Werk

Titel: Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper

Autor: Hecke, E.,

Ort: Berlin

Jahr: 1928

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0028|log55

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Bestimmung der Perioden gewisser Integrale durch die Theorie der Klassenkörper.

Von

E. Hecke in Hamburg.

Unter einem Integral erster Gattung der Stufe N versteht man in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen eine analytische Funktion $f(\tau)$ der komplexen Variablen τ, welche im Innern der oberen Halbebene regulär ist, ferner bei allen Substitutionen der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ der Stufe N sich nur um additive Konstanten ändert, d. h.

$$f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right) = f(\tau) + \text{konst.},$$

wenn

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, N),$$

und welche schließlich auch in den rationalen Punkten der reellen Achse sich regulär in den betreffenden Ortsuniformisierenden verhält. Die Anzahl der linear unabhängigen Integrale der Stufe N ist gleich dem Geschlecht des algebraischen, durch die Gruppe $\Gamma(N)$ definierten Gebildes, welches bekanntlich den Wert hat:

$$p(N) = 1 + \frac{\sigma(N)\cdot(N-6)}{12}, \qquad \sigma(N) = \frac{N^2}{2} \prod_{p/N} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \qquad (N \geqq 3).$$

Hier ist $\sigma(N)$ die Anzahl der nach $\Gamma(N)$ nicht-äquivalenten rationalen Punkte; p durchläuft die verschiedenen Primteiler von N.

Eine allgemeine Theorie dieser Integrale und ihrer Perioden, etwa mit dem Ziel, von diesen Perioden her das algebraische Gebilde durch seine transzendenten Moduln zu bestimmen, liegt bisher noch nicht vor. Die einzigen Aussagen über beliebige (Primzahl-) Stufen sind in der Hurwitzschen Theorie der Modularkorrespondenzen enthalten, aus der sich ergibt, daß das betreffende algebraische Gebilde unter denen desselben Geschlechtes in hohem Maße „singulär“ sein muß. Außerdem liegen noch Resultate über einige Stufenzahlen $N \leqq 10$ vor, deren Herleitung aber

keine Vermutung darüber gestattet, ob ähnliche Verhältnisse bei beliebigen Stufenzahlen herrschen werden.

In dieser Arbeit werde ich nun für eine gewisse Kategorie von Integralen, die ein besonders einfaches Bildungsgesetz haben, die Perioden diskutieren. Es stellt sich für diese ein unerwarteter Zusammenhang mit der Theorie der komplexen Multiplikation heraus[1]). Die Heranziehung der tieferen algebraischen Eigenschaften der Körper der komplexen Multiplikation gestattet einen genauen Einblick in die Periodensysteme dieser Integrale. Als Hauptresultat ergibt sich insbesondere für alle Primzahlstufen q, wo $q \equiv 3 \pmod 4$, $q > 3$:

Für jede solche Stufe existieren $\frac{q-1}{2}$ Systeme von je h Integralen erster Gattung, wobei h die Klassenzahl des Zahlkörpers $K(\sqrt{-q})$ ist, mit folgenden Eigenschaften: Sämtliche Perioden dieser — übrigens linear unabhängigen — Integrale sind algebraische Zahlen und gehören dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ an. Die simultanen Perioden jedes dieser h-gliedrigen Systeme sind stets konjugierte Zahlen dieses Körpers in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. In jedem System ist ferner mindestens eine Linearkombination enthalten, deren sämtliche Perioden bereits Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{-q})$ sind.

Überdies enthält eines der Systeme lediglich Integrale, welche bereits der Gruppe $\Gamma_0^0(q)$ zugehörig sind[2]), und die Schar aller erwähnten $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale besteht aus den (in bezug auf die volle Modulgruppe) konjugierten Integralen dieses speziellen Systems.

Als Folgerung ist hervorzuheben, daß also stets mindestens $\frac{q-1}{2}$ elliptische Integrale für die Stufe q existieren.

Der Beweis verläuft so, daß gezeigt wird: gewisse $\frac{q-1}{2}$ Integrale erster Gattung, welche sich bei beliebigen Modulsubstitutionen linear transformieren gemäß einer bekannten, von F. Klein entdeckten Gruppe von $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Substitutionen in $\frac{q-1}{2}$ Variablen, besitzen Perioden, die sich als Werte elliptischer Modulfunktionen für „singuläre“ Argumente herausstellen. Sie sind Zahlen des Teilungskörpers für den Führer $\sqrt{-q}$ in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Dieser Körper kann aber aus dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ auch durch Adjunktion der q-ten Einheitswurzeln erzeugt

---

[1]) Die komplexe Multiplikation kommt durch den analytischen Ausdruck für die Größen $P(\varrho)$ und seine Berechnung durch die Gleichungen (7), (8) hinein.

[2]) Mit $\Gamma_0^0(q)$ bezeichne ich die Gruppe der Modulsubstitutionen $\tau' = \frac{a\tau + b}{t\tau + d}$, wo $b \equiv c \equiv 0 \pmod q$ ist.

werden. Die genauere Analyse dieses Zusammenhanges, wobei die neuen Resultate von Herrn Hasse[3]) aus der Theorie der komplexen Multiplikation entscheidend benutzt werden, führt dann dazu, daß gewisse lineare Verbindungen der $\frac{q-1}{2}$ Integrale Perioden aus dem absoluten Klassenkörper besitzen müssen. Als Nebenresultat ergibt sich weiter eine bisher nicht bekannte Darstellung der Kleinschen Gruppe mit Koeffizienten allein aus $K(\sqrt{-q})$.

In § 1, Gl. (3) werden die zu untersuchenden Integrale durch ihre Potenzreihenentwicklung auch für zusammengesetzte Stufe definiert. Es sind binäre Thetareihen, wo der Exponent des allgemeinen Gliedes eine ganzzahlige definite binäre quadratische Form der Summationsbuchstaben ist. Ihre Funktionaleigenschaften sind bekannt. Es wird dann gezeigt, daß die hieraus entstehenden Integrale Perioden besitzen, welche einem algebraisch genau definierten Teilungskörper aus der Theorie der komplexen Multiplikation angehören. In § 2 werden dann diese Resultate für den speziellen Fall der Primzahlstufe verschärft und gleichzeitig auf einfacherem Wege noch einmal bewiesen. In § 3 wird dann gezeigt, daß durch eine geeignete lineare Transformation der vorliegenden Integrale der Rationalitätsbereich der Perioden in den des absoluten Klassenkörpers an Stelle der Teilungskörper verwandelt werden kann.

Es sei noch bemerkt, daß die Bestimmung der Perioden eines gegebenen Integrals zwei verschiedenartige Teilprobleme involviert: a) die Bestimmung des gesamten Periodengitters — davon allein ist in der vorliegenden Arbeit die Rede — und b) die Bestimmung der Periode, die zu einer vorgegebenen Substitution der Gruppe $\Gamma(N)$ gehört. Die Fragestellung b) ist die für die Anwendungen auf Arithmetik in Betracht kommende; die Art der hier vorliegenden Beziehungen läßt sich aus der entsprechenden Frage bei den Integralen dritter Gattung erkennen, wo sich die Perioden als Faktoren von Klassenzahlen bisher unzugänglicher Zahlkörper herausstellen[4]).

Eine Theorie der allgemeinsten Integrale erster Gattung erfordert das Studium derjenigen endlichen Gruppe linearer Substitutionen, welche die p Integrale bei beliebigen Modulsubstitutionen erfahren. Mit den Methoden der algebraischen Gruppentheorie läßt sich in der Tat, wie ich an anderer Stelle zeigen werde, diese Gruppe für eine beliebige Primzahlstufe völlig bestimmen.

---

[3]) H. Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, Crelles Journal **157** (1927), S. 116 ff.

[4]) Vgl. meine Arbeit: Darstellung von Klassenzahlen als Perioden von Integralen dritter Gattung ..., Abh. aus d. Math. Seminar Hamburg **4** (1925), S. 211.

§ 1.

Definition und Haupteigenschaften der Integrale für beliebige zusammengesetzte Stufenzahlen.

Die Ableitung eines Integrals erster Gattung nach τ ist eine ganze Modulform der Dimension -2 und der Stufe N, welche in allen rationalen Punkten verschwindet. Umgekehrt entsteht durch Integration einer derartigen Form (-2)-ter Dimension stets ein Integral erster Gattung. Die Formen (-2)-ter Dimension, welche der folgenden Untersuchung zugrunde liegen, sind durch folgende[5]) binäre Thetareihen definiert:

In einem imaginär-quadratischen Körper mit der Diskriminante D sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes, von Null verschiedenes Ideal mit der Norm A, ferner ϱ eine ganze, durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl des Körpers, endlich Q eine natürliche Zahl. Man bilde nun die unendliche Reihe

$$(1) \qquad \vartheta_2(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}) = \sum_{\mu \equiv \varrho\, (\mathfrak{a}\, Q\sqrt{D})} \mu e^{2\pi i \tau \frac{\mu\mu'}{A\, Q\, |D|}},$$

worin der Summationsbuchstabe μ alle ganzen Zahlen des Körpers[6]) durchlaufen soll, welche die Kongruenz erfüllen. Diese Reihe konvergiert für alle τ der oberen Halbebene und stellt eine ganze Modulform der Dimension -2 und der Stufe $|QD|$ vor, welche überdies in allen rationalen Punkten verschwindet, also durch Integration nach τ ein Integral erster Gattung der Stufe $|QD|$ definiert (soweit es nicht identisch verschwindet). Ihr Verhalten bei den erzeugenden Substitutionen der Modulgruppe $\tau' = \tau + 1$ und $\tau' = -\frac{1}{\tau}$ wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

$$\vartheta_2(\tau + 1;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}) = \varepsilon^{\frac{\varrho\varrho'}{A}}\, \vartheta_2(\tau;\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}),$$

$$(2) \qquad \frac{\vartheta_2\left(\frac{-1}{\tau};\, \varrho,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}\right)}{\tau^2} = \frac{1}{Q\sqrt{D}} \sum_{\substack{\alpha \bmod \mathfrak{a}\, Q\sqrt{D} \\ \alpha \equiv 0\, (\mathfrak{a})}} \varepsilon^{-S\left(\frac{\alpha'\varrho}{A}\right)}\, \vartheta_2(\tau;\, \alpha,\, \mathfrak{a},\, Q\sqrt{D}).$$

In der Summe durchläuft α ein volles System inkongruenter Zahlen mod $\mathfrak{a}\, Q\sqrt{D}$, die $\equiv 0\, (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a})$ sind. Das Zeichen $S(\omega)$ bedeutet die Spur $\omega + \omega'$ im Körper und

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{Q|D|}}; \qquad \sqrt{D} \text{ ist positiv imaginär.}$$

---

[5]) Die genauere Untersuchung dieser Reihen habe ich in den Math. Ann. **97** (1926), S. 210 durchgeführt.

[6]) Der Akzent an Zahlen aus $K(\sqrt{D})$ bedeutet stets den Übergang zur konjugierten Zahl.

Gehen wir nun zu den Integralen über und setzen

$$(3)\qquad \begin{aligned} j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \frac{2\pi i}{AQ|D|}\int_{\infty}^{\tau}\vartheta_2(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})\,d\tau \\ &= \sum_{\mu\equiv\varrho(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})}\frac{1}{\mu'}e^{2\pi i\tau\frac{\mu\mu'}{AQ|D|}} \quad (\varrho\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D})), \end{aligned}$$

so folgt aus (2)

$$(4)\qquad \begin{aligned} j(\tau+1;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) &= \varepsilon^{\frac{\varrho\varrho'}{A}}j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}), \\ j\left(-\tfrac{1}{\tau};\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}\right) &= \frac{1}{Q\sqrt{D}}\sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod.}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}\varepsilon^{-\varphi\left(\frac{\alpha'\varrho}{A}\right)}j(\tau;\alpha,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})+P(\varrho), \end{aligned}$$

wo die für das Folgende ausschlaggebenden Zahlen $P(\varrho)$ konstante, von τ unabhängige Größen sind, die nur von $\varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ abhängen. Ihre Bestimmung soll nun vorgenommen werden.

Zunächst ist zu bemerken, daß $j(\tau;\varrho\ldots)$ und $P(\varrho)$ nach Definition sich nicht ändern, wenn ϱ durch eine $\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}$ kongruente Zahl ersetzt wird. Ferner ist

$$j(\tau;-\varrho,\ldots) = -j(\tau;\varrho\ldots),$$
$$P(-\varrho) = -P(\varrho).$$

Wenn also

$$2\varrho \equiv 0\,(\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}),$$

so verschwindet $j(\tau;\varrho\ldots)$ identisch und auch $P(\varrho)=0$.

Für eine beliebige Modulsubstitution $S=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ folgt dann aus (4)

$$(5)\qquad j(S\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = \sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}A_S(\varrho,\alpha)j(\tau;\alpha,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})+C_S(\varrho),$$

wo

$$(6)\qquad C_S(\varrho) = \sum_{\substack{\alpha\,\mathrm{mod}\,\mathfrak{a}Q\sqrt{D}\\ \alpha\equiv 0\,(\mathfrak{a})}}G_S(\varrho,\alpha)P(\alpha).$$

Hier sind $A_S(\varrho,\alpha)$ und $G_S(\varrho,\alpha)$ ganze rationale Ausdrücke in ε und $\frac{1}{Q\sqrt{D}}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten, die nur von S,ϱ,α abhängen. Ist insbesondere S eine Substitution der Gruppe $\Gamma(Q|D|)$, so ist der homogene Bestandteil in (5) gleich $j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D})$, da es sich nach dem früher[3]) bewiesenen um Integrale der Stufe $Q|D|$ handelt, und es wird dann

$$j(S\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}) = j(\tau;\varrho,\mathfrak{a},Q\sqrt{D}+C_S(\varrho),$$

worin also die zu S gehörige „Periode“ $C_S(\varrho)$ die Gestalt (6) besitzt. Mithin gilt

Satz 1. *Für festes* $\mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ *haben die durch* (3) *definierten Integrale erster Gattung der Stufe* $Q|D|$, *unter denen es höchstens* $Q^2|D|$ *linear unabhängige gibt, nur solche Perioden, welche sich linear homogen durch die* $Q^2|D|$*-Größen* $P(\varrho)$ *mit Koeffizienten aus dem Körper der* $|QD|$*-ten Einheitswurzeln ausdrücken lassen.*

Der Wert von $P(\varrho)$ ergibt sich nun aus (4), wenn wir den Imaginärteil von τ über alle Grenzen wachsen lassen und berücksichtigen, daß nach Definition alle $j(\tau)$ im Punkte $i\infty$ verschwinden:

$$(7) \qquad P(\varrho) = j(0;\ \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D}) = \lim_{x=1} \sum_{\mu \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} \frac{x^{\mu\mu'}}{\mu'},$$

wobei x über reelle Werte wachsend gegen 1 konvergieren soll. Die Summe der divergenten Reihe

$$\sum \frac{1}{\mu'},$$

welche durch den obigen Grenzprozeß definiert ist (d. h. Summation durch Potenzreihen) läßt sich aber ebenso vermöge Summation durch Dirichletsche Reihen gewinnen:

$$(8) \qquad \lim_{x=1} \sum \frac{x^{\mu\mu'}}{\mu'} = \Big(\sum_{\mu \equiv \varrho\,(\mathfrak{a}Q\sqrt{D})} \frac{1}{\mu' |\mu|^s} \Big)_{s=0},$$

wobei das Zeichen $(\ldots)_{s=0}$ den Wert der in der Klammer stehenden analytischen Funktion von s für $s = 0$ bedeuten soll. Die Richtigkeit dieser Gl. (8) ergibt sich sofort, wenn man die dort auftretende Dirichletsche Reihe, welche für $R(s) > 1$ absolut konvergent ist, mittels des Γ-Integrals auf die Potenzreihe zurückführt, und dadurch unter Benutzung der Funktionaleigenschaft (4) als in die ganze s-Ebene fortsetzbar erkennt. Man kann auf einen bekannten Sachverhalt am einfachsten kommen, wenn man bedenkt, daß

$$\sum \frac{1}{\mu' |\mu|^s} = \sum \frac{\mu}{|\mu|} \frac{1}{|\mu|^{s+1}}$$

ja die Funktion $\zeta\left(\frac{s+1}{2};\ \lambda\right)$ aus dem Körper $K(\sqrt{D})$ ist, gebildet mit dem Größencharakter $\lambda(\mu) = \frac{\mu}{|\mu|}$. Für das Folgende ist aber eine Zurückführung auf eine Reihe aus der Theorie der elliptischen Modulfunktionen notwendig, woraus die Gl. (8) dann auch folgt: Ist ω_1, ω_2 eine Basis des Ideals $\mathfrak{a}$ in $K(\sqrt{D})$, deren Determinante negativ imaginär ist, so ist, zunächst für $\Re(s) > 1$,

$$\sum_{\mu \equiv \varrho (\mathfrak{a} Q \sqrt{D})} \frac{1}{|\mu'|^s \cdot \mu^s} = \sum_{\substack{m_2 \equiv r_2 \\ m_1 \equiv r_1 \pmod{Q D}}} \frac{-\sqrt{D} \cdot D^{\frac{s}{2}}}{(m_1 \omega_1' + m_2 \omega_2')\,|m_1 \omega_1' + m_2 \omega_2'|^s},$$

wo gesetzt ist

$$\varrho \sqrt{D} = r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2 \quad \text{mit ganzen rationalen } r_1, r_2.$$

Die hier auftretende Reihe ist aber nichts anderes als eine verallgemeinerte Eisenstein-Reihe, wie ich sie systematisch für frei veränderliches $\frac{\omega_1'}{\omega_2'}$ mit positivem Imaginärteil[7]) bereits untersucht habe. Ihr Wert bei $s = 0$ ist die Eisensteinsche Reihe der Dimension -1, welche mit den Teilwerten der Weierstraßschen ζ-Funktion zusammenhängt, für das homogene Argumentpaar (ω_1', ω_2'). So ergibt sich endlich

$$(10) \qquad P(\varrho) = P\left(\frac{r_1 \omega_1 + r_2 \omega_2}{\sqrt{D}}\right) = -\sqrt{D}\, G_1(\omega_1', \omega_2';\, r_1, r_2, Q\,|\,D\,|),$$

wo

$$G_1(\tau, 1;\, r_1, r_2, N) = \sum_{m_i \equiv r_i (N)} \frac{1}{(m_1 \tau + m_2)\,|m_1 \tau + m_2|^s}\Big|_{s=0}$$

eine ganze elliptische Modulform der Dimension -1 und der Stufe N ist.

Von dieser Modulform habe ich folgende Eigenschaften bewiesen[7]):

Die Funktion

$$\frac{1}{2\pi i} G_1(\tau, 1;\, r_1, r_2, N)$$

hat eine Entwickelung nach nicht-negativen Potenzen von $e^{\frac{2\pi i \tau}{N}}$, deren Koeffizienten Zahlen aus dem Körper der N-ten Einheitswurzeln sind.

Für jede beliebige Modulsubstitution ist

$$\frac{G_1\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, 1; r_1, r_2, N\right)}{c\tau+d} = G_1(\tau, 1;\, a r_1 + c r_2, b r_1 + d r_2, N).$$

So erscheinen die Perioden $P(\varrho)$ als Werte von elliptischen Modulformen für Argumente, welche dem imaginär-quadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{D})$ angehören, und auf diese Weise ist der Zusammenhang mit der komplexen Multiplikation gegeben.

Wir werden jetzt folgenden Satz beweisen:

Satz 2. *Durch Multiplikation mit einem passenden von Null verschiedenen gemeinsamen Faktor λ läßt sich erreichen, daß die Zahlen $\lambda P(\varrho)$ für alle ϱ (bei festem $\mathfrak{a}\, Q \sqrt{D}$) dem Teilungskörper der elliptischen Funktionen für den Modul $Q \sqrt{D}$ in bezug auf den Körper $K(\sqrt{D})$ angehören, also algebraische Zahlen werden.*

---

[7]) Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe ... Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg **5** (1927), S. 213.

Hierzu genügt es, zu zeigen, daß der Quotient von zwei der Zahlen $P(\varrho)$, die von Null verschieden sind, stets dem erwähnten Teilungskörper angehört.

Um dies nachzuweisen, verwandeln wir die Modulform $G_1(\tau, \ldots)$ zunächst durch Multiplikation mit einem noch von anderer Seite her zugänglichen Faktor in eine Modulfunktion, indem wir $\tau = \tau_1 : \tau_2$ setzen und

$$(11)\quad f(\tau; r_1, r_2) = G_1(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2, N) \cdot \wp'\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right) \cdot \frac{g_2^2}{\Delta}(\tau_1, \tau_2).$$

Hierin ist $\wp'(u; \tau_1, \tau_2)$ die Ableitung der Weierstraßschen $\wp$-Funktion nach u, und g_2, Δ, wie später g_3 sind die bekannten Größen der Weierstraßschen Theorie, homogene Funktionen allein von τ_1, τ_2. Daher wird f eine im Innern der oberen Halbebene reguläre Modulfunktion, die in naher Beziehung zu den Teilwerten der Weberschen[8]) τ-Funktion steht, welche ich im folgenden mit T bezeichne:

$$(12)\quad T(u; \tau_1, \tau_2) = \frac{g_2 g_3}{\Delta}(\tau_1, \tau_2) \cdot \wp(u; \tau_1, \tau_2)$$

Die Teilwerte $T\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right)$ der N-ten Stufe erfahren bei beliebigen Modulsubstitutionen dieselbe Permutation wie die Größen f, und durch die bekannte Schlußweise folgt, daß

$$(13)\quad f(\tau; r_1, r_2) = R\left(T\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N}; \tau_1, \tau_2\right), J(\tau_1, \tau_2)\right)$$

wo R eine rationale, nur von N abhängige Funktion von T, J ist und $J(\tau_1, \tau_2)$ die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ bedeutet. R hat rationale Zahlkoeffizienten und der Nenner von R verschwindet nur da, wo zwei Teilwerte T auf eine nicht-triviale Art gleich werden, d. h. für $g_2 = 0$ oder $g_3 = 0$, d. h. wenn τ_1, τ_2 Zahlen aus $K(\sqrt{-3})$ oder $K(\sqrt{-4})$ resp. mit den Determinanten $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt{-4}$ sind.

Daher nehmen wir erst an, daß die Diskriminante D unseres Zahlkörpers von -3 und -4 verschieden ist, und schließen aus (13), daß für

$$N = Q\,|\,D\,|, \tau_1 = \omega_1'. \tau_2 = \omega_2'; \; r_1\tau_1 + r_2\tau_2 = -\varrho'\sqrt{D}$$

die Zahlwerte $f(\tau; r_1, r_2)$ dem Teilungskörper angehören, welcher durch den Teilwert $T\left(\frac{\varrho'}{\sqrt{D}}; \omega_1', \omega_2'\right)$ definiert ist. Dieser ist bekanntlich der Strahlklassenkörper bezüglich $K(\sqrt{D})$, der zum Modul ($=$ Führer) $Q\sqrt{D}$ gehört, möglicherweise schon zu einem Teiler dieses Führers. Nach der

[8]) H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen. 2. Aufl. (1908) § 153 und § 154.

Theorie des Teilungskörpers sind die Teilwerte

$$T\left(\frac{\varrho'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right) \text{ mit festem } \mathfrak{a} \text{ und } (\varrho', \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})$$

konjugierte algebraische Zahlen in bezug auf den absoluten Klassenkörper $K(J(\omega_1', \omega_2'), \sqrt{D})$. Hieraus folgt insbesondere:

Hilfssatz. *Ist* $P(\varrho) = 0$ *und* $(\varrho, \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}) = (\varrho_1, \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D})$, *so ist auch* $P(\varrho_1) = 0$.

Das ergibt sich entweder aus (13) und den bekannten Nullstellen der Zusatzfaktoren in (11), oder direkt durch Betrachtung der Funktionen

$$\frac{G_1^{12}(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2)}{\Delta(\tau_1, \tau_2)},$$

die ja ebenfalls durch die Teilwerte ausdrückbar sind. Das Verschwinden eines $P(\varrho)$ hängt also nur von dem größten gemeinsamen Teiler von $\frac{\varrho}{\mathfrak{a}}$ mit dem Modul $Q\sqrt{D}$ ab.

Der Quotient von zwei nicht-verschwindenden Zahlen f gehört also ebenfalls dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ an, und daher wird Satz 2 bewiesen sein, wenn wir noch zeigen: Auch die Quotienten

$$\wp'\left(\frac{\varrho'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right) : \wp'\left(\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}};\ \omega_1',\ \omega_2'\right)$$

gehören dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ an, wenn man für α irgendeine Zahl aus $\mathfrak{a}$ wählt, wofür $\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}}$ keine halbe Periode ist. Das folgt aber aus der Theorie der komplexen Multiplikation der $\wp$-Funktion. Nach Weber[8]) ist nämlich für eine beliebige ganze Zahl μ aus $K(\sqrt{D})$, $(\mu \neq 0)$,

$$T(\mu u;\ \omega_1', \omega_2') = r_\mu(T(u;\ \omega_1', \omega_2')), \tag{15}$$

wo r_μ eine rationale Funktion von T ist, deren Koeffizienten dem absoluten Klassenkörper $K(\sqrt{D}; J(\omega_1', \omega_2'))$ angehören. Dabei verschwindet der Nenner von r_μ nur für solche u, welche die Gestalt $\frac{\omega}{\mu}$ haben, wo ω eine ganze Zahl aus $\mathfrak{a}' = (\omega_1', \omega_2')$ ist. Differentiiert man die in u identisch geltende Gl. (15) nach u, so folgt mit Rücksicht auf (12)

$$\frac{\wp'(\mu u;\ \omega_1', \omega_2')}{\wp'(u;\ \omega_1', \omega_2')}\,\mu = r_\mu'(T(u;\ \omega_1', \omega_2')).$$

Hierin setze man $u = \frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}}$, wo $(\alpha, \mathfrak{a}\,Q\sqrt{D}) = \mathfrak{a}$. Dann hat die Funktion r_μ' einen Sinn, wenn nicht μ durch $Q\sqrt{D}$ teilbar ist. Wählen wir insbesondere μ so, daß

$$\mu\alpha' \equiv \varrho'(\mathfrak{a}'\,Q\sqrt{D}), \quad \text{wobei} \quad \varrho' \not\equiv 0\,(\mathfrak{a}'\,Q\sqrt{D}),$$

so ergibt sich die Zahl (14) gleich

$$r'_\mu\left(T\left(\frac{\alpha'}{Q\sqrt{D}};\,\omega'_1,\,\omega'_2\right)\right),$$

also gleich eine Zahl des Teilungskörpers, w. z. b. w.

Damit ist Satz 2 für den Fall $D \neq -3, -4$ bewiesen. Für $D = -3, -4$ muß die bekannte Modifikation der Definition von $T(u)$ eintreten, und für $D = -3$, wo $g_2(\omega'_1, \omega'_2)$ verschwindet, hat man dann noch f zu ersetzen durch

$$f^*(\tau; r_1, r_2) = G_1(\tau_1, \tau_2; r_1, r_2)\,\frac{\wp' \cdot \wp\left(\frac{r_1\tau_1 + r_2\tau_2}{N};\,\tau_1, \tau_2\right)}{g_3(\tau_1, \tau_2)}.$$

Im übrigen bleiben alle Schlüsse gültig.

Aus Satz 1 und 2 ergibt sich nun noch eine elegante Folgerung, wenn wir bedenken, daß nach der Theorie der Klassenkörper die $Q|D|$-ten Einheitswurzeln, also auch $\sqrt{D}$, stets dem Teilungskörper für den Modul $Q\sqrt{D}$ angehören müssen; dann gilt dasselbe also auch von den Zahlen $G_S(\varrho, \alpha)$ in (6), und daraus folgt dann

Satz 3. *Zu* $\mathfrak{a}, Q\sqrt{D}$ *gibt es eine von Null verschiedene Zahl* λ, *so daß die Perioden sämtlicher Integrale* $\lambda \cdot j(\tau; \varrho, \mathfrak{a}, Q\sqrt{D})$ *dem Teilungskörper für den Modul* $Q\sqrt{D}$ *in bezug auf den Körper* $K(\sqrt{D})$ *angehören.*

Die einfachsten Verhältnisse finden sich natürlich in dem Falle, wo die Stufe $Q|D|$ der Integrale eine Primzahl ist; d. h. $Q = 1$, $D = -q$, q eine positive Primzahl der Form $4n+3$, $q > 3$. Hier läßt sich eine besonders einfache Wahl des Normierungsfaktors λ treffen, und hier ist der Teilungskörper für den Modul $\sqrt{-q}$ mit dem Körper identisch, der aus dem absoluten Klassenkörper durch Adjunktion der q-ten Einheitswurzeln entsteht. Für diesen Fall sollen in dem nächsten Paragraphen die Perioden genauer diskutiert werden, wobei die Sätze 1 bis 3 gleichzeitig mitbewiesen werden.

§ 2.

Die Normierung der Integrale erster Gattung für die Primzahlstufe $q = 4n + 3$.

Wir spezialisieren jetzt die Resultate des vorigen Paragraphen auf den Fall, daß $-D = q$ eine positive Primzahl der Form $4n+3$ ist, während $Q = 1$ angenommen wird. Die Differentiale dj oder auch die homogen geschriebenen Integranden

$$\omega_2^{-2}\,\vartheta_2\left(\frac{\omega_1}{\omega_2};\,\varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{-q}\right)$$

erfahren dann bei beliebigen homogenen Modulsubstitutionen in ω_1, ω_2 lineare homogene Substitutionen unter sich (bei festem $\mathfrak{a}, q$), welche eine endliche, mit der Modulargruppe $\bmod q$ $\left(\text{vom Grade } q\frac{(q^2-1)}{2}\right)$ isomorphe Gruppe bilden, da ja jene Funktionen bei $\Gamma(q)$ absolut invariant bleiben. Diese Gruppe in $\frac{q-1}{2}$ Variablen ist von F. Klein[9]) zuerst aufgestellt worden. Ihre, den beiden Substitutionen $\tau+1$ und $\frac{-1}{\tau}$ entsprechenden Erzeugenden sind

$$1.\quad x_n' = \varepsilon^{n^2} x_n; \qquad 2.\quad x_n' = \frac{1}{\sqrt{-q}} \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} (\varepsilon^{-2nk} - \varepsilon^{2nk})\, x_k$$

für $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$. Nach Frobenius[10]) ist diese Gruppe irreduzibel.

Wir wollen die bisher mit ϱ bezeichneten Restklassen nun in bestimmter Art auswählen. Zunächst ist die Klassenzahl h des Körpers $K(\sqrt{-q})$ ungerade. Es mögen $\mathfrak{a}_1 = (1), \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_h$ je ein ganzes Ideal aus jeder der h Idealklassen sein, überdies noch teilerfremd zu q, ihre Normen seien $A_1 = 1, A_2, \ldots, A_h$. Alle Restklassen $\bmod \sqrt{-q}$ können durch rationale Zahlen repräsentiert werden, die Restklassen ϱ also in der Form $A \cdot x$, wo x ganz rational, gewählt werden. Nun sind alle Integranden $\vartheta_2(\tau, \varrho, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})$, die der Restklasse $\varrho = 0$ entsprechen, Null, und ϱ und $-\varrho$ geben bis auf das Vorzeichen dieselbe Reihe. Bedeutet jetzt r eine rationale Primitivzahl $\bmod q$, so werden, weil -1 quadratischer Nichtrest $\bmod q$ ist, durch die Zahlen

$$\pm r^{2n}, \qquad n \bmod \frac{q-1}{2}$$

alle zu q teilerfremden Restklassen $\bmod q$ dargestellt. Wir setzen nun in etwas gegen § 1 abweichender Bezeichnung

$$j_n(\tau; \mathfrak{a}) = \frac{2\pi i}{Aq} \int_{\infty}^{\tau} \vartheta_2(\tau; r^{2n}A, \mathfrak{a}, \sqrt{-q})\, d\tau, \qquad n \bmod \frac{q-1}{2};$$

und erhalten damit

$$j_n(\tau+1, \mathfrak{a}) = \beta_n j_n(\tau, \mathfrak{a}),$$

$$(16) \qquad j_n\left(-\frac{1}{\tau}, \mathfrak{a}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} \alpha_{nk} j_k(\tau, \mathfrak{a}) + P(r^{2n}A, \mathfrak{a}),$$

---

[9]) Math. Ann. **15** (1879), S. 275.

[10]) Siehe die Tabelle bei Frobenius, Über Gruppencharaktere, Sitzungsber. Berliner Akad. 1896, S. 1021.

wobei

$$\alpha_{nk} = \frac{\varepsilon^{-2r^{2(n+k)}A} - \varepsilon^{+2r^{2(n+k)}A}}{\sqrt{-q}}, \qquad \beta_n = \varepsilon^{r^{4n}A}, \qquad n, k = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}.$$

Die Koeffizienten α_{nk} sind Zahlen aus dem reellen Körper $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$. Die im Körper $K(\varepsilon)$ enthaltene Zahl $\sqrt{-q}$ bleibt übrigens ungeändert, wenn ε durch ε^{r^2} ersetzt wird[11]), ändert sich dagegen im Vorzeichen bei Ersetzung von ε durch ε^{-1}.

Bestehen nun mit irgendwelchen Konstanten α_{nk}, β_n, P für ein System von $\frac{q-1}{2}$ Funktionen $j_n(\tau)$ die Relationen (16), so folgt für eine beliebige Modulsubstitution S, indem man S aus den beiden Erzeugenden $\tau + 1$ und $\frac{-1}{\tau}$ zusammensetzt,

$$(17) \qquad \begin{aligned} j_n(S\tau) = &\sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} H_{n,k}^{(S)}\left(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}}, \beta_1, \ldots\right) j_k(\tau) \\ &+ \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_{n,k}^{(S)}(\alpha_{11}, \ldots, \beta_1, \ldots) P(r^{2k}A, \mathfrak{a}). \end{aligned}$$

Hier ist $H^{(S)}$ und $G^{(S)}$ ein allein durch die Zusammensetzung von S aus den Erzeugenden bestimmtes System von zweimal $\left(\frac{q-1}{2}\right)^2$ ganzen rationalen Funktionen der α, β mit ganzen rationalen Koeffizienten. Nun genügt das durch eine zyklische Permutation der Indizes aus $j_n(\tau, \mathfrak{a})$ entstehende System

$$j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) = j_{n+1}(\tau, \mathfrak{a})$$

(wobei der Index natürlich nur mod $\frac{q-1}{2}$ zu rechnen ist) ebenfalls einem System von Gleichungen wie (16), und die neuen Koeffizienten α_{nk}^*, β_n^*, $P^*(r^{2n}A, \mathfrak{a})$ ergeben sich aus den früheren einfach dadurch, daß man in α und β die Einheitswurzel ε durch ε^{r^4} ersetzt und

$$P^*(r^{2n}A, \mathfrak{a}) = P(r^{2(n+1)}A, \mathfrak{a})$$

setzt. Wählen wir insbesondere in (17) für S eine Substitution der Gruppe $\Gamma(q)$, so wissen wir, daß die Matrix der H_{nk} die Einheitsmatrix ist, während das konstante Glied die zu S gehörige Periode von $j_n(\tau)$ ist. Und man kann nach dem Vorangehenden die Perioden aller $j_n(\tau)$ aus der Periode eines einzigen $j_1(\tau)$ folgendermaßen erhalten:

---

[11]) Auch der Übergang von ε zu ε^A ändert $\sqrt{-q}$ nicht, weil jede Idealnorm A quadratischer Rest mod q ist.

Satz 4. *Die zu S gehörige Periode von $j_0(\tau, \mathfrak{a}_1)$ hat die Gestalt*

$$j_0(S\tau, \mathfrak{a}_1) = j_0(\tau, \mathfrak{a}_1) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon) P(r^{2k}, \mathfrak{a}_1),$$

wo $g_k(\varepsilon)$ eine ganze rationale rationalzahlige Funktion von ε bedeutet. Für die Gesamtheit der $h \cdot \frac{q-1}{2}$ Integrale j mit demselben q gilt dann

$$j_n(S\tau, \mathfrak{a}) = j_n(\tau, \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon^{r^{4n}} A) P(r^{2(k+n)} A, \mathfrak{a}).$$

Es sollen nunmehr die Normierungsfaktoren $\lambda(\mathfrak{a})$ in einer besonders übersichtlichen Art gewählt werden, damit die Gesamtheit der λP als konjugierte algebraische Zahlen auftreten. Wir bedenken, daß $\frac{q+1}{4}$ eine ganze Zahl ist und daß daher die Funktionen

$$(18) \qquad G_1(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) \cdot \left(\frac{g_2 g_3}{\Delta}\right)^{\frac{q+1}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_1(\tau_1, \tau_2; r^{2k} a_1, r^{2k} a_2) = f(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2)$$

homogene ganze Modulformen in τ_1, τ_2 von der Dimension 0, und zwar Modulfunktionen von $\frac{\tau_1}{\tau_2}$ der Stufe q sind. Dabei ist wie bisher

$$G_1(\tau_1\, \tau_2; a_1, a_2) = \sum_{m_i \equiv a_i (q)} \frac{1}{(m_1\tau_1 + m_2\tau_2) \mid \ldots \mid^s}\Big|_{s=0},$$

wobei a_1, a_2 nur mod q in Frage kommen und die Reste $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ ausgeschlossen sind. Diese Funktionen q-ter Stufe erfahren bei beliebigen Modulsubstitutionen dieselbe Umsetzung wie das System der Teilwerte $T\left(\frac{a_1\tau_1 + a_2\tau_2}{q}; \tau_1, \tau_2\right)$, und es ist daher

$$(19) \qquad f(\tau_1, \tau_2; a_1, a_2) = \Phi\left(T\left(\frac{a_1\tau_1 + a_2\tau_2}{q}; \tau_1, \tau_2\right), J(\tau_1, \tau_2)\right),$$

wo Φ eine rationale Funktion von T, J ist, deren Gestalt nur von q, aber nicht von a_1, a_2 abhängt und deren Nenner $\neq 0$, wenn für τ_1, τ_2 Basiszahlen eines Ideals aus $K(\sqrt{-q})$ eingesetzt werden. Die Zahlkoeffizienten in Φ sind rational, auf Grund der bekannten Reihenentwicklungen.

Wir setzen nun, wie in § 1, τ_1, τ_2 gleich einer Basis ω_1', ω_2' eines der Ideale $\mathfrak{a}'$ aus $K(\sqrt{-q})$ und definieren a_1, a_2 zu jedem $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ durch

$$a_1\omega_1' + a_2\omega_2' = -r^{2n} A \sqrt{-q}.$$

Dann ist zunächst nach (10) des vorigen Paragraphen

$$P(r^{2(n+k)}A, \mathfrak{a}) = -\sqrt{-q}\, G_1(\omega_1', \omega_2';\ r^{2k}a_1, r^{2k}a_2),$$

$$\prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} P(r^{2(n+k)}A, \mathfrak{a}) = -(\sqrt{-q})^{\frac{q-1}{2}} \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} G_1(\omega_1', \omega_2';\ r^{2k}a_1, r^{2k}a_2).$$

Dieses Produkt hängt aber von n überhaupt nicht ab, weil auf der linken Seite der Exponent $n+k$ nur mod $\frac{q-1}{2}$ in Betracht kommt. Setzt man also

$$\lambda = \lambda(\mathfrak{a}) = \left(\frac{g_2 g_3}{-q\cdot\Delta}(\omega_1', \omega_2')\right)^{\frac{q-1}{4}} \cdot \prod_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} P(r^{2k}A, \mathfrak{a}), \tag{20}$$

so folgt aus (18), (19)

$$\lambda(\mathfrak{a})\cdot P(r^{2n}A, \mathfrak{a}) = \Phi\left(T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}};\ \omega_1', \omega_2'\right),\ J(\omega_1', \omega_2')\right). \tag{21}$$

In Verbindung mit Satz 4 ergibt sich also

Satz 5. *Die normierten Integrale*

$$j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot j_n(\tau, \mathfrak{a})$$

verhalten sich folgendermaßen: Zu jeder Substitution S von $\Gamma(q)$ gibt es $\frac{q-1}{2}$ Polynome $g_k^{(S)}(x)$ mit rationalen Koeffizienten, derart, daß

$$j_n^*(S\tau, \mathfrak{a}) = j_n^*(\tau, \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon^{r^{4n}A})\, \Phi\left(T\left(\frac{r^{2(n+k)}A}{\sqrt{-q}};\ \omega_1', \omega_2'\right), J(\omega_1', \omega_2')\right). \tag{22}$$

Dabei ist Φ die allein durch q bestimmte rationalzahlige rationale Funktion aus (19).

Wir stellen noch fest, daß die Normierungsfaktoren $\lambda(\mathfrak{a})$ nicht etwa Null sind. Nach (20) müßte andernfalls nämlich ein $P(r^{2n}A, \mathfrak{a})$ Null sein, und nach dem Hilfssatz des vorigen Paragraphen wären dann alle P mit demselben $\mathfrak{a}$ gleich Null; also hätten die $\frac{q-1}{2}$ Integrale $j_n(\tau, \mathfrak{a})$ lauter Perioden Null, wären also überall reguläre Modulfunktionen der Stufe q; diese müßten aber bekanntlich identisch verschwinden. Dies trifft jedoch nicht zu. Denn allgemeiner gilt sogar

Satz 6. *Die $h\cdot\frac{q-1}{2}$ Integranden*

$$\vartheta_2(\tau;\ r^{2n}A_i, \mathfrak{a}_i, \sqrt{-q})$$

für $i = 1, 2, \ldots, h$ und $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ sind linear unabhängig.

Gesetzt nämlich, es gebe eine lineare Relation

$$\sum_{\substack{k=1,\dots,h \\ n=1,\dots,\frac{q-1}{2}}} c_{nk}\,\vartheta_2(\tau; r^{2n}A_k\mathfrak{a}_k, \sqrt{-q}) = 0$$

mit konstantem, d. h. von τ unabhängigem c_{nk}. Tragen wir die Potenzreihen für ϑ_2 ein und fassen die Potenzen von $e^{\frac{2\pi i\tau}{q}}$ mit einem festen Primzahlexponenten p zusammen. Zerfällt p in $K(\sqrt{-q})$ in zwei verschiedene Faktoren $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, so tritt ein solches Glied überhaupt nur in den Reihen ϑ_2 der Klassen von $\mathfrak{p}^{-1}$ und $\mathfrak{p}'^{-1}$ auf, etwa für $\mathfrak{a}_k$ und $\mathfrak{a}_l$ (wo auch $k=l$ sein darf). Ist $\mu = \mathfrak{p}\mathfrak{a}_k \equiv r^{2n_1}A_k \pmod{\mathfrak{a}_k\sqrt{-q}}$ und $\nu = \mathfrak{p}'\mathfrak{a}_l \equiv r^{2n_2}A_l \pmod{\mathfrak{a}_l\sqrt{-q}}$, so folgt

$$c_{n_1 k}\,\mu + c_{n_2 l}\,\nu = 0.$$

Verschwinden diese c nicht beide, so müßte $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}'}\frac{\mathfrak{a}_k}{\mathfrak{a}_l}$ einen von der Anzahl von $\mathfrak{p}$ innerhalb seiner Klasse mod $\sqrt{-q}$ unabhängigen Wert besitzen, was offenbar nicht der Fall ist, da es unendlich viele Primideale ersten Grades in jeder Klasse mod $\sqrt{-q}$ gibt. Also sind alle $c_{nk} = 0$.

Die $h\cdot\frac{q-1}{2}$-Zahlen Φ in (22) sind nach der Weberschen Theorie des Teilungskörpers konjugierte algebraische Zahlen in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Dieser Körper enthält auch die in den Koeffizienten $g_k^{(S)}$ steckenden Einheitswurzeln ε. Um nun nachzuweisen, daß auch die $h\cdot\frac{q-1}{2}$ Perioden, welche die $h\cdot\frac{q-1}{2}$ Integrale j^* bei einer Substitution S aus $\Gamma(q)$ vermöge (22) besitzen, konjugiert sind, ist ein genaueres Eingehen auf die algebraische Struktur des Teilungskörpers notwendig, und zwar ist der entscheidende Schluß erst durch die Anwendung der tieferen arithmetischen Sätze von Herrn Hasse über die komplexe Multiplikation der $\wp$-Funktion möglich. Dies wird im folgenden Paragraphen gezeigt.

§ 3.

Die algebraische Natur der normierten Periodensysteme für eine Primzahlstufe $q = 4n+3$.

Über den Teilungskörper gelten zunächst folgende Sätze:

Satz 6. *Der Teilungskörper für den Modul $\sqrt{-q}$ bezüglich des Körpers $K(\sqrt{-q})$ (d. h. der Strahlklassenkörper für den Führer $\sqrt{-q}$ in $K(\sqrt{-q})$) entsteht aus dem absoluten Klassenkörper von $K(\sqrt{-q})$ durch Adjunktion des absolut-Abelschen Körpers $K(\varepsilon+\varepsilon^{-1})$.*

Ist nämlich K_T dieser Teilungskörper, so gelten in ihm folgende Zerlegungssätze [8]): Ein Primideal $\mathfrak{p}$ des Grundkörpers $K(\sqrt{-q})$ zerfällt dann und nur dann in lauter Faktoren ersten Grades in K_T, wenn $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt{-q})$ ein Hauptideal ist und $\mathfrak{p} \equiv 1 \pmod{\sqrt{-q}}$. Sein Relativgrad bezüglich $K(\sqrt{-q})$ ist übrigens $h \cdot \frac{q-1}{2}$. Genau dasselbe Gesetz gilt aber in dem Körper, der aus dem absoluten Klassenkörper K_k durch Adjunktion von ε (oder, was dasselbe ist, von $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$, weil $K(\varepsilon) = K(\varepsilon + \varepsilon^{-1}, \sqrt{-q})$) entsteht, wie sich aus dem bekannten Zerlegungsgesetz in $K(\varepsilon)$ und im Klassenkörper K_k sofort ergibt. Also sind die Körper K_T und $K(\varepsilon, K_k)$ identisch, und auch K_T ist also ein relativ-Abelscher Körper bezüglich $K(\sqrt{-q})$.

Wir bezeichnen weiterhin die Werte der T-Funktion

$$T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \omega_1, \omega_2\right) \quad \text{mit} \quad T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right); \tag{23}$$

wenn ω_1, ω_2 eine Basis des ganzen Ideals $\mathfrak{a}$ aus $K(\sqrt{-q})$ mit positiv-imaginärer Determinante und α eine ganze Zahl aus $\mathfrak{a}$. Wegen der Homogenität von der Dimension 0 ist

$$T\left(\frac{\lambda\alpha}{\sqrt{-q}};\ \lambda\mathfrak{a}\right) = T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right), \tag{24}$$

wenn λ eine Körperzahl. Ebenso setzen wir die absolute Invariante — welche den absoluten Klassenkörper definiert —

$$J(\mathfrak{a}) = J(\omega_1, \omega_2).$$

Sie hat für äquivalente Ideale denselben Wert. Wir ordnen ferner nach Herrn Hasse [12]) jedem — zunächst jedem ganzen — zu q teilerfremden Ideal $\mathfrak{a}$ aus $K(\sqrt{-q})$ eindeutig einen Wert von T zu, durch die Festsetzung

$$T(\mathfrak{a}) = T\left(\frac{\alpha}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right), \text{ wo } \alpha \equiv 1\,(\sqrt{-q}) \text{ und } \alpha \equiv 0\,(\mathfrak{a}).$$

Hiernach ist $T(\lambda\mathfrak{a}) = T(\mathfrak{a})$, wenn λ eine ganze Zahl aus K mit $\lambda \equiv 1(\sqrt{-q})$; es hat also $T(\mathfrak{a})$ für alle ganzen Ideale derselben Strahlklasse mod $\sqrt{-q}$ den gleichen Wert, und deshalb setzen wir auch für Idealquotienten $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, wo $(\mathfrak{b}, q) = 1$

$$T\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right) = T\left(\lambda\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}\right),$$

wenn λ durch $\mathfrak{b}$ teilbar und $\lambda \equiv 1(\sqrt{-q})$.

---

[12]) loc. cit. [3]), S. 130 u. 134.

Für eine nicht durch q teilbare ganze rationale Zahl n ist also

$$T(n\mathfrak{a}) = T\left(\frac{nx}{\sqrt{-q}};\ n\mathfrak{a}\right) = T\left(\frac{x}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right),$$

wo

$$nx \equiv 1 \pmod{q}, \qquad x \equiv 0 (A).$$

Insbesondere wenn r die frühere Primitivzahl mod q bedeutet,

$$T(r^{-2n}\mathfrak{a}) = T\left(\frac{r^{2n}tA}{\sqrt{-q}};\ \mathfrak{a}\right) \qquad \left(n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}\right)$$

wo t eine ganze rationale Zahl mit $tA \equiv 1 \pmod{q}$.

Die Zahlen $T(r^{2n}\mathfrak{a})$, wenn $n = 1, 2, \ldots, \frac{q-1}{2}$ und $\mathfrak{a}$ die h Ideale aus den verschiedenen Idealklassen durchläuft, sind ein System konjugierter Zahlen des Teilungskörpers in bezug auf $K(\sqrt{-q})$.

Nach Herrn Hasse[12]) gelten nun die Kongruenzen:

Satz 7. *Für jedes Primideal $\mathfrak{p}$ ersten Grades aus $K(\sqrt{-q})$ mit der Norm $\mathfrak{p}$ ist*

$$J^p(\mathfrak{a}) \equiv J(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{p}}$$
$$T^p(\mathfrak{a}) \equiv T(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \pmod{\mathfrak{p}}$$

Es lassen sich nun nach Satz 6 die $T(\mathfrak{a})$ rational durch ε^t und $J(\mathfrak{a})$ ausdrücken:

$$T(\mathfrak{a}) = \varphi(\varepsilon^t, J(\mathfrak{a})), \text{ wo } tA \equiv 1 \pmod{q}, \tag{25}$$

wo φ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Ersetzen wir hier $\varepsilon, J(\mathfrak{a})$ durch die algebraischen Konjugierten, so muß also sich als Wert von φ wieder eine der Zahlen $T(\mathfrak{r})$ ergeben. Welche dies ist, läßt sich aber erst durch den zitierten Satz von Hasse entscheiden:

Satz 8. *Gilt für ein bestimmtes $\mathfrak{a}$ die Gleichung* (25), *so ist die Gleichung mit demselben φ für alle $\mathfrak{a}$ richtig.*

Zum Beweise sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal wie oben in Satz 7. Dann folgt aus der für ein bestimmtes $\mathfrak{a}$ gültigen Gleichung (25) die Kongruenz

$$T^p(\mathfrak{a}) \equiv \varphi^p(\varepsilon^A, J(\mathfrak{a})) \equiv \varphi(\varepsilon^{pA}, J^p(\mathfrak{a})) \pmod{p}$$

und nach Anwendung von Satz 7

$$T(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}) \equiv \varphi(\varepsilon^{pt}, J(\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a})) \pmod{\mathfrak{p}}.$$

Diese Kongruenz zwischen den beiden, nach dem Vorangehenden nur von der Strahlklasse von $\mathfrak{p}$ abhängigen Zahlen gilt für alle unendlich vielen Primideale $\mathfrak{p}$ dieser Klasse. Also sind die beiden Zahlen einander gleich; das bedeutet aber die Richtigkeit von (25) auch für $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}$ statt $\mathfrak{a}$, d. h. die Gültigkeit von (25) für jedes $\mathfrak{a}$.

Mit Hilfe dieses Satzes 8 lassen sich nun die Periodensysteme der j^* nach (22) allein durch ε und Zahlen des Klassenkörpers ausdrücken. Zunächst sind für ganze rationale n, x

$$T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}};\, \mathfrak{a}'\right) = T\left(\frac{x\cdot r^{2n}A}{\sqrt{-q}};\, x\cdot\mathfrak{a}'\right) = T(x\,\mathfrak{a}'),$$

wenn x so gewählt wird, daß

$$x\cdot r^{2n}A \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, \sqrt{-q}).$$

Nach (25) ist aber

$$T(x\,\mathfrak{a}') = \varphi(\varepsilon^t, J(x\,\mathfrak{a}')), \text{ wo } tN(x\,\mathfrak{a}') \equiv x^2 At \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, q).$$

Also endlich

$$T\left(\frac{r^{2n}A}{\sqrt{-q}};\, \mathfrak{a}'\right) = \varphi(\varepsilon^{r^{4n}A}, J(\mathfrak{a}')), \tag{26}$$

wo φ das von n, A unabhängige Polynom aus (25) ist. Trägt man dies in das Polynom Φ in (22) ein, so ergibt sich aus Satz 5 die schärfere Aussage:

Satz 9. *Zu jeder Substitution S aus $\Gamma(q)$ gibt es $\frac{q-1}{2}$ rationalzahlige Polynome $g_k^{(S)}(x)$, so daß*

$$j_n^*(S\tau;\, \mathfrak{a}) = j_n^*(\tau;\, \mathfrak{a}) + \sum_{k=1}^{\frac{q-1}{2}} g_k^{(S)}(\varepsilon^{r^{2n}A})\,\psi(\varepsilon^{r^{4(n+k)}A}, J(\mathfrak{a}')), \tag{27}$$

wo ψ ein allein durch den Körper $K\sqrt{-q})$ bestimmtes rationalzahliges Polynom ist, das nicht von S abhängt.

Wählen wir nun die repräsentierenden Ideale $\mathfrak{a}$ der h Idealklassen von $K\sqrt{-q})$ so aus, daß immer

$$A = N(\mathfrak{a}) \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, q), \tag{28}$$

was immer möglich ist, so erkennt man aus (27), daß das einer Substitution S entsprechende Periodensystem der $h\cdot\frac{q-1}{2}$ Integrale j^* stets ein System konjugierter algebraischer Zahlen aus $K(\varepsilon+\varepsilon^{-1}, K_k)$ ist, und zwar sind die h Perioden, welche die h Integrale mit derselben Nummer n haben, konjugiert in bezug auf $K(\varepsilon+\varepsilon^{-1})$, dagegen die $\frac{q-1}{2}$ Perioden der $\frac{q-1}{2}$ Integrale mit demselben $\mathfrak{a}$ sind konjugiert in bezug auf K_k.

Bildet man daher die symmetrische Verbindung

$$H(\tau, \mathfrak{a}) = \sum_{n=1}^{\frac{q-1}{2}} j_n^*(\tau, \mathfrak{a}), \tag{29}$$

so sind die Perioden dieses $H(\tau, \mathfrak{a})$ symmetrisch in den $\varepsilon^{r^{2n}}$, gehören also dem Körper $K(\sqrt{-q}, J(\mathfrak{a}))$, d. h. dem absoluten Klassenkörper an; genauer gilt

Satz 10. *Das Periodensystem der h Integrale $H(\tau, \mathfrak{a})$ besteht für jede Substitution S von $\Gamma(q)$ aus konjugierten Zahlen des Klassenkörpers K_k in bezug auf $K(\sqrt{-q})$. Insbesondere sind die Perioden von*

$$j(\tau) = \sum_{i=1}^{h} H(\tau, \mathfrak{a}_i) = \sum_{n, \mathfrak{a}} j_n^*(\tau, \mathfrak{a})$$

symmetrisch in den $J(\mathfrak{a})$, also Zahlen des quadratischen Körpers $K(\sqrt{-q})$.

Genau das Entsprechende gilt aber dann auch für die Perioden der konjugierten Integrale $H(L\tau; \mathfrak{a})$ und $j(L\tau)$, wo L eine beliebige Modulsubstitution ist.

Es sei noch hervorgehoben, daß auf Grund der expliziten Formeln für die Kleinsche Gruppe das einzelne $H(\tau, \mathfrak{a})$ bereits zur Gruppe $\Gamma_0^0(q)$ gehört — deren Koeffizienten $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Bedingung $b \equiv c \equiv 0 \pmod{q}$ genügen — und daß durch diese Eigenschaft $H(\tau, \mathfrak{a})$ innerhalb der linearen Schar der $j_n(\tau; \mathfrak{a})$ mit demselben $\mathfrak{a}$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

Jedes einzelne $H(\tau, \mathfrak{a})$ erzeugt durch seine konjugierten in bezug auf die volle Modulgruppe ein System von $\frac{q(q^2-1)}{2}$ Funktionen, unter deren Differentialen sich genau je $\frac{q-1}{2}$ linear unabhängige befinden, weil die Kleinsche Gruppe in $\frac{q-1}{2}$ Variablen irreduzibel ist. Da nach dem obigen die Perioden aller konjugierten H demselben Körper über $K(\sqrt{-q})$ angehören, der zu $K(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$ fremd ist, liegt die Vermutung nahe, daß die Kleinsche Gruppe bei geeigneter Wahl der Variablen nur Koeffizienten aus $K(\sqrt{-q})$ enthält, im Gegensatz zu ihrer traditionellen Gestalt, welche die Adjunktion von ε erfordert. In der Tat läßt sich eine Transformation der Gruppe in die gewünschte Form angeben:

Man schreibe nämlich die Erzeugenden der Gruppe — wegen besserer Übersichtlichkeit der folgenden Rechnungen — in folgender Form, wobei die Indizes nur mod q in Betracht kommen und die Variablen x_n den Festsetzungen genügen:

$$x_n = -x_{-n}, \text{ also } x_0 = 0. \tag{30}$$

$$1.\ x_n = \varepsilon^{n^2} x_n; \quad 2.\ x_n' = \frac{1}{\sqrt{-q}} \sum_k \varepsilon^{-2nk} x_k. \tag{31}$$

Man führe nun neue Variablen y_a ein durch

$$y_a = \sum_n (\varepsilon^{an^2} - \varepsilon^{-an^2})\chi(n)x_n, \tag{32}$$

wobei $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ das quadratische Restsymbol mod q bedeutet; auch die y_n genügen den Bedingungen (30); alle Summationen sind immer über ein volles Restsystem mod q zu erstrecken. Die Umkehrung von (32) erhält man so:

$$\sum_a y_a \varepsilon^{-ak^2} = \sum_{a,n} (\varepsilon^{a(n^2-k^2)} - \varepsilon^{-a(n^2+k^2)})\chi(n)x_n$$
$$= q(\chi(k)x_k + \chi(-k)x_{-k}) = 2q\cdot\chi(k)x_k.$$
$$x_k = \frac{\chi(k)}{2q}\sum_a y_a \varepsilon^{-ak^2}.$$

Daher lauten die den 1., 2. entsprechenden Substitutionen der y folgendermaßen:

$$y'_a = \sum_n (\varepsilon^{an^2} - \varepsilon^{-an^2})\chi(n)x'_n = \frac{1}{2q}\sum_b y_b \sum_n \chi^2(n)(\varepsilon^{(a-b+1)n^2} - \varepsilon^{(1-a-b)n^2})$$

Nun ist aber bekanntlich nach der Theorie der Gaußschen Summen

$$\sum_n \varepsilon^{k\cdot n^2} = \chi(k)\sqrt{-q}, \text{ wenn } k \not\equiv 0.$$

Die erste Substitution lautet also in den y:

$$1.\ y'_a = \frac{1}{2\sqrt{-q}}\sum_b y_b(\chi(a+b+1) - \chi(a+b-1)) + \frac{y_{a+1}+y_{a-1}}{2}. \tag{33}$$

Analog kommt für die Substitution 2:

$$2.\ y'_a = \frac{1}{q}\sum_{b,k} y_b \chi(k)\cdot\chi(a-2k-bk^2). \tag{34}$$

Damit ist in der Tat gezeigt, daß die beiden erzeugenden Substitutionen (31) vermöge der Variablentransformation (32) in die Substitutionen (33), (34) übergehen, deren Koeffizienten bereits zu $K(\sqrt{-q})$ gehören. Daß eine solche Transformation existieren muß, folgt, worauf mich Herr J. Schur aufmerksam machte, bereits aus allgemeinen Sätzen von Herrn Schur[13]), aus denen jedoch nichts über die Aufstellung dieser Transformation zu entnehmen ist. Auf allgemeinere Folgerungen für die Theorie der Integrale der q-ten Stufe werde ich an anderer Stelle eingehen.

[13]) J. Schur, Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen. Berliner Akad. Ber. 1906, S. 177, wo der Satz IXa auf die aus den Potenzen der Substitution 2 bestehenden Untergruppe angewandt werden muß.

(Eingegangen am 4. Mai 1928.)