z)$ *auf einem vom Nullpunkt auslaufenden Halbstrahl erreicht dann und nur dann den Typus von* $G(z)$ *in der vollen Ebene, wenn der Halbstrahl den Konvergenzkreis der Reihe*

$$a_0 + 1!\, a_1 z + 2!\, a_2 z^2 + \ldots + n!\, a_n z^n + \ldots$$

in einem singulären Punkte schneidet.

Andererseits können, nach Bieberbach[43]), gewisse Präzisierungen des Picardschen Satzes mit der Ordnung in einem Winkelraum in Beziehung gesetzt werden. Was wir im folgenden brauchen, kann schon aus einem kleinen Teil der Resultate von Bieberbach herausgelesen und so gefaßt werden:

Hilfssatz 3. *Es sei* $G(z)$ *eine ganze Funktion unendlicher Ordnung. Wenn die Ordnung von* $G(z)$ *in beliebig kleinen Winkelräumen, die von einem bestimmten Halbstrahl* $\mathfrak{S}$ *halbiert werden, die Ordnung von* $G(z)$ *in der vollen Ebene (also* ∞*) erreicht, so ist die Richtung des besagten Halbstrahls* $\mathfrak{S}$ *eine Juliasche Richtung von* $G(z)$.

Die beiden Hilfssätze unterscheiden sich, bei sonst starker Analogie, in zwei Hinsichten. Erstens gibt Hilfssatz 2 eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Auftreten eines singulären Punktes auf dem Konvergenzrand, während Hilfssatz 3 nur eine hinreichende, keineswegs notwendige Bedingung für das Auftreten Juliascher Richtungen liefert. (Vgl. die Definition dieser Richtungen in der Einleitung, unter Nr. 4.) Zweitens ist in Hilfssatz 2 von dem Typus auf dem Halbstrahl, in Hilfssatz 3 von der Ordnung in den von dem Halbstrahl halbierten beliebig kleinen Winkelräumen die Rede. Dieser Unterschied ist uns nicht neu: Wir sind ihm eben bei Vergleich der Sätze I und I′ begegnet.

51. Wir wollen jetzt denjenigen Spezialfall von Satz I, der die Ordnung $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ und die volle Ebene betrifft, gemäß dem Hilfssatz 2 interpretieren. Das Resultat, das sich ergibt, ist zwar keineswegs überraschend, soll aber zur Erläuterung der Schlußweise formuliert werden.

Satz Ia. *Auf dem Konvergenzkreis jeder Potenzreihe existiert mindestens ein singulärer Punkt. Die Gesamtheit der singulären Punkte auf dem Konvergenzkreis ist abgeschlossen. Jede nicht leere abgeschlossene Menge auf einer Kreisperipherie kann als die Menge der singulären*

[43]) L. Bieberbach, Math. Zeitschr. **3** (1919), S. 175—190.

Punkte auf dem Konvergenzkreis von einer geeigneten Potenzreihe aufgefaßt werden.

Wenn wir den die Ordnung ∞ betreffenden Spezialfall von Satz I′ gemäß Hilfssatz 3 interpretieren, ergibt sich sofort die erste Aussage des folgenden Satzes:

Satz Ib. *Jede ganze Funktion unendlicher Ordnung besitzt mindestens eine Juliasche Richtung. Die Gesamtheit der Juliaschen Richtungen ist abgeschlossen. Jede nicht leere abgeschlossene Menge von Richtungen kann als die Menge der Juliaschen Richtungen von einer geeigneten ganzen Funktion unendlicher Ordnung aufgefaßt werden.*

Die zweite Aussage des Satzes Ib, betreffend die Abgeschlossenheit der Gesamtheit der Juliaschen Richtungen, kann nicht aus Hilfssatz 3 gefolgert werden, da dieser nur eine hinreichende, keine notwendige Bedingung für das Auftreten solcher Richtungen enthält. Diese Abgeschlossenheit ist aber unmittelbar aus den Definitionen zu schließen; der Beweis des zweiten Teiles von Satz I kann dabei als Paradigma dienen.

Daß eine beliebige abgeschlossene und nicht leere Menge von Richtungen als die Menge der Juliaschen Richtungen einer geeigneten ganzen Funktion von unendlicher Ordnung aufgefaßt werden kann, wird nicht durch die Kombination von Satz I′ und Hilfssatz 3, sondern auf Grund von Hilfssatz 3 durch das Beispiel (9) belegt[44]).

52. Satz II. *Wenn sämtliche Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so stimmen die Ordnung, die Lindelöfsche Ord-

[44]) Vgl. W. Gontcharoff, Comptes Rendus Paris **185** (1927), p. 1100—1102. Zwei nach Abschluß der Redaktion vorliegender Arbeit erschienene Noten von M. Biernacki, Comptes Rendus **186** (1928), p. 1260—1262 und p. 1410—1412, veranlassen mich zur weiteren Erläuterung der angewandten Methode folgenden, leicht ersichtlichen Satz hervorzuheben: *Eine ganze Funktion $G(z)$ und ihre Derivierte $G'(z)$ erreichen in denselben Winkelräumen denjenigen Höchstwert von Ordnung, Lindelöfscher Ordnung und Typus, der ihnen in der vollen Ebene zukommt.* Hieraus folgt zweierlei: a) *Eine Potenzreihe und ihre Derivierte haben auf dem Konvergenzrand dieselben singulären Stellen* und b) *Wenn $G(z)$ von unendlicher Ordnung ist, so haben die Funktionen*

$$\ldots, G''(z), G'(z), G(z), \int_{c_1}^{z} G(z)\,dz, \int_{c_2}^{z} dz \int_{c_1}^{z} G(z)\,dz, \ldots$$

mindestens eine gemeinsame Juliasche Richtung. a) folgt mittels Hilfssatz 2 und ist trivial, b) folgt mittels Hilfssatz 3 und ist der bequemste Fall eines schönen Resultates von Biernacki.

nung und der Typus von $G(z)$ längs der positiven reellen Achse mit der Ordnung, der Lindelöfschen Ordnung bzw. dem Typus von $G(z)$ in der vollen Ebene überein[45]).

Es sei angenommen, daß der fragliche Winkelraum von der positiven reellen Achse halbiert wird und die Öffnung 2θ hat, $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\Re a_n \geqq |a_n| \cos\theta \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{10}$$

Wird, wie üblich (Nr. 47), mit $M(r)$ der Maximalbetrag von $G(z)$ im Kreise $|z| \leqq r$ bezeichnet, so folgt mit Benutzung von (10)

$$M(r) \geqq |G(r)| \geqq \Re G(r) \geqq \cos\theta \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \geqq M(r) \cos\theta,$$

$$\log M(r) + \log\cos\theta \leqq \log|G(r)| \leqq \log M(r),$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log|G(r)|}{\log M(r)} = 1 .$$

Es tritt $\log G(r)$ in der Definition der Ordnung, der Lindelöfschen Ordnung und des Typus längs der positiven reellen Achse in derselben Weise auf, wie $\log M(r)$ in der Definition derselben Größen für die volle Ebene (Nr. 46 bis 49).

Der bewiesene Satz II ist ganz besonders selbstverständlich in dem Sonderfall, in welchem alle Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ reell und nichtnegativ sind. Dieser Sonderfall wird später, durch Satz V, beträchtlich verallgemeinert.

53. Derjenige Spezialfall des Satzes II, der den Typus der ganzen Funktionen von Ordnung 1 und Normaltypus betrifft, ist auf Grund von Hilfssatz 2 mit folgendem wohlbekannten Satz[46]) äquivalent:

Satz IIa. *Wenn sämtliche Koeffizienten einer Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so ist der Schnittpunkt des Konvergenzkreises mit der positiven reellen Achse ein singulärer Punkt für die Reihe.*

Demjenigen Spezialfall des Satzes II, der die Funktionen von unendlicher Ordnung betrifft, entnehmen wir, auf Grund von Hilfssatz 3, den folgenden.

[45]) Selbstverständlich läßt Satz II die Möglichkeit offen, daß $G(z)$ keiner bestimmten Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ mit endlichem $\varrho, \varrho_1, \ldots, \varrho_m$ angehört. Es wird nur behauptet, daß $G(z)$ sich in bezug auf die Lindelöfsche Ordnung längs der positiven reellen Achse und in der Vollebene *gleich verhält*. Analoges gilt in bezug auf den Typus und in bezug auf die späteren Sätze III, IV, V, VI, VIII dieses Kapitels.

[46]) Satz von Vivanti-Pringsheim-Dienes. Vgl. Hadamard, a. a. O. [1]), S. 41—42.

Satz IIb. *Wenn sämtliche Koeffizienten einer ganzen Funktion unendlicher Ordnung in einem Winkelraum enthalten sind, dessen Scheitel der Nullpunkt und dessen Öffnung $< \pi$ ist, so ist die Richtung der positiven reellen Achse eine Juliasche Richtung für die Funktion.*

Zwei Bemerkungen zu Satz IIb:

1. Die Voraussetzung, daß die Ordnung ∞ ist, ist wesentlich: e^z hat positive Koeffizienten, und die Richtung der positiven reellen Achse ist die Richtung des raschesten Anwachsens, aber keine Juliasche Richtung für e^z.

2. Es ist möglich, daß die durch Satz IIb festgestellte Juliasche Richtung die einzige Juliasche Richtung der Funktion ist: Die Funktion (8) befindet sich gerade in diesem Fall.

54. Satz III. *Es sei vorgelegt eine beliebige ganze Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots . \tag{1}$$

Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht aus (1) *eine ganze Funktion, die in allen Winkelräumen die nämliche Ordnung, die nämliche Lindelöfsche Ordnung und den nämlichen Typus besitzt.*

Ausführlicher gesagt, läßt sich eine unendliche Folge $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, deren Glieder nur der beiden Werte $+1$ und -1 fähig sind, so bestimmen, daß für die Reihe

$$\varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 z + \varepsilon_2 a_2 z^2 + \ldots + \varepsilon_n a_n z^n + \ldots$$

die Ordnung (usw.) in einem beliebigen Winkelraum mit der Ordnung (usw.) in der vollen Ebene übereinstimmt.

Ich gebrauche den folgenden bekannten[47])

Hilfssatz 4. *Es sei $M(r)$ der Maximalbetrag und $\mu(r)$ das Maximalglied der ganzen Funktion $G(z) = a_0 + a_1 z + \ldots$, das heißt*

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |G(z)|, \qquad \mu(r) = \operatorname*{Max}_{n=0,1,2,\ldots} |a_n| r^n .$$

Dann gilt für ganze transzendente Funktionen beliebiger Ordnung

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log r}{\log \mu(r)} = 0, \tag{11}$$

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log \mu(r)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \tag{12}$$

und für Funktionen endlicher Ordnung

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\log M(r)}{\log \mu(r)} = 1 . \tag{13}$$

[47]) Vgl. z. B. Pólya-Szegö, a. a. O. [17]) 2, Nr. IV 9, 51, 54, S. 2, 8 und 169, 177, 178.

Es wird genügen, nur denjenigen Teil des Satzes III zu beweisen, der sich auf die Ordnung bezieht. Dann genügt es nur die Beziehungen (11) und (12) des Hilfssatzes 4 zu benutzen (für die anderen Aussagen des Satzes III ist (13) heranzuziehen). Beide Seiten von (12) stellen *die* Ordnung von $G(z)$ (die in der vollen Ebene) dar, die mit ϱ bezeichnet werden mag. Im Falle $\varrho = 0$ ist die Behauptung (für beliebige ε_n) selbstverständlich. Es sei also $\varrho > 0$.

Wir müssen zur Wahl der Vorzeichen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots$ einige Vorbereitungen treffen. Es sei $\varrho_0, \varrho_1, \varrho_2, \ldots$ eine wachsend gegen ϱ konvergierende Folge positiver Zahlen, in Zeichen

$$0 < \varrho_0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \ldots, \qquad \lim \varrho_n = \varrho. \tag{14}$$

Die abzählbare Punktmenge $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots$ sei im Intervall $0, 2\pi$ überall dicht. Die unendliche Folge $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ soll jedes ψ_m unendlich oft enthalten. Man setzt etwa

$$\begin{aligned}
&\varphi_0 = \psi_1;\\
&\varphi_1 = \psi_1, \quad \varphi_2 = \psi_2;\\
&\varphi_3 = \psi_1, \quad \varphi_4 = \psi_2, \quad \varphi_5 = \psi_3;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Nun konstruieren wir zwei Folgen von ganzen Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots$, und eine Folge von positiven Zahlen $r_0, r_1, r_2, \ldots$. Es sei $\lambda_0 = 0$ gesetzt. Wir nehmen an, daß λ_n schon konstruiert ist und konstruieren $r_n, \nu_n, \lambda_{n+1}$ unter Berücksichtigung der Zahl ϱ_n und der folgenden Umstände: Es folgt leicht aus (11), daß für alle genügend großen Werte von r

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots + |a_{\lambda_n - 1}| r^{\lambda_n - 1} < \frac{1}{4} \mu(r) \tag{15}$$

ist. Es folgt leicht aus (12) und der Definition von ϱ und ϱ_n, daß für gewisse beliebig große Werte von r

$$\log \mu(r) > r^{\varrho_n} \tag{16}$$

ist. Es gibt also beliebig große Werte r, für welche (15) und (16) simultan stattfinden. Da der Index des Maximalgliedes gegen ∞ strebt [48]), kann r_n so gewählt werden, daß sowohl (15) wie (16) für $r = r_n$ bestehen, und

$$\mu(r_n) = |a_{\nu_n}| r_n^{\nu_n}, \qquad \nu_n > \lambda_n \tag{17}$$

gilt. Hiermit sind r_n und ν_n gewählt. Da die Reihe (1) für $z = r_n$ absolut

[48]) Unmittelbar ersichtlich, auch gleichbedeutend mit (11), vgl. übrigens z. B. Pólya-Szegö, a. a. O. [17]) 2, Nr. IV 2, S. 2 und 169.

konvergiert, gibt es eine ganze Zahl λ_{n+1}, so daß

$$(18) \qquad |a_{\lambda_{n+1}}| r_n^{\lambda_{n+1}} + |a_{\lambda_{n+1}+1}| r_n^{\lambda_{n+1}+1} + \ldots < \frac{1}{4}\mu(r_n)$$

ist. Aus (17) und (18) folgt übrigens offenbar $\lambda_{n+1} > \nu_n$.

Wir erhalten auf diese Weise

$$0 = \lambda_0 < \nu_0 < \lambda_1 < \nu_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \nu_n < \lambda_{n+1} < \ldots .$$

Aus (17) und aus $\nu_n \to \infty$ folgt $r_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

Es soll nun ε_m für $\lambda_n \leqq m < \lambda_{n+1}$ so gewählt werden, daß $\varepsilon_m^2 = 1$ und

$$(19) \qquad \Re \frac{\varepsilon_m a_m (r_n e^{i\varphi_n})^m}{a_{\nu_n} (r_n e^{i\varphi_n})^{\nu_n}} \geqq 0$$

ist; ε_m ist im allgemeinen eindeutig bestimmt, z. B. $\varepsilon_{\nu_n} = 1$. Man setze

$$G^*(z) = \varepsilon_0 a_0 + \varepsilon_1 a_1 z + \ldots + \varepsilon_n a_n z^n + \ldots$$

Gemäß (17) und (19) ist

$$(20) \qquad \left| \sum_{m=\lambda_n}^{\lambda_{n+1}-1} \varepsilon_m a_m (r_n e^{i\varphi_n})^m \right| \geqq \mu(r_n).$$

Es folgt aus der Geltung von (15) für $r = r_n$, aus (20) und aus (18), daß

$$(21) \qquad |G^*(r_n e^{i\varphi_n})| \geqq \mu(r_n) - \frac{1}{4}\mu(r_n) - \frac{1}{4}\mu(r_n) \geqq \frac{1}{2}\exp(r_n^{\varrho_n});$$

es wurde schließlich noch die Gültigkeit von (16) für $r = r_n$ benutzt. Da in der Folge $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ jedes ψ_m unendlich oft auftritt, folgt aus (21) mit Rücksicht auf (14)

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\log\log |G^*(r e^{i\psi_m})|}{\log r} = \varrho.$$

Somit ist $G^*(z)$ auf überall dicht liegenden Halbstrahlen, also in jedem Winkelraum von der Ordnung ϱ, w. z. b. w.

Satz III kann, soweit er sich auf den Typus bezieht, anders formuliert werden, nämlich so, daß er von Halbstrahlen anstatt von Winkelräumen handelt: Der Typus ist stetig, vgl. Nr. 48, und wenn $G(z)$ auf überall dichten Halbstrahlen denselben Typus hat, hat es auf *allen* Halbstrahlen denselben Typus.

55. Derjenige Spezialfall des Satzes III, der den Typus der ganzen Funktionen von Ordnung 1 und Normaltypus betrifft, ist auf Grund von Hilfssatz 2 (vgl. auch die Schlußbemerkung in Nr. 54) mit folgendem wohlbekannten Satz[49]) äquivalent:

[49]) Vgl. Hadamard, a. a. O. [1]), S. 74.

Satz IIIa. *Es sei vorgelegt eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius. Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht daraus eine Potenzreihe, für welche alle Punkte des Konvergenzkreises singuläre Punkte sind.*

Es kann bemerkt werden, daß der hier gegebene Beweis des von Fatou ausgesprochenen Satzes IIIa trotz großer Ähnlichkeit verschieden ist von meinem früheren Beweise dieses Satzes[50]); in dem jetzigen Beweis wurde der auf Borel zurückgehende Hilfssatz 2 an der Stelle benutzt, an welcher der frühere Beweis sich auf einen Hilfssatz von Fabry stützt.

Demjenigen Spezialfall des Satzes III, der die Funktionen von unendlicher Ordnung betrifft, entnehmen wir, auf Grund von Hilfssatz 3, den folgenden

Satz IIIb. *Es sei vorgelegt eine beliebige ganze Funktion unendlicher Ordnung. Durch die Abänderung der Vorzeichen gewisser geeignet gewählter Koeffizienten entsteht daraus eine Funktion, für welche alle Richtungen Juliasche Richtungen sind.*

56. Satz IV. *Die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten*[51]) *der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \tag{1}$$

sei $= \Delta$. *Dann ist* $G(z)$ *in jedem Winkelraum, dessen Öffnung* $2\pi\Delta$ *übersteigt, von derselben Ordnung, derselben Lindelöfschen Ordnung und demselben Typus, wie in der vollen Ebene.*

Anders gefaßt: Gibt es einen Winkelraum von der Öffnung α, in dem $G(z)$ von niedrigerer Ordnung (oder von niedrigerer Lindelöfschen Ordnung oder von niedrigerem Typus) ist, als in der vollen Ebene, so ist $\alpha \leqq 2\pi\Delta$.

Ich beschränke mich wieder auf die Untersuchung der Ordnung. Es sei $G(z)$ von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene, $\varrho \leqq \infty$, und von der Ordnung ϱ' in dem Winkelraum

$$-\theta \leqq \arg z \leqq \theta, \tag{22}$$

wobei

$$2\pi\Delta < 2\theta < 2\pi \tag{23}$$

sei. Selbstverständlich ist

$$\varrho' \leqq \varrho \tag{24}$$

---

[50]) Acta Mathematica **40** (1916), p. 179—181.

[51]) Unter der Dichte (untere, obere, Minimal- oder Maximaldichte) einer Koeffizientenfolge $a_{\lambda_1}, a_{\lambda_2}, a_{\lambda_3}, \dots$ wird die Dichte (obere Dichte usw.) der Folge der Indizes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ im Sinne des Kapitels I verstanden. An Stelle „Dichte der von Null verschiedenen Koeffizienten" wird häufig kürzer „Koeffizientendichte" gesagt.

und wir haben zu untersuchen, ob in dieser Ungleichung das Zeichen $<$ gelten kann oder nicht.

Wie $G(z)$, ist auch die mit den konjugierten Koeffizienten gebildete ganze Funktion

$$\bar{G}(z) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \bar{a}_2 z^2 + \dots \tag{25}$$

von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene und von Ordnung ϱ' im Winkelraum (22). Daher sind die reellkoeffizientigen ganzen Funktionen

$$G(z) + \bar{G}(z) \quad \text{und} \quad i(\bar{G}(z) - G(z))$$

beide von Ordnung $\leqq \varrho'$ im Winkelraum (22) und mindestens eine unter ihnen muß von der Ordnung ϱ in der vollen Ebene sein; ferner haben beide eine Koeffizientendichte $\leqq \Delta$. Wäre also $\varrho' < \varrho$ für irgendeine ganze Funktion möglich, so wäre es auch für eine reellkoeffizientige ganze Funktion möglich.

Daher können und wollen wir annehmen, daß $G(z)$ *nur reelle Koeffizienten* hat. Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ $(0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots)$ die Indizes der von 0 verschiedenen Koeffizienten; Δ ist also, im Sinne von Nr. 6, die Maximaldichte der Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$. Wir können ohne Verlust an Allgemeinheit annehmen, daß

$$a_{\lambda_1} > 0.$$

Das Intervall λ_n, λ_{n+1} soll von erster oder von zweiter Art heißen, je nachdem $a_{\lambda_n} a_{\lambda_{n+1}} < 0$ oder > 0 ist.

Jetzt wird der eigens zu diesem Zwecke vorbereitete Hilfssatz A in Kapitel II (vgl. Nr. 45) herangezogen. Aus der darin genannten Funktion $\Phi(z)$ und aus $G(z)$ wird durch „Hadamardsche Komposition“ die Reihe

$$F(0)a_0 + F(1)a_1 z + \dots + F(n)a_n z^n + \dots = \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi(u) G\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \tag{26}$$

gebildet.

Gemäß Konstruktion und der Aussage 1 des Hilfssatzes A sind alle Koeffizienten $F(n)a_n$ an der linken Seite von (26) reell und nichtnegativ. Gemäß Aussage 2 des Hilfssatzes A und auf Grund von Hilfssatz 1 des gegenwärtigen Kapitels stellt die linke Seite eine ganze Funktion von Ordnung ϱ dar. Die ganze Funktion (26) ist also (nach dem selbstverständlichen Spezialfall des Satzes II) längs der positiven reellen Achse von Ordnung ϱ.

Das Integral an der rechten Seite von (26) ist ursprünglich längs eines im positiven Sinne durchlaufenen Kreises vom Mittelpunkt $u = 0$ zu erstrecken, dessen Radius < 1 ist. Der Integrand ist, gemäß Aussage 4 des Hilfssatzes A außerhalb des Punktes $u = 0$ und außerhalb des am

Einheitskreise gelegenen Bogens

$$|u| = 1, \qquad -\pi\Delta \leqq \arc u \leqq \pi\Delta \tag{27}$$

regulär und eindeutig, auch für $u = \infty$, wo er wie u^{-2} verschwindet. Daher kann man den Integrationsweg in eine einfache geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ deformieren, die den Bogen (27) im Innern enthält, sich diesem Bogen so nahe anschließt, daß sie ganz in dem Winkelraum (22) verläuft, vgl. (23), und in negativem Sinne beschrieben wird; es soll $\mathfrak{C}$ aus zwei zu (27) konzentrischen, durch die positive reelle Achse halbierten Kreisbögen, von Radien $1-\varepsilon$, $1+\varepsilon$ und gemeinsamer Öffnung $2(\pi\Delta+\varepsilon)$, ferner aus zwei geraden Strecken von Länge 2ε zusammengesetzt sein. Wenn z positiv ist und u sich auf $\mathfrak{C}$ befindet, ist zu^{-1} ein zu Winkelraum (22) gehöriger Punkt und es ist $|zu^{-1}| \leqq z(1-\varepsilon)^{-1}$. Da $G(z)$ in (22) von der Ordnung ϱ' ist, schließt man hieraus bei beliebig kleinem positiven ε, daß für genügend großes positives reelles z die rechte Seite von (26)

$$\leqq \text{konst. } \exp\left(\{z(1-\varepsilon)^{-1}\}^{\varrho'+\varepsilon}\right)$$

ist. Also ist die *Ordnung von* (26) *der positiven reellen Achse entlang* $\leqq \varrho'$. Diese Ordnung ist aber, wie oben festgestellt, $= \varrho$. Somit ist $\varrho \leqq \varrho'$, also gemäß (24), $\varrho' = \varrho$, w. z. b. w.

57. An der entscheidenden Stelle des Beweises von Satz IV sind die Koeffizienten als reell angenommen worden, und wir haben eigentlich, wie geringe Modifikationen des Beweisganges zeigen, folgenden Satz mitbewiesen:

Satz V. *Die Koeffizienten* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *der ganzen Funktion*

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

seien reell, und die Maximaldichte derjenigen Koeffizienten, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen, sei Δ. *Dann besitzt* $G(z)$ *in jedem Winkelraum, der den Winkelraum*

$$-\pi\Delta \leqq \arc z \leqq \pi\Delta$$

ganz im Innern enthält, dieselbe Ordnung, dieselbe Lindelöfsche Ordnung und denselben Typus, wie in der vollen Ebene.

(Man sagt, daß der Koeffizient a_m einen Vorzeichenwechsel bestimmt, wenn erstens $a_m \neq 0$ ist, und zweitens das Vorzeichen von a_m dem des letzten, a_m vorangehenden nichtverschwindenden Koeffizienten entgegengesetzt ist.)

Man kann aus den Sätzen IV und V durch Spezialisierung und Kombination noch manche weitere gewinnen. Ich begnüge mich damit, einige Sonderfälle des Satzes IV hervorzuheben. Für $\Delta = 0$ erhalten wir den

Satz VI. *Eine ganze Funktion von Koeffizientendichte Null besitzt in allen Winkelräumen die nämliche Ordnung, die nämliche Lindelöfsche Ordnung und den nämlichen Typus.*

Betrachten wir jetzt eine ganze Funktion $G(z)$ vom Normaltypus der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$, wobei $\varrho > 0$, und nehmen wir an, daß der Typus von $G(z)$ entlang des Halbstrahls von Richtung φ_1 nichtpositiv ist. Der Typus von $G(z)$ in der vollen Ebene sei H. Setzt man in (7)

$$\varphi_2 = \varphi, \qquad \varphi_3 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2\varrho},$$

so erhält man, da jetzt

$$h(\varphi_1) \leqq 0, \qquad h(\varphi_3) \leqq H > 0$$

vorausgesetzt wurde,

$$0 - h(\varphi) + H \sin \varrho(\varphi - \varphi_1) \geqq 0,$$

also

$$h(\varphi) < H \quad \text{für} \quad \varphi_1 \leqq \varphi < \varphi_1 + \frac{\pi}{2\varrho}.$$

Offenbar gilt dasselbe auch für $\varphi_1 - \frac{\pi}{2\varrho} < \varphi \leqq \varphi_1$. Wenn der Typus von $G(z)$ in einem ganzen Winkelraum von Öffnung α nichtpositiv ist, folgt die Existenz eines offenen Winkelraumes von der Öffnung $\frac{\pi}{2\varrho} + \alpha + \frac{\pi}{2\varrho}$, der keinen Halbstrahl enthält, dem entlang die Funktion $G(z)$ den gleichen Typus erreicht, den sie in der Vollebene besitzt. In jedem abgeschlossenen Teilwinkelraum des besagten offenen Winkelraumes ist also $G(z)$, gemäß Satz I, von niedrigerem Typus als in der Vollebene. Satz IV ergibt somit, daß $\frac{\pi}{2\varrho} + \alpha + \frac{\pi}{2\varrho} \leqq 2\pi\Delta$ ist. So kamen wir zum

Satz VII. *Es sei die ganze Funktion $G(z)$ vom Normaltypus der Lindelöfschen Ordnung $(\varrho, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_m)$ in der Vollebene, aber von nichtpositivem Typus derselben Ordnung in einem Winkelraum von Öffnung α (Halbstrahlen werden hierbei als Winkelräume von Öffnung 0 angesehen). Ist Δ die Maximaldichte der nichtverschwindenden Koeffizienten von $G(z)$, so ist*

$$\Delta \geqq \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{1}{2\varrho}. \tag{28}$$

Das Gleichheitszeichen der Ungleichung (28) kann erreicht werden, es wird sogar für die meisten üblichen Funktionen tatsächlich erreicht, so daß (28) auch in den geläufigsten Fällen „aufklärend wirkt“. Ich hebe nur die folgenden Beispiele hervor:

$G(z) = e^z$; $\quad \varrho = 1, \quad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = 0, \quad \alpha = \pi, \quad \Delta = 1.$

$G(z) = \cos z^\varrho$; $\quad 2\varrho$ positiv ganz, $\quad \varrho_1 = \varrho_2 = \ldots = 0, \quad \alpha = 0, \quad \Delta = \frac{1}{2\varrho}.$

Da $\Delta \leqq 1$ und $\alpha \geqq 0$ ist, hat die Ungleichung (28) zur Folge, daß $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ ist. Die Ungleichung (28) hat zur Voraussetzung, vergessen wir es

nicht, daß der Typus von $G(z)$ längs eines Halbstrahls nichtpositiv wird. Daß dies nur für $\varrho \geqq \frac{1}{2}$ geschehen kann, steht mit einem geläufigen Satz von A. Wiman in Übereinstimmung.

58. Die Sätze IV, V, VI, kombiniert mit den Hilfssätzen 2 und 3, ergeben auf die bewährte Art je einen (bekannten) Satz über singuläre Punkte auf der Konvergenzgrenze und je einen (neuen) Satz über die Juliaschen Richtungen ganzer Funktionen unendlicher Ordnung[52]).

Satz IVa. *Wenn die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten einer Potenzreihe von endlichem Konvergenzradius $= \Delta$ ist, so enthält jeder auf dem Konvergenzrand gelegene abgeschlossene Bogen vom Zentriwinkel $2\pi\Delta$ mindestens einen singulären Punkt der Potenzreihe.*

Satz IVb. *Wenn die Maximaldichte der von Null verschiedenen Koeffizienten einer ganzen Funktion von unendlicher Ordnung $= \Delta$ ist, so enthält jeder abgeschlossene Winkelraum von Öffnung $2\pi\Delta$ mindestens eine Juliasche Richtung der ganzen Funktion.*

Satz Va. *Wenn in einer Potenzreihe mit reellen Koeffizienten und endlichem Konvergenzradius die Maximaldichte derjenigen Koeffizienten, die einen Vorzeichenwechsel bestimmen, $= \Delta$ ist, so enthält derjenige auf dem Konvergenzrand liegende abgeschlossene Bogen vom Zentriwinkel $2\pi\Delta$, der durch die positive reelle Achse halbiert wird, mindestens einen singulären Punkt der Potenzreihe.*

Satz Vb. *Wenn in der Potenzreihe einer ganzen Funktion mit reellen Koeffizienten und von unendlicher Ordnung die Maximaldichte derjenigen*

---

[52]) VIa) ist der bekannte Fabrysche Lückensatz, vgl. E. Fabry, Acta Mathematica 22 (1898), p. 65—87. Vgl. auch Faber, a. a. O. [39]) und Hadamard, a. a. O. [1]), S. 69—73. IVa und Va gehen auch im wesentlichen auf Fabry zurück, vgl. a. a. O. S. 86. Für die Einführung des Begriffes der Maximaldichte vgl. a. a. O. [2b]) und [2c]), für einen anderen Beweis von IVa vgl. die Skizze a. a. O. [2b]), S. 190 und die Ausführungen von Soula, Annales de l'École Normale (3) 44 (1927), p. 97—151, insbesondere S. 126—127; für eine Ausdehnung des Satzes IVa auf Dirichletsche Reihen a. a. O. [2c]) (die dort nur skizzierten Schritte sind hier, insbesondere gelegentlich der Begründung des Hilfssatzes A, voll nachgeholt). Fabry betrachtet übrigens a. a. O. kompliziertere Bedingungen, in welchen das Verschwinden gewisser Koeffizienten mit der Größenordnung anderer kombiniert wird; auch diese Bedingungen sind wesentlicher Erweiterung fähig, vgl. G. Pólya, Math. Annalen 99 (1928), S. 687 bis 706, insbesondere Fußnote [18]) auf S. 703. — Zu der Beweismethode der vorliegenden Arbeit: Die Herleitung des Satzes VIa aus Satz VI, mit Berufung auf Hilfssatz 2, folgt einem von Borel gewiesenen Weg, auf dem er, noch vor Fabry, eine erste Erweiterung des Hadamardschen Lückensatzes, der der Ausgangspunkt aller dieser Untersuchungen ist, fand; vgl. Journal de math. pures et appliquées (5), 2 (1896), p. 441—451. — Für IVb, Vb, VIb vgl. a. a. O. [2h]).