Werk

Titel: Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren, die sich aus gewissen Lösungen des n...

Autor: Kähler, E.,

Ort: Berlin

Jahr: 1928

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0028|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten[1]).

Von

Erich Kähler in Leipzig.

§ 1.

Es gibt eine Anzahl spezieller Lösungen des ebenen n-Körperproblems, bei denen die n Massenpunkte Kreisbahnen um den gemeinsamen Schwerpunkt beschreiben. Die ganze Konfiguration dreht sich dabei wie ein starres Gebilde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Es scheint von vornherein sehr plausibel, daß diese Lösungen im allgemeinen zu Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten dadurch Anlaß geben, daß man die Massenpunkte durch gleich schwere Flüssigkeitskörper ersetzt. Dabei ist jedoch vorausgesetzt, daß die Dimensionen der letzteren klein sind im Verhältnis zu denen der ganzen Konfiguration. In der vorliegenden Abhandlung werden die genauen Existenzbedingungen für solche Flüssigkeitsfiguren aufgestellt. Nach den grundlegenden Untersuchungen von Herrn Lichtenstein[2]) über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren führt diese Frage auf ein System von Integro-Differentialgleichungen, deren Auflösung wiederum von gewissen linearen Integralgleichungen abhängt. Bei den genannten Figuren haben diese stets Nullösungen. Die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten, die bei direkter Behandlung des Problems weitläufige Rechnungen nötig machen würden, hat Herr Lichtenstein bei dem

---

[1]) Als Inaugural-Dissertation von der Philosophischen Fakultät der Universität Leipzig zugelassen.

[2]) L. Lichtenstein, Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. I. Abh. Math. Zeitschr. **1** (1918), S. 229—284. II. Abh. Math. Zeitschrift 7 (1920), S. 126—231.

Doppelsternproblem — der Spezialfall $n = 2$ — durch Einführung von Parametern umgehen können. Auch bei den allgemeineren hier zu behandelnden Figuren kann die Diskussion der sog. Verzweigungsgleichung, welche die eigentlichen Schwierigkeiten bietet, durch einen einfachen Kunstgriff vermieden werden. Die Durchführung der Rechnung führt auf ein gewisses System von $2n$ Gleichungen mit $2n - 1$ Unbekannten, dessen Lösbarkeit eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der betrachteten Gleichgewichtsfiguren ist. In allen Fällen, wo die erzeugende Konfiguration eine durch den Schwerpunkt gehende Symmetrielinie besitzt, lassen sich die $2n$ Gleichungen auf n mit n Unbekannten reduzieren: Vollständig durchgeführt ist die Diskussion an zwei Beispielen, wo die n Körper entweder auf einer Geraden oder auf einem Kreise angeordnet sind. Wenn die Ausgangsfigur aber keine Symmetrielinie besitzt, wie z. B. der eine der Lagrangeschen Spezialfälle des Dreikörperproblems, kann die Zahl der Gleichungen nicht vermindert werden, und erst eine genauere Untersuchung der maßgebenden Gleichungen wird entscheiden, ob diese miteinander verträglich sind oder nicht[3]).

§ 2.

In einem Koordinatensystem mit dem Schwerpunkt als Ursprung seien $x_i, y_i, 0, (i = 1, 2 \ldots n)$ die Koordinaten der n Massenpunkte. Damit die aus diesen Körpern bestehende Konfiguration im relativen Gleichgewicht ist, müssen die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\omega^2 x_i + \sum_k{}' m_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) = 0, \\ &\omega^2 y_i + \sum_k{}' m_k \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) = 0 \end{aligned} \qquad \varrho_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2$$

($\sum_k{}'$: Summation über alle $k \neq i$)

erfüllt sein, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit und m_k die Massen der Körper bezeichnen.

Werden an Stelle der Punkte homogene Flüssigkeitskörper T_i mit den Massen m_i gesetzt, so lauten die Gleichgewichtsbedingungen bekanntlich:

$$(2)\qquad \frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) + \sum_k{}' V_{ik}(X, Y, Z) = \text{konst auf } S_i.$$

Hierbei stellt $V_{ik}(X, Y, Z)$ den Wert des Potentials von T_k in dem auf der Oberfläche S_i von T_i liegenden Punkte (X, Y, Z) dar. Wenn die n Komponenten der Flüssigkeit, verglichen mit ihren Dimensionen, sehr

[3]) Herr E. Hölder hat inzwischen zeigen können, daß die fraglichen Gleichungen wohl miteinander verträglich sind.

weit voneinander entfernt sind, so werden sie sich nur wenig von den Kugeln unterscheiden, die mit den aus

$$m_i = \frac{4\pi}{3} a_i^3 f_i \quad (f_i\text{: Dichte von } T_i)$$

bestimmten Radien a_i um $(x_i, y_i, 0)$ beschrieben sind. Anstatt die Näherungskugeln um $(x_i, y_i, 0)$ zu legen, ist es aus später ersichtlichen Gründen zweckmäßiger, deren Zentren in die dicht daneben liegenden Punkte $P_i(x_i + \alpha_i, y_i + \beta_i, 0)$ zu legen. Die nähere Bestimmung der α_i, β_i wird später noch gegeben werden. Es wird sich zeigen, daß die neuen Mittelpunkte in erster Näherung mit den Schwerpunkten der T_i übereinstimmen.

In Polarkoordinaten r_i, φ_i, ϑ_i mit dem Pole P_i laute die Gleichung von S_i folgendermaßen:

$$r_i = a_i + \zeta_i(\varphi_i, \vartheta_i).$$

Um die Gleichungen (2) zur Bestimmung der Funktionen ζ_i auswerten zu können, sind zunächst die Potentiale V_{ik} durch ζ_i, ζ_k darzustellen.

§ 3.

Das von T_k herrührende Potential V_{ik} ist gleich dem Potential V'_{ik} der zu T_k gehörenden Kugel Σ_k, vermehrt um dasjenige der darüberliegenden sphäroidalen Schicht, welches durch

$$(3) \qquad V''_{ik} = f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta'_k \, d\sigma'}{r'} + (\zeta)_2, \qquad r'^2 = (X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2$$

gegeben ist[4]). Das Integral ist über die Kugeloberfläche zu erstrecken. Bei $k \neq i$ ist

$$V'_{ik} = \frac{m_k}{r_{ik}} \quad \text{mit} \quad r_{ik}^2 = (X - x_k - \alpha_k)^2 + (Y - y_k - \beta_k)^2 + Z^2,$$

und für $k = i$ hat man

$$V'_{ik} = \frac{m_i}{a_i} - \frac{m_i}{a_i^2} \zeta_i + (\zeta)_2.$$

---

[4]) Hier wie im folgenden bezeichnet $(\zeta)_\mu$ einen von ζ abhängenden Ausdruck — gewöhnlich einen Integral- oder Integrodifferentialausdruck — der mit ζ unendlich klein und zwar von der μ-ten Ordnung wird. Was speziell den in der Formel (3) auftretenden Ausdruck $(\zeta)_2$ betrifft, so findet man dessen genauere Darstellung in den Abhandlungen des Herrn Lichtenstein, Math. Zeitschr. **1**, S. 229—284, **7**, S. 126—231 (1920), **10**, S. 130—159 (1921).

Hiernach gehen die Gleichungen (2) über in

$$(4)\quad \frac{\omega^2}{2}(X^2+Y^2)-\frac{m_i}{a_i^2}\zeta_i+f_i\int_{\Sigma_i}\frac{\zeta_i'\,d\sigma'}{r'}+\sum_1^n{}'_k\left(\frac{m_k}{r_{ik}}+f_k\int_{\Sigma_k}\frac{\zeta_k'\,d\sigma'}{r'}\right)+(\zeta)_2=\text{konst.}$$

Es seien u_i, v_i, w_i die Koordinaten eines Punktes auf der Kugel von T_i bezogen auf den Mittelpunkt P_i. Dann sind die relativen Koordinaten des darüberliegenden (d. h. dieselben φ_i-, ϑ_i-Werte besitzenden) Punktes von S_i:

$$u_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),\qquad v_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),\qquad w_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right),$$

während für denselben Punkt im alten Koordinatensystem

$$(5)\quad \begin{cases} X=x_i+\alpha_i+u_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right), \\ Y=y_i+\beta_i+v_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right), \\ Z=\qquad\quad w_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right) \end{cases}$$

ist. Setzt man daher

$$(6)\quad (\alpha_i-\alpha_k)+u_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right)=A_{ik},\qquad (\beta_i-\beta_k)+v_i\left(1+\frac{\zeta_i}{a_i}\right)=B_{ik},$$

so wird

$$X-x_k-\alpha_k=(x_i-x_k)+A_{ik},\qquad Y-y_k-\beta_k=(y_i-y_k)+B_{ik}.$$

Die Entwicklung von $\frac{m_k}{r_{ik}}$ nach Potenzen von A_{ik}, B_{ik}, Z ergibt dann:

$$(7)\quad \begin{aligned}\frac{m_k}{r_{ik}}=\frac{m_k}{\varrho_{ik}}&+A_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+B_{ik}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+\frac{1}{2}A_{ik}^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)\\&+A_{ik}B_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)+\frac{1}{2}B_{ik}^2\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)-\frac{1}{2}Z^2\frac{m_k}{\varrho_{ik}^3}+\text{usw.},\end{aligned}$$

wobei die Differentiation nach x_i, y_i wie in (1) nur formal zu verstehen ist. Zur Abkürzung werde gesetzt:

$$(8)\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{p_{ik}}{\varrho^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{n_{ik}}{\varrho^3},\quad \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right)=\frac{q_{ik}}{\varrho^3},\quad \frac{1}{\varrho_{ik}^3}=\frac{o_{ik}}{\varrho^3},$$

indem mit ϱ eine proportional zu den Dimensionen der Konfiguration wachsende Größe bezeichnet wird. So kann im Falle der Lagrangeschen Dreieckslösung etwa die Seitenlänge des gleichseitigen Dreiecks für ϱ genommen werden. Die Größe $\frac{1}{\varrho}$ spielt in den folgenden Rechnungen die Rolle eines kleinen Parameters. Führt man nun in (7) die Ausdrücke (6) ein und ordnet in passender Weise, so entsteht:

$$\frac{m_k}{r_{ik}} = \frac{m_k}{\varrho_{ik}} - \alpha_k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) - \beta_k \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) + \frac{1}{\varrho^3}(\alpha, \beta)_2$$
$$+ \left[\alpha_i + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right) + \left[\beta_i + v_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right]\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{m_k}{\varrho_{ik}}\right)$$
$$(9) \qquad + \frac{u_i}{\varrho^3}\{(\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik}\}$$
$$+ \frac{v_i}{\varrho^3}\{(\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik}\}$$
$$+ \frac{m_k}{\varrho^3}\left(\frac{1}{2}u_i^2 p_{ik} + u_i v_i n_{ik} + \frac{1}{2}v_i^2 q_{ik} - \frac{1}{2}w_i^2 o_{ik}\right) + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right);$$

$(\alpha, \beta)_2$ ist ein in den α, β quadratischer Ausdruck. Wegen (5) ergibt sich für das Potential der Zentrifugalkraft der Wert

$$\frac{\omega^2}{2}(X^2 + Y^2) = \frac{\omega^2}{2}(x_i^2 + y_i^2) + \frac{\omega^2}{2}(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$
$$(10) \qquad + \left[\alpha_i + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right]\omega^2 x_i + \left[\beta_i + v_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right)\right]\omega^2 y_i$$
$$+ \omega^2 \alpha_i u_i + \omega^2 \beta_i v_i + \frac{\omega^2}{2}(u_i^2 + v_i^2) + \omega^2 (\zeta)_1 .$$

Da ω^2 stets von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho^3}$ ist, möge

$$\omega^2 = \frac{M}{\varrho^3}$$

gesetzt werden.

Endlich ist noch das Integral $\int \frac{\zeta_k' d\sigma'}{r'}$ $(k \neq i)$ nach Potenzen von $\frac{1}{\varrho}$ zu entwickeln. In $r' = \sqrt{(X - x')^2 + (Y - y')^2 + (Z - z')^2}$ ist

$$x' = x_k + \alpha_k + u_k', \qquad y' = y_k + \beta_k + v_k', \qquad z' = w_k'$$

und daher

$$X - x' = x_i - x_k + \alpha_i - \alpha_k + u_i\left(1 + \frac{\zeta_i}{a_i}\right) - u_k' = (x_i - x_k) + \bar{A}_{ik}$$

usw.

Es wird also

$$(11) \qquad \frac{\zeta_k'}{r'} = \frac{\zeta_k'}{\varrho_{ik}} + \zeta_k' \bar{A}_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) + \zeta_k' \bar{B}_{ik}\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{\varrho_{ik}}\right) + \zeta_k' O\left(\frac{1}{\varrho^3}\right).$$

Wenn die Funktionen ζ den Bedingungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i d\sigma = \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i d\sigma = \int_{\Sigma_i} \zeta_i w_i d\sigma = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

unterworfen werden und man voraussetzt, daß die Volumina von T_i und

Σ_i gleich sind, womit $\int \zeta_i d\sigma = (\zeta_i)_2$ wird, so folgt aus (11)

$$\int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k' d\sigma'}{r'} = \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2. \tag{12}$$

Alle diese Ausdrücke (9), (10) und (12) sind in (4) einzuführen, um nach geeigneter Umordnung die n Integro-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{3} a_i f_i \zeta_i - f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i' d\sigma'}{r'} = s_i + L_i^{(1)} + L_i^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),\\
&L_i^{(1)} = \frac{u_i}{\varrho^3}\Big(M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik}\Big)\\
&\qquad + \frac{v_i}{\varrho^3}\Big(M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik}\Big),\\
&L_i^{(2)} = \frac{1}{2\varrho^3}\Big(\Big(u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\Big(M + \sum_k{}' m_k p_{ik}\Big) + 2 u_i v_i \Big(\sum_k{}' m_k n_{ik}\Big)\\
&\qquad + \Big(v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\Big(M + \sum_k{}' m_k q_{ik}\Big) - \Big(w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\Big)\sum_k{}' m_k o_{ik}\Big)\\
&\qquad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned} \tag{13}$$

zu erhalten, aus denen die ζ bestimmt werden können. Damit in den ersten Gliedern der rechten Seite nur Kugelfunktionen auftreten, haben wir u_i^2, v_i^2, w_i^2 durch $u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$, bzw. $v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$, $w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}$ ersetzt. Die deshalb wieder zu subtrahierenden (konstanten) Teile sowie die übrigen konstanten Glieder sind alle in der Größe s_i vereinigt zu denken. Bei der Nachrechnung dieser Formel muß man beachten, daß die eckig eingeklammerten Teile von (9) und (10) sich wegen der ursprünglichen Gleichgewichtsbedingung (1) wegheben.

Da die Auflösung der obigen Gleichungen aufs engste mit der Lösung der linearen Integralgleichung

$$G_i(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a_i \zeta - \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta' d\sigma'}{r'} = L_i \qquad (L_i \text{ gegeben})$$

zusammenhängt, so mögen erst einige Bemerkungen über diese hier eingeschaltet werden.

§ 4.

Für die Kugelfunktionen Y_m (m-ter Ordnung) gilt bekanntlich die Formel

$$\frac{4\pi}{3} a Y_m = \frac{2m+1}{3} \int_{\Sigma} \frac{Y_m' d\sigma'}{r'}. \tag{I}$$

Daraus folgt, daß für $m \neq 1$ eine Lösung von

$$G(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a\zeta - \int_{\Sigma} \frac{\zeta' d\sigma'}{r'} = Y_m$$

durch

$$\zeta = c_m Y_m, \qquad c_m = \frac{3}{4\pi a} \frac{2m+1}{2m-2}$$

gegeben ist. Die bei $m = 1$ sich aus (I) ergebenden Beziehungen

$$G(u) = 0, \qquad G(v) = 0, \qquad G(w) = 0$$

(u, v, w: rechtwinklige Koordinaten eines Kugelpunktes)

zeigen, daß $G(\zeta)$ Nullösungen hat. Man gelangt zu einer Integralgleichung ohne Nullösungen, wenn man nach Erhard Schmidt[5]) den „zerspaltenen Kern“

$$N = \frac{1}{r'} - \frac{uu' + vv' + ww'}{a^3}$$

einführt und

$$\int_{\Sigma} \zeta' u' d\sigma' = A, \qquad \int_{\Sigma} \zeta' v' d\sigma' = B, \qquad \int_{\Sigma} \zeta' w' d\sigma' = C.$$

setzt. Dann geht die Integralgleichung $G(\zeta) = L$ in die Gleichung

$$H(\zeta) \equiv \frac{4\pi}{3} a\zeta - \int_{\Sigma} N\zeta' d\sigma' = L + \frac{A}{a^3} u + \frac{B}{a^3} v + \frac{C}{a^3} w,$$

deren linke Seite keine Nullösungen mehr aufweist, über.

Hängt L, also auch ζ, von gewissen Parametern ab, die so bestimmt werden können, daß A, B, C verschwinden, so ist einfach die Gleichung

$$H(\zeta) = L$$

zu lösen. Wie oben ergibt sich aus $H(\zeta) = Y_m$, wenn $m \neq 1$,

$$\zeta = c_m Y_m$$

jetzt aber als einzige Lösung dieser Gleichung. Wegen

$$H(u) = \frac{4\pi}{3} a u \qquad \text{usw.}$$

erhält man aus

$$H(\zeta) = \mu u + \nu v + \lambda w$$

$$\zeta = \frac{3}{4a\pi} (\mu u + \nu v + \lambda w). \tag{14}$$

---

[5]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Math. Annalen **65**, (1908), S. 370—399.

Für spätere Anwendungen sei noch angemerkt:

$$\begin{aligned} &\text{Aus} \quad H(\zeta) = 1 && \text{folgt} \quad \zeta = -\frac{3}{8a\pi}, \\ (14\,\text{a}) \qquad &\text{„} \quad H(\zeta) = uv && \text{„} \quad \zeta = \frac{15}{8a\pi} uv, \\ &\text{„} \quad H(\zeta) = u^2 - \frac{a^2}{3} && \text{„} \quad \zeta = \frac{15}{8a\pi}\left(u^2 - \frac{a^2}{3}\right). \end{aligned}$$

§ 5.

Die Gleichungen (13) sind von der Form

$$G_i(\zeta_i) = L_i(\alpha, \beta, \zeta), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei L außer von den α, β noch von den ζ abhängt, jedoch nur in höherer Ordnung. Um die Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung dieser Integro-Differentialgleichungen heranziehen zu können, wenden wir auf die linken Seiten die im vorigen Abschnitte dargestellte Umformung an, d. h. wir unterwerfen die Lösungen ζ den $3n$ Bedingungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i d\sigma = 0, \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i w_i d\sigma = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

und ersetzen $G_i(\zeta_i)$ durch $H_i(\zeta_i)$. Die so entstehenden Gleichungen

$$H_i(\zeta_i) = L_i(\alpha, \beta, \zeta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

können dann durch sukzessive Approximationen folgendermaßen gelöst werden. Wir bestimmen $\zeta_i^{(1)}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(1)}) = L_i(\alpha, \beta, 0),$$

sodann $\zeta_i^{(2)}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(2)}) = L_i(\alpha, \beta, \zeta^{(1)}),$$

$\zeta_i^{(3}$ aus

$$H_i(\zeta_i^{(3)}) = L_i(\alpha, \beta, \zeta^{(2)}),$$

usw.

Hierdurch ergibt sich die Lösung $\zeta_i = \lim_{\nu \to \infty} \zeta_i^{(\nu)}$ als Potenzreihe in den Parametern α, β, s und $\frac{1}{\varrho}$. Bezüglich des Beweises, der genau so zu führen ist wie beim Doppelsternproblem, sei auf die Abhandlungen von Herrn Lichtenstein verwiesen[6]). Mit Hilfe der Formeln (14), (14 a) berechnet sich leicht für die erste Näherung

$$f_i \zeta_i^{(1)} = -\frac{3}{8a_i\pi} s_i + \frac{3}{4a_i\pi} L_i^{(1)} + \frac{15}{8a_i\pi} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right).$$

[6]) loc. cit.

Bei der zweiten Näherung kommen zu den ersten Gliedern noch einige mit $\frac{s}{\varrho^3}$ oder s^2 behaftete hinzu, alle weiteren sind mit $\frac{1}{\varrho^4}$ multipliziert. Von der dritten an werden überhaupt nur noch die mit $\frac{1}{\varrho^4}$ multiplizierten Glieder modifiziert. An die auf solche Weise erhaltene Lösung haben wir nun einige Forderungen zu stellen. Zunächst folgt aus der Annahme, daß die Volumina von Σ_i und T_i gleich sind

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i d\sigma = (\zeta)_2 ;$$

denn die Volumendifferenz von T_i und Σ_i ist bis auf Größen zweiter Ordnung in ζ_i gleich $\int_{\Sigma_i} \zeta_i d\sigma$. Wegen $\int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} d\sigma = 0$ und $\int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} d\sigma = 0$ erhält man zur Bestimmung der s_i Gleichungen von der Form

$$A_i s_i + B_i s_i^2 = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right),$$

wonach

$$(15) \qquad s_i = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right) \quad \text{und} \quad f_i \zeta_i = \frac{3}{4 a_i \pi} L_i^{(1)} + \frac{15}{8 a_i \pi} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

gesetzt werden kann. Außerdem war angenommen:

$$\int_{\Sigma_i} u_i \zeta_i d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} v_i \zeta_i d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} w_i \zeta_i d\sigma = 0 .$$

Die dritte dieser Bedingungen ist von selbst erfüllt, da ζ_i in allen Fällen symmetrisch in bezug auf die Ebene $Z = 0$ ist; denn weil die aus Kugeln bestehende Ausgangsfigur diese Symmetrieeigenschaft zeigt, gilt dies von den einzelnen Näherungen und damit auch von der endgültigen Figur. Die übrigen $2n$ Gleichungen

$$(16) \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i u_i d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i d\sigma = 0$$

sollen dadurch befriedigt werden, daß man den $2n$ Parametern α, β geeignete Werte erteilt. Aus diesem Grunde sind überhaupt erst die Verschiebungen der Kugelmittelpunkte eingeführt worden.

Wegen (15) und

$$\int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} u_i d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_i} L_i^{(2)} v_i d\sigma = 0$$

ergeben die obigen Bedingungsgleichungen

$$\int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} u_i d\sigma = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \qquad \int_{\Sigma_i} L_i^{(1)} v_i d\sigma = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

oder nach (13)

$$
\begin{aligned}
&M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),\\
&M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik} = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),
\end{aligned}
\tag{17}
$$

wobei mit dem Faktor $\frac{1}{\varrho^3}$ gekürzt worden ist. Die Existenz der postulierten Gleichgewichtsfiguren hängt ganz von der Lösbarkeit dieser Gleichungen ab. Kann man nämlich die α, β so bestimmen, daß die Bedingungen (16) erfüllt sind, so ist nach dem Obigen die Existenz der entsprechenden Figur gesichert. Aber es folgt auch umgekehrt aus dem Bestehen der Gleichgewichtsfigur, daß es stets solche Punkte $P_i(x_i + \alpha_i,\ y_i + \beta_i,\ 0)$ gibt, in bezug auf welche die Gleichungen (16) gelten. Die Auflösung dieser Bedingungsgleichungen wird durch einen besonderen Umstand im allgemeinen sehr erschwert. Wenn es nämlich überhaupt Lösungen $(\alpha,\ \beta)$ gibt, so sind diese nicht eindeutig bestimmt, sondern hängen noch von einem Parameter ab; denn entsprechen einer bestimmten Lösung $(\alpha,\ \beta)$ die Punkte $R_i(x_i + \alpha_i,\ y_i + \beta_i,\ 0)$, so können an deren Stelle auch die aus ihnen durch eine beliebige Drehung des Koordinatensystems hervorgehenden genommen werden. Man kann daher stets eines der α, β fixieren, also etwa $\alpha_1 = 0$ setzen; dann aber sind die übrigen $2n - 1$ Größen α_i, β_i aus den $2n$ Gleichungen (16) bzw. (17) zu berechnen. Bevor wir auf die hierdurch entstehenden Schwierigkeiten näher eingehen, mag erst noch eine andere Methode der Bestimmung der $(\alpha,\ \beta)$ hier angegeben werden, aus welcher die mechanische Bedeutung der Gleichungen (16) sichtbar wird und zugleich — ihre Lösbarkeit vorausgesetzt — über die Größenordnung von α_i, β_i Aufschluß gewonnen wird.

§ 6.

Ein bekannter Satz der Mechanik besagt: Ist ein freies System unter der Einwirkung innerer und äußerer Kräfte im Gleichgewicht, so heben sich die in den Schwerpunkt des Systems überpflanzten äußeren Kräfte gegenseitig auf.

Wir wenden den Satz auf T_i an, indem wir die Zentrifugalkraft und die Anziehungskräfte der $n - 1$ übrigen Körper als äußere Kräfte betrachten.

Ist $Q_i(x_i + \bar{\alpha}_i,\ y_i + \bar{\beta}_i,\ 0)$ der Schwerpunkt von T_i, so ist offenbar

$$m_i \bar{\alpha}_i = m_i \alpha_i + f_i \int_{\Sigma_i} u_i \zeta_i \, d\sigma + (\zeta_1)_2$$

oder wegen (15) und (16)

$$\bar{\alpha}_i = \alpha_i + O\left(\frac{1}{\varrho^6}\right) \tag{18}$$

und entsprechend

$$\bar{\beta}_i = \beta_i + O\left(\frac{1}{\varrho^6}\right).$$

Die Resultante der Zentrifugalkraft hat die Komponenten

$$m_i\omega^2(x_i+\bar{\alpha}_i) = \frac{Mm_i}{\varrho^3}(x_i+\alpha_i) + O\left(\frac{1}{\varrho^9}\right), \quad m_i\omega^2(y_i+\bar{\beta}_i) = \frac{Mm_i}{\varrho^3}(y_i+\beta_i) + O\left(\frac{1}{\varrho^9}\right),$$

Die Komponenten der Resultante der Anziehungskräfte sind

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\sum_k{}' \frac{m_i m_k}{\bar{r}_{ik}} + m_k f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} + m_i f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}}\Big) + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\sum_k{}' \frac{m_i m_k}{\bar{r}_{ik}} + m_k f_i \int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} + m_i f_k \int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}}\Big) + \frac{1}{\varrho_2}(\zeta)_2$$

mit

$$\bar{r}_{ik}^2 = (x_i - x_k + \alpha_i - \alpha_k)^2 + (y_i - y_k + \beta_i - \beta_k)^2;$$

$\bar{r}$ ist die Entfernung des Elements $d\sigma$ vom Punkte Q_i. Ganz ähnlich wie in Art. 3, S. 222 ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\Sigma_k} \frac{\zeta_k\, d\sigma}{\bar{r}} = \frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_1 = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\int_{\Sigma_i} \frac{\zeta_i\, d\sigma}{r_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right), \text{ usw.}$$

Der zitierte Satz der Mechanik führt somit auf die Beziehungen

$$\frac{M}{\varrho^3}(x_i+\alpha_i) + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right), \qquad \frac{M}{\varrho^3}(y_i+\beta_i) + \frac{\partial}{\partial y_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right). \tag{19}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von $\alpha_i - \alpha_k$ und $\beta_i - \beta_k$ findet man

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_k{}' \frac{m_k}{\bar{r}_{ik}} = \frac{\partial}{\partial x_l}\Big(\sum_k{}' \frac{m_k}{r_{ik}}\Big) + \sum_k{}' \Big[(\alpha_i - \alpha_k)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\frac{m_k}{r_{ik}}\Big) + (\beta_i - \beta_k)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial y_i}\Big(\frac{m_k}{r_{ik}}\Big)\Big] + \frac{1}{\varrho^4}(\alpha,\beta)_2,$$

wo $(\alpha, \beta)_2$ allgemein eine mit Gliedern 2. Ordnung beginnende Potenzreihe der α, β bezeichnen soll.

Danach wird aus (19) schließlich unter Beachtung von (1) und (8)

$$\begin{aligned} M\alpha_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k p_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k n_{ik} + \frac{1}{\varrho}(\alpha,\beta)_2 &= O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \\ M\beta_i + \sum_k{}' (\alpha_i - \alpha_k) m_k n_{ik} + (\beta_i - \beta_k) m_k q_{ik} + \frac{1}{\varrho}(\alpha,\beta)_2 &= O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right). \end{aligned} \tag{20}$$

Die Hauptglieder dieser Gleichungen sind, wie zu erwarten war, genau dieselben wie die von (17). Diese Gleichungen sind ebenso wie (17) stets überbestimmt und also nur dann lösbar, wenn eine gewisse Anzahl dieser bzw. jener Gleichungen von selbst erfüllt sind, sofern die übrigen befriedigt sind. Kann man nun zeigen, daß bei den von (17) übrig bleibenden Gleichungen die aus den Koeffizienten der α, β gebildete Determinante von Null verschieden ist, so folgt aus (20) unmittelbar, daß α_i, β_i höchstens von der Größenanordnung $\frac{1}{\varrho^4}$ sind.

Der Ausdruck für ζ_i kann somit geschrieben werden:

$$\zeta_i = \frac{15}{8\,\alpha_i \pi f_i} L_i^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

oder

$$(21)\quad \zeta_i = \left(u_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{P_i}{\varrho^3} + 2\,u_i v_i \frac{N_i}{\varrho^3} + \left(v_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{Q_i}{\varrho^3} - \left(w_i^2 - \frac{a_i^2}{3}\right)\frac{O_i}{\varrho^3} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$$

mit

$$(22)\quad \begin{aligned} P_i &= \frac{15}{16\,a_i f_i \pi}\left(M + \sum_k{}' m_k p_{ik}\right), & N_i &= \frac{15}{16\,a_i f_i \pi}\sum_k{}' m_k n_{ik}, \\ Q_i &= \frac{15}{16\,a_i f_i \pi}\left(M + \sum_k{}' m_k q_{ik}\right), & O_i &= \frac{15}{16\,a_i f_i \pi}\sum_k{}' m_k o_{ik}. \end{aligned}$$

§ 7.

Die Mannigfaltigkeit der Lösungen des n-Körperproblems, die zur Bildung von Gleichgewichtsfiguren führen, ist zu groß, um über die Lösbarkeit der Gleichungen (17) ohne genauere Kenntnis der Ausgangsfigur allgemein urteilen zu können. Sind aber von der ursprünglichen Konfiguration die Symmetrieeigenschaften und eventuell einige weitere Daten bekannt, so reichen die entwickelten Methoden hin, um die Existenz der entsprechenden Flüssigkeitsfigur zu beweisen, wie die folgenden Beispiele zeigen.

Im n-Körperproblem gibt es eine Lösung, wo die n Massenpunkte — die übrigens beliebige Massen haben können — in bestimmten unveränderlichen Abständen auf einer Geraden verteilt liegen, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um den Schwerpunkt dreht. Nehmen wir diese Gerade als x-Achse des Koordinatensystems, wodurch $y_i = 0\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ wird, so kann

$$\beta_i = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gesetzt werden. In der Tat ist die unter dieser Voraussetzung sich ergebende Lösung ζ_i der Gleichungen (13) zur Ebene $y = 0$ symmetrisch, weil dies für jede der Näherungen gilt. Dann aber ist wegen der Beziehungen

$$\int_{\Sigma_i} \zeta_i v_i \, d\sigma = 0 ,$$

die aus der Symmetrieeigenschaft folgen, die zweite Gruppe der Gleichungen (17) von selbst erfüllt, und es bleiben zur Bestimmung der α_i gerade n Gleichungen

$$\Big(M + \sum_k{}' m_k p_{ik}\Big)\alpha_i - \sum_k{}' m_k p_{ik}\alpha_k = \frac{1}{\varrho}(\ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

übrig, deren Determinante

$$D = \begin{vmatrix} M + \sum_k{}' m_k p_{1k} & -m_2 p_{12} & -m_3 p_{13} & \ldots & -m_n p_{1n} \\ -m_1 p_{21} & M + \sum_k{}' m_k p_{2k} & -m_3 p_{23} & \ldots & \ldots \\ -m_1 p_{31} & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -m_1 p_{n1} & \ldots & \ldots & \ldots & M + \sum_k{}' m_k p_{nk} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden ist. Zufolge

$$p_{ik} = \varrho^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big(\frac{1}{\varrho_{ik}}\Big) = \varrho^3\Big(\frac{3(x_i - x_k)^2}{\varrho_{ik}^5} - \frac{1}{\varrho_{ik}^3}\Big) = 2\Big(\frac{\varrho}{\varrho_{ik}}\Big)^3 > 0$$

sind nämlich in obiger Determinante die Diagonalelemente positiv, die übrigen Glieder alle negativ, und die Summen der Zeilenelemente gleich M, d. h. > 0. Diese Merkmale reichen nach einem am Schluß dieser Arbeit bewiesenen Lemma aus, um zu erkennen, daß D positiv, und zwar größer als M^n ist.

Eine andere Konfiguration, bei welcher der Existenzbeweis der zugehörigen Gleichgewichtsfigur ebenfalls ohne weitere Rechnung durchgeführt werden kann, ist die folgende: n gleiche Massen bilden die Ecken eines regulären Polygons, in dessen Mittelpunkt man sich noch einen anderen Körper gelegt denken kann. Die Flüssigkeitskörper, welche die n auf einem Kreise liegenden Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ersetzen, mögen alle dieselbe Dichte f haben; dagegen kann die Dichte des Zentralkörpers, dem wir den Index 0 geben wollen, von f verschieden sein. Die Verbindungslinien der Punkte m_i mit dem gemeinsamen Schwerpunkte sind Symmetrielinien der Ausgangsfigur. Setzen wir nun

$$(23) \qquad \alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \qquad \alpha_i = x_i \tau, \quad \beta_i = y_i \tau \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

so zeigt die mit diesen α, β berechnete Lösung der Integrodifferentialgleichungen für die ζ die gleiche Symmetrieeigenschaft. Danach ist

$$\int_{\Sigma_0} \zeta_0 u_0 \, d\sigma = 0 , \qquad \int_{\Sigma_0} \zeta_0 v_0 \, d\sigma = 0 ,$$

und die übrigen Gleichungen reduzieren sich, da die auf dem Kreise liegenden Komponenten der Flüssigkeit untereinander kongruent sind und je eine Symmetrieebene haben, auf eine, für die man etwa

$$x_1 \int_{\Sigma_1} \zeta_1 u_1 d\sigma + y_1 \int_{\Sigma_1} \zeta_1 v_1 d\sigma = 0$$

nehmen kann. Durch die Substitution (23) mag die letztere Bedingung in

$$A\tau = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

übergehen. Dabei bezeichnet A eine endliche von ϱ unabhängige Konstante. Man findet leicht durch Vergleich mit den linken Seiten von (17) und unter Beachtung der Bedeutung (8) von p_{ik}, n_{ik}, q_{ik}, daß $A\tau$ für unendlich kleine τ proportional der Änderung der radialen Komponente der Gesamtkraft in m_1 ist, wenn auf die ganze Konfiguration die Verschiebungen (23) ausgeübt werden. Da hierdurch die Anziehungskräfte im entgegengesetzten Sinne geändert werden wie die Zentrifugalkraft, so ist A von Null verschieden und daher $\tau = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$ oder besser $\tau = O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$ (vgl. S. 231), womit die Existenz der fraglichen Gleichgewichtsfigur bewiesen ist.

An diesen beiden Beispielen sieht man, wie mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften die Zahl der Bedingungsgleichungen vermindert werden kann und dadurch die Berechnung der α, β erst ermöglicht wird. Ähnliche Betrachtungen können in allen den Fällen mit Erfolg angewandt werden, wo die Ausgangsfigur mindestens eine Symmetrielinie besitzt, nur müssen dann im allgemeinen mehr Einzelheiten über die Konfiguration bekannt sein als in den obigen Beispielen, bei denen ja bloße Vorzeichenangaben zum Existenzbeweis genügten. Indem man den durch Symmetrie zusammengehörigen Massenpunkten symmetrische Verschiebungen α_i, β_i zuordnet, reduzieren sich die Gleichungen (16) auf n in n Unbekannten, womit deren Bestimmung nichts mehr im Wege steht. Hat die Ausgangsfigur jedoch keine Symmetrielinie, so scheinen die Gleichungen (16) unlösbar zu sein, da in diesem Falle keine Möglichkeit offensteht, die Anzahl der zu erfüllenden Bedingungen zu verringern. Im Gegenteil bieten dann die entwickelten Methoden die Mittel zum Nichtexistenzbeweis der fraglichen Figuren, indem nur zu zeigen ist, daß die Gleichungen (16) miteinander unverträglich sind.

Unter den in Frage kommenden Lösungen des n-Körperproblems ist nur eine bekannt, die eine Asymmetrie aufweist: die Lagrangesche Lösung des Dreikörperproblems, bei der die drei Massenpunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden. Da hierbei die Massen beliebige Werte haben können, so liegt bei ungleichen Massenverhältnissen der Fall der Asymmetrie vor. Auf ganz ähnliche Weise wie oben zeigt man hier, daß die Bedingungen (16)

bestimmt miteinander verträglich sind, wenn mindestens zwei der Massen m_1, m_2, m_3 gleich sind. Dann aber hat die entstehende Figur wieder eine Symmetrieebene durch die Rotationsachse. Die Entscheidung über den allgemeinen Fall bleibt, wie gesagt, einer weiteren Untersuchung vorbehalten.

§ 8.

Die im vorangehenden entwickelte Methode des Existenzbeweises von Systemen kugelähnlicher Gleichgewichtsfiguren ist auch dann noch anwendbar, wenn zu den gegenseitigen Anziehungen noch ein schwaches Außenfeld hinzutritt. Zur Erläuterung sei hier der Fall behandelt, wo eine (evtl. in einem geeigneten Koordinatensystem) ruhende Flüssigkeitsmasse T unter der Wirkung eines Feldes steht, das sich aus einem Potential $G(X, Y, Z)$ ableitet. Hierbei braucht G keiner besonderen Symmetriebedingung zu genügen.

Das Bestehen des Gleichgewichts fordert:

$$V(X, Y, Z) + G(X, Y, Z) = \text{konst.} \tag{24}$$

auf der Oberfläche S von T, wenn V das Potential der Eigengravitation von T darstellt. Man wähle den Punkt $Q(x, y, z)$ so, daß in ihm die drei Komponenten der Außenkräfte verschwinden; es gilt also

$$G_x(x, y, z) = 0, \quad G_y(x, y, z) = 0, \quad G_z(x, y, z) = 0. \tag{25}$$

Es soll nun angenommen werden, daß sich G in der Umgebung von Q in eine Potenzreihe

$$G(x+A, y+B, z+C) = \sum_{i,k,l} \frac{p_{ikl}}{\varrho} \left(\frac{A}{\varrho}\right)^i \left(\frac{B}{\varrho}\right)^k \left(\frac{C}{\varrho}\right)^l \tag{26}$$

entwickeln läßt, die für

$$\left|\frac{A}{\varrho}\right|, \left|\frac{B}{\varrho}\right|, \left|\frac{C}{\varrho}\right| \leqq D$$

gleichmäßig konvergent sein möge. Die Zahl ϱ ist ein Parameter, dem beliebig große Werte beigelegt werden können. Die Größen p_{ikl} und D sind als von ϱ unabhängig anzusehen. Ein solches Feld liegt z. B. vor, wenn G von der Anziehung ferner Massen herrührt.

Für genügend große ϱ wird T annähernd Kugelgestalt annehmen. Um den dicht bei Q liegenden Punkt $P(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$ sei die „Näherungskugel“ Σ mit dem Radius a beschrieben, wo a durch

$$m = \frac{4\pi}{3} a^3 f \qquad \begin{pmatrix} m\text{: Masse} \\ f\text{: Dichte} \end{pmatrix} \text{ von } T$$

definiert ist. Relativ zu dieser Kugel laute die Gleichung von S in Polarkoordinaten (r, φ, ϑ)

$$r = a + \zeta(\varphi, \vartheta).$$

Bezeichnen dann u, v, w wieder die auf P bezogenen rechtwinkligen Koordinaten eines Kugelpunktes, so ergibt sich für den zugehörigen Punkt auf S:

$$X = x + \alpha + u\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad Y = y + \beta + v\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad Z = z + \gamma + w\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right).$$

Nach Einführung von

$$A = \alpha + u\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad B = \beta + v\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right), \quad C = \gamma + w\left(1 + \frac{\zeta}{a}\right)$$

in (26) erhält man für die ersten Glieder in der Entwicklung von $G(X, Y, Z)$ (man beachte, daß wegen (25) $p_{100} = p_{010} = p_{001} = 0$ ist)

$$G(X, Y, Z) = \text{konst.} + L^{(1)} + L^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \tag{27}$$

wobei

$$L^{(1)} = \frac{2u}{\varrho^3}(p_{200}\alpha + p_{110}\beta + p_{101}\gamma) + \frac{2v}{\varrho^3}(p_{110}\alpha + p_{020}\beta + p_{011}\gamma) + \frac{2w}{\varrho^3}(p_{101}\alpha + p_{011}\beta + p_{002}\gamma),$$

$$L^{(2)} = \frac{p_{200}}{\varrho^3}\left(u^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{p_{020}}{\varrho^3}\left(v^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{p_{002}}{\varrho^3}\left(w^2 - \frac{a^2}{3}\right) + \frac{2p_{110}}{\varrho^3}uv + \frac{2p_{101}}{\varrho^3}uw + \frac{2p_{011}}{\varrho^3}vw$$

ist.

Das Potential der Eigengravitation hat wie früher den Ausdruck

$$V(X, Y, Z) = \text{konst.} - \frac{4\pi a f}{3}\zeta + f\int_{\Sigma}\frac{\zeta' d\sigma'}{r'} + (\zeta)_2.$$

Die Bedingung (24) führt somit auf die Gleichung

$$\frac{4\pi a f}{3}\zeta - f\int_{\Sigma}\frac{\zeta' d\sigma'}{r'} = s + L^{(1)} + L^{(2)} + \frac{1}{\varrho^3}(\zeta)_1 + (\zeta)_2 + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \tag{28}$$

deren Lösung wie in Art. 5 die Einführung des „zerspaltenen Kernes“

$$N = \frac{1}{r'} - \left(\frac{uu' + vv' + ww'}{a^3}\right)$$

notwendig macht. Nachdem aber α, β, γ so bestimmt sind, daß

$$\int_{\Sigma}\zeta u\, d\sigma = 0, \quad \int_{\Sigma}\zeta v\, d\sigma = 0, \quad \int_{\Sigma}\zeta w\, d\sigma = 0 \tag{29}$$

wird, kann in der obigen Integrodifferentialgleichung einfach N an Stelle von $\frac{1}{r'}$ gesetzt werden, und man findet

$$\zeta f = \frac{3}{4a\pi}L^{(1)} + \frac{15}{8a\pi}L^{(2)} + O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right), \tag{30}$$

wenn man s so bestimmt, daß das Volumen von T gleich dem von Σ wird.

Es fragt sich wieder, ob man durch geeignete Wahl von α, β, γ den Bedingungen (29) genügen kann. Wegen (30) schreiben sich diese in der Form

$$(31)\quad \begin{gathered} p_{200}\alpha + p_{110}\beta + p_{101}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad p_{110}\alpha + p_{020}\beta + p_{011}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \\ p_{101}\alpha + p_{011}\beta + p_{002}\gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right). \end{gathered}$$

Ist also die Determinante aus den Koeffizienten der linken Seite von Null verschieden, so ergibt sich

$$\alpha = O\left(\frac{1}{\varrho}\right), \qquad \beta = O\left(\frac{1}{\varrho}\right) \qquad \gamma = O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

und die Existenz der Figur ist dann bewiesen.

Wenn das Potential G von der Anziehung ferner Massen herrührt (wobei man für ϱ etwa die kleinste Entfernung jener Massen von P wählen kann), so läßt sich wie in § 6 Genaueres über die Größenordnung der α, β, γ aussagen.

Nach dem in § 6 zitierten Satz der Mechanik ist

$$\int_T G_{x'}(x', y', z')\,d\tau = 0, \quad \int_T G_{y'}(x', y', z')\,d\tau = 0, \quad \int_T G_{z'}(x', y', z')\,d\tau = 0$$
$$(d\tau = dx'\,dy\,dz').$$

Integriert man hier zuerst über das Innere der Kugel Σ, so ergibt sich zufolge einer bekannten Eigenschaft der Newtonschen Anziehung auf Kugeln

$$G_x(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)$$

bzw.

$$G_y(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma), \quad G_z(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma).$$

Die Integration über die sphäroidale Schicht gibt weiter

$$\int_\Sigma \zeta\, G_x(X, Y, Z)\,d\sigma + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2, \quad \text{usw.},$$

was, wie leicht ersichtlich ist, in der Form $\frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_1 + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2$ geschrieben werden kann. Man bekommt also

$$G_x(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma) = \frac{1}{\varrho^4}(\zeta)_2 + \frac{1}{\varrho^2}(\zeta)_2 = O\left(\frac{1}{\varrho^7}\right), \quad \text{usw.}$$

Werden hier die linken Seiten nach (26) entwickelt, so entstehen den Gleichungen (31) ganz ähnliche Beziehungen, aus denen zu ersehen ist, daß die rechten Seiten von (31) dnrch $O\left(\frac{1}{\varrho^4}\right)$ ersetzt werden können. Die Größen α, β, γ sind mithin von der Größenordnung $\frac{1}{\varrho^4}$.

§ 9.

Beweis des in § 7 benutzten Determinantensatzes.

Schreibt man eine Determinante in der Form

$$D = \begin{vmatrix} x_1 + \sum_k{}' a_{1k} & -a_{12} & -a_{13} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x_2 + \sum_k{}' a_{2k} & -a_{23} & \dots & \dots \\ -a_{31} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \dots & x_n + \sum_k{}' a_{nk} \end{vmatrix},$$

wo dann x_i die Zeilensummen darstellen, so enthält ihre Entwicklung nach den Größen x_i und a_{ik} nur positive Koeffizienten. Für $n = 2$ hat man offenbar

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_{12} & -a_{12} \\ -a_{21} & x_2 + a_{21} \end{vmatrix} = x_1 x_2 + x_1 a_{21} + x_2 a_{12}.$$

Wir beweisen, daß der Satz für n gilt, wenn dies für $n-1$ der Fall ist. Die Entwicklung von D nach Potenzen der x_i enthält kein von diesen freies Glied, da eine Determinante mit verschwindenden Zeilensummen gleich Null ist. Die Gesamtheit der mit einem bestimmten x, z. B. mit x_λ multiplizierten Glieder ist $x_\lambda A_\lambda$, wo A_λ die durch Streichung der λ-ten Zeile und λ-ten Kolonne aus D entstehende Determinante $(n-1)$-ter Ordnung bezeichnet. In A_λ sind die Diagonalelemente gleich $(x_i + a_{i\lambda}) + \sum_k{}'' a_{ik}$ ($\sum_k{}''$: Summation über alle $k \neq \lambda, i$), und die übrigen Glieder sind unter den $-a_{ik}$ $(k \neq \lambda, i)$ enthalten. Da die Entwicklung von A_λ nach Potenzen der $(x_i + a_{i\lambda})$, a_{ik} als Determinante $(n-1)$-ter Ordnung nur positive Koeffizienten enthält, so folgt daraus ohne weiteres die Richtigkeit der obigen Behauptung. Bei positiven a_{ik} und x_i gilt überdies

$$D > x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \dots x_n,$$

weil in der Entwicklung von D stets das Glied $x_1 \cdot x_2 \dots x_n$ auftritt.

(Eingegangen am 29. Juli 1927.)