Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung als Ausgangspunkt für die Umkehrung des Variationsproblems und ihre damit zusammenhängende Bedeutung für die Integration der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von

Franz Paulus in Graz.

D. Hilbert hat in einer Vorlesung über Variationsrechnung im Sommer 1915 gezeigt, wie der aus einem Variationsproblem entspringende Minimalwert eines bestimmten Integrals als Ortsfunktion $J(x, y)$ berechnet werden kann, ohne daß man die Minimalkurven kennt: Es genügt dazu eine Lösung J der Hamiltonschen Differentialgleichung zu finden.

Mit der Aufstellung dieser partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hat man aber bekanntlich außerdem noch wesentliche Vorteile sowohl in bezug auf die Lösung des eigentlichen Variationsproblems, d. i. für die Integration der Lagrangeschen[1]) Differentialgleichung, als auch für diejenige der Hamiltonschen selbst gewonnen. Denn man braucht statt des allgemeinen Integrals der letzteren nur eine Lösung $J(x, y, \alpha)$, die einen willkürlichen Parameter α enthält, zu kennen, um unmittelbar das vollständige Integral der Lagrangeschen angeben zu können. Man erhält es in der Form: $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \text{konst.}$ Aber mehr noch: man kann umgekehrt bereits aus einem intermediären Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung leicht auch ein partikuläres der Hamiltonschen bestimmen. Wenn hierbei das erstere einen Parameter α enthält, dann wird ihn auch das partikuläre enthalten, und mit diesem läßt sich dann nicht nur wieder das vollständige Integral der Lagrangeschen[2]) (mit zwei

[1]) Richtiger wäre die Bezeichnung „Eulersche" Differentialgleichung, vgl. Bolza, Vorlesungen über Variationsrechnung, 1908, S. 24, Anm. 3.

[2]) Über eine andere Art, die Lagrangesche mittels einer intermediären vollständig zu integrieren, vgl. S. 361, letzter Abschnitt.

willkürlichen Konstanten), sondern vor allem auch das allgemeine Integral der Hamiltonschen (mit einer willkürlichen Funktion von einer Veränderlichen) ableiten.

Dieser interessante und für die Integration jeder der beiden Differentialgleichungen äußerst wichtige Zusammenhang zwischen der Lagrangeschen und der Hamiltonschen besteht natürlich nicht allgemein zwischen einer beliebigen gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung und einer irgendwie zugeordneten partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, es ist vielmehr dazu wesentlich, daß sie gerade durch ein Variationsproblem aufeinander bezogen sind. Bezüglich der Lagrangeschen hat nun schon Darboux gezeigt, daß sie trotz ihres besonderen Baues jede beliebige gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung sein kann, und weiteres auch, wie man dazu das Variationsproblem wirklich findet[3]). Wie steht es nun mit der Hamiltonschen? Wenn, wie in der oben erwähnten Vorlesung ohne näheren Beweis behauptet wurde, auch die Hamiltonsche vor der allgemeinen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung nichts weiter voraus hat, als daß die unbekannte Funktion in ihr selbst nicht auftritt, dann müßte sich auch jede solche partielle Differentialgleichung[4]) als Hamiltonsche auffassen lassen, also dazu ein Variationsproblem gehören und daraus weiter eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung als zugehörige Lagrangesche ableitbar sein, auf die man nach dem vorhergehenden die Integration der partiellen zurückführen könnte. In der Tat läßt sich dies, wie im folgenden gezeigt werden soll, immer ausführen, wenn nur die vorgelegte Differentialgleichung nicht linear ist, beide Ableitungen wirklich enthält und von der unbekannten Funktion selbst frei ist. Damit wird dann nicht nur bewiesen sein, daß die Hamiltonsche eine partielle Differentialgleichung allgemeinster Art ist, sondern man wird in dem Verfahren auch eine selbständige Integrationstheorie der allgemeinen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Veränderlichen erblicken können, da man ja hierbei den Standpunkt einnimmt, daß alle gewöhnlichen integrierbar sind.

Um eine Grundlage zu schaffen, auf die wir uns beim Rückweg leicht beziehen können, wird es angezeigt sein, aus der erwähnten Vorlesung

---

[3]) Darboux, Théorie des surfaces **3**, Nr. 604—606. Diese Umformung, d. i. die Ermittlung des Integranden F, erfordert aber die Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung. Einen anderen Weg findet man auf S. 360 der vorliegenden Arbeit.

[4]) Daß ohne diese Einschränkung zu jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ein gewisses, allerdings allgemeineres Variationsproblem gehört, dessen Extremalen mit den Charakteristiken der vorgegebenen Gleichung übereinstimmen, hat schon Kneser gezeigt, Jahresbericht d. deutschen Math.-Ver. **24**, S. 123. Vgl. auch von demselben Verfasser, Archiv der Math. u. Phys. (3), **24**, S. 26.

kurz den Gedankengang zu wiederholen, der von einem vorgegebenen Variationsproblem auf die Betrachtung der Hamiltonschen Differentialgleichung führt. Das Hauptmittel dabei ist der Hilbertsche Unabhängigkeitssatz.

Es soll also von der Aufgabe ausgegangen werden, y so als Funktion von x zu bestimmen, daß das Integral

$$\int_{a,A}^{x,y} F(y', y, x)\cdot dx = \text{Min.} \tag{1}$$

ein Minimum wird. Als seine obere Grenze nehmen wir bereits den veränderlichen Punkt x, y, da wir ja diesen Minimalwert als Ortsfunktion $J(x, y)$ ohne den Umweg über die Extremalen ermitteln wollen. Es sei nun p eine noch unbekannte Funktion von x und y; wir ersetzen dann die Veränderliche y' in $F(y', y, x)$ durch p und betrachten das Integral:

$$\int_{a,A}^{x,y} [F(p, y, x) + (y' - p)\cdot F_p(p, y, x)]\cdot dx, \tag{2}$$

wobei wir p als Funktion von x und y so zu wählen suchen, daß das Integral überhaupt vom Wege unabhängig wird, also für alle Kurven $y = y(x)$ denselben Wert annimmt. Dadurch wird es ja zu einer bloßen Funktion des Ortes: $C(x, y)$. Da der Integrand bereits eine lineare Funktion von y' ist von der Form: $F - p\cdot F_p + y'\cdot F_p$, so ist nach der Lagrangeschen Gleichung, die abweichend vom gewöhnlichen Fall jetzt identisch, d. i. für alle Funktionen y von x erfüllt sein muß, dazu nur notwendig:

$$\frac{\partial}{\partial x}\cdot F_p = \frac{\partial}{\partial y}(F - p\cdot F_p), \tag{3}$$

was natürlich als Bedingung für die zu suchende Funktion $p(x, y)$ aufzufassen ist. Die Beziehung (3) ist aber auch hinreichend, denn als Identität gewährleistet sie zugleich das Vorhandensein einer Funktion $C(x, y)$ so beschaffen, daß

$$F_p = \frac{\partial C}{\partial y}, \qquad F - p F_p = \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{4}$$

und wenn wir dies in unser Integral (2) einsetzen, so erweist es sich ohne weiteres vom Wege unabhängig; denn es folgt:

$$\int_{a,A}^{x,y} [F + (y' - p)\cdot F_p]dx = \int_{a,A}^{x,y} \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\cdot y'\right)dx = \int_{a,A}^{x,y} \frac{dC}{dx}dx = C(x, y) + \text{konst.}$$

Nun lautet die Bedingung (3) ausführlich geschrieben:

$$F_{pp}(p_x + p_y\cdot p) + p\cdot F_{py} + F_{px} - F_y = 0, \tag{5}$$

wobei die Indizes bei F die partiellen Ableitungen nach diesen Argumenten bedeuten sollen.

Diese partielle Differentialgleichung erster Ordnung für p steht in engster Beziehung zur Lagrangeschen Variationsableitung:

$$\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0,$$

oder ebenfalls ausgeführt:

$$F_{y'y'} \cdot y'' + F_{y'y} \cdot y' + F_{y'x} - F_y = 0. \tag{6}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die von den Minimalkurven $y = y(x)$ des Integrals (1) erfüllt werden muß.

Um nicht zu sehr aufgehalten zu werden, soll dieser Zusammenhang hier nur ohne Beweis erwähnt werden:

a) Wenn p ein Integral der partiellen Differentialgleichung (5) ist, dann ist jedes Integral der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = p(x, y)$ auch ein solches der Lagrangeschen Differentialgleichung zweiter Ordnung (6) oder es ist, wie man sagt, $y' = p(x, y)$ eine intermediäre Differentialgleichung der Lagrangeschen.

b) Umgekehrt: Wenn $y' = p(x, y)$ ein intermediäres Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung ist, dann genügt die Funktion $p(x, y)$ der zwei unabhängigen Veränderlichen x und y der partiellen Differentialgleichung (5).

Hinsichtlich unseres eigentlichen Zieles, der Bestimmung von $J(x, y)$, steht nun die Sache so: Das Integral (2) $C(x, y) = \int\limits_{a,A}^{x,y} [F + (y' - p) \cdot F_p] \cdot dx$ ist, wenn wir für p ein Integral der partiellen Differentialgleichung (5) einsetzen, vom Wege unabhängig. Wählen wir aber insbesondere für y eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung: $y' = p(x, y)$, so geht, weil nach dem früheren eine solche Lösung auch der Lagrangeschen Differentialgleichung (6) genügt, unser Integral gerade in den Minimalwert $J(x, y)$ des Integrals (1) über. Somit liefert das Integral (2) für alle Funktionen y von x die Minimalfunktion $J(x, y)$, es ist identisch: $C(x, y) = J(x, y)$, und es kann daher auch in den Gleichungen (4) C durch J ersetzt werden:

$$\frac{\partial J}{\partial x} = F - p F_p, \quad \frac{\partial J}{\partial y} = F_p. \tag{7}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind Funktionen von x, y und p, und wenn wir hieraus die Veränderliche p eliminieren, so gewinnen wir die Hamiltonsche Gleichung:

$$H(J_x, J_y, x, y) = 0 \tag{8}$$

zur Bestimmung der Ortsfunktion J.

Hierzu sei nur noch bemerkt, daß sich die Aufstellung der Hamiltonschen Differentialgleichung in einem besonderen Fall insoweit einfacher gestaltet, als man sich dabei um die partielle Differentialgleichung (5) gar nicht zu kümmern braucht. Man faßt einfach in dem Integranden von (1), d. i. in der gegebenen Funktion $F(y', y, x)$, y' als selbständige Veränderliche p auf, bildet die Gleichungen (7) und eliminiert aus ihnen das p.

Nun will ich zeigen, daß die Hamiltonsche Differentialgleichung bis auf den Umstand, daß darin die unbekannte Funktion J selbst nicht explizit vorkommt, keine besondere partielle Differentialgleichung erster Ordnung darstellt, sondern eine solche allgemeinster Art ist. Dann wird es doch möglich sein zu jeder solchen Differentialgleichung umgekehrt ein Variationsproblem zu konstruieren so beschaffen, daß man auf dem eben angegebenen Weg gerade auf die vorgegebene als Hamiltonsche Gleichung wieder zurückkommt.

Es sei also eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben von der Form (8): $H(J_x, J_y, x, y) = 0$.

Wenn wir annehmen, wir hätten eine Lösung $J(x, y)$ gefunden, so können wir mit den daraus zu bildenden Ableitungen J_x und J_y sofort den Gleichungen (7) entsprechend eine Funktion F bilden, nämlich: $F = J_x + p \cdot J_y$, worin wir zunächst für y' die Bezeichnung p beibehalten wollen. Aber diese Funktion würde uns, wenn die Veränderliche p nur in der angegebenen Form explizit auftritt, kein eigentliches Variationsproblem liefern, sondern es wäre vielmehr das Integral (1), d. i. hier $\int F dx = \int (J_x + p \cdot J_y) dx$ einfach vom Wege unabhängig. Nun wissen wir zwar, daß wir aus einem Integral $J(x, y, \alpha)$ der vorgelegten Differentialgleichung, sobald wir sie nämlich als Hamiltonsche auffassen dürfen, sofort, ohne die Funktion F überhaupt zu kennen, die allgemeine Lösung der Lagrangeschen Differentialgleichung und somit weiter auch, und zwar in ziemlich willkürlicher Weise, ein intermediäres Integral $y' = p(x, y)$ dieser letzteren ableiten können. Vermittels der Gleichung $p = p(x, y)$ oder besser, vermittels der daraus folgenden: $x = x(y, p)$ und $y = y(x, p)$ ließe sich nun in $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$ x oder y ganz oder teilweise durch p und die andere Koordinate ausdrücken. Aber die auf diese willkürliche Weise erhaltenen Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ werden im allgemeinen weder den Gleichungen (7) genügen, noch wird durch Elimination von p aus diesen Gleichungen die gegebene Gleichung (8) hervorgehen. Es fiele nicht schwer, einer dieser Bedingungen zu genügen, aber wie entspricht man beiden gleichzeitig?

Die Antwort hierauf ergibt sich fast ohne jede Schwierigkeit so: Es sei jetzt wieder p eine selbständige Veränderliche, jedenfalls wollen wir sie zunächst weder als Funktion von x, y auffassen, noch in irgendwelche Beziehung zur Lagrangeschen Gleichung (6) bringen. Ferner sollen jetzt $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ noch passend zu bestimmende, willkürliche Funktionen von x, y, p bedeuten, die unmittelbar, d. i. solange über p als Funktion von x, y nicht verfügt ist, nicht als partielle Ableitungen einer und derselben Funktion $J(x, y, p)$ vorausgesetzt werden. Sie sind nur eine kurze Bezeichnung für die auf der rechten Seite der Gleichungen (7) zu stehen kommenden Funktionen von x, y, p. Angenommen, diese wären uns bekannt, dann ergibt sich hieraus für den gesuchten Integranden $F(p, y, x)$ sofort die Form:

$$F(p, y, x) = J_x(x, y, p) + p \cdot J_y(x, y, p). \tag{9}$$

Aber dieser Ansatz führt von dem zugehörigen Variationsproblem $\int F(y', y, x) \cdot dx = \text{Min.}$, wo für p wieder y' gesetzt ist, dann und nur dann auf die vorgegebene Gleichung als Hamiltonsche, wenn erstens die rechten Seiten von (7) sich auf $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ reduzieren, und zweitens aus diesen Gleichungen durch Elimination von p die gegebene Gleichung erhalten wird. Bildet man die Ausdrücke: $F_p = \frac{\partial J_x}{\partial p} + J_y + p \frac{\partial J_y}{\partial p}$ und $F - p F_p = J_x + p \cdot J_y - p\left(\frac{\partial J_x}{\partial p} + J_y + p \frac{\partial J_y}{\partial p}\right) = J_x - p\left(\frac{\partial J_x}{\partial p} + p \frac{\partial J_y}{\partial p}\right)$, worin unter J_x und J_y durchweg die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ zu verstehen sind, so sieht man, daß diese der ersten Forderung dann und nur dann entsprechen, wenn

$$\frac{\partial J_x(x, y, p)}{\partial p} + p \frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p} = 0. \tag{10}$$

Die zweite Forderung ist gleichbedeutend damit, daß die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ die gegebene Differentialgleichung identisch in x, y und p erfüllen [5]). Um sie demgemäß zu bestimmen, lösen wir diese einfach nach einer der Ableitungen, z. B. nach J_x auf, schreiben sie also in der Form

$$J_x = f(J_y, x, y). \tag{11}$$

Betrachten wir jetzt J_y als irgendeine Funktion von x, y, p, so wird durch (11) auch J_x als Funktion dieser Argumente definiert, und nun ist natürlich kein Zweifel, daß diese beiden Funktionen J_x und J_y die Glei-

[5]) Ganz allgemein kann man nämlich bemerken, daß die durch Elimination von p aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, p)$ und $J_y = J_y(x, y, p)$ gewonnene Beziehung zwischen J_x, J_y, x, y von den Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ immer identisch erfüllt werden muß, nicht nur in x und y, sondern auch in p. Umgekehrt stellt eine solche Gleichung zwischen $J_x(x, y, p)$, $J_y(x, y, p)$ und x, y, die in x, y und p identisch erfüllt wird, von vornherein schon das Resultat der Elimination von p aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, p)$ und $J_y = J_y(x, y, p)$ dar.

chung (8) identisch in x, y und p erfüllen, da ja (11) nur eine andere Form dieser Gleichung ist. Um es noch deutlicher zu sehen, kann man bemerken, daß die Gleichung, die durch Einsetzen von (11) in (8) entsteht, nämlich:

$$H[f(J_y, x, y), J_y, x, y] = 0, \tag{12}$$

eine Identität in J_y, x, y ist. Sie muß also, wenn für J_y eine Funktion von x, y, p eingesetzt wird, auch eine solche in x, y und p sein. Andererseits verwandelt sich dadurch das erste Argument $f(J_y, x, y)$ gerade in unsere Funktion $J_x(x, y, p)$.

Die Funktion $J_y(x, y, p)$ steht noch zu unserer Verfügung, und wir wollen sie jetzt so wählen, daß auch die Gleichung (10) besteht. Dazu haben wir nur zu beachten, daß $\frac{\partial J_x(x, y, p)}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial J_y} \cdot \frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p}$ ist, wodurch diese Gleichung die Form erhält:

$$\frac{\partial J_y(x, y, p)}{\partial p} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial J_y} + p\right) = 0. \tag{13}$$

Die Annahme: $\frac{\partial J_y}{\partial p} = 0$ hat zur Folge, daß auch $\frac{\partial J_x}{\partial p} = 0$, es sind dann beide Funktionen von p unabhängig, und wir kommen auf den früheren, bereits als trivial erkannten Fall zurück. Übrigens würde er auf die Voraussetzung hinauslaufen, daß wir ein Integral der gegebenen Differentialgleichung kennen, was wir als überflüssig natürlich nicht annehmen wollen. Schließen wir ihn daher aus, so muß

$$\frac{\partial f}{\partial J_y} = -p, \tag{14}$$

und da die linke Seite eine bekannte Funktion von J_y, x, y ist, so erhält man durch Auflösen dieser Gleichung in der Tat J_y als Funktion von x, y und p.

Dieser Schluß setzt allerdings voraus, daß die Form (11) der gegebenen Differentialgleichung in J_y nicht linear ist. Da sie es in J_x bereits ist, so wäre andernfalls die gegebene Differentialgleichung überhaupt eine lineare. Wenn wir sie daher als nicht linear voraussetzen, so sind wir sicher, daß die Bestimmung der Funktion J_y nach der Gleichung (14) nicht versagen kann. Selbstverständlich müssen schon mit Rücksicht auf die früheren, an die Gleichung (11) geknüpften Schlüsse beide Ableitungen in der gegebenen Differentialgleichung wirklich vorkommen. Auf Differentialgleichungen, die nur eine der Ableitungen enthalten, und auf lineare wäre unser Verfahren also nicht anwendbar. Das kann auch nicht anders sein, weil es überhaupt keine Variationsprobleme gibt, die solche Gleichungen als Hamiltonsche bedingen würden. Ist nämlich der Integrand F von y'

unabhängig, dann kann der Minimalwert des Integrals $\int F\,dx$ von vornherein nicht mehr als Ortsfunktion von *zwei* unabhängigen Veränderlichen aufgefaßt werden. Denn die Lagrangesche Gleichung geht in eine gewöhnliche zwischen x und y über, so daß es nicht mehr eine zwei-parametrige Schar, sondern überhaupt nur eine ganz bestimmte Minimalkurve gibt. Ist aber der Integrand eine lineare Funktion von y': $F = A(x, y) + y' \cdot B(x, y)$, so muß nach der Lagrangeschen Gleichung: $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$; diese Gleichung ist entweder eine Bestimmungsgleichung für y als Funktion von x, dann schließen wir wie im ersten Fall; oder aber sie ist eine Identität, dann ist das Integral $\int F\,dx$ selbst vom Wege unabhängig und daher eine Ortsfunktion $J(x, y)$. Die Gleichungen (7), nämlich $J_x = A(x, y)$, $J_y = B(x, y)$, gestatten jetzt zwar die Bestimmung von J durch einfache Quadraturen, können aber nie auf eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung führen, weil das allgemeine Integral einer solchen eine willkürliche Funktion von einer Veränderlichen enthält, wohingegen das durch Quadraturen bestimmte J davon frei ist.

In diesen beiden ersten Fällen kann also von einer Hamiltonschen Gleichung überhaupt nicht die Rede sein.

Wenn schließlich F in y', d. i. bei anderer Bezeichnung, in p *nicht* linear ist, dann wird p auch in F_p noch vorkommen, also $F_{pp} \gtrless 0$ sein. Die Elimination von p aus den beiden Gleichungen (7) können wir uns so vorgenommen denken, daß wir p aus der zweiten als Funktion von J_y, x, y bestimmen und in die rechte Seite der ersten einsetzen. Die entstehende Gleichung ist bereits die Hamiltonsche, und sie wird gewiß weder linear noch von einer Ableitung frei sein können, wenn die partielle Ableitung der rechts stehenden Funktion von J_y, x, y nach J_y dieses noch enthält. Für diese Ableitung erhalten wir nun:

$$\frac{\partial}{\partial J_y}(F - p\,F_p) = \frac{\partial}{\partial p}(F - p\,F_p) \cdot \frac{\partial p}{\partial J_y},$$

oder, da:
$$\frac{\partial}{\partial p}(F - p\,F_p) = -\,p \cdot F_{pp}$$

und
$$\frac{\partial p}{\partial J_y} = \frac{1}{\frac{\partial J_y}{\partial p}} = \frac{1}{F_{pp}}:$$

$$\frac{\partial}{\partial J_y}(F - p \cdot F_p) = -\,p.$$

(Vgl. Gl. (14)!)

Die durch die zweite Gleichung (7) definierte Funktion p von J_y, x, y enthält aber J_y, weil $\frac{\partial p}{\partial J_y} = \frac{1}{F_{pp}} \gtrless 0$.

Zur Gleichung (14) sei noch bemerkt, daß wir natürlich ebensogut die gegebene Gleichung (8) nach J_y auflösen können, etwa in der Form:

$$J_y = g(J_x, x, y). \tag{11a}$$

An Stelle von (14) hätten wir dann zur Bestimmung der Funktion $J_x(x, y, p)$ eine etwas andere Gleichung erhalten, nämlich:

$$\frac{\partial g}{\partial J_x} = -\frac{1}{p}. \tag{14a}$$

Damit können wir nun den Integranden F unseres Variationsintegrals endgültig in der früher angegebenen Art zusammenstellen:

$$F(p, y, x) = J_x(x, y, p) + p \cdot J_y(x, y, p). \tag{9}$$

Die Gleichungen (7) nehmen jetzt wegen (10) in der Tat die Form an:

$$J_x = J_x(x, y, p), \qquad J_y = J_y(x, y, p), \tag{15}$$

wobei z. B. in der ersten Gleichung das J_x links natürlich ein Name für eine Veränderliche, rechts dagegen ein Funktionszeichen ist. Wir haben nur noch zu zeigen[6]), daß durch Elimination von p aus diesen beiden Gleichungen wirklich die gegebene Differentialgleichung (8) erhalten wird. Wenn wir z. B. aus der zweiten p als Funktion von J_y, x, y berechnen und in die erste einsetzen, so müßte sich also zwischen den Veränderlichen J_x, J_y, x, y genau der Zusammenhang (11) ergeben. Nun wird die Gleichung (11) der Voraussetzung nach auch erfüllt von den Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$, d. h. es ist:

$$J_x(x, y, p) = f[J_y(x, y, p), x, y]. \tag{16}$$

Die durch Auflösen der Gleichung $J_y = J_y(x y p)$ gewonnene Funktion p J_y, x, y hat aber der Natur der Sache nach die Eigenschaft, daß sie, in die Funktion $J_y(x, y, p)$ eingesetzt, diese identisch in die Veränderliche J_y überführt. Vermöge der Gleichung (16), wo ja p auf der rechten Seite nur in der Funktion J_y auftritt, und der ersten Gleichung (15) besteht somit tatsächlich zwischen den Veränderlichen J_x, J_y, x, y der durch die gegebene Differentialgleichung geforderte Zusammenhang.

Unsere Hauptaufgabe, zu einer beliebigen vorgegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung von der Form (8) das zugehörige Variationsproblem aufzustellen, ist damit vollständig gelöst: der Übergang erfordert nur die Ausführung von Eliminationen und Differentiationen, und es zeigt sich insbesondere, daß es zu jeder solchen nicht linearen Differential-

---

[6]) Da wir bereits wissen, daß die Funktionen $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$ die Gleichnng (11) identisch in x, y und p erfüllen, so folgt die Behauptung auch nach Anm. 5, S. 353.

gleichung, in der nur beide Ableitungen wirklich auftreten[7]), immer ein einziges, nicht triviales Variationsproblem gibt. Kurz zusammengefaßt stellt sich das Verfahren in einem besonderen Fall folgendermaßen dar: Man löst zunächst die gegebene Differentialgleichung entsprechend der Gleichung (11) nach einer der Ableitungen, z. B. nach J_x auf, bestimmt sodann nach Gleichung (14) J_y als Funktion von x, y, p und dazu aus Gleichung (11) auch J_x als Funktion derselben Argumente, und hat bereits in der Formel (9) den gesuchten Integranden des zugehörigen Variationsproblems. Offenbar kann man mit dieser Funktion F jetzt auch die Lagrangesche Variationsgleichung aufstellen, und somit kommen alle Integrationsvorteile der eingangs erwähnten Beziehung zwischen der Lagrangeschen und der Hamiltonschen Differentialgleichung auch der willkürlich vorgegebenen zugute. Hinsichtlich der Gültigkeit irgendwelcher Schlüsse besteht absolut kein Unterschied gegenüber dem Falle, daß das Variationsproblem das ursprünglich Gegebene wäre, und man erst hieraus unsere Differentialgleichung als Hamiltonsche abgeleitet hätte.

Auf diese letztere Bemerkung könnten wir uns z. B. berufen bei der Frage, ob dann, wenn zufällig ein partikuläres Integral $J(x, y)$ von (8) bekannt ist, erstens durch jede der Gleichungen: $J_x(x, y) = J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y) = J_y(x, y, p)$ p notwendig als dieselbe Funktion von x und y definiert wird, und zweitens, ob dieses $p(x, y)$ dann wirklich ein intermediäres Integral der Lagrangeschen ist. Denn diese Fragen können natürlich ebensogut aufgeworfen werden, wenn das Variationsproblem den Ausgangspunkt bildet. Die Antwort auf die erste gibt eine ganz ähnliche Überlegung wie die bei Gelegenheit der Gleichung (16) angestellte, wobei man nur zu beachten hat, daß ja für die partiellen Ableitungen $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$ eines jeden Integrals $J(x, y)$ der Zusammenhang (11) eine Identität in x und y wird. Faßt man jetzt die Gleichung (16) wieder als Definitionsgleichung für die Funktion $J_x(x, y, p)$ auf und berücksichtigt, daß die durch Auflösen der Gleichung $J_y(x, y) = J_y(x, y, p)$ gefundene Funktion $p(x, y)$, in die rechte Seite dieser Gleichung eingesetzt, sie identisch in die linke verwandelt, so entsteht doch aus der rechten Seite von (16) die rechte der Identität (11), und somit müssen auch die linken Seiten dieser beiden Gleichungen übereinstimmen, d. h. es führt dasselbe $p(x, y)$ auch die Funktion $J_x(x, y, p)$ identisch in $J_x(x, y)$ über.

Bezüglich der zweiten Frage läßt sich behaupten, daß diese Funktion $p(x, y)$ zunächst der partiellen Differentialgleichung (5) genügen muß; denn diese ist ja, als andere Form der Gleichung (3), die notwendige Bedingung für alle Funktionen $p(x, y)$, für die aus den rechten Seiten

[7]) Die erste Voraussetzung enthält eigentlich schon die zweite.

der Gleichungen (7), d. i. aus $J_x(x, y, p)$ und $J_y(x, y, p)$, Funktionen von x und y hervorgehen, die, wie $J_x(x, y)$ und $J_y(x, y)$, die partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion sind. Nach dem früheren ist dann aber $y' = p(x, y)$ eine intermediäre Differentialgleichung der Lagrangeschen.

Schließlich soll noch ein einfaches Beispiel hierzu betrachtet werden, das sämtliche Eliminationen und Integrationen vollständig auszuführen gestattet und vielleicht auch an sich ein gewisses Interesse bietet. Wie es in den Anwendungen meistens der Fall ist, läßt sich auch hier umgekehrt die Hamiltonsche Gleichung viel leichter integrieren als die Lagrangesche.

Es sei gegeben die partielle Differentialgleichung erster Ordnung: $J_x^2 + J_y^2 = x^2 + y^2$. Wir wollen sie zunächst nicht integrieren, sondern vorerst nach dem allgemein angegebenen Verfahren das zugehörige Variationsproblem aufsuchen. Man findet der Reihe nach: $J_x = \sqrt{x^2 + y^2 - J_y^2}$; $\frac{\partial J_x}{\partial J_y} = -\frac{J_y}{\sqrt{x^2 + y^2 - J_y^2}} = -p$ und hieraus: $J_y = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Dazu erhält man noch: $J_x = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$. Somit ist der gesuchte Integrand F: $F(p, y, x) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + p^2}$, und das Variationsproblem lautet, es soll das Integral: $\int\limits_{a,A}^{b,B} F(y', y, x)\, dx = \int\limits_{a,A}^{b,B} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \text{Min.}$ zu einem Minimum gemacht werden.

Geometrisch bedeutet dies die Aufgabe, zwei gegebene Punkte a, A und b, B durch eine Kurve so zu verbinden, daß die Integration über das Produkt: Abstand des jeweiligen Kurvenpunktes vom Koordinatenursprung in das Bogenelement an dieser Stelle (das Linienintegral des Radiusvektors) ein Minimum ergibt.

Als nächsten Schritt bilden wir aus unserem Integranden:

$$F(y', y, x) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + y'^2}$$

die Lagrangesche Differentialgleichung: $\frac{d}{dx} F_{y'} - F_y = 0$, wofür wir nach einiger Rechnung erhalten: $(x^2 + y^2) y'' + (xy' - y)(1 + y'^2) = 0$.

Eine direkte Integration dieser gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bietet schon nicht geringe Schwierigkeiten; wir wollen uns daher ein Integral der gegebenen partiellen Differentialgleichung zu verschaffen suchen.

Mit der auf den ersten Blick sich ergebenden Lösung $J = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ läßt sich nicht viel beginnen; um ein Integral zu bekommen, das noch einen Parameter enthält, setzen wir $J_x = \sqrt{x^2 - \alpha}$, $J_y = \sqrt{y^2 + \alpha}$. Dieser Ansatz befriedigt nicht nur die gegebene Differentialgleichung, sondern auch die Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial J_x}{\partial y} = \frac{\partial J_y}{\partial x}$. In der Tat erhalten wir daraus durch bloße Quadraturen ein Integral:

$$J(x, y, \alpha) = \frac{x}{2} \cdot \sqrt{x^2 - \alpha} - \frac{\alpha}{2} l(x + \sqrt{x^2 - \alpha}) + \frac{y}{2} \sqrt{y^2 + \alpha}$$
$$+ \frac{\alpha}{2} l(y + \sqrt{y^2 + \alpha}) + C.$$

Wie bereits erwähnt, gewinnt man aus diesem auch das allgemeine Integral der Lagrangeschen Differentialgleichung mit zwei unabhängigen Konstanten α und β, wenn man $\frac{\partial J}{\partial \alpha}$ gleich einer Konstanten c setzt. Bei Ausführung der Differentiation reduziert sich die Ableitung auf: $- l(x + \sqrt{x^2 - \alpha}) + l(y + \sqrt{y^2 + \alpha})$, so daß wir, wenn noch $c = \log \beta$ gesetzt wird, erhalten: $y + \sqrt{y^2 + \alpha} = \beta \cdot (x + \sqrt{x^2 - \alpha})$. Mittels Quadrieren kann diese Gleichung noch umgeformt werden in:

$$x^2 + \frac{\beta^2 - 1}{\beta} \cdot xy - y^2 = \alpha \cdot \left[\frac{\beta^2 + 1}{2\beta}\right]^2.$$

Das allgemeine Integral der Lagrangeschen ist also eine gleichseitige Hyperbel, die allerdings auch zerfallen kann.

Vergleichen wir die Funktionen $J_x = \sqrt{x^2 - \alpha}$, $J_y = \sqrt{y^2 + \alpha}$ mit den früher dafür gefundenen Ausdrücken durch x, y, p, so ergibt sich aus beiden übereinstimmend p mit $p = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$; die Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$ oder nach Trennung der Veränderlichen: $\frac{dy}{\sqrt{y^2 + \alpha}} = \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha}}$ gibt einerseits integriert offenbar dasselbe Resultat wie früher; andererseits läßt sich aus ihr eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung ableiten, indem man sie noch einmal nach x differenziert: $y'' = - \frac{x}{x^2 - \alpha} \cdot y' + \frac{y}{x^2 - \alpha}$, und aus beiden den Parameter α eliminiert. Man bekommt so aber genau die früher angeschriebene Lagrangesche Differentialgleichung zurück. Damit ist nicht nur sehr einfach bestätigt, daß unsere gleichseitige Hyperbel das allgemeine Integral der Lagrangeschen darstellt, sondern zugleich auch die Differentialgleichung $y' = \sqrt{\frac{y^2 + \alpha}{x^2 - \alpha}}$ als intermediäre dieser letzteren nachgewiesen.

Anhang.

Das erhaltene Resultat läßt sich noch auf die sehr übersichtliche und einfache Form bringen: Ist $J_x = H(J_y, x, y)$ die Hamiltonsche Gleichung, so ist der Integrand $F(p, y, x)$ des Minimumintegrals: $F(p, y, x) = H(J_y, x, y) + p \cdot J_y$, worin für J_y jene Funktion von x, y, p einzusetzen ist, für die die Gleichung: $\frac{\partial F}{\partial J_y} = 0$ identisch in x, y, p erfüllt wird.

Außerdem gestattet unser Verfahren noch folgende Anwendung: Nach Fußnote [3]), S. 349 können wir jede beliebig vorgegebene gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung als Lagrangesche eines gewissen Variationsproblems vom Typus $\int F(y', y, x)\,dx =$ Min. ansehen. Die Bestimmung des Integranden F aus einer linearen partiellen Differentialgleichung ist aber durch eine wesentlich einfachere ersetzbar in dem Falle, wo man die gegebene Differentialgleichung vollständig integrieren kann, und zwar dadurch, daß man nicht mit Darboux von der Differentialgleichung, sondern vielmehr von ihrem allgemeinen Integral ausgeht und daraus zunächst wieder die Hamiltonsche Differentialgleichung ermittelt. Die Aufgabe kann jetzt von vornherein so gestellt werden, es soll eine willkürlich gegebene zweiparametrige Kurvenschar $y = y(x, a, b)$ als Extremalenschar eines noch unbekannten Variationsproblems aufgefaßt werden, und hier hat man es überhaupt nicht mehr nötig, die Differentialgleichung dieser Kurvenschar abzuleiten. Der Übergang zur Hamiltonschen Gleichung ergibt sich sehr einfach aus der schon öfter erwähnten Tatsache, daß $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \beta$ das allgemeine Integral der Lagrangeschen ist, also dieselbe Kurvenschar darstellen muß wie $y = y(x, a, b)$. Nun bemerkt man gleich, daß man statt a und b zwei willkürliche, nur voneinander unabhängige Funktionen zweier weiteren Konstanten α und β einführen kann: $a = w(\alpha, \beta)$, $b = v(\alpha, \beta)$, und daß je nach Wahl dieser Funktionen auch die Auflösung von $y = y[x, w(\alpha, \beta), v(\alpha, \beta)]$ nach der Konstanten β in der Form: $\beta = \beta(y, x, \alpha)$ verschiedene Funktionen β ergeben wird. Aus der Identität: $\frac{\partial J}{\partial \alpha} \equiv \beta(y, x, \alpha)$ bestimmt sich nun durch eine einfache Quadratur eine Funktion $J(x, y, \alpha)$, nämlich: $J(x, y, \alpha) = \int \beta(x, y, \alpha) \cdot d\alpha + W(x, y)$, worin $W(x, y)$ eine willkürliche Funktion der beiden Argumente bedeutet. Die Funktion $J(x, y, \alpha)$ muß als Integral der Hamiltonschen Differentialgleichung partielle Ableitungen nach x und y haben, die diese Gleichung identisch in x, y, α erfüllen; folglich wird sie nach Fußnote [5]), S. 353 erhalten, wenn man aus den Gleichungen $J_x = J_x(x, y, \alpha)$ und $J_y = J_y(x, y, \alpha)$ den Parameter α eliminiert. Damit sind wir auf den unserer früheren Betrachtung zugrunde gelegten Ausgangspunkt zurückgekommen. Auch hier sieht man, daß die Hamiltonsche Differentialgleichung für verschiedene Funktionen $W(x, y)$ verschieden ausfallen wird. Es zeigt sich also in Übereinstimmung mit der Methode von Darboux, daß der Übergang von einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung oder von ihrem allgemeinen Integral zum Integranden F des Variationsintegrals nicht mehr eindeutig ist, sondern unendlich viele verschiedene Lösungen zuläßt.

Es liegt noch die Frage nahe, ob nicht auch dann, wenn eine vorgelegte gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung als intermediäre einer Lagrangeschen[8]) aufgefaßt werden soll, eine Vereinfachung in der Bestimmung des Integranden F gegeben ist. Die Antwort hierauf hängt wesentlich davon ab, ob in der gegebenen Differentialgleichung eine Konstante als willkürlicher Parameter anzusehen ist oder nicht. Im letzteren Falle gelingt die Aufstellung des zugehörigen Variationsproblems direkt in willkürlichster Weise durch bloße Differentiationen und Quadraturen, sie bietet aber kein besonderes Interesse, weil damit für die Integration dieser Differentialgleichung nichts gewonnen ist. Im ersteren hingegen ist mit der Bestimmung von F zugleich auch die Integration der gegebenen $y' = p(x, y, \alpha)$ geleistet, denn man weiß, daß der Multiplikator die Form hat: $F_{pp} \cdot p_\alpha$, aber hier stellen sich auch dem gewünschten Ziele scheinbar dieselben Schwierigkeiten entgegen wie bei der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Graz-Waltendorf, Ende Januar 1923.

[8]) Die Lagrangesche Differentialgleichung kann zwar ausnahmsweise in eine gewöhnliche Gleichung zwischen y und x ausarten, aber niemals selbst von der ersten Ordnung sein.

(Eingegangen am 20. November 1924.)