Werk

Titel: Komplexe Zahlen und konvexe Polyeder

Autor: Knopp, K..

Ort: Berlin

Jahr: 1928

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0027|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Komplexe Zahlen und konvexe Polyeder.

Von

Konrad Knopp in Tübingen.

Herr E. Schönhardt beweist in der vorstehenden Arbeit den folgenden Satz:

In der Ebene der komplexen Zahlen seien $n \geqq 4$ Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_n$ gegeben, von denen keine vier auf einem Kreise liegen. Es sei $l_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, eine lineare Abbildung, für die $l_\nu(z_\nu) = \infty$ ist, und es sei a_ν die Anzahl der Ecken des kleinsten konvexen Polygons π_ν, das die Bilder der übrigen $n-1$ Punkte enthält. Dann ist — unabhängig von der Lage der gegebenen Punkte und von der speziellen Form der benutzten linearen Abbildungen — die Gesamtanzahl der Ecken der entstehenden n Polygone

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 6(n-2).$$

Dieser Satz ist überraschend, weil er im besonderen aussagt, daß die Anzahl der Ecken der in Rede stehenden n Polygone im Durchschnitt < 6, also jedenfalls beschränkt und nicht, wie man bei willkürlicher Lage der Punkte zunächst vermuten könnte, von der Größenordnung n ist.

Der Beweis, den Herr Schönhardt für seinen Satz gibt, benutzt als Hilfsmittel ausschließlich die Kreisverwandtschaften in der Gaußschen Ebene. Ich will im folgenden zeigen, wie durch eine räumliche Deutung die Richtigkeit des Satzes sofort evident wird und wie sich darüber hinaus die in Nr. 5 der genannten Arbeit aufgeworfene Frage nach den im Sinne der Inversionsgeometrie verschiedenen Punktsystemen mit einem klassischen Problem der Polyedertheorie identifizieren läßt.

Dazu verlege man die gegebenen n Punkte auf die Riemannsche Zahlenkugel. Da sich zwei verschiedene lineare Transformationen, die beide z_ν nach ∞ werfen, nur um eine Ähnlichkeitstransformation unterscheiden, die an der Eckenanzahl a_ν nichts ändert, so genügt es, z_ν etwa

durch eine Drehung nach ∞ zu bringen. Des Polygon π_ν wird nun ersichtlich aus ∞ durch eine a_ν-kantige körperliche Ecke projiziert, die als kleinste konvexe körperliche Ecke mit der Spitze ∞ definiert werden kann, welche die Bilder der übrigen $n-1$ Punkte enthält. Da die Drehung der Kugel an den gestaltlichen Verhältnissen nichts ändern konnte, so durfte sie auch unterbleiben und die eben beschriebene körperliche Ecke bei allen n Punkten z_ν zugleich konstruiert werden. Diese haben dann ein konvexes Polyeder P_n gemeinsam, das genau die gegebenen n Punkte der Kugel zu Ecken und nur Dreiecke als Begrenzungsflächen hat, — letzteres, weil keine vier der gegebenen Punkte auf einem Kreise liegen sollten. Die gesuchte $\sum a_\nu$ ist nun offenbar nichts anderes als die doppelte Kantenanzahl des Polyeders P_n. Bezeichnet man diese mit $2k$, so ist, wenn f die Anzahl der Seitenflächen von P_n bedeutet, erstlich

$$2k = 3f,$$

weil alle Seitenflächen Dreiecke sind, und zweitens nach dem Eulerschen Polyedersatz

$$n + f = k + 2.$$

Aus beidem folgt sofort die Behauptung, daß

$$\sum a_\nu = 2k = 6(n-2)$$

ist. —

Die genannte Fragestellung läuft also, da die Beschränkung der Punkte auf die Kugel unwesentlich ist, auf die Bestimmung aller wesentlich verschiedenen Dreieckspolyeder hinaus, deren Theorie[1]) uns auch sofort die Antwort auf weitere Fragen liefert.

Wir bezeichnen dazu allgemein ein konvexes Dreieckspolyeder mit n Ecken $(n \geqq 4)$ als ein P_n, und eine Ecke desselben, in der p Kanten zusammenstoßen, als eine solche von der p-ten Ordnung oder kurz als eine E_p. Ist x_p, $p = 3, 4, \ldots, n-1$, die *Anzahl* dieser E_p — oder also die Anzahl der p-Ecke unter den Polygonen π_ν unseres Satzes —, so ist nach dem Vorstehenden

$$(*) \qquad \begin{cases} x_3 + x_4 + \ldots + x_{n-1} = n, \\ 3x_3 + 4x_4 + \ldots + (n-1)x_{n-1} = 6(n-2). \end{cases}$$

Aus diesen sogenannten *Fundamentalgleichungen der Polyedertheorie* folgt nun z. B. durch Subtraktion der mit 6 multiplizierten ersten Gleichung von der zweiten, daß

$$3x_3 + 2x_4 + x_5 \geqq 12$$

[1]) Die gesamte Literatur hierüber, sowie die im folgenden benutzten Einzelheiten findet man in dem Encyklopädieartikel III AB 12 von E. Steinitz, Polyeder und Raumeinteilungen (1922).

sein muß, oder in Worten: Die Ecken eines P_n sind nicht sämtlich von höherer als der 5-ten Ordnung. Die n Polygone π_ν haben also — was ja auch aus dem Wortlaut unseres Satzes sofort folgt — nicht sämtlich 6 und mehr Ecken. Fehlen die Drei- und Vierecke gänzlich, so muß es mindestens 12 Fünfecke unter ihnen geben; fehlen die Drei- und Fünfecke, so gibt es mindestens 6 Vierecke; fehlen die Vier- und Fünfecke, so gibt es mindestens 4 Dreiecke.

Ein P_n kann schematisch dadurch aufgezeichnet werden, daß man in einem Dreieck noch $n-3$ Punkte markiert (doch etwa so, daß keine 3 der n Punkte auf einer Geraden liegen) und solange die Verbindungsstrecken je zweier Punkte zeichnet, als dies ohne Überschneidungen noch möglich ist. Die entstehende Figur enthält dann stets $3(n-2)$ Strecken und das Ausgangsdreieck ist in $2n-5$ Teildreiecke zerlegt, so daß diese mit jenem zusammen die $2(n-2)$ Seitenflächen des P_n repräsentieren.

Auf folgende drei Arten kann man nun aus dem Schema eines P_n dasjenige eines P_{n+1} herleiten:

1. Art. Man markiere im Innern eines der Teildreiecke[2]) einen neuen Punkt und verbinde ihn mit den drei Ecken des Teildreiecks. Die Ordnung dieser drei Ecken erhöht sich dabei um je 1 und eine E_3 ist neu hinzugekommen.

2. Art. Man lösche die gemeinsame Kante zweier Nachbardreiecke und wähle im Innern des entstandenen Vierecks einen neuen Punkt, den man mit den vier Ecken dieses Vierecks verbindet. Die Ordnung von zwei (nicht benachbarten) dieser Ecken erhöht sich dabei um je 1, die der beiden andern bleibt ungeändert und eine E_4 ist neu hinzugekommen.

3. Art. Man wähle an einer E_p mit $p \geqq 4$ drei aufeinanderfolgende der dort zusammenstoßenden Dreiecke, lösche in dem durch sie gebildeten Fünfeck die beiden Diagonalen und verbinde einen inneren Punkt des Fünfecks mit dessen fünf Ecken. Dabei geht die Ordnung dieser E_p um 1 zurück, die der beiden Nachbarecken im Fünfeck wird um je 1 erhöht, die der beiden übrigen Ecken bleibt ungeändert und eine E_5 ist neu hinzugekommen.

Führt man diese Konstruktionen bei den Schemata *aller* P_n durch, so entstehen diejenigen *aller* P_{n+1} (zum Teil mehrfach), da nach dem Vorhergesagten jedes P_{n+1} mindestens eine Ecke 3., 4. oder 5. Ordnung besitzen muß.

Damit ist ein einfaches konstruktives Prinzip gewonnen — es ist un-

---

[2]) Das Ausgangsdreieck braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden, da man die Figur stets so anlegen kann, daß eine beliebig gegebene Seitenfläche des P_n durch das Ausgangsdreieck repräsentiert wird.

abhängig von Kirkman, Cayley und Möbius um 1860 angegeben worden —, um alle realisierbaren Lösungen des Gleichungssystems (*) zu erhalten und also alle bei gegebenem n wirklich auftretenden Verteilungen der π_ν nach ihrer Eckenanzahl zu ermitteln, — ein Prinzip, das es indessen bisher noch nicht ermöglicht hat, die *Anzahl* dieser realisierbaren Lösungen, sei es die genaue Anzahl oder auch nur ihren asymptotischen Verlauf, anzugeben.

Wir zeigen nur noch, wie die speziellen von Herrn Schönhardt in Nr. 5 seiner Arbeit gemachten Feststellungen sich nun unmittelbar anschaulich ergeben:

a) Hat ein P_6 überhaupt eine E_3, so muß es aus dem P_5 durch Ansetzen einer E_3 erhalten werden können. Da die Ecken der Seitendreiecke des P_5 sämtlich die Ordnungen 3, 4, 4 haben, so hat unser P_6 also notwendig die Eckenordnungen 3; 4, 5, 5; 3, 4, was der Lösung

$$x_3 = 2, \quad x_4 = 2, \quad x_5 = 2$$

von (*) entspricht. Die Lösungen 1, 4, 1 und 3, 0, 3 sind also beide unmöglich.

b) Hätte ein P_n drei E_{n-1}, so müßte

$$3x_3 + \ldots + (n-2)x_{n-2} + 3(n-1) = 6n - 12$$

oder

$$3x_3 + \ldots + (n-2)x_{n-2} \qquad = 3(n-3)$$

sein, woraus wegen $x_3 + \ldots + x_{n-2} = n - 3$ notwendig folgen würde, daß die $n - 3$ übrigen Ecken unseres P_n sämtlich von der 3. Ordnung wären. Da nun eine E_{n-1} mit allen übrigen $n - 1$ Ecken benachbart (d. h. durch eine Kante verbunden) ist, so müßten die drei E_{n-1} die Ecken eines Kantendreiecks bilden und von den übrigen $n - 3$ ($\geqq 3$) Ecken wären dann auch mindestens zwei einander benachbart. Das ist aber unmöglich, da aus dem Konstruktionsprinzip sofort folgt, daß bei einem P_n mit $n > 4$ niemals zwei E_3 einander benachbart sein können.

Tübingen, den 10. Oktober 1926.

(Eingegangen am 10. Oktober 1926.)