Werk

Titel: Neue zahlentheoretische Absch;tzungen

Autor: Corput, J.G. van der

Jahr: 1929

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0029|log29

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neue zahlentheoretische Abschätzungen.

(Zweite Mitteilung.)

Von

J. G. van der Corput in Groningen.

Einleitung [1]).

Im letzten Jahrzehnt tritt in der analytischen Zahlentheorie öfters das folgende Problem auf: Ist $f(x)$ irgendeine für jedes ganze x im Intervall $a \leqq x < b$ (a und b ganz, $a < b$) definierte reelle Zahl, so wird für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{a \leqq x < b}{M} e^{2\pi i f(x)} = \frac{1}{b-a} \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}$$

eine möglichst kleine obere Schranke gesucht. Oder allgemeiner: Bezeichnet P den m-dimensionalen Quader ($m \geqq 1$)

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

(a_μ und b_μ ganz, $a_\mu < b_\mu$), und ist die reelle Zahl $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ für jeden Gitterpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von P definiert, so suche man für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} = \frac{1}{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)} \sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \cdots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} e^{2\pi i f(x)}$$

eine möglichst kleine obere Schranke.

Zwar haben die verschiedenen Verfasser, die sich mit diesem Problem beschäftigt haben, in den Spezialfällen, denen sie begegnet sind, eine obere Schranke abgeleitet; aber ich glaube, daß es sich empfiehlt einen möglichst allgemeinen und zugleich möglichst scharfen Satz darüber zu publizieren. Darum leite ich in dieser Mitteilung einen Satz ab (Satz 2),

[1]) Erste Mitteilung: Mathematische Annalen 89 (1923), S. 215–254.

der nicht nur alle bis jetzt hierüber gefundene Resultate enthält, sondern sogar fast jede bisherige obere Schranke durch eine kleinere ersetzt.

Zum Beweise dieses Satzes brauche ich nicht nur verschiedene Hilfssätze, sondern auch noch einen Satz, der m. E. wichtig genug ist, um hier schon formuliert zu werden, da auch er vermutlich in diesem Gebiete noch eine bedeutende Rolle spielen wird.

Satz 1. *Es sei P der m-dimensionale Quader* $(m \geqq 1)$

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ und b_μ ganz sind, und $a_\mu < b_\mu$ ist und es sei die reelle Funktion $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ in jedem Gitterpunkt $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ von P definiert.

Es sei ϱ eine positive Zahl $\leqq b_1 - a_1 + 1$. Ist $\varrho \geqq 2$, dann bezeichne P_q für jedes positive ganze $q < \varrho$ den Quader

$$P_q \ldots a_1 \leqq x_1 < b_1 - q; \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m),$$

und es werde dann gesetzt

$$f_q(x) = f(x_1 + q, x_2, \ldots, x_m) - f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

für jeden Gitterpunkt (x) von P_q.

Dann ist

$$(1) \qquad \Big| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \Big| \leqq \sqrt{\frac{2}{\varrho}} + 2 \sqrt{\frac{1}{\varrho} \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big| \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)} \Big|},$$

und sogar

$$(2) \qquad \Big| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \Big| \leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big)}$$

$$+ \frac{1}{\varrho} \sqrt{2\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big) \Big| \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) \Big|}.$$

In dieser Arbeit bezeichnet

$$\underset{(x) \prec P}{M} \varphi(x)$$

den Mittelwert von $\varphi(x)$ in P, d. h. den Mittelwert

$$\frac{1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \ldots (b_m - a_m)} \sum_{x_1 = a_1}^{b_1 - 1} \sum_{x_2 = a_2}^{b_2 - 1} \cdots \sum_{x_m = a_m}^{b_m - 1} \varphi(x).$$

Ist $\varrho = 1$, dann ist die Summe $\sum_{q=1}^{\varrho-1}$ leer, also Null, so daß dann die Schlußglieder in (1) und (2) verschwinden. Die Bedeutung von Satz 1 jedoch ist, daß bei großem $b_1 - a_1$ auch ϱ groß gewählt werden kann.

Dann ist das Glied $\sqrt{\frac{2}{\varrho}}$ klein, so daß die Aufgabe eine obere Schranke abzuleiten für den Absolutwert des Mittelwertes

$$\underset{(x)\prec P}{M} e^{2\pi i f(x)}$$

zurückgeführt ist zu der entsprechenden Aufgabe mit $f_\varrho(x)$ statt $f(x)$, und in der Tat ist die letzte Aufgabe in vielen Fällen leichter zu lösen, als die ursprüngliche.

Obgleich die Ungleichungen (1) und (2) nicht bei Herrn H. Weyl vorkommen, verdanken wir ihm doch den Gedankengang des Beweises [2]).

Satz 1 brauche ich für den Beweis des folgenden Theorems, das den Hauptsatz dieser Mitteilung bildet.

Satz 2. *Es sei* m *ganz* $\geqq 1$, k_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ *ganz* $\geqq 0$, $k_1 \geqq 2$, $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ *definiert und reell in jedem Gitterpunkt* $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ *des* m*-dimensionalen Quaders*

$$P \ldots a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

wo a_μ *und* b_μ *ganz sind und*

$$a_\mu + k_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{3}$$

ist, so daß die Funktion

$$g(x) = \Delta_1^{k_1} \Delta_2^{k_2} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x)$$ [3])

in jedem Gitterpunkt (x) *des Quaders*

$$P_{(k)} \ldots a_u \leqq x_u < b_\mu - k_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m)$$

definiert ist. Es werde gesetzt

$$\varkappa_\mu = 2^{k_\mu + k_{\mu+1} + \ldots + k_m} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\omega = (b_1 - a_1)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_m - a_m)^{k_m}$$

und

$$R = \left| \underset{(x)\prec P_{(k)}}{M} g(x) \right|. \tag{4}$$

Außerdem sei noch gegeben, daß $g(x)$ *im Quader* $P_{(k)}$ *entweder stets positiv oder stets negativ ist, und daß der Absolutwert von* $g(x)$ *in* $P_{(k)}$ *beständig* $\geqq r$ *ist, wo* r *eine positive von* (x) *unabhängige Zahl bezeichnet.*

---

[2]) Vgl. z. B. H. Weyl, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod Eins, Math. Annalen 77 (1916), S. 313–352, insbes. S. 328–329.

[3]) Die rechte Seite dieser Beziehung bedeutet

$$\sum_{h_1=0}^{k_1} \sum_{h_2=0}^{k_2} \cdots \sum_{h_m=0}^{k_m} (-1)^{k_1+\ldots+k_m-h_1-\ldots-h_m} \binom{k_1}{h_1} \ldots \binom{k_m}{h_m} f(x_1 + h_1, \ldots, x_m + h_m).$$

Dann ist

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{1}{20}\left|\underset{(x)\prec P}{M} e^{2\pi i f(x)}\right| \\ < \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-2}} + (r\omega)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}, \end{cases}$$

wo der Strich bezeichnet, daß in der letzten Summe nur diejenigen $\mu \geqq 2$ *und* $\leqq m$ *in Betracht kommen, für die* $\varkappa_\mu$ *größer als* 1 *ist.*

Von diesem Satz, dessen Beweis ich hier zum ersten Male veröffentliche, sind schon verschiedene (bis jetzt noch unbewiesene) Spezialfälle angewendet worden, und zwar

1. von mir beim Teilerproblem [4]);
2. von Herrn L. W. Nieland beim Kreisproblem [5]);
3. von mir in Anwendungen auf allgemeine Gitterpunktprobleme [6]);
4. von Herrn J. F. Koksma und mir, um die Größenordnung der Riemannschen Zeta-Funktion im kritischen Streifen abzuschätzen [7]).

Bald wird eine ausführliche Arbeit von mir erscheinen, in der Satz 2 auf die Diophantischen Ungleichungen angewendet wird [8]), und außerdem noch eine Arbeit von Herrn Nieland [9]).

Bei all diesen Problemen gibt Satz 2 schärfere Resultate als jede andere bis jetzt gefundene Abschätzung.

Der Spezialfall $m = 1$ von Satz 2 lautet folgendermaßen:

Satz 3. *Es sei* $k \geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, $f(x)$ *für jedes ganze* x *ein Intervall* $a \leqq x < b$ (a *und* b *ganz,* $a < b - k$) *definiert und reell, so daß* $\Delta^k f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x < b - k$ *definiert ist.*

---

[4]) J. G. van der Corput, Zum Teilerproblem, Math. Annalen 98 (1928), S. 697–716. Ich beweise ebendort, daß das Restglied beim Teilerproblem $O\left(x^{\frac{27}{82}}(\log x)^{\frac{11}{41}}\right)$ ist.

[5]) L. W. Nieland, Zum Kreisproblem, Math. Annalen 98 (1928), S. 717–736. Es wird gezeigt, daß die Anzahl der Gitterpunkte der Kreisfläche mit Mittelpunkt O und Radius $\sqrt{x}$ gleich $\pi x + O\left(x^{\frac{27}{82}}\right)$ ist.

[6]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme (Zweite Mitteilung), Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 301–310.

[7]) J. G. van der Corput et J. F. Koksma, Sur l'ordre de grandeur de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann dans la bande critique. Hier wird u. a. bewiesen, daß es eine absolute Konstante c gibt, derart, daß für $\sigma = 1 - \frac{g}{\gamma - 2}$ (g ganz $\geqq 3$, $\gamma = 2^g$) und $|t| \geqq 3$

$$|\zeta(\sigma + it)| < c\left\{\frac{|t|^{\frac{1}{\gamma-2}}}{g} + \frac{1}{\log\log|t|}\right\}\log|t|$$

ist.

[8]) J. G. van der Corput, Sur les inégalités Diophantiques.

[9]) L. W. Nieland, Zur Theorie der Gitterpunkte mit komplexen Gewichten.

Ist $\Delta^k f(x)$ *im Intervall* $a \leqq x < b-k$ *entweder stets* $\geqq r$ *oder stets* $\leqq -r$, *wo* r *eine positive von* x *unabhängige Zahl bezeichnet, und wird*

$$R = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1} \Delta^k f(x)\right| \tag{6}$$

gesetzt, so ist

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 20(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} + \left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{7}$$

Mit Absicht rede ich hier von der Funktion $\Delta^k f(x)$ und nicht von der Funktion $f^{(k)}(x)$, da $f(x)$ nur für ganze x definiert zu sein braucht. Aber in vielen Anwendungen ist es bequemer, mit $f^{(k)}(x)$ statt mit $\Delta^k f(x)$ zu operieren, so daß es sich oft empfiehlt, an Stelle von Satz 3 den folgenden zu benutzen, der, wie ich sofort zeigen werde, unmittelbar aus Satz 3 folgt.

Satz 4. *Es sei* $a < b$, a *und* b *ganz,* k *ganz* $\geqq 2$, $\varkappa = 2^k$, $f(t)$ *im Intervall* $a \leqq t \leqq b$ *reell,* k*-mal differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen),* $f^{(k)}(t)$ *stets* $\geqq r$ *oder stets* $\leqq -r$, *wo* r *eine von* t *unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann gilt, wenn*

$$R = \frac{1}{b-a}\left|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)\right| \tag{8}$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < 21(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}} + \left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{9}$$

Um die Sätze 2, 3 und 4 anzuwenden, ist es nicht nötig, die Zahl R mittels (4), (6) oder (8) genau zu berechnen, da die Behauptungen richtig bleiben, wenn darin R durch irgendeine Zahl $> R$ ersetzt wird. Ist also in Satz 2 für jeden Gitterpunkt x von P

$$|g(x)| \leqq R_1 \qquad (R_1 > 0 \text{ unabhängig von } x),$$

so darf in (5) R durch R_1 ersetzt werden; ist in Satz 3 für jedes ganze $x \geqq a$ und $< b-k$

$$|\Delta^k f(x)| \leqq R_1 \quad (R_1 > 0, \text{ unabhängig von } x),$$

dann darf man in (7) R durch R_1 ersetzen, und ist schließlich in Satz 4 im Intervalle $a \leqq t \leqq b$

$$|f^{(k)}(t)| \leqq R_1 \quad (R_1 > 0, \text{ unabhängig von } t),$$

so ist die Ersetzung von R durch R_1 in (9) erlaubt.

Es würde leicht sein, die in den Behauptungen der Sätze 2, 3 und 4 auftretenden Koeffizienten 20 und 21 zu verkleinern, aber darauf lege ich keinen Wert.

Daß Satz 4 aus Satz 3 folgt, geht so: Nach der Definition von R und r in Satz 4 ist $R \geqq r$, so daß die rechte Seite von (9) größer als $21\,(b-a)^{1-\frac{2}{\varkappa}}$ ist, und die linke Seite dieser Beziehung ist

$$\leqq b-a+1 \leqq 2\,(b-a),$$

so daß die Behauptung von Satz 4 trivial ist, falls $b-a \leqq 10^{\frac{1}{2}\varkappa}$ ist. Wir dürfen also $(b-a) > 10^{\frac{1}{2}\varkappa}$ voraussetzen, und dann ist wegen $\varkappa \geqq 4$

$$1 < \frac{1}{2}\cdot(b-a)^{1-\frac{2}{\varkappa}} < \frac{1}{2}(b-a)\cdot\left(\frac{r\,(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} \tag{10}$$

und

$$\frac{b-a}{b-a-k} < \frac{1}{1-\frac{k}{10^{\frac{1}{2}\varkappa}}} \leqq \frac{1}{1-\frac{2}{10^2}} < \frac{41}{40}. \tag{11}$$

Wir können jetzt Satz 3 anwenden mit

$$R_1 = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1} \Delta^k f(x)\right|$$

statt R. Denn es ist $a < b-k$; $\Delta^k f(x)$ hat für jedes ganze x im Intervall $a \leqq x < b$ ein positives oder negatives Vorzeichen, je nachdem $f^{(k)}(t)$ im Intervall $a \leqq t \leqq b$ positiv oder negativ ist, und wegen $|f^{(k)}(t)| \geqq r$ ist auch $|\Delta^k f(x)| \geqq r$. Hiermit ist gezeigt, daß die Voraussetzungen von Satz 3 hier erfüllt sind.

Es ist

$$R_1 = \frac{1}{b-a-k}\left|\sum_{x=a}^{b-k-1} (\Delta^{k-1} f(x+1) - \Delta^{k-1} f(x))\right|$$

$$= \frac{1}{b-a-k}\,|\Delta^{k-1} f(b-k) - \Delta^{k-1} f(a)| \leqq \frac{1}{b-a-k}\,|f^{(k-1)}(b) - f^{(k-1)}(a)|,$$

(da $f^{(k-1)}(t)$ im Intervall $a \leqq t \leqq b$ monoton ist), also nach (8) und (11)

$$R_1 \leqq \frac{b-a}{b-a-k}\,R < \frac{41}{40}\,R,$$

also auch

$$R_1^{\frac{2}{\varkappa-2}} < \frac{41}{40}\,R^{\frac{2}{\varkappa-2}} \quad \text{und} \quad R_1^{\frac{2}{\varkappa}} < \frac{41}{40}\,R^{\frac{2}{\varkappa}}.$$

Satz 3, angewendet mit R_1 statt R, gibt mit Rücksicht auf (10)

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqq 1+\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

$$+20(b-a)\cdot\frac{41}{40}\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}+(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}+\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$<21(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}+(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}+\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

womit Satz 4 aus dem vorangehenden abgeleitet ist.

In meiner Gitterpunktarbeit [6]) habe ich einen Satz formuliert, der zwar große Ähnlichkeit mit Satz 4 hat, aber doch nicht genau denselben Wortlaut hat. Ich meine folgenden Satz:

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen vom Satz 4 gilt, wenn*

$$L=\frac{1}{r}|f^{(k-1)}(b)-f^{(k-1)}(a)| \tag{12}$$

gesetzt wird, die Ungleichung

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < 100\,L\left\{r^{\frac{1}{\varkappa-2}}+r^{-\frac{2}{\varkappa}}L^{-\frac{2k}{\varkappa}}+L^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{13}$$ [10])

Man leitet Satz 5 in einigen Zeilen aus Satz 4 ab, und sogar mit dem Faktor 21 statt 100. Denn aus den Voraussetzungen von Satz 4 folgt $R \geqq r$, und nach (8) und (12) ist

$$b-a=\frac{rL}{R}.$$

Somit ist

$$(b-a)\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}=\frac{rL}{R}\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}=Lr^{\frac{1}{\varkappa-2}}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-\frac{2}{\varkappa-2}}\leqq Lr^{\frac{1}{\varkappa-2}},$$

$$(b-a)\cdot(r(b-a)^k)^{-\frac{2}{\varkappa}}=L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}\cdot\frac{r}{R}\cdot\left(\frac{r^{k+1}}{R^k}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

$$=L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}r^{-\frac{2}{\varkappa}}\left(\frac{r}{R}\right)^{1-\frac{2k}{\varkappa}}\leqq L^{1-\frac{2k}{\varkappa}}r^{-\frac{2}{\varkappa}}$$

und

$$(b-a)\cdot\left(\frac{r(b-a)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}\leqq L^{1-\frac{2}{\varkappa}}.$$

---

[10]) Man ersetze in Satz 2 der in Fußnote [6]) genannten Arbeit R durch $\frac{1}{r}$ und P durch L.

Hiermit ist Satz 5 aus Satz 4 abgeleitet.

Als ich meine Arbeit: Zum Teilerproblem [4]) schrieb, kannte ich weder Satz 4 noch Satz 5, aber ich hatte damals einen anderen Satz zu meiner Verfügung, der zwar weniger scharf war, doch reichlich für meine damaligen Zwecke hinreichte, nämlich

Satz 6. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 ist, wenn L durch* (12) *definiert wird,*

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| < cL\left\{r^{\frac{1}{\varkappa-2}} + r^{-\frac{4}{3\varkappa-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}} + L^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

wo c eine geeignet gewählte absolute Konstante bezeichnet [11]).

Hätte ich damals Satz 4 gekannt, dann würde ich ihn statt Satz 6 benutzt haben, da er bequemer ist. Aber es macht nicht viel aus, da diese zwei Sätze beim Teilerproblem dasselbe Endresultat liefern. Satz 6 folgt (mit $c = 100$) unmittelbar aus Satz 5, also aus Satz 4; denn ist $L^k r \geqq 1$, so ist

$$r^{-\frac{2}{\varkappa}} L^{-\frac{2k}{\varkappa}} \leqq r^{-\frac{4}{3k-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}} \text{ wegen } \frac{2}{\varkappa} \geqq \frac{4}{3\varkappa-4}$$

und sonst ist Satz 6 (sogar mit $c = 2$) trivial wegen

$$\left|\sum_{x=a}^{b} e^{2\pi i f(x)}\right| \leqq b-a+1 \leqq 2(b-a) = 2\frac{rL}{R} \leqq 2L < 2L \cdot r^{-\frac{4}{3\varkappa-4}} L^{-\frac{4k}{3\varkappa-4}}.$$

Jetzt gehen wir über zu den Beweisen der Sätze 1 und 2; ich beweise zunächst Satz 1; dann den Spezialfall von Satz 2 mit $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 2$, und schließlich mittels des Prinzipes der vollständigen Induktion Satz 2 im Falle $k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 2$.

Beweis von Satz 1.

Hilfssatz 1. Sind die Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_N \geqq 0$ $(N \geqq 1)$, und ist H ganz $\geqq 1$, so ist

$$\left(\frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_N}{N}\right)^H \leqq \frac{u_1^H + u_2^H + \ldots + u_N^H}{N} \quad [12]). \tag{14}$$

---

[11]) Man ersetze in dem Satz, der auf den S. 699–700 der in Fußnote [4]) erwähnten Arbeit vorkommt, R durch $\frac{1}{r}$ und $\varkappa$ durch $\frac{1}{2}\varkappa$.

[12]) Die Voraussetzung daß H ganz ist, ist überflüssig, aber diese Bedingung ist in den Anwendungen erfüllt, und der Beweis ist bei ganzem $H \geqq 1$ einfacher als bei beliebigem $H \geqq 1$.

Beweis. Der Spezialfall $H=1$ ist evident. Es sei $H \geqq 2$, und es sei der Hilfssatz mit $H-1$ statt H schon bewiesen. Dann ist

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^H = \frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\cdot\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^{H-1}$$
$$\leqq \frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\cdot\frac{u_1^{H-1}+\ldots+u_N^{H-1}}{N}$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_n u_m^{H-1}+u_m u_n^{H-1}}{2}.$$

Vom Produkte

$$(u_n-u_m)(u_n^{H-1}-u_m^{H-1})$$

sind entweder beide Faktoren $\geqq 0$, oder beide Faktoren <0, so daß

$$u_n u_m^{H-1}+u_m u_n^{H-1} \leqq u_n^H + u_m^H$$

ist, also

$$\left(\frac{u_1+\ldots+u_N}{N}\right)^H \leqq \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{u_n^H+u_m^H}{2} = \frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}u_n^H = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}u_n^H,$$

womit Hilfssatz 1 bewiesen ist.

Hilfssatz 2. Es sei $t(x)=t(x_1,\ldots,x_m)$ in jedem Gitterpunkt $(x)=(x_1,\ldots,x_m)$ definiert, reell oder komplex, derart, daß $t(x)$ bei hinreichend großem $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|$ verschwindet.

Wird für jedes ganze $q \geqq 0$

$$t_q(x)=t(x_1+q, x_2, \ldots, x_m)$$

gesetzt und bezeichnet ϱ irgendeine positive ganze Zahl, dann ist

$$\sum_{(x)} t(x) = \frac{1}{\varrho}\sum_{(x)}\sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x), \tag{15}$$

falls die Summen $\sum_{(x)}$ erstreckt werden über die Koordinatensysteme aller Gitterpunkte $(x)=(x_1,\ldots,x_m)$ des m-dimensionalen Raumes.

Beweis. Die Anzahl der Summanden, die in den zwei Gliedern von (15) auftreten, ist endlich, da die Glieder $t(x)$ und $t_q(x)$ bei hinreichend großem $|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_m|$ verschwinden. Setzt man

$$x_1+q=y_1, \quad x_2=y_2, \ldots, x_m=y_m, \quad (y_1,\ldots,y_m)=(y),$$

dann wird die rechte Seite von (15)

$$\frac{1}{\varrho}\sum_{(x)}\sum_{q=0}^{\varrho-1} t(y),$$

und dieser Ausdruck enthält jedes Glied $\frac{1}{\varrho}t(y)$ genau ϱ-mal, da jedem Gitterpunkte (y) genau ϱ Gitterpunkte $(x)=(y_1-q,\ y_2,\ \dots\ y_m)$ entsprechen. Die rechte Seite von (15) ist somit

$$\varrho\cdot\frac{1}{\varrho}\sum_{(y)}t(y)=\sum_{(x)}t(x).$$

Hilfssatz 3. Voraussetzungen: 1. Es sei $t(x)$ (reell oder komplex) in jedem Gitterpunkt $(x)=(x_1,\dots,x_m)$ des m-dimensionalen Quaders

$$P\dots a_\mu\leqq x_\mu<b_\mu \qquad (\mu=1,2,\dots,m)$$

(a_μ und b_μ ganz, $a_\mu<b_\mu$) definiert.

2. ϱ sei eine positive ganze Zahl $\leqq b_1-a_1+1$.

3. Ist $\varrho\geqq 2$, so bezeichne P_q für jede positive ganze Zahl $q<\varrho$ den Quader

$$P_q\dots a_1\leqq x<b_1-q;\quad a_\mu\leqq x_\mu<b_\mu \qquad (\mu=2,3,\dots,m)$$

und es werde gesetzt

$$t_q(x)=t(x_1+q,\ x_2,\dots,x_m)$$

für jeden Gitterpunkt (x) von P_q. Schließlich bezeichne noch $\bar{t}_q(x)$ die konjugiert-komplexe Zahl von $t_q(x)$.

Unter diesen Voraussetzungen ist

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\sqrt{\frac{2}{\varrho}\underset{(x)\prec P}{M}|t(x)|^2}+2\sqrt{\frac{1}{\varrho}\sum_{q=1}^{\varrho-1}\Big|\underset{(x)\prec P_q}{M}t(x)\,\bar{t}_q(x)\Big|},$$

und sogar

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\sqrt{\frac{1}{\varrho}\Big(1+\frac{\varrho-1}{b_1-a_1}\Big)\underset{(x)\prec P}{M}|t(x)|^2}\tag{16}$$

$$+\frac{1}{\varrho}\sqrt{\Big(1+\frac{\varrho-1}{b_1-a_1}\Big)\Big|\sum_{q=1}^{\varrho-1}\Big(1-\frac{q}{b_1-a_1}\Big)\Big(1-\frac{q}{b_1-a_1}\Big)(\varrho-q)\underset{(x)\prec P_q}{M}(\bar{t}_q(x)\,t(x)+t_q(x)\,\bar{t}(x))\Big|}.$$

Vorbemerkung. Setzt man

$$t(x)=e^{2\pi i f(x)},$$

so verwandelt sich dieser Hilfssatz in Satz 1.

Beweis. Es werde $t(x)=0$ gesetzt in allen Gitterpunkten (x) außerhalb P. Nach dem vorigen Hilfssatz ist dann

$$\Big|\underset{(x)\prec P}{M}t(x)\Big|\leqq\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{1}{(b_1-a_1)(b_2-a_2)\dots(b_m-a_m)}\sum_{(x)}\Big|\sum_{q=0}^{\varrho-1}t_q(x)\Big|.\tag{17}$$

In der Summe $\sum_{(x)}$ kommen hier nur diejenigen Gitterpunkte $(x) = (x_1, \ldots, x_m)$ in Betracht, für die

$$a_1 - (\varrho - 1) \leqq x_1 < b_1; \qquad a_\mu \leqq x_\mu \leqq b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

ist, da für die übrigen Gitterpunkte $t_q(x)$ verschwindet. Die Anzahl N der Glieder dieser Summe $\sum_{(x)}$ ist also

$$N \leqq (b_1 - a_1 + (\varrho - 1))(b_2 - a_2) \ldots (b_m - a_m). \tag{18}$$

Schreibt man nun (17) in der Gestalt

$$\Big| \underset{(x) \prec P}{M} t(x) \Big| \leqq \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{N}{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)} \cdot \frac{1}{N} \sum_{(x)} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big|,$$

und wendet man die Ungleichung

$$\frac{1}{N} \sum_{(x)} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big| \leqq \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{(x)} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big|^2}$$

an, die aus Hilfssatz 1 mit $H = 2$ folgt, dann bekommt man

$$\left\{ \begin{aligned} \Big| \underset{(x) \prec P}{M} t(x) \Big| &\leqq \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{N}{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)} \cdot \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{(x)} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big|^2} \\ &\leqq \frac{1}{\varrho} \sqrt{\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\right) \cdot \frac{1}{(b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m)} \sum_{(x)} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big|^2} \end{aligned} \right. \tag{19}$$

wegen (18).

Das Quadrat des Absolutwertes einer komplexen Zahl ist gleich dieser Zahl mal der konjugiert-komplexen Zahl, somit

$$\left\{ \begin{aligned} \Big| \sum_{q=0}^{\varrho-1} t_q(x) \Big|^2 &= \sum_{r=0}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x) \cdot \sum_{s=0}^{\varrho-1} t_s(x) \\ &= \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s=r}}^{\varrho-1} + \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s<r}}^{\varrho-1} + \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s>r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x) \cdot t_s(x). \end{aligned} \right. \tag{20}$$

Hierin ist

$$\sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s=r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) = \sum_{r=0}^{\varrho-1} |t_r(x)|^2,$$

also nach Hilfssatz 2 mit $|t(x)|^2$ statt $t(x)$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s=r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) &= \sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} |t_r(x)|^2 = \varrho \sum_{(x)} |t(x)|^2 \\ &= \varrho (b_1 - a_1) \ldots (b_m - a_m) \underset{(x) \prec P}{M} |t(x)|^2, \end{aligned} \right. \tag{21}$$

da $|t(x)|^2$ außerhalb P verschwindet.

Setzt man $r = s + q$, so findet man

$$\sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s<r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) = \sum_{q=1}^{\varrho-1} \sum_{s=0}^{\varrho-1-q} \bar{t}_{s+q}(x) \cdot t_s(x),$$

und wendet man nun wiederum Hilfssatz 2 an, aber jetzt mit $\varrho - q$ statt ϱ, und mit $\bar{t}_q(x) \cdot t(x)$ statt $t(x)$, so erhält man

$$(22) \qquad \sum_{(x)} \sum_{s=0}^{\varrho-1-q} \bar{t}_{s+q}(x) \cdot t_s(x) = (\varrho - q) \sum_{(x)} \bar{t}_q(x) \cdot t(x).$$

Die letzte Summe braucht nur erstreckt zu werden über die Koordinatensysteme der Gitterpunkte (x) von P_q, da für die übrigen Gitterpunkte (x) wenigstens einer der Faktoren $\bar{t}_q(x)$ und $t(x)$ verschwindet. Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (22) den Wert

$$(\varrho - q)(b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big) \underset{(x) \prec P_q}{M} \bar{t}_q(x)\, t(x)$$

hat, also

$$(23) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s<r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x) \cdot t_s(x) \\ \displaystyle = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \bar{t}_q(x)\, t(x). \end{cases}$$

Durch Vertauschung von r und s und von i und $-i$ findet man hieraus

$$(24) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(x)} \sum_{r=0}^{\varrho-1} \sum_{\substack{s=0 \\ s>r}}^{\varrho-1} \bar{t}_r(x)\, t_s(x) \\ \displaystyle = (b_1 - a_1) \dots (b_m - a_m) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} t_q(x)\, \bar{t}(x). \end{cases}$$

Aus (19), (20), (21), (23) und (24) folgt

$$\Big| \underset{(x) \prec P}{M} t(x) \Big|$$

$$\leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big) \underset{(x) \prec P}{M} |t(x)|^2 + \frac{1}{\varrho^2}\Big(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\Big) \sum_{q=1}^{\varrho-1} \Big(1 - \frac{q}{b_1 - a_1}\Big)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} (\bar{t}_q(x)\, t(x) + t_q(x)\, \bar{t}(x))},$$

und diese Ungleichung liefert unmittelbar die verlangte Beziehung, da die Quadratwurzel aus einer Summe von zwei Gliedern, die $\geqq 0$ sind, höchstens gleich der Summe der Quadratwurzel aus diesen zwei Gliedern ist.

Hiermit ist Hilfssatz 3, also Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2, falls $k_1 + \ldots + k_m = 2$ ist[13]).

Hilfssatz 4. Es sei $a < b$, $f(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ reell, differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), und es sei für $a \leqq u_1 < u_2 \leqq b$

$$\frac{f'(u_2) - f'(u_1)}{u_2 - u_1} \text{ stets } \geqq r \quad \text{oder} \quad \text{stets } \leqq -r, \tag{25}$$

wo r eine positive, von u_1, u_2 unabhängige Zahl bezeichnet.

Behauptungen: 1. Sind $a - \frac{1}{2}$ und $b - \frac{1}{2}$ ganz, und ist $r \leqq 1$, dann ist

$$\left| \sum_{\substack{a<n<b \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}. \tag{26}$$

2. Sind a und b ganz (r beliebig positiv), dann ist

$$\left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} \right| < 5 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}. \tag{27}$$

Beweis. Die erste Behauptung ist schon vorher bewiesen worden[14]), und der Beweis der zweiten Behauptung geht so:

Ist $r > \frac{1}{4}$, so ist wegen (25)

$$\frac{1}{\sqrt{r}} |f'(b) - f'(a)| \geqq \frac{1}{\sqrt{r}} \cdot r(b-a) \geqq \frac{1}{2}(b-a),$$

also die rechte Seite von (27) größer als $2(b-a)$, und die linke Seite von (27) ist höchstens $b - a + 1 \leqq 2(b-a)$, so daß die zweite Behauptung dann evident ist. Wir dürfen also $r \leqq \frac{1}{4}$ annehmen. Ist $b - a \leqq 9$, dann ist die linke Seite von (27) höchstens 10, und die rechte Seite ist größer als $\frac{5}{\sqrt{r}} \geqq 10$, so daß wir außerdem noch $b - a \geqq 10$ voraussetzen dürfen.

Nach der ersten Behauptung dieses Hilfssatzes ist

$$\left| \sum_{\substack{a+\frac{1}{2}<n<b-\frac{1}{2} \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right| < 4 \frac{\left|f'\left(b-\frac{1}{2}\right) - f'\left(a+\frac{1}{2}\right)\right| + 1}{\sqrt{r}} < 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}$$

(da $f'(u)$ im Intervall $a \leqq u \leqq b$ beständig zu- oder beständig abnimmt), also

$$\left| \sum_{n=a}^{b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leqq 2 + \left| \sum_{\substack{a+\frac{1}{2}<n<b-\frac{1}{2} \\ n \text{ ganz}}} e^{2\pi i f(n)} \right|$$

$$< \frac{1}{\sqrt{r}} + 4 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}} < 5 \frac{|f'(b) - f'(a)| + 1}{\sqrt{r}}.$$

---

[13]) (Zusatz bei der Korrektur.) Die in der Fußnote [9]) erwähnte Arbeit enthält eine Vereinfachung dieses Beweises.

[14]) J. G. van der Corput, Zahlentheoretische Abschätzungen, Math. Annalen **84** (1921), S. 53–79.

Hilfssatz 5. Ist $y = \varphi(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ die Gleichung eines Parabelbogens, der keine vertikale Tangente besitzt, so ist $\varphi'''(x)$ im Intervall $\alpha \leqq u \leqq \beta$ entweder stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$.

Beweis. Es sei

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (\alpha \leqq y \leqq \beta)$$

mit

$$AC - B^2 = 0 \tag{28}$$

die Gleichung des Parabelbogens. Setzen wir

$$Bx + Cy + E = u,$$

dann ist

$$Ax + By + D + uy' = 0, \tag{29}$$

$$A + 2By' + Cy'^2 + uy'' = 0, \tag{30}$$

$$3(B + Cy')y'' + uy''' = 0. \tag{31}$$

Wegen (29) und (28) ist

$$u(B + Cy') = B(Bx + Cy + E) - C(Ax + By + D) = BE - CD,$$

so daß aus (31) und (30) folgt

$$\begin{cases} u^3 y''' = -3(B + Cy')u^2 y'' = 3(B + Cy')u(A + 2By' + Cy'^2) \\ \qquad = 3(BE - CD)(A + 2By' + Cy'^2), \end{cases} \tag{32}$$

somit wegen (28)

$$Au^3 y''' = 3(BE - CD)(A + By')^2 \tag{33}$$

und

$$Cu^3 y''' = 3(BE - CD)(B + Cy')^2. \tag{34}$$

Wir unterscheiden jetzt verschiedene Fälle.

1. Es sei $A = C = 0$. Dann ist $B = 0$ wegen (28), und der Parabelbogen ist das Segment einer nicht-vertikalen Gerade, so daß y''' identisch verschwindet.

2. Es sei $C = 0$, $A \neq 0$. Nach (28) ist dann $B = 0$. Der Koeffizient E ist ungleich Null, da sonst die Gleichung der Parabel y nicht enthalten würde. Dann ist $u = E \neq 0$, so daß nach (33) y''' identisch Null ist.

3. Es sei $C \neq 0$, und es verschwinde $u = Bx + Cy + E$ in wenigstens einem Punkte (ξ, η) des Parabelbogens. Da in diesem Punkte y' endlich ist, ist nach (29)

$$A\xi + B\eta + D = 0,$$

also

$$BE - CD = B(B\xi + C\eta + E) - C(A\xi + B\eta + D) = 0,$$

so daß die Parabelgleichung geschrieben werden kann in der Gestalt

$$(Bx + Cy)^2 + 2E(Bx + Cy) + CF = 0.$$

Dann besteht der Parabelbogen aus dem Segment einer Geraden mit der Gleichung $Bx + Cy = \text{konst.}$, so daß wegen $C \neq 0$ in jedem Punkte $y''' = 0$ ist.

4. Es sei $C \neq 0$, und es sei in jedem Punkte des Parabelbogens $u \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen ergibt sich, daß dann u beständig positiv oder beständig negativ ist, so daß nach (34) y''' stets $\geqq 0$ oder stets $\leqq 0$ ist.

Hilfssatz 6. Bezeichnen p und q beliebig gegebene positive Zahlen, dann kann man eine Funktion $\varphi(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ so definieren, daß sie in diesem Intervalle zweimal differenzierbar ist (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), derart, daß

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0, \qquad \varphi'(0) = p, \qquad \varphi'(1) = -q \tag{35}$$

und

$$\varphi''(u) \leqq \operatorname{Max}\left(-\tfrac{1}{2}p, -\tfrac{1}{2}q\right) \qquad (0 \leqq u \leqq 1) \tag{36}$$

ist.

Beweis. Es ist möglich durch die Punkte $(0, 0)$ und $(1, 0)$ eine Parabel

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

zu legen, die im Punkte $(0, 0)$ die Gerade $y = px$, im Punkte $(1, 0)$ die Gerade $y = -q(x-1)$ berührt. Denn die (notwendigen und) hinreichenden Bedingungen dafür sind

$$AC - B^2 = 0; \qquad F = 0; \qquad A + 2D = 0; \qquad D + pE = 0;$$
$$A + D - (B + E)q = 0,$$

so daß wir, wenn $E = 1$ gesetzt wird, sukzessive D, A, B, C so bestimmen können, daß diese Bedingungen erfüllt sind. Man findet dann

$$D = -p, \qquad A = 2p,$$
$$A + Bp = p + (B + E)p = p + \frac{A+D}{q}p = p + \frac{p}{q}p = \frac{p(p+q)}{q}.$$

Wir schreiben jetzt die Gleichung des Parabelbogens in der Gestalt $y = \varphi(x)$, so daß jedenfalls (35) gilt. Setzt man in (30) $x = y = 0$, $u = E = 1$, $y' = p$, so findet man

$$\varphi''(0) = -(A + 2Bp + Cp^2) = -\frac{1}{A}(A + Bp)^2$$
$$= -\frac{p}{2q^2}(p + q)^2 \leqq -\frac{1}{2}p.$$

Vertauscht man hierin p und q, und ersetzt man zu gleicher Zeit u durch $1-u$, so bekommt man

$$\varphi''(1) \leqq -\tfrac{1}{2}q,$$

und da nach dem vorigen Hilfssatz $\varphi''(u)$ im Intervall $0 \leqq u \leqq 1$ monoton ist, gilt auch (36).

Hilfssatz 7. Sind fünf Zahlen x, A, B, A', B' gegeben mit den Eigenschaften

$$x \text{ ganz}, \qquad A' < B - A < B',$$

dann ist es möglich, im Intervall $x \leqq u \leqq x+1$ eine reelle (in den Endpunkten eventuell nur nach innen) differenzierbare Funktion $f(u)$ zu bekommen, derart, daß

$$f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \quad f'(x) = A', \quad f'(x+1) = B'$$

und für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$

$$\frac{f'(u_2)-f'(u_1)}{u_2-u_1} \geqq \frac{1}{2}\operatorname{Min}\left(B' - (B-A), (B-A) - A'\right) \tag{37}$$

ist.

Beweis. Ich setze

$$f(u) = A + (B-A)(u-x) - \varphi(u-x),$$

wo $\varphi(u)$ die Funktion des vorigen Hilfssatzes bezeichnet, und zwar mit

$$p = (B-A) - A', \qquad q = B' - (B-A).$$

Diese Funktion $f(u)$ hat die verlangten Eigenschaften; denn es ist

$$f(x) = A - \varphi(0) = A; \qquad f(x+1) = A + (B-A) - \varphi(1) = B;$$
$$f'(x) = B - A - \varphi'(0) = B - A - \{(B-A) - A'\} = A';$$
$$f'(x+1) = B - A - \varphi'(1) = B - A + \{B' - (B-A)\} = B';$$

$f''(u) = -\varphi''(u-x)$ ist mindestens gleich der kleinsten der Zahlen $\frac{1}{2}p$ und $\frac{1}{2}q$, so daß für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$

$$\frac{f'(u_2)-f'(u_1)}{u_1-u_2} \geqq \frac{1}{2}\operatorname{Min}(p, q) = \frac{1}{2}\operatorname{Min}\left(B' - (B-A), (B-A) - A'\right)$$

ist.

Hiermit ist Hilfssatz 7 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 8. Sind a und b ganz $(a+2 < b)$, ist $f(x)$ für jedes ganze $x \geqq a$ und $< b$ definiert, und zwar so, daß $\Delta^2 f(x)$ im Intervall $a \leqq x < b-2$ stets $\geqq r$ oder stets $\leqq -r$ ist, wo r eine positive von x unabhängige Zahl bezeichnet, so ist

$$\left|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\right| < 11\,\frac{|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| + 1}{\sqrt{r}}. \tag{38}$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ich im Intervall $a \leqq x < b-2$ $\Delta^2 f(x) \geqq r$ voraussetzen, da ich sonst nur $f(x)$ durch $-f(x)$ zu ersetzen brauche. Die rechte Seite von (38) ist dann

$$\frac{11}{\sqrt{r}} \sum_{x=a}^{b-3} (\Delta f(x+1) - \Delta f(x)) + \frac{11}{\sqrt{r}} = \frac{11}{\sqrt{r}} \sum_{x=a}^{b-3} \Delta^2 f(x) + \frac{11}{\sqrt{r}}$$

$$> \frac{11}{\sqrt{r}} \cdot (b-a-2) \cdot r = 11\,(b-a-2)\sqrt{r}$$

und die linke Seite von (38) ist $\leqq b-a \leqq 3\,(b-a-2)$, so daß die Behauptung evident ist im Falle $\sqrt{r} \geqq \frac{3}{11}$. Wir dürfen also

$$r < \frac{9}{121} \tag{39}$$

annehmen.

Ich definiere nun die Funktion $f(x)$, die bis jetzt nur in den ganzzahligen $x \geqq a$ und $< b$ definiert worden ist, auch für die Zahlen $a-1$ und b, und zwar folgendermaßen

$$f(b) = 2f(b-1) - f(b-2) + r,$$
$$f(a-1) = 2f(a) - f(a+1) + r,$$

so daß die Ungleichung

$$\Delta^2 f(x) \geqq r$$

auch in den Punkten $x = a-1$ und $x = b-2$ gilt.

Für jedes ganze $x \geqq a$ und $\leqq b-2$ setze ich

$$\begin{cases} f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \\ \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1)) = A', \quad \frac{1}{2}(f(x+2) - f(x)) = B', \end{cases} \tag{40}$$

so daß die Zahlen A, B, A', B' von x abhängen. Dann ist

$$\begin{cases} B' - (B-A) = \frac{1}{2}\{f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)\} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\Delta^2 f(x) \geqq \frac{1}{2} r > 0, \\ (B-A) - A' = \frac{1}{2}\{f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)\} \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\Delta^2 f(x-1) \geqq \frac{1}{2} r > 0, \end{cases} \tag{41}$$

also

$$A' < B - A < B',$$

so daß es nach dem vorigen Hilfssatz im Intervall $x \leqq u \leqq x+1$ eine (in den Endpunkten eventuell nur nach innen) differenzierbare Funktion $f(u)$ gibt, derart, daß

$$f(x) = A, \quad f(x+1) = B, \quad f'(x) = A', \quad f'(x+1) = B' \tag{42}$$

ist und für $x \leqq u_1 < u_2 \leqq x+1$ Ungleichung (37) gilt. Die Bezeichnung $f(u)$ ist erlaubt, da diese Funktion wegen (40) und (42) in den ganzzahligen Punkten x denselben Wert hat wie die ursprüngliche Funktion $f(x)$. Die Funktion $f(u)$ ist dann im ganzen Intervall $a \leqq u \leqq b-1$, auch in den ganzzahligen Punkten x differenzierbar (in den Endpunkten eventuell nur nach innen), da im Punkt x (x ganz, $a < x < b-1$) die Derivierten nach links und nach rechts wegen (42) und (40) denselben Wert haben, nämlich den Wert $\frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$.

Wählen wir zwei beliebige Punkte v_1 und v_2 mit der Eigenschaft $a \leqq v_1 < v_2 \leqq b-1$, und bezeichnen $g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}$ die wachsend geordneten Zahlen $> v_1$ und $< v_2$ (wenn es solche nicht gibt, sei $N=1$), und nennen wir $v_1 = g_0$, $v_2 = g_N$, dann ist nach (37) und (41)

$$f'(g_h) - f'(g_{h-1}) \geqq \frac{1}{4} r (g_h - g_{h-1}) \qquad (h = 1, 2, \ldots, N),$$

woraus sich durch Summation ergibt, daß die Ungleichung

$$\frac{f'(v_2) - f'(v_1)}{v_2 - v_1} \geqq \frac{1}{4} r$$

gilt für jedes Zahlenpaar v_1, v_2 mit der Eigenschaft $a \leqq v_1 < v_2 \leqq b-1$. Wir können also die zweite Behauptung von Hilfssatz 4 mit $\frac{1}{4}r$ statt r, und mit $b-1$ statt b anwenden, so daß wir finden

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 5 \frac{f'(b-1) - f'(a) + 1}{\frac{1}{2}\sqrt{r}}.$$

Hierin ist wegen (42) und (40)

$$f'(a) = \frac{1}{2}(f(a+1) - f(a-1)) = f(a+1) - f(a) - \frac{1}{2} r = \Delta f(a) - \frac{1}{2} r,$$

$$f'(b-1) = \frac{1}{2}(f(b) - f(b-2)) = f(b-1) - f(b-2) + \frac{1}{2} r$$
$$= \Delta f(b-2) + \frac{1}{2} r,$$

$$f'(b-1) - f'(a) = \Delta f(b-2) - \Delta f(a) + r < \Delta f(b-2) - \Delta f(a) + \frac{1}{10},$$

wegen (39), also

$$\left| \sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)} \right| < 10 \frac{\Delta f(b-2) - \Delta f(a) + \frac{1}{10} + 1}{\sqrt{r}} < 11 \frac{\Delta f(b-2) - \Delta f(a) + 1}{\sqrt{r}}.$$

Beweis von Satz 2, falls

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = 2$$

ist. Dann ist

$$k_1 = 2, \quad k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \quad \varkappa_1 = 4.$$

Ich unterscheide zwei verschiedene Fälle.

1. Es sei $m = 1$. Dann ist Satz 3 zu beweisen, und zwar im Spezialfall $k = 2$. Nach (6) ist

$$|\Delta f(b-2) - \Delta f(a)| = \Big|\sum_{x=a}^{b-3} \Delta^2 f(x)\Big| = (b-a-2)\,R < (b-a)\,R,$$

also

$$\frac{1}{b-a}\cdot\frac{|\Delta f(b-2)-\Delta f(a)|}{\sqrt{r}} < \frac{R}{\sqrt{r}} = \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}}.$$

Außerdem ist

$$\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\sqrt{r}} = (r(b-a)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}.$$

Nach dem vorigen Hilfssatz ist somit

$$\Big|\sum_{x=a}^{b-1} e^{2\pi i f(x)}\Big| < 11\,(b-a)\left\{\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b-a)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

so daß Satz 3, falls $k = 2$ ist, gilt, sogar mit dem Koeffizienten 11 statt 20 in der Behauptung.

2. Es sei $m \geqq 2$. Zu jedem System von ganzen Zahlen $x_2, x_3, \ldots, x_m$, die die Ungleichungen

$$a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu = 2, 3, \ldots, m)$$

erfüllen, setze ich

$$R_1(x_2, \ldots, x_m) = \frac{1}{b_1 - a_1}\Big|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \Delta^2 f(x_1, x_2, \ldots, x_m)\Big|.$$

Genau wie in 1. beweist man

$$\Big|\sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} e^{2\pi i f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\Big| < 11\,(b_1-a_1)\left\{\left(\frac{r}{R_1^2(x_2, \ldots, x_m)}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b_1-a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\},$$

also

$$\Big|\sum_{(x)\prec P} e^{2\pi i f(x)}\Big| < 11\left\{r^{-\frac{1}{\varkappa-2}}\,Q + (r(b_1-a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}}\right\}, \tag{43}$$

wo

$$Q = \frac{1}{(b_2-a_2)\ldots(b_m-a_m)}\sum_{x_2=a_2}^{b_2-1}\cdots\sum_{x_m=a_m}^{b_m-1}(R_1(x_2, \ldots, x_m))^{\frac{2}{\varkappa-2}}$$

gesetzt ist. Nach Hilfssatz 1 mit

$$N = (b_2-a_2)(b_3-a_3)\ldots(b_m-a_m), \qquad u_n = (R_1(x_2, \ldots, x_m))^{\frac{2}{\varkappa-2}},$$

$$H = \frac{\varkappa-2}{2} \quad (\text{also ganz} \geqq 1),$$

ist

$$Q^{\frac{\varkappa-2}{2}} \leqq \frac{1}{(b_2-a_2)\dots(b_m-a_m)} \sum_{x_2=a_2}^{b_2-1} \dots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} R_1(x_2, \dots, x_m)$$

$$= \frac{1}{(b_1-a_1)\dots(b_m-a_m)} \left| \sum_{x_1=a_1}^{b_1-1} \sum_{x_2=a_2}^{b_2-1} \dots \sum_{x_m=a_m}^{b_m-1} \Delta^2 f(x) \right|,$$

da $\Delta^2 f(x)$ beständig $\geqq 0$ oder beständig $\leqq 0$ ist, also

$$Q^{\frac{\varkappa-2}{2}} \leqq R.$$

Aus (43) folgt somit

$$\left| \sum_{(x) \prec P} e^{2\pi i f(x)} \right| < 11 \left\{ \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa-2}} + (r(b_1-a_1)^2)^{-\frac{2}{\varkappa}} \right\}.$$

Hiermit ist der Spezialfall von Satz 2 mit $k_1 + k_2 + \dots + k_m = 2$ vollständig bewiesen, sogar mit dem Koeffizienten 11 statt 20.

Beweis von Satz 2, falls $k_1 + \dots + k_m > 2$ ist.

Hilfssatz 9. Erfüllen die positiven Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\tau, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\tau$ $(\tau \geqq 1)$ die Ungleichung

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} \geqq 1; \tag{44}$$

so ist für jedes System von Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ $(\sigma = 1, 2, \dots, \tau)$

$$\omega_1^{-\alpha_1} \cdot \omega_2^{-\alpha_2} \dots \omega_\tau^{-\alpha_\tau} \leqq \omega_1^{-\beta_1} + \omega_2^{-\beta_2} + \dots + \omega_\tau^{-\beta_\tau}. \tag{45}$$

Beweis. Gäbe es ein System von Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ mit der Eigenschaft

$$\omega_1^{-\alpha_1} \cdot \omega_2^{-\alpha_2} \dots \omega_\tau^{-\alpha_\tau} > \omega_1^{-\beta_1} + \omega_2^{-\beta_2} + \dots + \omega_\tau^{-\beta_\tau}$$

dann wäre, wenn

$$\omega_\sigma = \omega_1^{\lambda_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau)$$

gesetzt wird,

$$\omega_1^{-(\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau)} > \omega_1^{-\beta_\sigma\lambda_\sigma} \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau),$$

somit wegen $\omega_1 \geqq 1$

$$\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau < \beta_\sigma\lambda_\sigma \qquad (\sigma = 1, 2, \dots, \tau).$$

Hieraus würde folgen

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \dots + \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} < \frac{1}{\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau} (\alpha_1\lambda_1 + \dots + \alpha_\tau\lambda_\tau) = 1,$$

was in Widerspruch mit (44) ist.

Hilfssatz 10. Sind die Zahlen $k_2, k_3, \dots, k_\tau$ ganz und $\geqq 0$ $(\tau \geqq 2)$, und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \dots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, dann ist

$$k_2\varkappa_2 + k_3\varkappa_3 + \dots + k_\tau\varkappa_\tau \geqq 2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau. \tag{46}$$

Beweis. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

1. Es sei $\tau = 2$. Dann soll bewiesen werden

$$(47) \qquad (k_2 - 3)\varkappa_2 + 4 \geqq 0.$$

Ist $k_2 = 0$, so ist $\varkappa_2 = 1$, und die linke Seite von (47) $-3 \cdot 1 + 4 > 0$;
„ $k_2 = 1$, „ „ $\varkappa_2 = 2$, „ „ „ „ „ „ $-2 \cdot 2 + 4 = 0$;
„ $k_2 = 2$, „ „ $\varkappa_2 = 4$, „ „ „ „ „ „ $-1 \cdot 4 + 4 = 0$;
„ $k_2 \geqq 3$, „ „ „ „ „ „ „ $\geqq 4$.

2. Es sei $\tau \geqq 3$, und es sei der Hilfssatz mit $\tau - 1$ statt τ schon bewiesen. Dann können wir $k_\tau > 0$ voraussetzen, da die Behauptung mit $k_\tau = 0$ äquivalent ist mit der Behauptung, die man bekommt, wenn man τ durch $\tau - 1$ ersetzt.

2.1. Es sei $k_2 \geqq 2$. Dann ist die linke Seite von (46) $\geqq 2\varkappa_2 + \varkappa_\tau > 2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau$.

2.2. Es sei $k_2 = 1$. Da (46) mit $\tau - 1$ statt τ schon bewiesen ist, ist

$$(48) \qquad k_3\varkappa_3 + \ldots + k_\tau\varkappa_\tau \geqq 2\varkappa_3 - 4 + \varkappa_\tau.$$

Vermehrt man beide Seiten dieser Ungleichung mit

$$k_2\varkappa_2 = 1 \cdot 2\varkappa_3 = 2\varkappa_2 - 2\varkappa_3,$$

so erhält man genau die Behauptung (46).

2.3. Es sei $k_2 = 0$. Jetzt gilt wiederum (48), und vermehrt man nun beide Seiten dieser Ungleichung mit

$$k_2\varkappa_2 = 0 = 2\varkappa_2 - 2\varkappa_3,$$

so findet man auch in diesem Falle die Richtigkeit von (46).

Hilfssatz 11. Sind die Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ ganz und $\geqq 0$ $(\tau \geqq 2)$, ist $k_1 \geqq 2$ und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \ldots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, so ist

$$(49) \qquad k_1\varkappa_1 + 2k_2\varkappa_2 + \ldots + 2k_{\tau-1}\varkappa_{\tau-1} + 2(k_\tau - 1)\varkappa_\tau \geqq 3\varkappa_1 - 8.$$

Beweis. Ich unterscheide verschiedene Fälle.

Ist $k_1 \geqq 3$, $k_\tau \geqq 1$, so ist die linke Seite von (49) $\geqq 3\varkappa_1 > 3\varkappa_1 - 8$;
„ $k_1 \geqq 3$, $k_\tau = 0$, „ „ „ „ „ „ (49) $\geqq 3\varkappa_1 - 2 > 3\varkappa_1 - 8$;
„ $k_1 = 2$, „ „ „ „ „ „ (49)

nach dem vorigen Hilfssatz

$$\geqq 2\varkappa_1 + 2(2\varkappa_2 - 4 + \varkappa_\tau) - 2\varkappa_\tau = 3\varkappa_1 - 8,$$

womit Hilfssatz 11 bewiesen ist.

Hilfssatz 12. Sind die Zahlen $\omega_\sigma \geqq 1$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, \tau;\ \tau \geqq 2)$, bezeichnen $k_1, k_2, \ldots, k_\tau$ ganze Zahlen $\geqq 0$, ist $k_1 \geqq 2$, und wird

$$\varkappa_\sigma = 2^{k_\sigma + k_{\sigma+1} + \ldots + k_\tau} \qquad (1 \leqq \sigma \leqq \tau)$$

gesetzt, so ist

$$(\omega_1^{k_1} \omega_2^{k_2} \ldots \omega_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \omega_\tau^{k_\tau - 1})^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} \leqq \omega_1^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\sigma=2}^{\tau} \omega_\sigma^{-\frac{1}{\varkappa_\sigma}}.$$

Beweis. Nach Hilfssatz 9 ist eine hinreichende Bedingung

$$\frac{\frac{2k_1}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{2}{\varkappa_1}} + \frac{\frac{2k_2}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_2}} + \ldots + \frac{\frac{2k_{\tau-1}}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_{\tau-1}}} + \frac{\frac{2(k_\tau - 1)}{3\varkappa_1 - 8}}{\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq 1,$$

und nach dem vorigen Hilfssatz ist diese Bedingung in der Tat erfüllt.

Beweis von Satz 2, falls

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m > 2$$

ist. Ich nehme an, daß Satz 2 schon bewiesen ist, wenn das System $k_1, k_2, \ldots, k_m$ ersetzt wird durch ein System von ganzen Zahlen $k_1', k_2', \ldots, k_m'$, wobei die Beziehungen

$$k_1' \geqq 2, \qquad k_\mu' \geqq 0, \qquad k_1' + k_2' + \ldots + k_m' = k_1 + k_2 + \ldots + k_m - 1$$

gelten.

Es sei τ die größte ganze Zahl $\leqq m$, für die k_τ positiv ist.

Untersuchen wir zunächst den Fall

$$k_\tau \geqq \frac{1}{20^2}(b_\tau - a_\tau). \tag{50}$$

Ist $\tau = 1$, also

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 \geqq 3, \qquad \varkappa_1 = 2^{k_1} \geqq 8,$$

dann ist, da nach der Definition (4) von R

$$R \geqq r$$

ist,

$$\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (b_1 - a_1)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (20^2 k_1)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \geqq (20^2 \cdot 3)^{-\frac{2}{8}} \geqq \frac{1}{20},$$

und ist $\tau \geqq 2$, dann ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq (20^2 k_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}} \geqq (20^2 \cdot 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{20}.$$

In jedem Falle folgt also aus (50), daß die rechte Seite von Behauptung (5) größer als $\frac{1}{20}$ ist, und die linke Seite ist höchstens $\frac{1}{20}$, so daß die Behauptung evident ist. Wir dürfen also

$$k_\tau < \frac{1}{20^2}(b_\tau - a_\tau) \tag{51}$$

annehmen. Außerdem setze ich auch noch voraus, daß

$$\frac{r(b_1 - a_1)}{R} > 1 \tag{52}$$

ist, was erlaubt ist, da sonst die rechte Seite von Behauptung (5) größer als 1 ist.

Ich wende jetzt Satz 1 an, und zwar mit x_τ statt x_1, so daß P_q jetzt den Quader

$$P_q \ldots a_\tau \leqq x_\tau < b_\tau - k_\tau, \qquad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu \qquad (\mu \neq \tau)$$

bezeichnet. Nach (2) finde ich dann für jedes positive ganze $\varrho \leqq b_\tau - a_\tau + 1$

$$\begin{cases} \left| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| \leqq \sqrt{\frac{1}{\varrho}\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_1 - a_1}\right)} \\ + \frac{1}{\varrho}\sqrt{2\left(1 + \frac{\varrho - 1}{b_\tau - a_\tau}\right)\left| \sum_{q=0}^{\varrho-1} \left(1 - \frac{q}{b_\tau - a_\tau}\right)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) \right|}, \end{cases} \tag{53}$$

wo

$$f_q(x) = f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + q, x_{\tau+1}, \ldots, x_m) - f(x) \tag{54}$$

ist.

Ich werde Ungleichung (53) nur für

$$\varrho \leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau) + 1 \tag{55}$$

anwenden, so daß die Ungleichung (53) geschrieben werden kann in der Gestalt

$$\begin{cases} \left| \underset{(x) \prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| \\ \leqq \sqrt{\frac{5}{4\varrho}} + \frac{1}{\varrho}\sqrt{\frac{5}{2}\left| \sum_{q=0}^{\varrho-1} \left(1 - \frac{q}{b_\tau - a_\tau}\right)(\varrho - q) \underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) \right|}. \end{cases} \tag{56}$$

Um den Mittelwert

$$\underset{(x) \prec P_q}{M} \cos 2\pi f_q(x) = \frac{1}{2} \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)} + \frac{1}{2} \underset{(x) \prec P_q}{M} e^{-2\pi i f_q(x)}$$

abzuschätzen, wende ich Satz 2 an, und zwar mit

a_μ	statt	a_μ	
b_μ	„	b_μ	$(\mu \neq \tau)$
$b_\tau - q$	„	b_τ	
$k'_\mu = k_\mu$	„	k_μ	$(\mu \neq \tau)$
$k'_\tau = k_\tau - 1$	„	k_τ	
$\frac{1}{2}\varkappa_\mu$	„	$\varkappa_\mu$	$(1 \leqq \mu \leqq \tau)$
$\varkappa_\mu$	„	$\varkappa_\mu$	$(\tau + 1 \leqq \mu \leqq m)$
P_q	„	P	
f_q bzw. $-f_q$	„	f	
qr	„	r	
$\frac{\omega}{b_\tau - a_\tau}$	„	ω.	

Der Quader $P_{(k)}$ wird dann ersetzt durch den Quader

$$\overline{P} \ldots a_\tau \leqq x_\tau < b_\tau - q - (k_\tau - 1); \quad a_\mu \leqq x_\mu < b_\mu - k_\mu \qquad (\mu \neq \tau),$$

und die Funktion $g(x)$ verwandelt sich in

$$\begin{aligned}\bar{g}(x) &= \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \Delta_\tau^{k_\tau - 1} \Delta_{\tau+1}^{k_{\tau+1}} \ldots \Delta_m^{k_m} f_q(x) \\ &= \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_{\tau-1}^{k_{\tau-1}} \Delta_\tau^{k_\tau - 1} \Delta_{\tau+1}^{k_{\tau+1}} \ldots \Delta_m^{k_m} \sum_{h=0}^{q-1} \Delta_\tau f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots, x_m)\end{aligned}$$

wegen (54), so daß $g(x)$ übergeht in

$$\bar{g}(x) = \sum_{h=0}^{q-1} \Delta_1^{k_1} \ldots \Delta_m^{k_m} f(x_1, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots, x_m); \tag{57}$$

schließlich wird R noch ersetzt durch

$$\overline{R} = |\underset{(x) \prec \overline{P}}{M} \bar{g}(x)|. \tag{58}$$

Die Voraussetzungen von Satz 2 sind dann erfüllt. Denn ist $\tau \geqq 2$, dann ist $k'_1 = k_1 \geqq 2$, und ist $\tau = 1$, dann ist

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 = k_1 + \ldots + k_m \geqq 3, \qquad k'_1 = k_1 - 1 \geqq 2,$$

so daß jedenfalls $k'_1 \geqq 2$ ist. Die Bedingung (3) verwandelt sich hier in

$$a_\tau + k_\tau - 1 < b_\tau - q; \qquad a_\mu + k_\mu < b_\mu \qquad (\mu \neq \tau); \tag{59}$$

diese Ungleichungen gelten für $\mu \neq \tau$ natürlich wegen (3), aber die erste der Ungleichungen (59) gilt gleichfalls wegen (51), $q \leqq \varrho - 1$ und (55). Schließlich beachte man noch, daß wegen (57) $\bar{g}(x)$ in $\overline{P}$ beständig $\geqq \sum_{h=0}^{q-1} r = qr$ oder beständig $\leqq -\sum_{h=0}^{q-1} r = -qr$ ist. Hiermit ist gezeigt,

daß alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind, so daß nach unserer Annahme wegen

$$k_1' + \ldots + k_m' = k_1 + \ldots + k_m - 1$$

dieser Satz angewendet werden darf. Man erhält dann

$$(60)\quad \begin{cases} \frac{1}{20}\left|\underset{(x)\prec P_q}{M} e^{2\pi i f_q(x)}\right| < q^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_1-2}}\left(\frac{r}{\overline{R}^2}\right)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_1-2}} + q^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}} \\ \qquad + q^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}}\left(\frac{r(b_1-a_1)}{\overline{R}}\right)^{-\frac{2}{\frac{1}{2}\varkappa_1}} + \sqrt{\frac{4}{3}}\sum_{\mu=2}^{m}{}''(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\mu}}\ ;\ ^{15}) \end{cases}$$

in der letzten Summe kommen nur diejenigen $\mu \geqq 2$ und $\leqq m$ in Betracht, für die $\frac{1}{2}\varkappa_\mu > 1$ ist, also

$$(61)\quad \sum_{\mu=2}^{m}{}''(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\mu}} \leqq \sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}},$$

wo die Summe $\sum'$ verabredetermaßen erstreckt wird über die ganzen $\mu \geqq 2$ und $\leqq m$ mit der Eigenschaft $\varkappa_\mu > 1$.

Um die durch (58) definierte Zahl $\overline{R}$ abzuschätzen, bemerke man, daß wegen (57)

$$(62)\quad \sum_{(x)\prec \overline{P}} \bar{g}(x) = \sum_{(x)\prec \overline{P}} \sum_{h=0}^{q-1} g(y_h(x))$$

ist, wenn $(y_h(x))$ den Gitterpunkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_{\tau-1}, x_\tau + h, x_{\tau+1}, \ldots, x_m$ bezeichnet. Da (x) in $\overline{P}$ liegt, ist $y_h(x)$ ein Gitterpunkt von $P_{(k)}$, und zu jedem Gitterpunkt (y) von $P_{(k)}$ gibt es höchstens q Gitterpunkte (x) von $\overline{P}$ mit der Eigenschaft $(y) = (y_h(x))$. Das Glied $g(y)$ kommt in der rechten Seite von (62) also höchstens q-mal vor, und da entweder alle Glieder $g(y) \geqq 0$ oder alle Glieder $g(y) \leqq 0$ sind, folgt hieraus

$$\left|\sum_{(x)\prec \overline{P}} \bar{g}(x)\right| \leqq q \left|\sum_{(y)\prec P_{(k)}} g(y)\right|,$$

woraus sich wegen (58) und (4) ergibt:

$$(63)\quad \overline{R} \leqq \frac{b_\tau - a_\tau - k_\tau}{b_\tau - a_\tau - q - k_\tau + 1} \cdot qR.$$

---

[15]) Die letzte Summe enthält das Glied $(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}}$ nur, wenn $\varkappa_\tau \geqq 4$ ist, und dann ist wegen $q \leqq \varrho - 1$ und (55)

$$(b_\tau - a_\tau - q)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}} \leqq \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 4}} (b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}} = \sqrt{\frac{4}{3}}\,(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\frac{1}{2}\varkappa_\tau}}.$$

Hieraus folgt

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}\leqq\frac{b_\tau-a_\tau-q}{b_\tau-a_\tau}\cdot\frac{b_\tau-a_\tau-k_\tau}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau+1}\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

$$\leqq\frac{b_\tau-a_\tau-q}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau}\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}=\left(1+\frac{k_\tau}{b_\tau-a_\tau-q-k_\tau}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

$$\leqq\left(1+\frac{\frac{1}{20^2}}{1-\frac{1}{4}-\frac{1}{20^2}}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}$$

wegen (51), $q\leqq\varrho-1$ und (55), also

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}\leqq\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1-4}}. \tag{64}$$

Außerdem folgt aus (63) auf genau derselben Weise

$$\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot\overline{R}^{\frac{4}{\varkappa_1}}\leqq\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot(qR)^{\frac{4}{\varkappa_1}}. \tag{65}$$

Durch Substitution von (61), (64) und (65) in (60) bekommt man

$$\frac{5}{2}\left|\sum_{q=1}^{\varrho-1}\left(1-\frac{q}{b_\tau-a_\tau}\right)\cdot(\varrho-q)\underset{(x)\prec P_q}{M}\cos 2\pi f_q(x)\right|$$

$$<\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1-4}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{\frac{2}{\varkappa_1-4}}$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)$$

$$+\frac{5}{2}\cdot 20\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}}\cdot\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)$$

$$<25{,}1\,\varrho^2(\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1-4}}+67\,\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$+25{,}1\,\varrho^2\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{4}{\varkappa_1}}+29\,\varrho^2\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{2}{\varkappa_\mu}};$$

denn es ist

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{\frac{2}{\varkappa_1-4}} \leqq (\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}} \sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q) < \frac{1}{2}\varrho^2\cdot(\varrho-1)^{\frac{2}{\varkappa_1-4}};$$

$$\frac{5}{2}\cdot 20\left(1+\frac{1}{299}\right)\cdot\frac{1}{2} < 25{,}1;$$

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q)q^{-\frac{4}{\varkappa_1}} < \int_0^{\varrho}(\varrho-u)u^{-\frac{4}{\varkappa_1}}du$$

$$= \left(\frac{1}{1-\frac{4}{\varkappa_1}} - \frac{1}{2-\frac{4}{\varkappa_1}}\right)\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}} = \frac{1}{\left(1-\frac{4}{\varkappa_1}\right)\left(2-\frac{4}{\varkappa_1}\right)}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}}$$

$$\leqq \frac{1}{\left(1-\frac{4}{8}\right)\left(2-\frac{4}{8}\right)}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}} = \frac{4}{3}\varrho^{2-\frac{4}{\varkappa_1}};$$

$$\frac{5}{2}\cdot 20\cdot\frac{4}{3} = \frac{200}{3} < 67, \qquad \frac{5}{2}\cdot 20\cdot\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{2} < 29,$$

und

$$\sum_{q=1}^{\varrho-1}(\varrho-q) < \frac{1}{2}\varrho^2.$$

Das jetzt gefundene Resultat werde in (56) substituiert. Da die Quadratwurzel aus der Summe einiger positiven Glieder höchstens gleich der Summe der Quadratwurzel ist, so findet man wegen

$$\sqrt{\frac{5}{4}} < 1{,}2; \quad \sqrt{25{,}1} < 5{,}1; \quad \sqrt{67} < 8{,}2 \quad \text{und} \quad \sqrt{29} < 5{,}4$$

für jedes positive ganze ϱ mit Eigenschaft (55) die Ungleichung

$$\left|\underset{(x)\prec P}{M} e^{2\pi i f(x)}\right| < \frac{1{,}2}{\sqrt{\varrho}} + 5{,}1\,(\varrho-1)^{\frac{1}{\varkappa_1-4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}}$$
$$+ 8{,}2\,\varrho^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\frac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_u)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}.$$

Wählen wir jetzt eine beliebige (ganze oder gebrochene) positive Zahl $u \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)$. Es ist dann stets möglich, die positive ganze Zahl $\varrho \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)+1$ so zu wählen, daß $\varrho-1<u\leqq\varrho$ ist, so daß nach der obigen Ungleichung für jedes positive $u \leqq \frac{1}{4}(b_\tau-a_\tau)$

$$(66)\quad \begin{cases} \left|\underset{(x)\prec P}{M} e^{2\pi i f(x)}\right| < \dfrac{1{,}2}{\sqrt{u}} + 5{,}1\,u^{\frac{1}{\varkappa_1-4}}\left(\dfrac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}} \\ \quad + 8{,}2\,u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\dfrac{r\omega}{b_\tau-a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\dfrac{r(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum\limits_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu-a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}} \end{cases}$$

ist.

Jetzt kommt es darauf an, u geeignet zu wählen. Bezeichnet $Q(u)$ die größte der zwei Zahlen

$$u^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}},$$

dann können wir die positive Zahl v stets so wählen, daß

$$Q(v) - v^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} = 0 \tag{67}$$

ist, und durch diese Relation ist v eindeutig bestimmt; die linke Seite von (67) ist ja eine stetige monoton-abnehmende Funktion von v, die bei kleinem positivem v positiv, bei großem v negativ ist. Für jedes positive u gilt dann die Beziehung

$$Q(u) - u^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} >, = \text{ oder } < 0, \tag{68}$$

je nachdem

$$u <, = \text{ oder } > v$$

ist.

Jetzt unterscheiden wir zwei verschiedene Fälle, je nachdem $v >$ oder $\leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$ ist.

1. Es sei $v > \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$. Dann ist nach (68)

$$Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right) > \left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}}\left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}},$$

so daß aus (66) folgt, wenn darin $u = \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$ gesetzt wird

$$\left|\sum_{(x) \prec P}^{M} e^{2\pi i f(x)}\right| < 1{,}2\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + 5{,}1\, Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)$$
$$+ 8{,}2\left(\frac{r\omega}{4}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}1\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4\sum_{\mu=2}^{m}{}'(b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}$$

und der nach der Definition von $Q(u)$ jedenfalls

$$Q(u) < u^{-\frac{1}{2}} + u^{-\frac{2}{\varkappa_1}}\left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

ist, so ist hierin

$$Q\left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right) < \left(\frac{b_\tau - a_\tau}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{r\omega}{4}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}},$$

also

$$(69)\quad \begin{cases} \left| \underset{(x)\prec P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| < (1{,}2+5{,}1)\cdot 2\,(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} + (5{,}1+8{,}2)\cdot 4^{\frac{2}{\varkappa_1}} (r\omega)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \\ \qquad + 5{,}1\left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4 \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}. \end{cases}$$

Hieraus folgt die Behauptung; denn ist $\tau \geqq 2$, so ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} \leqq (b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{\varkappa_\tau}};$$

$$(70)\qquad (1{,}2+5{,}1)\cdot 2 + 5{,}4 = 18 < 20$$

und

$$(71)\qquad (5{,}1+8{,}2)\cdot 4^{\frac{2}{\varkappa_1}} \leqq 13{,}3\cdot\sqrt{2} < 20,$$

und ist $\tau = 1$, dann ist

$$(b_\tau - a_\tau)^{-\frac{1}{2}} = (b_1 - a_1)^{-\frac{1}{2}} \leqq \left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{1}{2}} < \left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

wegen $R \geqq r$, $\varkappa_1 \geqq 8$ und (52), so daß auch dann die Behauptung aus (69), (70) und (71) folgt.

2. Es sei $v \leqq \frac{1}{4}(b_\tau - a_\tau)$. Dann dürfen wir in (66) $u = v$ wählen, so daß wir dann wegen (67) finden

$$(72)\quad \begin{cases} \left| \underset{(x)\prec' P}{M} e^{2\pi i f(x)} \right| < (1{,}2+5{,}1+8{,}2)\,Q(v) \\ \qquad + 5{,}1\left(\frac{r\,(b_1-a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + 5{,}4 \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}. \end{cases}$$

Es werden nun zwei Unterfälle unterschieden.

2.1) Es sei

$$Q(v) = v^{-\frac{1}{2}}.$$

Dann ist wegen (67)

$$Q(v) = v^{-\frac{1}{2}} = v^{\frac{1}{\varkappa_1-4}} \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-4}},$$

und es ist

$$Q(v) = (Q(v))^{\frac{2}{\varkappa_1-2}} \cdot (Q(v))^{\frac{\varkappa_1-4}{\varkappa_1-2}},$$

somit

$$Q(v) = \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1-2}},$$

so daß dann (72) uns Behauptung (5) liefert wegen

$$(73)\qquad 1{,}2+5{,}1+8{,}2+5{,}4 = 19{,}9 < 20.$$

2. 2) Es sei

$$Q(v) = v^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}.$$

Dann ist wegen (67)

$$Q(v) = v^{-\frac{2}{\varkappa_1}} \left(\frac{r\omega}{b_\tau - a_\tau}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} = v^{\frac{1}{\varkappa_1 - 4}} \left(\frac{r}{R^2}\right)^{-\frac{1}{\varkappa_1 - 4}},$$

und es ist

$$Q(v) = (Q(v))^{\frac{\varkappa_1}{3\varkappa_1 - 8}} \cdot (Q(v))^{\frac{2(\varkappa_1 - 4)}{3\varkappa_1 - 8}},$$

also

$$(74) \quad \begin{cases} Q(v) = \left(\dfrac{r^2\omega}{R^2(b_\tau - a_\tau)}\right)^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} \\ = \left\{\left(\dfrac{r}{R}\right)^2 (b_1 - a_1)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_{\tau-1} - a_{\tau-1})^{k_{\tau-1}} (b_\tau - a_\tau)^{k_\tau - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}}. \end{cases}$$

Ist $\tau = 1$, also

$$k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0, \qquad k_1 = k_1 + \ldots + k_m \geqq 3,$$

dann ist wegen $R \geqq r$

$$Q(v) \leqq \left\{\left(\frac{r}{R}\right)^{k_1 - 1} (b_1 - a_1)^{k_1 - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}} = \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2(k_1 - 1)}{3\varkappa_1 - 8}} \leqq \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}}$$

wegen (52) und

$$\frac{2(k_1 - 1)}{3\varkappa_1 - 8} - \frac{2}{\varkappa_1} = \frac{2}{\varkappa_1(3\varkappa_1 - 8)}((k_1 - 4)\varkappa_1 + 8) \geqq 0,$$

so daß dann die Behauptung (5) aus (72) und (73) folgt.

Ist $\tau \geqq 2$, so beachte man, daß sich aus (74), $R \geqq r$ und $k_1 \geqq 2$ ergibt

$$Q(v) \leqq \left\{\left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{k_1} (b_2 - a_2)^{k_2} \ldots (b_{\tau-1} - a_{\tau-1})^{k_{\tau-1}} (b_\tau - a_\tau)^{k_\tau - 1}\right\}^{-\frac{2}{3\varkappa_1 - 8}}$$

und hierauf kann wegen (52) Hilfssatz 12 angewendet werden, d. h. es ist

$$Q(v) \leqq \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\mu=2}^{\tau} (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}} = \left(\frac{r(b_1 - a_1)}{R}\right)^{-\frac{2}{\varkappa_1}} + \sum_{\mu=2}^{m}{}' (b_\mu - a_\mu)^{-\frac{1}{\varkappa_\mu}}.$$

Mit Rücksicht auf (73) gilt Substitution dieses Resultates in (72) auch in diesem Falle die verlangte Ungleichung (5).

Hiermit ist Satz 2 vollständig bewiesen.

Groningen, 24. März 1928.

(Eingegangen am 26. März 1928.)