

Werk

Titel: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Diffe-rentialgleichunge...

Autor: Perron, O.

Ort: Berlin

Jahr: 1928

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0028|log23

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Beweis des Nagumoschen Satzes.

Herr Nagumo hat kürzlich den folgenden Satz gefunden¹⁾:

Satz 1. Wenn die Funktion $f(x, y)$ im Bereich

$$(1) \quad 0 \leq x \leq a, \quad |y| \leq b \quad (a > 0, \quad b > 0)$$

stetig ist und daselbst der Bedingung genügt:

$$(2) \quad x \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq 1 \quad \text{für} \quad y_1 \neq y_2,$$

so hat die Differentialgleichung

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

nur ein Integral y , welches für $x = 0$ verschwindet.

Bei der verblüffenden Einfachheit und Schönheit dieses Kriteriums muß man sich wundern, daß es nicht schon längst gefunden wurde. Nachdem es nun aber entdeckt ist, sei es mir gestattet, noch einen besonders einfachen Beweis dafür mitzuteilen.

Sind y und z zwei am Nullpunkt verschwindende Integrale, so ist mit Rücksicht auf (2)

¹⁾ Mitio Nagumo, Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung, Japanese Journal of Mathematics **3** (1926), S. 107–112. Herr Nagumo mußte allerdings in der Bedingung (2) das Gleichheitszeichen ausschließen; wir werden aber sehen, daß es noch zulässig ist.

$$(4) \quad \begin{cases} |y(x) - z(x)| = \left| \int_0^x [f(\xi, y(\xi)) - f(\xi, z(\xi))] d\xi \right| \\ \leq \int_0^x \frac{|y(\xi) - z(\xi)|}{\xi} d\xi, \end{cases}$$

und außerdem nach den Regeln der Differentialrechnung

$$(5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x) - z(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x) - z'(x)}{1} = f(0, 0) - f(0, 0) = 0.$$

Wenn nun nicht stets $y(x) = z(x)$ wäre, so gäbe es eine Stelle x_1 derart, daß $y(x_1) \neq z(x_1)$ ist. Dann hätte die Funktion

$$\frac{|y(x) - z(x)|}{x},$$

die wir mit Rücksicht auf (5) im Nullpunkt gleich 0 setzen, im Intervall $0 \leq x \leq x_1$ ein positives Maximum G , ohne konstant gleich G zu sein, und aus (4) würde folgen:

$$\frac{|y(x) - z(x)|}{x} < \frac{1}{x} \int_0^x G d\xi = G \quad \text{für } 0 < x \leq x_1,$$

also auch $G < G$, was ein Widerspruch ist.

§ 2.

Beweis, daß das Kriterium in einer bestimmten Richtung keine Verschärfung zuläßt.

Wir zeigen jetzt, daß, wenn die Bedingung (2) durch die nur wenig geringere ersetzt wird:

$$(2a) \quad x \left| \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \right| \leq 1 + \varepsilon \quad \text{für } y_1 \neq y_2,$$

wo ε eine positive Zahl ist, die Unität des Integrals nicht mehr gewährleistet werden kann. Zu dem Zweck wählen wir für $f(x, y)$ die Funktion

$$(6) \quad f(x, y) = \begin{cases} (1 + \varepsilon) \frac{y}{x} & \text{für } 0 < y < x^{1+\varepsilon}, \\ (1 + \varepsilon) x^\varepsilon & \text{für } y \geq x^{1+\varepsilon}, \\ 0 & \text{für } y \leq 0. \end{cases}$$

Sie ist augenscheinlich stetig für $x \geq 0$ und beliebiges y ; außerdem erfüllt sie die Bedingung (2a). Trotzdem gibt es unendlich viele im Nullpunkt verschwindende Integrale, nämlich

$$y = C x^{1+\varepsilon} \quad \text{für } 0 \leq C \leq 1.$$

§ 3.

Ausdehnung auf Systeme von Differentialgleichungen.

Der Nagumosche Satz läßt sich in folgender Weise auf Systeme von Differentialgleichungen ausdehnen²⁾:

Satz 2. *Das System von Differentialgleichungen*

$$(A) \quad \frac{dy_v}{dx} = f_v(x, y_1, \dots, y_n) \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

hat, wenn die Funktionen f_v im Bereich

$$(B) \quad 0 \leq x \leq a, \quad |y_1| \leq b, \dots, |y_n| \leq b \quad (a > 0, b > 0)$$

stetig sind und daselbst den Bedingungen genügen:

$$(C) \quad x |f_v(x, y_1, \dots, y_n) - f_v(x, z_1, \dots, z_n)| \leq \text{Max}_{\mu=1}^n |y_\mu - z_\mu|,$$

nur ein System von Integralen $y_1, \dots, y_n$, die für $x=0$ verschwinden.

Beweis. Sind y_v, z_v zwei solche Integralsysteme, so ist mit Rücksicht auf (C)

$$(7) \quad \begin{cases} |y_v(x) - z_v(x)| \\ = \left| \int_0^x [f_v(\xi, y_1(\xi), \dots, y_n(\xi)) - f_v(\xi, z_1(\xi), \dots, z_n(\xi))] d\xi \right| \\ \leq \int_0^x \text{Max}_{\mu=1}^n \frac{|y_\mu(\xi) - z_\mu(\xi)|}{\xi} d\xi \end{cases}$$

und außerdem

$$(8) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y_v(x) - z_v(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'_v(x) - z'_v(x)}{1} \\ = f_v(0, 0, \dots, 0) - f_v(0, 0, \dots, 0) = 0. \end{cases}$$

Wenn nun nicht stets

$$y_\mu(x) = z_\mu(x) \quad \text{für } \mu = 1, 2, \dots, n$$

wäre, so wäre die Funktion

$$\text{Max}_{\mu=1}^n \frac{|y_\mu(x) - z_\mu(x)|}{x},$$

²⁾ Eine solche Ausdehnung hat auch Herr Max Müller in einer Arbeit, die in den Sitzungsberichten der Heidelberger Akademie erscheint, vorgenommen. Vom Inhalt dieser Arbeit unterrichtet, habe ich den Satz 2 etwas zweckmäßiger formulieren können als es zuerst geschehen war.

die wir mit Rücksicht auf (8) am Nullpunkt gleich 0 setzen, an einer gewissen Stelle x_1 positiv. Ihr Maximum G im Intervall $0 \leq x \leq x_1$ wäre also positiv, ohne daß die Funktion konstant gleich G wäre. Aus (7) würde dann folgen:

$$\frac{|y_\nu(x) - z_\nu(x)|}{x} < \frac{1}{x} \int_0^x G d\xi = G \quad \text{für } 0 < x \leq x_1, \nu = 1, 2, \dots, n.$$

Daher auch:

$$\text{Max}_{\nu=1}^n \frac{|y_\nu(x) - z_\nu(x)|}{x} < G \quad \text{für } 0 < x \leq x_1,$$

und folglich auch $G < G$, was ein Widerspruch ist.

(Eingegangen am 29. Mai 1927.)