Werk

Titel: Über Mindestzahlen von Fixpunkten

Autor: Hopf, H.

Jahr: 1927

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0026|log55

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über Mindestzahlen von Fixpunkten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

§ 1.

Das klassische Hilfsmittel beim Beweise von Fixpunktsätzen besteht in der Betrachtung von Vektorfeldern und der Ermittlung der Indexsumme ihrer Singularitäten[1]). Es läßt sich kurz so beschreiben: den Punkten p der Mannigfaltigkeit M, die der eindeutigen und stetigen Abbildung φ auf sich unterworfen wird, ordnet man die Vektoren $\mathfrak{v}(p)$ zu, welche, im Sinne einer in M definierten Maßbestimmung, von p nach $\varphi(p)$ zeigen. Dieses Vektorfeld $\mathfrak{V}$ wird in den Fixpunkten von φ — sowie unter Umständen in gewissen durch die Maßbestimmung ausgezeichneten Punkten[2]) — singulär. Die Indexsumme der Singularitäten von $\mathfrak{V}$ aber ist bestimmt allein durch den topologischen Bau von M und, falls M berandet ist, durch das Verhalten von $\mathfrak{V}$ am Rande, das durch die gegebenen Eigenschaften von φ hinreichend bekannt sein muß.

Ist die so bestimmte Indexsumme der Fixpunkte von Null verschieden, so ist gewiß wenigstens ein Fixpunkt vorhanden; die *Anzahl* der Fixpunkte liefert sie aber nur im „algebraischen" Sinne, d. h. als Summe von „Vielfachheiten", welche überdies auch negative Werte besitzen können. Es ist sogar *prinzipiell unmöglich*, auf dem beschriebenen Wege zur Kenntnis der wirklichen Anzahl oder wenigstens einer von 1 verschiedenen Mindestzahl der Fixpunkte zu gelangen; denn $\mathfrak{V}$ läßt sich, selbst wenn die Vektoren an dem etwa vorhandenen Rande von M vorgeschrieben sind, immer noch mit einer *willkürlichen Anzahl* beliebig gelegener Singu-

[1]) Vgl. die Darstellung von Feigl, Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen (erscheint demnächst), und die dort zitierten Arbeiten von Alexander und Brouwer; ferner Birkhoff, On dynamical systems ..., Trans. Amer. Math. Soc. 18 (1917).

[2]) Z. B. bei Brouwers Beweis der Fixpunktsätze für die n-dimensionalen Kugeln; s. Feigl, l. c., §§ 4, 5.

laritäten — also z. B. mit einer einzigen Singularität — konstruieren; es müssen nur die Indizes so gewählt sein, daß sie die notwendige Summe besitzen[3]).

Für die Bestimmung einer von 1 verschiedenen Mindestzahl muß also ein wesentlich neuer Gesichtspunkt hinzukommen. Ein solcher wurde von J. Nielsen in dem Begriff der „*Fixpunktklasse*" gefunden und mit Erfolg zur Erreichung des erstrebten Zieles benutzt[4]); und zwar geschah dies bei der Untersuchung der Abbildungen geschlossener Flächen vom Geschlecht $p \geqq 2$, die sich besonders gruppentheoretisch schwierig und interessant gestaltet. Im folgenden werden mit Hilfe des genannten Begriffes die Fragen nach den Mindestzahlen von Fixpunkten in einigen anderen Fällen beantwortet, die viel einfacher sind als die eben erwähnten, — zumal sie gruppentheoretisch keinerlei Schwierigkeit bieten, — deren Behandlung aber vielleicht gerade darum geeignet ist, der Einführung in die „Methode der Fixpunktklassen" zu dienen.

Die Mannigfaltigkeiten, deren Abbildungen hier untersucht werden, sind:

1. der n-dimensionale Ringraum, d. h. das Produkt[5]) eines Kreises mit einem $(n-1)$-dimensionalen Element, für $n = 2$ also der ebene Kreisring, für $n = 3$ das (abgeschlossene) Innere eines Schlauches;

2. der n-dimensionale Torus, d. h. das Produkt von n Kreisen;

3. der n-dimensionale projektive Raum.

Bezüglich des zu 2 gehörigen Satzes und Beweises möchte ich vorweg folgendes bemerken:

Die Mindestzahlen der Fixpunkte für die eineindeutigen Transformationen des 2-dimensionalen Torus wurden in einer 1921 erschienenen Abhandlung von J. Nielsen ohne Heranziehung von „Fixpunktklassen" ermittelt[6]); daß sich die Ergebnisse und Methoden dieser Arbeit auf alle eindeutigen Transformationen des Torus übertragen lassen, wurde gleichzeitig von Brouwer gezeigt[7]). Herr Nielsen machte mich, als ich ihm vor kurzem meinen im folgenden wiedergegebenen Beweis mitteilte, darauf aufmerksam, daß sich dieser im wesentlichen mit einem 1924 von ihm veröffentlichten zweiten

[3]) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 96 (1926).

[4]) J. Nielsen, Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen, Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 3 (1924); Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Kongresberetningen Kopenhagen 1926.

[5]) Vgl. Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 7 (1908).

[6]) J. Nielsen, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei Abbildungstypen der Ringflächen, Math. Annalen 82 (1921).

[7]) Brouwer, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. Math. Annalen 82 (1921).

Beweis[8]) deckt, und stellte mir gleichzeitig die Abschrift eines 1924 an Herrn J. W. Alexander gerichteten Briefes zur Verfügung, in dem die Übereinstimmung mit meiner Darstellung fast wörtlich ist; an beiden Stellen wird auch die Verallgemeinerungsfähigkeit auf den Fall von n Dimensionen betont. Zugleich forderte mich Herr Nielsen aber auf, trotzdem diesen zweiten Beweis noch einmal zu veröffentlichen, da er wesentlich einfacher und dem Problem besser angepaßt ist als der erste, und da die 1924 in dänischer Sprache publizierte Note wohl ziemlich unbekannt geblieben ist. Ich komme dieser freundlichen Aufforderung mit bestem Dank und gern nach.

§ 2.

W^n sei der n-dimensionale Ringraum, also das Produkt eines Kreises K mit einem Element E^{n-1}. Ist $\mathfrak{C}$ ein Repräsentant von K, d. h. eine Kurve von W^n, die einem festen Punkt des E^{n-1} entspricht, und ist $\mathfrak{C}$ mit einem positiven Umlaufssinn versehen, so läßt sich jeder orientierte geschlossene Weg in W^n eindeutig durch eine Potenz $\mathfrak{C}^c$ ($c \gtreqless 0$, ganzzahlig) darstellen; d. h. er ist der c-mal durchlaufenen Kurve $\mathfrak{C}$ homotop. In diesem Sinne sei, wenn φ die zu untersuchende Abbildung von W^n auf sich ist, $\varphi(\mathfrak{C}) \sim \mathfrak{C}^a$. a ist unabhängig von der speziellen Wahl der Kurve $\mathfrak{C}$ und möge der „Charakter“ von φ heißen.

Satz I. *Hat die Abbildung φ des Ringraumes W^n auf sich den Charakter a, so gibt es wenigstens $|a-1|$ voneinander verschiedene Fixpunkte*[9]).

Beweis. Der im euklidischen x_1-x_2-...-x_n-Raum durch

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$$

definierte „Vollzylinder“ Z^n kann als (universeller) Überlagerungsraum von W^n aufgefaßt werden. Denn betrachtet man je zwei seiner Punkte als identisch, die durch eine Translation

$$x_1' = x_1 + k \qquad (k \text{ ganz})$$
$$x_\nu' = x_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

auseinander hervorgehen, so wird die durch diese Identifizierung definierte Mannigfaltigkeit eineindeutig und stetig auf W^n abgebildet, indem man $x_2, x_3, \ldots, x_n$ als Koordinaten in E^{n-1}, $2\pi \cdot x_1$ als — im Sinne der positiven Orientierung von $\mathfrak{C}$ wachsende — Winkelkoordinate von K auffaßt.

---

[8]) J. Nielsen, Ringfladen og Planen, Matematisk Tidsskrift 1924.

[9]) Der Spezialfall, in dem $n=2$, $a=-1$ ist, φ eineindeutig ist und die Randkreise vertauscht, ist als Folgerung aus dem Brouwerschen Translationssatz von v. Kerékjártó (Über Transformationen des ebenen Kreisringes, Math. Annalen **80** (1919)) bewiesen worden.

Wir bezeichnen die Punkte von W^n mit ξ, die von Z^n mit x und verstehen unter $x+k$ den Punkt, der aus x durch die oben angegebene „Decktransformation" hervorgeht; wir schreiben ferner:

$$x \equiv x + k \pmod 1.$$

Mit x „überlagern" alle Punkte $x+k\,(k=\ldots-1, 0, 1, \ldots)$ einen Punkt ξ von W^n.

Der gegebenen Abbildung φ von W^n entsprechen gewisse Abbildungen f_i von Z^n: $\bar{\xi}$ sei ein fester Punkt von W^n, $\bar{x}$ einer seiner Überlagerungspunkte in Z^n, $\bar{x}_i'$ $(i=\ldots-1, 0, 1, \ldots)$ seien die Punkte, die $\varphi(\bar{\xi})$ überlagern; ihre Indizes seien so gewählt, daß $\bar{x}_i' = \bar{x}_0' + i$ ist. Dann definieren wir zunächst

$$f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i';$$

indem wir ferner die Bedingungen

1. liegt x über ξ, so liegt $f_i(x)$ über $\varphi(\xi)$,
2. $f_i(x)$ ist in Z^n stetig,

erfüllen, wird $f_i(x)$ zunächst im Kleinen und, unter Berücksichtigung des einfachen Zusammenhangs von Z^n, nach dem „Monodromiesatz" auch in ganz Z^n eindeutig und stetig erklärt.

Dabei ist

$$f_i(x) \equiv f_0(x) \pmod 1,$$

also, da

$$f_i(\bar{x}) = f_0(\bar{x}) + i$$

ist und f_i, f_0 stetig sind, allgemein

$$f_i(x) = f_0(x) + i. \tag{1}$$

Ferner folgt aus der Definition des „Charakters" a der Abbildung φ:

$$f_i(x+1) = f_i(x) + a,$$

also durch Iteration und Umkehrung

$$f_i(x+k) = f_i(x) + ka \qquad (k=\ldots-1, 0, 1, \ldots). \tag{2}$$

Wir dürfen nun im Hinblick auf die zu beweisende Behauptung voraussetzen, daß

$$a - 1 \neq 0 \tag{3}$$

ist, und werden zunächst die Gesamtheit der Fixpunkte von φ in *„Klassen"* einteilen, ohne uns darum zu kümmern, ob diese nicht sämtlich oder zum Teil leer sind.

Sei also η ein Fixpunkt von φ, y einer seiner Überlagerungspunkte. Dann ist

$$f_0(y) \equiv y \pmod 1,$$

d. h. es existiert eine ganze Zahl $r_0(y)$, so daß

$$f_0(y) = y + r_0(y) \tag{4}$$

ist. Entsprechend gilt für einen anderen Überlagerungspunkt $y + k$ von η

$$f_0(y + k) = y + k + r_0(y + k), \tag{4'}$$

also nach (2) und (4):

$$y + k + r_0(y + k) = y + r_0(y) + k\,a$$

$$r_0(y + k) = r_0(y) + k \cdot (a - 1);$$

mod $(a - 1)$ sind mithin die Zahlen $r_0(y)$ für die Überlagerungspunkte y von η allein durch η bestimmt, und wir können dem Punkt η die betreffende Restklasse $r_0(\eta) \bmod (a - 1)$ zuordnen.

Wenn $r_0(\eta) \not\equiv 0 \bmod (a - 1)$ ist, so ist keiner der Punkte $y + k$ Fixpunkt von f_0. Dann gibt η aber bei anderen der Abbildungen f_i Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Denn nach (1) ist z. B.

$$f_{-r_0(y)}(y) = f_0(y) - r_0(y),$$

also nach (4)

$$f_{-r_0(y)}(y) = y.$$

Induziert andrerseits η einen Fixpunkt von f_i, d. h. ist

$$f_i(y + k) = y + k,$$

so folgt aus (1)

$$f_0(y + k) = y + k - i$$

und aus (4')

$$i \equiv -r_0(\eta) \pmod{(a - 1)}. \tag{5}$$

Fassen wir also die Abbildungen f_i nach den Restklassen mod $(a - 1)$, denen ihre Indizes i angehören, in $|a - 1|$ Klassen $F_1, F_2, \ldots, F_{|a-1|}$ zusammen, so gibt η für genau eine dieser Klassen — und zwar, wie leicht zu sehen, in dieser für jede Abbildung — Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Die Fixpunkte von φ werden durch diese Zuordnung zu den Klassen $F_1, F_2, \ldots, F_{|a-1|}$ selbst in $|a - 1|$ „Fixpunktklassen" eingeteilt[9a]).

Umgekehrt bleibt aber jeder Punkt von W^n, der von einem Fixpunkt einer Abbildung f_i überlagert wird, bei φ fest. Der Beweis von Satz I ist daher geführt, sobald gezeigt ist, *daß jede Abbildung f_i einen Fixpunkt besitzt, daß also keine der Fixpunktklassen leer ist.*

[9a]) Der Sinn der Klasseneinteilung ist der, daß zwei Abbildungen f_i, f_j dann und nur dann einer Klasse angehören, wenn sie durch eine Decktransformation $t_k(x) = x' = x + k$ ineinander transformierbar sind: $f_j = t_k^{-1} f_i t_k$.

Neben f_i betrachten wir die durch

$$x_1^* = a\,x_1$$
$$x_\nu^* = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

definierte Abbildung f^* von Z^n. Sie genügt, wie f_i, der Funktionalgleichung

$$f^*(x+k) = f^*(x) + k\,a\,. \tag{2*}$$

Für die zugehörigen Verschiebungsvektoren $\mathfrak{v}^*(x)$, die in den Punkten x beginnen, in den Punkten x^* enden, also die Komponenten $(a-1)x_1$, $-x_2, \ldots, -x_n$ haben, gilt daher

$$\mathfrak{v}^*(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) + k(a-1)\mathfrak{e}_1\,, \tag{6*}$$

wobei $\mathfrak{e}_1$ den Einheitsvektor der x_1-Richtung bezeichnet. Analog folgt aus (2) für den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}_i(x)$ von f_i

$$\mathfrak{v}_i(x+k) = \mathfrak{v}_i(x) + k(a-1)\mathfrak{e}_1\,, \tag{6}$$

die Differenz $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}_i$ ist daher periodisch:

$$\mathfrak{v}^*(x+k) - \mathfrak{v}_i(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x), \tag{7}$$

ihr Wertvorrat wird bereits für $0 \leqq x_1 \leqq 1$ erschöpft, und die Länge der Vektoren $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}_i$ ist mithin beschränkt:

$$|\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x)| \leqq C\,. \tag{8}$$

Die Länge des Vektors $\mathfrak{v}^*$ dagegen strebt mit $|x_1|$ gegen unendlich:

$$|\mathfrak{v}^*(x)| = [(a-1)^2 x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2]^{\frac{1}{2}} \geqq |a-1| \cdot |x_1|\,. \tag{9}$$

Folglich gibt es eine Zahl $p > 0$, so daß

$$|\mathfrak{v}^*(x)| > |\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x)| \tag{10}$$

für $x_1 = \pm p$ ist.

Wir untersuchen nun die Felder der $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}^*$ auf dem Rande S^{n-1} des durch $-p \leqq x_1 \leqq p$ aus Z^n ausgeschnittenen Elements E^n. $\mathfrak{v}^*$ verschwindet auf S^{n-1} nirgends, und auch von $\mathfrak{v}_i$ setzen wir dies voraus, da andernfalls dort ein Fixpunkt von f_i vorhanden, unsere Behauptung also richtig ist. Daher vermittelt jedes der beiden Felder eine eindeutige und stetige Abbildung von S^{n-1} auf die Richtungskugel des Raumes. Wir behaupten, daß die beiden zugehörigen Abbildungsgrade γ^* und γ_i einander gleich sind. Hierfür ist nach einem bekannten Satz[10]) hinreichend, daß $\mathfrak{v}^*$ und $\mathfrak{v}_i$ auf S^{n-1} nirgends zueinander diametral gerichtet sind. Dies ist aber in der Tat nirgends der Fall: für die beiden Stücke mit $x_1 = \pm p$ folgt es aus (10), und für den übrigen Teil von S^{n-1}, der dem Rand von

[10]) Satz von Poincaré-Bohl; s. Fußnote [18]) der unter [1]) zitierten Arbeit von Feigl.

Z^n angehört, folgt es daraus, daß auf diesem Rande sowohl alle $\mathfrak{v}^*$ wie alle $\mathfrak{v}_t$ ins Innere des konvexen Bereiches Z^n weisen. Die so bewiesene Gleichheit

$$\gamma_i = \gamma^*$$

gestattet nun die Bestimmung von γ_i, da γ^* leicht zu ermitteln ist: die einzige Singularität von $\mathfrak{v}^*$ ist der Koordinatenanfangspunkt O; sein Index[1]) ist ± 1, da die Komponenten v_ν^* der $v^*(x)$ homogene lineare Funktionen der Koordinaten von x sind:

$$(11) \qquad \begin{aligned} v_1^* &= (a-1)x_1 \\ v_2^* &= \quad -x_2 \\ &\vdots \\ v_n^* &= \quad -x_n, \end{aligned}$$

und die Determinante wegen (3) nicht verschwindet[11]); da O im Innern von E^n liegt, ist γ^* gleich diesem Index. Da mithin auch

$$\gamma_i = \pm 1$$

ist, besitzt $\mathfrak{v}_i(x)$ in E^n eine Nullstelle, f_i einen Fixpunkt, w. z. b. w.

Zusatz: Daß die Mindestzahlen $|a-1|$ wirklich angenommen werden, zeigen für $a \neq 1$ die von f^*, für $a = 1$ die von

$$x_1^* = x_1 + \frac{1}{2}, \qquad x_\nu^* = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

überlagerten Abbildungen von W^n.

§ 3. [12])

Der n-dimensionale Torus T^n ist das Produkt von n Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_n$. $\mathfrak{C}_1$ sei ein Repräsentant von K_1, d. h. eine Kurve von T^n, die je einem festen Punkt von $K_2, K_3, \ldots, K_n$ entspricht; $\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ seien analog definiert. Alle $\mathfrak{C}_\nu$ seien mit positiven Umlaufsinnen versehen. Jeder orientierte geschlossene Weg in T^n läßt sich eindeutig als Potenzprodukt $\mathfrak{C}_1^{c_1}\mathfrak{C}_2^{c_2}\ldots\mathfrak{C}_n^{c_n}$ darstellen, d. h. er ist der Kurve homotop, die bei c_1-maliger Durchlaufung von $\mathfrak{C}_1$, darauf folgender c_2-maliger Durchlaufung von $\mathfrak{C}_2$ usw. beschrieben wird.

---

[11]) Die auf einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel um den Nullpunkt angebrachten Vektoren eines solchen linearen Vektorfeldes mit nicht verschwindender Determinante vermitteln eine *eineindeutige* Abbildung der Kugel auf die Richtungskugel, daher ist der Index ± 1.

[12]) Inhalt und Methode dieses Paragraphen laufen denen des § 2 parallel; daher ist die Darstellung zwecks Vermeidung von Wiederholungen knapp gehalten. Man vergleiche immer die entsprechenden Stellen im § 2.

Für die Abbildung φ von T^n auf sich sei

$$\varphi(\mathfrak{C}_\lambda) \sim \mathfrak{C}_1^{a_{\lambda 1}} \mathfrak{C}_2^{a_{\lambda 2}} \dots \mathfrak{C}_n^{a_{\lambda n}} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Die Matrix

$$A = (a_{\lambda\mu})$$

heiße der „Charakter" von φ. E bezeichne die n-reihige Einheitsmatrix, Δ die Determinante der Matrix

$$D = A - E.$$

Satz II. *Hat die Abbildung φ des n-dimensionalen Torus T^n auf sich den Charakter A, so gibt es wenigstens $|\Delta| = ||A - E||$ voneinander verschiedene Fixpunkte.*

Beweis. Der euklidische x_1-x_2-....-x_n-Raum R^n ist als universeller Überlagerungsraum von T^n aufzufassen; die zugehörigen Decktransformationen sind

$$x'_\nu = x_\nu + k_\nu \quad (k_\nu \text{ ganz}^{13}); \ \nu = 1, 2, \dots, n);$$

$2\pi \cdot x_1, 2\pi \cdot x_2, \dots, 2\pi \cdot x_n$ sind als Winkelkoordinaten auf $K_1, K_2, \dots, K_n$ im Sinne der positiven Durchlaufung von $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ anzusehen.

Einen Punkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen wir vektoriell durch $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ und schreiben dann:

$$[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = x + y$$
$$x + k \equiv x \pmod{E}^{13}).$$

Die Vektoren k mit ganzzahligen Komponenten k_ν sind die „*Elemente*" eines „Moduls", den wir $\mathfrak{E}$ nennen.

Zusammen mit x überlagern alle Punkte $x + k$ denselben Punkt ξ von T^n.

φ induziert in R^n Abbildungen $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$; dabei ist — analog wie in § 2 — $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ folgendermaßen festgelegt: Man betrachtet einen Überlagerungspunkt $\bar{x}$ des festen Punktes $\bar{\xi}$ von T^n, versieht die Überlagerungspunkte $\bar{x}'$ von $\varphi(\bar{\xi})$ so mit Indizes, daß

$$\bar{x}'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \bar{x}'_{0\,0 \dots 0} + [i_1, i_2, \dots, i_n]$$

ist, und setzt fest, es sei

$$f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\bar{x}) = \bar{x}'_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

Dann ist

$$(1) \qquad f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = f_{0\,0 \dots 0}(x) + [i_1, i_2, \dots, i_n],$$

und für jede der Abbildungen gilt die Funktionalgleichung

$$(2) \quad f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x + k) = f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \dots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big],$$

[13]) k_ν bedeutet im folgenden stets eine ganze Zahl.

denn, wenn x_λ um k_λ wächst, nimmt die ν-te Koordinate des Bildpunktes um $k_\lambda a_{\lambda\nu}$ zu.

Mit Rücksicht auf die in Satz II ausgesprochene Behauptung dürfen wir

$$\Delta = |A - E| \neq 0 \tag{3}$$

annehmen. Die Klassifikation der Fixpunkte von φ geschieht auf folgende Weise:

Ist y ein Überlagerungspunkt des Fixpunktes η von φ, so ist

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y) \equiv y \pmod{E},$$

d. h. es existiert ein Element von $\mathfrak{E}$ (s. o.)

$$r_0(y) = [r_0^1(y), r_0^2(y), \ldots, r_0^{(n)}(y)],$$

derart, daß

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y) = y + r_0(y) \tag{4}$$

ist. Für einen anderen Überlagerungspunkt $y + k$ gilt entsprechend

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y + k) = y + k + r_0(y + k), \tag{4'}$$

also nach (2), (4), (4')

$$y + r_0(y) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big] = y + k + r_0(y + k)$$

$$r_0(y + k) = r_0(y) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1} - k_1, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2} - k_2, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n} - k_n\Big].$$

Setzen wir $k_\nu' = \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu$, so geht das Element $[k_1', \ldots, k_n']$ aus dem Element $[k_1, \ldots, k_n]$ durch diejenige lineare Substitution hervor, die zu der Matrix D' gehört, welche durch Spiegelung an der Hauptdiagonale aus D entsteht:

$$k' = D'(k).$$

Es ist also, in bekannter Schreibweise,

$$r_0(y + k) \equiv r_0(y) \pmod{D'}.$$

D. h.: alle zu den Überlagerungspunkten $y + k$ von η gehörigen „Elemente“ $r_0(y + k)$ gehören einer bestimmten unter den „Restklassen“ an, in welche der Modul $\mathfrak{E}$ aller Elemente durch D' — oder genauer: durch den Teilmodul $\mathfrak{D}$ aller in der Form $D'(k)$ darstellbaren Elemente — zerfällt wird. Diese Restklasse $r_0(\eta)$ ordnen wir η zu. Die Anzahl aller derartigen Restklassen ist nach einem Satz von Dedekind[14]) endlich und zwar gleich $|\Delta|$.

Genau wie in § 2 folgt nun: Induziert η einen Fixpunkt von $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, d. h. ist

$$f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(y + k) \equiv y + k,$$

[14]) Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., XI. Supplement.

so folgt aus (1)

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y+k) = y + k - [i_1, i_2, \ldots, i_n]$$

und aus (4′)

$$[i_1, i_2, \ldots, i_n] \equiv -r_0(\eta) \pmod{D'}. \tag{5}$$

Wenn wir also die Abbildungen $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ nach den Restklassen mod D', denen ihre Indexelemente $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ im Modul $\mathfrak{E}$ aller Elemente angehören, in $|\Delta|$ Klassen zusammenordnen, so gibt η in nur einer von ihnen — (und zwar in ihr für alle Abbildungen) — Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Die Fixpunkte von φ werden so in $|\Delta|$ „Klassen“ eingeteilt.

Andererseits überlagert jeder Fixpunkt einer Abbildung $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ einen Fixpunkt von φ; zum Beweis von Satz II genügt es daher zu zeigen, daß jede Abbildung $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ einen Fixpunkt besitzt.

Neben $f = f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ betrachten wir die Abbildung f^* von R^n, die durch

$$x_\nu^* = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\lambda \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist; auch sie erfüllt, wie f, die Funktionalgleichung

$$f^*(x+k) = f^*(x) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big]. \tag{2*}$$

Ihre Verschiebungsvektoren $\mathfrak{v}^*(x)$ haben die Komponenten

$$v_\nu^*(x) = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\lambda - x_\nu \tag{11}$$

und verschwinden außer im Nullpunkt wegen (3*) nirgends. Für sie gilt

$$\mathfrak{v}^*(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) + \sum_\nu \Big(\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu\Big)\mathfrak{e}_\nu, \tag{6*}$$

wobei $\mathfrak{e}_\nu$ der Einheitsvektor der x_ν-Richtung ist. Dieselbe Gleichung gilt auch, auf Grund von (2), für den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}(x)$ von f:

$$\mathfrak{v}(x+k) = \mathfrak{v}(x) + \sum_\nu \Big(\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu\Big)\mathfrak{e}_\nu; \tag{6}$$

die Differenz $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}$ ist daher in R^n n-fach periodisch:

$$\mathfrak{v}^*(x+k) - \mathfrak{v}(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x), \tag{7}$$

ihr Wertevorrat wird für $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ erschöpft, mithin ist die Länge der Vektoren $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}$ beschränkt:

$$|\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x)| < C. \tag{8}$$

Dagegen strebt $|\mathfrak{v}^*(x)|$ mit wachsendem $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ gegen unendlich, denn es ist

$$|\mathfrak{v}^*(x)| \geqq r \cdot M, \tag{9}$$

wobei M das Minimum von $|\mathfrak{v}^*|$ auf der Einheitskugel bezeichnet, welches infolge (3) und (11) von 0 verschieden ist. Es gibt daher eine Zahl $p > 0$, so daß

$$|\mathfrak{v}^*(x)| > |\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x)| \tag{10}$$

für $r = p$ ist. Auf der Kugel S^{n-1} vom Radius p um den Nullpunkt sind wegen (10) die Vektoren $\mathfrak{v}^*$ und $\mathfrak{v}$ niemals diametral gerichtet. Hieraus ergibt sich, da nach (11) die Komponenten von $\mathfrak{v}^*$ lineare Funktionen der x_ν mit der Determinante $\Delta \neq 0$ sind, wörtlich wie am Schluß von § 2, daß ihre durch die Vektoren $\mathfrak{v}$ vermittelte Abbildung von S^{n-1} auf die Richtungskugel den Grad ± 1 hat, daß also f im Innern von S^{n-1} einen Fixpunkt besitzt.

Damit ist Satz II bewiesen. Die in ihm enthaltene, nur die Existenz mindestens eines Fixpunktes betreffende Aussage, läßt sich folgendermaßen formulieren:

Geht bei φ — außer den Kurven, die sich auf Punkte zusammenziehen lassen — keine Kurve in eine ihr homotope Kurve über, so existiert ein Fixpunkt.

Denn bei einer fixpunktfreien Abbildung ist $|A - E| = 0$, das Gleichungssystem

$$m_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\lambda}\, m_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt daher ein (ganzzahliges) Lösungssystem $(m_1, \ldots, m_n) \not\equiv (0, 0, \ldots, 0)$, und jede Kurve des Typus $\mathfrak{C}^* \sim \prod_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{C}_\lambda^{m_\lambda}$ ist ihrem Bilde homotop.

Zusatz: In dem zuletzt genannten Fall überlagert $x_\nu^* = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\nu$ in Verbindung mit einer Translation des R^n in Richtung derjenigen Parallelenschar, die den Kurven $\mathfrak{C}^*$ entspricht, eine fixpunktfreie Abbildung von T^n; ist $\Delta \neq 0$, so haben die von f^* überlagerten Abbildungen die Mindestzahl $|\Delta|$ von Fixpunkten.

§ 4.

Der n-dimensionale projektive Raum P^n wird von der Kugel S^n zweifach überlagert. Eine Abbildung φ von P^n induziert daher — vgl. §§ 2, 3 — auf S^n zwei Abbildungen f_1, f_2. Bezeichnet d die Transformation von S^n, die jeden Punkt in seinen Diametralpunkt überführt, so ist $f_2 = d f_1$.

Die Gesamtheit aller Abbildungen φ von P^n auf sich kann man in zwei Arten einteilen: die Abbildungen erster Art, bei denen die geschlossenen Kurven, die nicht homotop Null sind, — die sich also in

projektive Geraden deformieren lassen — in ebensolche Kurven übergehen, und die Abbildungen zweiter Art, bei denen die Bilder dieser Kurven sich auf Punkte zusammenziehen lassen.

Sind $x_1, x_2 = d(x_1)$; $x_1', x_2' = d(x_2')$ die Überlagerungspunkte von ξ bzw. von $\xi' = \varphi(\xi)$, und ist $f_1(x_1) = x_1'$, so ist bei einer Abbildung erster Art: $f_1(x_2) = x_2'$; denn wenn x_1 stetig nach $x_2 = d(x_1)$ läuft, durchläuft der überlagerte Punkt ξ eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, die nicht homotop Null ist; $\xi' = \varphi(\xi)$ durchläuft eine ebensolche Kurve, und der Überlagerungspunkt $f_1(x_1) = x_1'$ gelangt daher in seinem Diametralpunkt $d(x_1') = x_2'$. Da $f_2(x_1) = df_1(x_1) = d(x_1') = x_2'$ ist, so folgt analog $f_2(x_2) = x_1'$. Es ist also, falls φ von der ersten Art ist:

$$(1) \qquad x_1' = f_1(x_1),\ x_2' = f_1(x_2);\quad x_2' = f_2(x_1),\ x_1' = f_2(x_2).$$

Für eine Abbildung zweiter Art folgt dagegen durch die entsprechende Überlegung:

$$(2) \qquad x_1' = f_1(x_1) = f_1(x_2);\quad x_2' = f_2(x_1) = f_2(x_2).$$

φ sei nun von der *ersten Art*, η sei ein Fixpunkt, $y_1, y_2 = d(y_1)$ seien seine Überlagerungspunkte. Da entweder $f_1(y_1) = y_1$ oder $f_1(y_1) = y_2$ ist, folgt aus (1), daß entweder *beide Punkte* bei f_1 oder *beide Punkte* bei f_2 fest bleiben. Man kann daher die Fixpunkte in zwei Klassen F_1, F_2 einteilen, je nachdem sie Fixpunkte von f_1 oder von f_2 hervorrufen.

Es sei jetzt zunächst n *ungerade*; dann ist P^n orientierbar und der „Grad" a von φ ist definiert; er ist zugleich der Grad von f_1 und f_2 [15]). Ist $a \neq 1$, so haben daher [16]) f_1 und f_2 je wenigstens einen Fixpunkt, keine der Klassen F_1, F_2 ist leer, und es ist bewiesen:

Satz III. *Ist n ungerade, φ eine Abbildung erster Art von P^n auf sich und ihr Grad $a \neq 1$, so sind wenigstens zwei Fixpunkte vorhanden.*

Ist φ von der zweiten Art, so muß a *gerade* sein; denn f_1 läßt sich erzeugen durch Aufeinanderfolge 1. der Überlagerungsabbildung $x_i \to \xi$

---

[15]) Dies läßt sich, gleichgültig, ob φ von der ersten oder zweiten Art ist, so beweisen: bei einer simplizialen Approximation φ' werde der Punkt ξ' von den Simplexen $\overset{+}{\tau}{}^1, \overset{+}{\tau}{}^2, \ldots, \overset{+}{\tau}{}^p; \overset{-}{\tau}{}^1, \overset{-}{\tau}{}^2, \ldots, \overset{-}{\tau}{}^{p'}$ positiv bzw. negativ bedeckt, so daß also $p - p' = a$ ist. Ihre Überlagerungssimplexe $\overset{+}{\tau}{}^1_1, \overset{+}{\tau}{}^1_2, \overset{+}{\tau}{}^2_1, \overset{+}{\tau}{}^2_2, \ldots, \overset{+}{\tau}{}^p_2, \overset{-}{\tau}{}^1_1, \ldots, \overset{-}{\tau}{}^{p'}_1, \overset{-}{\tau}{}^{p'}_2$, und nur sie, bedecken bei der zu φ' gehörigen Approximation f_1' von f_1 zusammen die beiden über ξ' liegenden Punkte x_1', x_2' positiv bzw. negativ, so daß $p_1 + p_2 - p_1' - p_2 = 2a$ ist, wenn p_1, p_1', p_2, p_2' die Bedeckungszahlen von x_1' bzw. x_2' sind. Aus $p_1 - p_1' = p_2 - p_2'$ folgt daher $p_1 - p_1' = a$; d. h. a ist der Grad von f_1.

[16]) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911); vgl. Feigl wie unter [1]), wo auch Fixpunktsätze für P^n bewiesen sind.

$(i = 1, 2)$ von S^n auf P^n, die den Grad 2 hat, 2. aus der, wie aus (2) ersichtlich, *eindeutigen* Abbildung von P^n auf S^n, die dem Punkt ξ den Punkt $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ zuordnet. Mithin ist, da sich die Grade multiplizieren, a gerade; daher folgt aus Satz III:

Satz IIIa. *Ist n ungerade und φ eine Abbildung ungeraden, aber von 1 verschiedenen Grades von P^n auf sich, so hat φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Insbesondere hat also eine eineindeutige, die Orientierung umkehrende Transformation von P^n zwei Fixpunkte; denn bei ihr ist $a = -1$. In dem Spezialfall einer Kollineation äußert sich diese Tatsache darin, daß eine Matrix von negativer Determinante bei gerader Variablenzahl stets zwei voneinander verschiedene reelle charakteristische Wurzeln besitzt.

Bei *geradem n* haben wir zu berücksichtigen, daß P^n nicht orientierbar, der Grad von φ also nicht definiert ist; die Grade von f_1 und f_2 unterscheiden sich um den Faktor -1, da dies der Grad von d ist. Wir nennen den, in bezug auf das Vorzeichen unbestimmten, Grad von f_1 und f_2 den Grad von φ. Da eine fixpunktfreie Transformation von S^n bei geradem n den Grad -1 hat[16]), tritt an Stelle von Satz III jetzt

Satz IV. *Ist n gerade, φ eine Abbildung erster Art von P^n auf sich und der Grad $a \neq \pm 1$, so hat φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Ist n gerade und φ von der *zweiten Art*, so ist $a = 0$; denn nach (2) ist $f_1 = f_1 d$, nach dem Multiplikationssatz für die Grade ist also $a = -a$. Daher folgt aus IV:

Satz IVa[17]). *Ist n gerade und φ eine Abbildung von P^n auf sich, deren absolut genommener Grad $|a| > 1$ ist, so besitzt φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Zusatz: Auch zu den Sätzen dieses Paragraphen lassen sich leicht Abbildungen angeben, die die Mindestzahl 2 von Fixpunkten wirklich besitzen.

---

[17]) Auf diesen Satz wies mich Herr Brouwer in einem Gespräch hin, als ich ihm Satz IIIa mitteilte.

(Zusatz bei der Korrektur.) Vgl. die inzwischen erschienene Note von Brouwer: On transformations of projective spaces, Koninkl. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings **29** (1926).

(Eingegangen am 28. Oktober 1926.)