Werk

Titel: Thermoelastische Randwertaufgaben

Autor: Krzenziessa, K.

Jahr: 1926

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0025|LOG_0024

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Thermoelastische Randwertaufgaben.

Von

Roman Krzenziessa in Breslau.

§ 1.

Die thermoelastischen Differentialgleichungen.

Ein elastischer isotroper Körper werde einer beliebigen Erwärmung und zugleich einer elastischen Deformation unterworfen. Die Differentialgleichungen für diese thermoelastischen Erscheinungen sind von Duhamel[1]) und Franz Neumann[2]) unabhängig voneinander gefunden worden und lauten in moderner Bezeichnungsweise:

$$(1)\qquad \begin{cases} m\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - mX = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\Delta u - p\dfrac{\partial V}{\partial x}, \\ m\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - mY = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\Delta v - p\dfrac{\partial V}{\partial y}, \\ m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - mZ = (\lambda+\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial z} + \mu\Delta w - p\dfrac{\partial V}{\partial z}, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\Delta V - b^2\frac{\partial\theta}{\partial t}.$$

Hier bedeuten u, v, w die Verrückungskomponenten, V die Temperatur, X, Y, Z die Komponenten der äußeren Kraft, t die Zeit, m die Masse, θ die Volumdilatation $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$; λ und μ sind elastische, a^2 und b^2 thermische, ihrer Natur nach positive Konstanten, Δ ist der Laplacesche Operator, pV der sogenannte thermische Druck.

---

[1]) Mém. prés. à l'Académie de Paris 5 (1838), S. 440; Journal de l'école polytechnique 15, Heft 25.

[2]) Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, 1885, S. 107 ff.; Abhandl. der Berl. Akad. 1841, II.

Sind X_n, Y_n, Z_n die Komponenten der Oberflächenkräfte, und bedeutet n die nach außen gerichtete Normale, so gelten für die Punkte der Oberfläche die Gleichungen:

$$(3)\quad \begin{cases} X_n = \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - pV\right\}\cos(n,x) + \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cos(n,z), \\ Y_n = \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right\}\cos(n,x) + \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} - pV\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right\}\cos(n,z), \\ Z_n = \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right\}\cos(n,x) + \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right\}\cos(n,y) \\ \qquad\qquad + \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - pV\right\}\cos(n,z), \end{cases}$$

Die vier Unbekannten u, v, w und V sind durch Integration von (1), (2) unter gewissen vereinfachenden Annahmen zu bestimmen. Als Integrale erhält man je nach der Wahl der für die Oberfläche geltenden elastischen und thermischen Randbedingungen Funktionen, welche Orthogonal- bzw. Biorthogonalsysteme bilden und dadurch für die Entwicklung willkürlicher Funktionen in Fouriersche Reihen geeignet sein können. In der Literatur sind thermoelastische Randwertaufgaben dieser Art bereits behandelt bei

A. Kneser, Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, 2. Aufl., 1922, §§ 47 und 48;

L. Koschmieder, Anwendung der Integralgleichungen auf eine thermoelastische Aufgabe, Crelles Journal **143**, S. 285—293;

Duhamel, Journal de l'école polytechnique **15** (1837), Heft 25, S. 31 ff;

H. Laudien, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Funktionen spezieller orthogonaler und biorthogonaler Systeme, Diss. Breslau 1914, Kap. 4; Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermo-elastischen Problem, Crelles Journal **148**, S. 79—87;

W. Jaroschek, Entwicklung willkürlicher Funktionen nach den Gliedern biorthogonaler Funktionssysteme bei einigen thermomechanischen Aufgaben, Diss. Breslau 1918.

Man vgl. weiter:

A. Rosenblatt, Über das allgemeine thermoelastische Problem, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **29** (1910), S. 321—328.

Im folgenden soll mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen und der funktionentheoretischen Methode der Partialbruchzerlegung von Cauchy in einigen weiteren Randwertaufgaben am Stabe, an der Kreisscheibe und einem verallgemeinerten Grundgebiet untersucht werden, ob sich willkür-

liche Funktionen nach den Integralen der thermoelastischen Differentialgleichungen als Eigenfunktionen entwickeln lassen.

§ 2.

Beide Enden des Stabes sind fest, das eine Ende ist adiatherman bedeckt, am anderen Ende findet Strahlung statt.

Für den geraden Stab, der die Endkoordinaten $x = 0$ und $x = 1$ haben soll, vereinfachen sich die Gleichungen des § 1 bedeutend. Transversalschwingungen sollen ausgeschlossen werden; von äußeren Kräften soll abgesehen werden, ferner sollen die elastischen Gleichungen § 1 (1) in der Gleichgewichtsform angesetzt werden, was sich nach Duhamel[3]) rechtfertigen läßt. Dann kann p als konstant angesehen werden, und man erhält die Gleichungen

$$(1) \qquad (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p\frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial t},$$

$$X_n = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} - pV.$$

Die Integration von (1), (2) ist bei Jaroschek, Diss., Kap. 2 durchgeführt. Durch Anwendung der Bernoullischen Substitution

$$V(x, t) = X(x)\cdot T_1(t), \qquad u = \Xi(x)\cdot T_2(t)$$

findet man

$$T_1 = T_2 = e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t},$$

wo α_ν eine Konstante und

$$k^2 = \frac{\lambda + 2\mu + pb^2}{a^2(\lambda + 2\mu)}$$

ist. Es wird

$$X_\nu = A_1 \sin(\alpha_\nu x) + A_2 \cos(\alpha_\nu x) + A_3,$$

$$\Xi_\nu = \frac{pA_2}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\sin(\alpha_\nu x) - \frac{pA_1}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\cos(\alpha_\nu x) - \frac{A_3}{b^2}x + A_4.$$

Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1), (2) ist dann

$$V = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu V_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t}\{A_1 \sin(\alpha_\nu x) + A_2 \cos(\alpha_\nu x) + A_3\},$$

$$u = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu u_\nu = \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu e^{-\frac{\alpha_\nu^2}{k^2}t}\left\{\frac{pA_2}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\sin(\alpha_\nu x) - \frac{pA_1}{\alpha_\nu(\lambda + 2\mu)}\cos(\alpha_\nu x) - \frac{A_3}{b^2}x + A_4\right\}.$$

[3]) l. c. S. 31 u. 32.

Für jedes Stabende wird man eine elastische und eine thermische Randbedingung vorschreiben können, wodurch die Konstanten A_1, A_2, A_3, A_4 und α_ν bestimmt werden. Wir wollen nun untersuchen, ob sich ein beliebiger thermischer Anfangszustand

$$V|^{t=0} = \sum_\nu a_\nu X_\nu = F(x)$$

vorschreiben läßt, d. h. ob sich eine willkürliche Funktion nach den Funktionen X_ν entwickeln läßt.

Die Randbedingungen lauten:

$$\Xi(0) = \Xi(1) = 0,$$

(3); (4) $$X'(0) = 0; \quad X'(1) + hX(1) = 0.$$

Es wird dann, wenn unter C_ν eine Konstante verstanden wird:

$$X_\nu = C_\nu(\alpha_\nu q^2 \cos \alpha_\nu x + \sin \alpha_\nu),$$

$$\Xi_\nu = \frac{C_\nu}{b^2}(\sin \alpha_\nu x - x \sin \alpha_\nu).$$

Dabei ist

$$q^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{p b^2}$$

gesetzt, und die Größen α_ν sind Wurzeln der transzendenten Gleichung

(5) $$\omega(\alpha) = \alpha q^2 (h \cos \alpha - \alpha \sin \alpha) + h \sin \alpha = 0.$$

Diskussion der transzendenten Gleichung (5). — Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ hat keine rein imaginären Wurzeln. Wäre nämlich $\alpha = i\beta$ eine Wurzel, so wäre

$$\omega(i\beta) = i\beta q^2 (h \mathfrak{Cof} \beta + \beta \mathfrak{Sin} \beta) + hi \mathfrak{Sin} \beta = 0,$$

oder es müßte sein

$$h \frac{\mathfrak{Sin} \beta}{\beta} = - q^2 (h \mathfrak{Cof} \beta + \beta \mathfrak{Sin} \beta).$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist stets positiv, die rechte Seite negativ, womit der gewünschte Widerspruch hergeleitet ist.

Um zu beweisen, daß keine komplexen Wurzeln von (5) vorhanden sind, gehe ich aus von einer Funktion

$$U_\nu = \cos(\alpha_\nu x).$$

Denke ich mir die Differentialgleichung dieser Funktion

$$U_\nu'' + \alpha_\nu^2 U_\nu = 0$$

für zwei verschiedene Funktionen U_ν und U_σ gebildet und diese Gleichungen

durch die Greensche Operation und Integration von 0 bis 1 verbunden, so wird

$$(6) \qquad (U_\sigma U_\nu' - U_\nu U_\sigma')\Big|_0^1 + (\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 U_\sigma U_\nu\, dx = 0.$$

Nun ist

$$(7) \qquad U_\nu'(0) = 0,\ U_\sigma'(0) = 0$$

$$U_\sigma(1)\,U_\nu'(1) - U_\nu(1)\,U_\sigma'(1) = -\alpha_\nu \sin\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma + \alpha_\sigma \sin\alpha_\sigma \cos\alpha_\nu.$$

Nach der transzendenten Gleichung (5) ist

$$\alpha \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{\frac{1}{h} - \frac{1}{q^2\alpha^2}},$$

also wird

$$(8) \qquad U_\sigma(1)\,U_\nu'(1) - U_\nu(1)\,U_\sigma'(1) = \frac{\cos\alpha_\sigma \cos\alpha_\nu \cdot h^2 q^2 (\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)}{(h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2)}.$$

Wegen (7) und (8) geht Gleichung (6) über in

$$(9) \qquad h^2 q^2 \cos\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma + (h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2)\int_0^1 U_\nu U_\sigma\, dx = 0.$$

Mit einer komplexen Größe ist auch die konjugiert komplexe Größe Wurzel von (5). Wären nun α_ν und α_σ zwei konjugiert komplexe Wurzeln von (5),

$$\alpha_\nu = \beta + \gamma i, \qquad \alpha_\sigma = \beta - \gamma i,$$

so wären auch $U_\nu(x)$ und $U_\sigma(x)$, $\cos\alpha_\nu$ und $\cos\alpha_\sigma$ konjugiert komplex, also

$$U_\nu U_\sigma > 0, \qquad \cos\alpha_\nu \cos\alpha_\sigma > 0.$$

Ferner wäre

$$(h - q^2\alpha_\nu^2)(h - q^2\alpha_\sigma^2) = [h - q^2(\beta^2 - \gamma^2)]^2 + 4q^4\beta^2\gamma^2 > 0;$$

die ganze linke Seite von (9) wäre also > 0 und nicht $= 0$; folglich gibt es keine komplexen Wurzeln.

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ besitzt demnach nur reelle Wurzeln. Ist α_ν eine Wurzel von (5), so ist es auch $-\alpha_\nu$, die Wurzeln liegen symmetrisch zum Nullpunkt. Die Wurzel $\alpha_\nu = 0$ wird ausgeschlossen. Da Gleichung (5) in der Form

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\alpha}{h} - \frac{1}{q^2\alpha}$$

geschrieben werden kann, ergeben sich die positiven Wurzeln α_ν als Schnittpunktsabszissen der beiden Kurven

$$y = \operatorname{ctg}\alpha, \qquad \eta = \frac{\alpha}{h} - \frac{1}{q^2\alpha}.$$

h ist eine ihrer physikalischen Natur nach positive Größe. Graphische Darstellung für y und η ergibt folgende Darstellung der Wurzeln:

$$\alpha_n = n\pi + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Man findet mit Benutzung des obigen Wertes von X_ν

$$\int_0^1 X_\nu \, dx = C_\nu (q^2 \sin\alpha_\nu + \sin\alpha_\nu) = C_\nu (q^2+1) \sin\alpha_\nu .$$

Die Differentialgleichung der X_ν lautet demnach:

$$X_\nu'' + \alpha_\nu^2 X_\nu = C_\nu \alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu = \frac{\alpha_\nu^2}{1+q^2} \int_0^1 X_\nu \, dx . \tag{10}$$

Kombinieren wir damit die Differentialgleichung für eine andere Eigenfunktion X_σ

$$X_\sigma'' + \alpha_\sigma^2 X_\sigma = \frac{\alpha_\sigma^2}{1+q^2} \int_0^1 X_\sigma \, dx ,$$

so erhalten wir durch die Greensche Operation, Integration von 0 bis 1 und Beachtung der Randbedingungen (3), (4)

$$\int_0^1 X_\sigma \left[X_\nu - \frac{1}{1+q^2} \int_0^1 X_\nu \, dx \right] dx = 0 .$$

Nun ist

$$X_\nu - \frac{1}{1+q^2} \int_0^1 X_\nu \, dx = A_\nu \alpha_\nu q^2 \cos(\alpha_\nu x) .$$

Eine zu X_ν adjungierte Biorthogonalfunktion ist also, wenn wir von einem konstanten Faktor absehen,

$$U_\nu = \cos\alpha_\nu x .$$

Es ist dabei

$$U_\nu'' + \alpha_\nu^2 U_\nu = 0 , \tag{11}$$

$$U_\nu'(0) = 0; \qquad U_\nu(1) + \frac{U_\nu'(1)}{h} = -\frac{1}{q^2} \int_0^1 U_\nu \, dx . \tag{12); (13)}$$

Die Normierung des Biorthogonalsystems nehmen wir nach der Methode des Grenzüberganges von d'Alembert vor. Wir kombinieren die Differentialgleichung

$$U'' + \beta^2 U = 0 ,$$

wo β noch nicht eine Wurzel der transzendenten Gleichung (5) sei, mit

der Differentialgleichung (10) der X_ν und erhalten mit Benutzung von (3), (4) und (12)

$$U(1)\,X_\nu'(1) - X_\nu(1)\,U'(1) + (\alpha_\nu^2 - \beta^2)\int_0^1 X_\nu U\,dx = C_\nu\,\alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu \int_0^1 U\,dx\,,$$

$$\int_0^1 X_\nu U\,dx = \frac{C_\nu\,\alpha_\nu^2 \sin\alpha_\nu\,\omega(\beta)}{h\beta\,(\alpha_\nu^2 - \beta^2)}\,.$$

Wenn wir nun β gegen α_ν konvergieren lassen und normieren, wird

$$\int_0^1 X_\nu\,U_\nu\,dx = \frac{C_\nu\,\alpha_\nu \sin\alpha_\nu \cdot \omega'(\alpha_\nu)}{h \cdot 2\alpha_\nu \cdot (-1)} = 1\,,$$

d. h.

$$C_\nu = \frac{-2h}{\sin\alpha_\nu \cdot \omega'(\alpha_\nu)}\,. \tag{14}$$

Aufstellung der Integralgleichungen und des Kernes $G(x,\xi)$. Wir definieren einen Kern $G(x,\xi)$ durch

$$G''(x,\xi) + \varkappa^2\,G(x,\xi) = \varkappa^2\,M\,,^{4}) \tag{15}$$

$$G'(x,\xi)\Big|_{x=\xi+0}^{x=\xi-0} = 1\,, \tag{16}$$

wo $\varkappa$ ein willkürlicher, von sämtlichen α_ν verschiedener Parameter und M eine zunächst noch unbestimmte Konstante ist. Kombinieren wir (11) und (16) und berücksichtigen die Gleichungen (7), (16) und

$$U_\nu(0) = 1\,,$$

so erhalten wir

$$G(1,\xi)\,U_\nu'(1) - U_\nu(1)\,G'(1,\xi) + G'(0,\xi) + (\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)\int_0^1 U_\nu\,G\,dx + \varkappa^2 M \int_0^1 U_\nu\,dx = U_\nu(\xi)\,.$$

Wir legen zunächst der Größe $G(x,\xi)$ die den Randbedingungen (3), (4) der Funktion X_ν entsprechenden Bedingungen

$$G'(0,\xi) = 0\,; \qquad G'(1,\xi) + h\,G(1,\xi) = 0 \tag{17); (18)}$$

auf. Dann geht die letzte Gleichung über in

$$-\alpha_\nu \sin\alpha_\nu\,G(1,\xi) + h\cos\alpha_\nu\,G(1,\xi) + \lambda_\nu \int_0^1 G\,U_\nu\,dx + \frac{\varkappa^2 M \sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu} = U_\nu(\xi)\,,$$

wo

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu^2 - \varkappa^2$$

---

[4]) Der Strich bezeichne stets die Differentiation nach dem ersten Argument in G.

gesetzt ist. Aus (5) folgt

$$h\cos\alpha_\nu - \alpha_\nu \sin\alpha_\nu = \frac{-h\sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu q^2},$$

womit wir erhalten

$$-\frac{h\,G(1,\xi)\sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu q^2} + \lambda_\nu \int_0^1 G U_\nu\, dx + \frac{\varkappa^2 M \sin\alpha_\nu}{\alpha_\nu} = U_\nu(\xi).$$

Fordern wir noch

$$\varkappa^2 M - \frac{h}{q^2} G(1,\xi) = 0, \tag{19}$$

so bekommen wir die Integralgleichung

$$U_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x,\xi)\, U_\nu(x)\, dx.$$

Der Kern $G(x,\xi)$ hat die Gestalt

$$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = c_1 \cos\varkappa x + c_2 \sin\varkappa x + M,$$
$$\underset{x>\xi}{G(x,\xi)} = c_3 \cos\varkappa x + c_4 \sin\varkappa x + M.$$

Die Gleichungen (16), (17), (18), (19) und die Stetigkeit von $G(x,\xi)$ für $x=\xi$ dienen zur Bestimmung der fünf Konstanten c_1, c_2, c_3, c_4 und M. Man findet

$$c_1 = \frac{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-\xi) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-\xi)}{\varkappa\,\omega(\varkappa)},$$
$$c_2 = 0,$$
$$c_3 = \frac{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa + \varkappa q^2 h \sin\varkappa}{\varkappa\,\omega(\varkappa)} \cdot \cos\varkappa\xi,$$
$$c_4 = -\frac{\cos\varkappa\xi}{\varkappa}, \qquad M = \frac{h\cos\varkappa\xi}{\varkappa\,\omega(\varkappa)}.$$

Für den Kern bekommt man dann die Ausdrücke:

$$\underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \frac{h\cos\varkappa\xi + \cos\varkappa x\,\{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-\xi) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-\xi)\}}{\varkappa\,\omega(\varkappa)},$$
$$\underset{x>\xi}{G(x,\xi)} = \frac{h\cos\varkappa\xi + \cos\varkappa\xi\,\{(\varkappa^2 q^2 - h)\cos\varkappa(1-x) + \varkappa q^2 h \sin\varkappa(1-x)\}}{\varkappa\,\omega(\varkappa)}.$$

Wegen des Summanden M ist der Kern $G(x,\xi)$ unsymmetrisch.

Als Funktion von ξ erfüllt der Kern die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 G(x,\xi)}{\partial\xi^2} + \varkappa^2 G(x,\xi) = 0; \qquad \left.\frac{\partial G}{\partial\xi}\right|_{\xi=x+0}^{\xi=x-0} = 1. \tag{20); (21)}$$

Ferner genügt er Randbedingungen, die den Gleichungen (12), (13) bei der Funktion U_ν entsprechen:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial\xi}\right|^{\xi=0} = 0; \qquad G(x,1) + \frac{1}{h}\left.\frac{dG}{d\xi}\right|^{\xi=1} = -\frac{1}{q^2}\int_0^1 G(x,\xi)\, d\xi. \tag{22); (23)}$$

Verbindet man die Gleichungen (10) und (20) durch die Greensche Operation, so gelangt man mit Hilfe der Gleichungen (3), (4), (21), (22) und (23) zur Integralgleichung

$$X_\nu(x) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x, \xi)\, X_\nu(\xi)\, d\xi .$$

Vertauschen wir hier noch x und ξ, so nehmen die Integralgleichungen für X_ν und U_ν folgende Gestalt an:

$$X_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(\xi, x)\, X_\nu(x)\, dx ,$$

$$U_\nu(\xi) = \lambda_\nu \int_0^1 G(x, \xi)\, U_\nu(x)\, dx .$$

Funktionentheoretischer Beweis der bilinearen Formel. Wir zerlegen $G(x, \xi)$ in Partialbrüche. Für $x < \xi$ setzen wir

$$\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \frac{h \cos z\xi + \cos zx \{(z^2 q^2 - h) \cos z(1-\xi) + z q^2 h \sin z(1-\xi)\}}{z \cdot \omega(z) \cdot (z-\varkappa)} .$$

Setzen wir $z = u + iv$, so ist $\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}$ eine meromorphe Funktion von z. Die Nullstellen des Nenners sind $z = 0$, $z = \varkappa$, $z = \pm \alpha_\nu$. Wir betrachten nun das Konturintegral $\int_{R_n} \frac{f_1(z)\, dz}{z(z-\varkappa)}$. Die Kontur R_n sei ein Rechteck, das die ersten $2n$ Pole von $\frac{1}{\omega(z)}$ und den Pol $z = \varkappa$ umfaßt. Die vertikalen Seiten mögen zwischen zwei Polen α_ν und $\alpha_{\nu+1}$ die u-Achse schneiden, so daß auf der Kontur kein Pol liegt. Nach dem Residuensatze von Cauchy ist dann

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{R_n} \frac{f_1(z)\, dz}{z(z-\varkappa)} = \sum \operatorname{Res} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} .$$

Die Stelle $z = 0$ ist kein Pol von $\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}$, also

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = 0 .$$

Ferner ist

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \underset{x<\xi}{G(x, \xi; \varkappa)} .$$

Für das Residuum an der Stelle $z = \alpha_\nu$ erhalte ich

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)} = \frac{h \cos \alpha_\nu \xi + \cos \alpha_\nu x \{(\alpha_\nu^2 q^2 - h) \cos \alpha_\nu (1-\xi) + \alpha_\nu q^2 h \sin \alpha_\nu (1-\xi)\}}{\alpha_\nu\, \omega'(\alpha_\nu) \cdot (\alpha_\nu - \varkappa)} .$$

Lösen wir $\cos\alpha_\nu(1-\xi)$ und $\sin\alpha_\nu(1-\xi)$ nach dem Additionstheorem auf, so fallen wegen $\omega(\alpha_\nu)=0$ drei Glieder der geschweiften Klammer weg, und es bleibt

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}=\frac{h\cos\alpha_\nu\xi+\cos\alpha_\nu\xi\cos\alpha_\nu x\{-h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu^2q^2\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin\alpha_\nu\}}{\alpha_\nu\cdot\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Nun ist mit Benutzung von (5)

$$\begin{aligned}&-h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu^2q^2\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin\alpha_\nu\\&=\frac{1}{\sin\alpha_\nu}[(\alpha_\nu^2q^2-h)\sin\alpha_\nu\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin^2\alpha_\nu]\\&=\frac{1}{\sin\alpha_\nu}[\cos\alpha_\nu\cdot\alpha_\nu q^2h\cos\alpha_\nu+\alpha_\nu q^2h\sin^2\alpha_\nu]=\frac{\alpha_\nu q^2h}{\sin\alpha_\nu}.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes wird

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}=\frac{\cos\alpha_\nu\xi\left\{h+\frac{\alpha_\nu q^2h}{\sin\alpha_\nu}\cdot\cos\alpha_\nu x\right\}}{\alpha_\nu\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)}=\frac{h\cos\alpha_\nu\xi\{\alpha_\nu q^2\cos\alpha_\nu x+\sin\alpha_\nu\}}{\alpha_\nu\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)\sin\alpha_\nu}.$$

Mit Beachtung von (14) wird also

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{2\alpha_\nu(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Ersetze ich hier α_ν durch $-\alpha_\nu$, so erhalte ich

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{2\alpha_\nu(\alpha_\nu+\varkappa)}.$$

Durch Zusammenfassung je zweier Residuen für $z=+\alpha_\nu$ und $z=-\alpha_\nu$ ergibt sich

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}+\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu}\frac{f_1(z)}{z(z-\varkappa)}=-\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Man erhält demnach

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)}=\underset{x<\xi}{G(x,\xi;\varkappa)}-\sum_{\nu=1}^{n}\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Im Falle $x>\xi$ sei

$$\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=\frac{h\cos z\xi+\cos z\xi\{(z^2q^2-h)\cos z(1-x)+zq^2h\sin z(1-x)\}}{z\cdot\omega(z)\cdot(z-\varkappa)}.$$

Es ist

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=0,\qquad\operatorname*{Res}_{z=\varkappa}\frac{f_2(z)}{z(z-\varkappa)}=\underset{x>\xi}{G(x,\xi;\varkappa)}.$$

Da, abgesehen vom ersten Summanden, $f_2(z)$ aus $f_1(z)$ durch Ver-

tauschung von x und ξ hervorgeht, findet man im Falle $x > \xi$ für $z = \alpha_\nu$ dasselbe Residuum wie im Falle $x < \xi$. Es wird also

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{R_n}\frac{f_2(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = \underset{x>\xi}{G(x,\xi;\varkappa)} - \sum_{\nu=1}^{n}\frac{U_\nu(\xi)\,X_\nu(x)}{\alpha_\nu^2-\varkappa^2}.$$

Wir lassen nun die Integrationskontur immer weiter anwachsen und erhalten in der Grenze

$$(24)\qquad \underset{x<\xi}{G(x,\xi)} = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{U_\nu(\xi)\,X_\nu(x)}{\lambda_\nu} + \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)}.$$

Eine entsprechende Formel gilt für den Fall $x > \xi$.

Die bilineare Entwicklung des Kernes ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß $|f_1(z)|$ und $|f_2(z)|$ auf großen Konturen beschränkt sind; denn dann ist

$$(25)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_1(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\int_{R_n}\frac{f_2(z)\,dz}{z(z-\varkappa)} = 0.$$

Wir schätzen zunächst $f_1(z)$ ab. Es war

$$f_1(z) = \frac{h\cos z\xi + \cos zx\,\{(z^2q^2-h)\cos z(1-\xi) + zq^2h\sin z(1-\xi)\}}{\omega(z)}.$$

Bezeichnen wir den Zähler von $f_1(z)$ mit $Z_1(z)$, so ist

$$|Z_1(z)| < h|\cos z\xi|$$
$$+|\cos zx|\cdot\{h|\cos z(1-\xi)|+|z^2|q^2|\cos z(1-\xi)|+|z|q^2h|\sin z(1-\xi)|\}.$$

Nun ist

$$|\sin(u+iv)| = \sqrt{\sin^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v} \leqq \sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2 v},$$
$$|\cos(u+iv)| = \sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v} \leqq \sqrt{1+\mathfrak{Sin}^2 v},$$

d. h.

$$(26),(27),(28)\qquad |\sin z| < \mathfrak{Cof}\,v, \qquad |\cos z| < \mathfrak{Cof}\,v, \qquad |\sin z| \geqq |\mathfrak{Sin}\,v|.$$

Mit Benutzung von (26) und (27) erhält man die Ungleichung

$$|Z_1(z)| \leqq h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi + \mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi)(h+|z^2|q^2+|z|q^2h).$$

Wenn $|z| > 1$ gewählt wird, ist

$$h < h|z^2|, \qquad |z|q^2h < |z^2|q^2h;$$

also

$$|Z_1(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi + \mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi)\cdot|z^2|(h+q^2+hq^2).$$

Wegen $\xi \leqq 1$ ist

$$\mathfrak{Cof}\,v\xi \leqq \mathfrak{Cof}\,v.$$

Ferner ist

$$\mathfrak{Cof}\,vx\,\mathfrak{Cof}\,v(1-\xi) = \frac{1}{2}[\mathfrak{Cof}\,v(x+1-\xi) + \mathfrak{Cof}\,v(x-1+\xi)].$$

Wegen $x \leqq \xi$ ist $x+1-\xi \leqq 1$, $x-1+\xi \leqq 2\xi-1 \leqq 1$. Es ist demnach

$$\mathfrak{Cof}\, v x\, \mathfrak{Cof}\, v(1-\xi) \leqq \left[\tfrac{1}{2}(\mathfrak{Cof}\, v + \mathfrak{Cof}\, v) = \mathfrak{Cof}\, v\right].$$

Setzen wir diese Abschätzungen ein, so wird

$$|Z_1(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\, v + |z^2|(h+q^2+hq^2)\,\mathfrak{Cof}\, v. \tag{29}$$

Wir schätzen nun den Nenner $\omega(z)$ von $f_1(z)$ ab, zunächst auf den Vertikalseiten des Rechtecks R_n; wir nehmen an, daß diese durch die Punkte $\pm(n+\frac{1}{2})\pi$ der u-Achse hindurchgehen, dann ist

$$\begin{aligned}|\omega(z)| &= |(h-z^2q^2)\sin z + zq^2h\cos z| \\ &> \big||\sin z|\,|q^2z^2-h| - |z|\,q^2h\,|\sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v}|\big|.\end{aligned}$$

Wegen $u = \pm(n+\frac{1}{2})\pi$ ist $\cos u = 0$, $|\sin z| = \mathfrak{Cof}\, v$, $|\cos z| = |\mathfrak{Sin}\, v|$,

$$\begin{aligned}|\omega(z)| &> \big|\mathfrak{Cof}\, v \cdot |q^2z^2-h| - |z|\,q^2h\,|\mathfrak{Sin}\, v|\big| \\ &> |z^2|\cdot\mathfrak{Cof}\, v\left|\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right| - \frac{q^2h\,|\mathfrak{Tg}\, v|}{|z|}\right|.\end{aligned}$$

Für hinreichend große Werte von u ist der Minuendus größer als der Subtrahendus, so daß wir die Absolutstriche der Differenz weglassen dürfen. Wir verkleinern die Differenz, indem wir den Minuendus verkleinern und den Subtrahendus vergrößern, dabei aber darauf achten, daß die Differenz stets positiv bleibt, was durch hinreichend große Wahl von u und damit von $|z|$ zu ermöglichen ist. Es wird dann also

$$|\omega(z)| > |z^2|\,\mathfrak{Cof}\, v\left\{q^2 - \frac{h}{|z^2|} - \frac{q^2h}{|z|}\right\}. \tag{30}$$

Die Gleichungen (29) und (30) ergeben jetzt für die Vertikalseiten

$$|f_1(z)| < \frac{\frac{h}{|z^2|} + (h+q^2+hq^2)}{q^2 - \frac{h}{|z^2|} - \frac{q^2h}{|z|}}.$$

Hieraus folgt, daß bei hinreichend großer Wahl von u $f_1(z)$ auf den Vertikalseiten beschränkt ist.

Auf den beiden Horizontalseiten ist

$$|\omega(z)| > |z^2|\cdot\left||\sin z|\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right| - \frac{q^2h\,|\sqrt{\cos^2 u + \mathfrak{Sin}^2 v}|}{|z|}\right|.$$

Wir verkleinern wieder den Minuendus und vergrößern den Subtrahendus, lassen dabei aber die Differenz stets positiv bleiben.

Mit Benutzung von (27) und (28) erhalten wir

$$|\omega(z)| > |z^2|\,\mathfrak{Cof}\, v\left\{\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right|\,|\mathfrak{Tg}\, v| - \frac{q^2h}{|z|}\right\}. \tag{31}$$

Nach (29) und (31) ist also auf den Horizontalseiten von R_n

$$|f_1(z)| < \frac{\frac{h}{|z^2|}+(h+q^2+hq^2)}{\left|q^2-\frac{h}{z^2}\right||\mathfrak{Tg}\,v|-\frac{q^2h}{|z|}} < \frac{\frac{h}{|z^2|}+(h+q^2+hq^2)}{q^2|\mathfrak{Tg}\,v|-\frac{h}{|z^2|}-\frac{q^2h}{|z|}}.$$

Wenn $|v|$, also auch $|z|$ hinreichend groß ist, folgt hieraus, daß $|f_1(z)|$ auch auf den Horizontalseiten von R_n beschränkt ist.

Wir wollen dasselbe für

$$f_2(z)=\frac{h\cos z\xi+\cos z\xi\{(z^2q^2-h)\cos z(1-x)+zq^2h\sin z(1-x)\}}{\omega(z)}$$

beweisen. Der Nenner $\omega(z)$ ist bereits abgeschätzt. Wenn $Z_2(z)$ den Zähler von $f_2(z)$ bedeutet, erhalten wir wie bei $f_1(z)$

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi+\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)\{h+|z^2|q^2+|z|q^2h\}.$$

Für $|z|>1$ ist wieder $h<h|z^2|$, $|z|q^2h<|z^2|q^2h$, also

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v\xi+|z^2|\,\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)\cdot(h+q^2+hq^2).$$

Wegen $\xi\leqq 1$ ist $\mathfrak{Cof}\,v\xi\leqq\mathfrak{Cof}\,v$; ferner ist

$$\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)=\frac{1}{2}\{\mathfrak{Cof}\,v(\xi+1-x)+\mathfrak{Cof}\,v(\xi-1+x)\}.$$

Da jetzt $x\geqq\xi$ ist, ist $\xi+1-x\leqq 1$, $\xi-1+x\leqq 1$, also

$$\mathfrak{Cof}\,v(\xi+1-x)\leqq\mathfrak{Cof}\,v,\qquad \mathfrak{Cof}\,v(\xi-1+x)\leqq\mathfrak{Cof}\,v,$$
$$\mathfrak{Cof}\,v\xi\,\mathfrak{Cof}\,v(1-x)<\mathfrak{Cof}\,v.$$

Durch Einsetzen dieser Abschätzungen folgt die Ungleichung

$$|Z_2(z)| < h\,\mathfrak{Cof}\,v+|z^2|\cdot(h+q^2+hq^2)\,\mathfrak{Cof}\,v.$$

Wir sind also zu derselben Schranke gelangt wie bei $|Z_1(z)|$; es ist also sowohl auf den Horizontalseiten als auch auf den Vertikalseiten von R_n $f_2(z)$ auf großen Konturen beschränkt. Es gelten demnach die Gleichungen (25), womit (24) übergeht in

$$G(x,\xi)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{U_\nu(\xi)X_\nu(x)}{\lambda_\nu}. \tag{32}$$

Damit ist die bilineare Formel bewiesen. Wir wollen zeigen, daß die Reihe auf der rechten Seite von (32) gleichmäßig konvergiert. Für große Werte $\alpha_n=n\pi+\varepsilon_n$ ist

$$\sin(n\pi+\varepsilon_n)=(-1)^n\sin\varepsilon_n,\qquad \cos(n\pi+\varepsilon_n)=(-1)^n\cos\varepsilon_n,$$

also

$$\sin\alpha_n\,\omega'(\alpha_n)=-\alpha_n^2q^2\sin\varepsilon_n\cos\varepsilon_n-\alpha_nq^2(h+2)\sin^2\varepsilon_n$$
$$+(q^2+1)h\sin\varepsilon_n\cos\varepsilon_n.$$

Diese Gleichung können wir mit Benutzung der aus Gleichung (5) folgenden Relation

$$\alpha_n^2 q^2 \sin \alpha_n = \alpha_n q^2 h \cos \alpha_n + h \sin \alpha_n$$

umformen in

$$\sin \alpha_n \cdot \omega'(\alpha_n) = -\alpha_n q^2 (h + 2 \sin^2 \varepsilon_n) + q^2 h \sin \varepsilon_n \cos \varepsilon_n .$$

Für große α_n, d. h. kleine ε_n ist nun das erste Glied der rechten Seite groß, das zweite Glied ist klein. Es ist also dann $\frac{1}{\sin \alpha_n \omega'(\alpha_n)}$ und wegen (14) auch C_n klein. Alle C_n sind beschränkt, unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Wenn wir das Liouvillesche Zeichen Ψ für eine beschränkte Größe einführen, ist also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{U_\nu(\xi) X_\nu(x)}{\lambda_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{\alpha_\nu^2 - \varkappa^2} .$$

Da die Wurzeln α_ν im wesentlichen wie die natürlichen Zahlen fortschreiten, konvergiert diese Reihe absolut und gleichmäßig.

Entwicklung quellenmäßiger Funktionen. — Da der Kern $G(x, \xi)$ unsymmetrisch ist, können wir quellenmäßige Funktionen erster und zweiter Art[5]) definieren.

a) Wir setzen an

$$F(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi .$$

Wegen (17) und (18) ist auch

$$F'(0) = 0 ; \qquad F'(1) + h F(1) = 0 ,$$

$$F''(x) = \int_0^1 G''(x, \xi) f(\xi) \, d\xi - f(x) .$$

Nun ist

$$G''(x, \xi) + \varkappa^2 G(x, \xi) = \varkappa^2 M = \frac{h}{q^2} G(1, \xi) ,$$

also ist

$$F''(x) = -\varkappa^2 \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi + \frac{h}{q^2} \int_0^1 G(1, \xi) f(\xi) \, d\xi - f(x)$$

$$= -\varkappa^2 F(x) + \frac{h}{q^2} F(1) - f(x) .$$

Die Differentialgleichung der quellenmäßigen Funktionen erster Art ist also

$$F''(x) + \varkappa^2 F(x) - \frac{h}{q^2} F(1) = -f(x) .$$

---

[5]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 47.

Es sei nun Φ eine Funktion, welche die Randbedingungen

(33), (34) $$\Phi'(0)=0, \quad \Phi'(1)+h\Phi(1)=0$$

erfüllt und selbst mit der ersten Ableitung stetig ist, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht. Wir definieren dann die Funktion $f(\xi)$ durch die Gleichung

$$\Phi''(\xi)+\varkappa^2\Phi(\xi)-\frac{h}{q^2}\Phi(1)=-f(\xi).$$

In Punkten, wo Φ'' unstetig ist, ist $f(\xi)$ nicht definiert. Mit dieser Gleichung kombinieren wir die Differentialgleichung (20) des Kernes und gelangen unter Verwendung von (21), (22), (23), (33) und (34) zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(x)=\int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi.$$

b) Die quellenmäßigen Funktionen zweiter Art definieren wir durch die Gleichung

$$F(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(x)\,dx.$$

Wegen (22) und (23) bestehen die Gleichungen

$$F'(0)=0, \quad F(1)+\frac{1}{h}F'(1)=-\frac{1}{q^2}\int_0^1 F(\xi)\,d\xi.$$

Auf demselben Wege wie oben finden wir die Differentialgleichung

$$F''(\xi)+\varkappa^2 F(\xi)=-f(\xi).$$

Es sei umgekehrt $\Phi(x)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion und erfülle die Randbedingungen

(35), (36) $$\Phi'(0)=0, \quad \Phi(1)+\frac{1}{h}\Phi'(1)=-\frac{1}{q^2}\int_0^1 \Phi(x)\,dx.$$

Definiert man $f(x)$ durch

$$\Phi''(x)+\varkappa^2\Phi(x)=-f(x),$$

und kombiniert man diese Gleichung mit der Gleichung

$$G''(x,\xi)+\varkappa^2 G(x,\xi)=\frac{h}{q^2}G(1,\xi),$$

so gelangt man durch das bekannte Verfahren unter Benutzung von (16), (17), (18), (35) und (36) zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\xi)=\int_0^1 G(x,\xi)f(x)\,dx.$$

In die unter a) und b) erhaltenen quellenmäßigen Darstellungen von Φ können wir nun für $G(x, \xi)$ die bilineare Entwicklung (32) einsetzen, können wegen der gleichmäßigen Konvergenz der bilinearen Reihe gliedweise integrieren und erhalten so die Fouriersche Entwicklung einer quellenmäßigen Funktion Φ nach den X_ν bzw. U_ν. Die hierbei auftretenden konstanten Koeffizienten sind vermöge der quellenmäßigen Darstellung von Φ und der Integralgleichungen für U_ν bzw. X_ν leicht mit denjenigen Ausdrücken zu identifizieren, die man durch die Fouriersche Art der Koeffizientenbestimmung erhält.

Entwicklung nicht quellenmäßiger Funktionen. Zu diesem Zwecke untersuchen wir die an der Stelle $x = \xi$ unstetige Ableitung des Kernes

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(x) U_n'(\xi)}{\lambda_n}.$$

Wo die rechts stehende Summe sich als gleichmäßig konvergent erweisen wird, ist die gliedweise Differentiation erlaubt.

$$\frac{\partial}{\partial \xi} G(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin \alpha_n \xi \cdot 2h \{\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n\}}{\sin \alpha_n \omega'(\alpha_n) \cdot (\alpha_n^2 - \varkappa^2)}.$$

Es bestehen nun, wenn wir uns des Liouvilleschen Zeichens Ψ für eine beschränkte Größe bedienen, folgende asymptotischen Darstellungen:

$$\alpha_n = n\pi + \frac{\Psi}{n}, \quad \sin \alpha_n x = \sin n\pi x + \frac{\Psi}{n}, \quad \cos \alpha_n x = \cos n\pi x + \frac{\Psi}{n},$$

$$\sin \alpha_n = \frac{\Psi}{n}, \quad \cos \alpha_n = (-1)^n + \frac{\Psi}{n}, \quad \alpha_n^2 = n^2\pi^2 + \Psi + \frac{\Psi}{n},$$

$$\sin \alpha_n \omega'(\alpha_n) = n\left(\Psi + \frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\alpha_n = n\pi + \frac{\Psi}{n} = n\left(\Psi + \frac{\Psi}{n^2}\right), \text{ also } \frac{1}{\alpha_n} = \frac{1}{n}\left(\Psi + \frac{\Psi}{n^2}\right), \text{ also}$$

$$\frac{\sin \alpha_n \omega'(\alpha_n)}{\alpha_n} = \text{konst.}\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\frac{\sin \alpha_n \cdot \omega'(\alpha_n) \cdot (\alpha_n^2 - \varkappa^2)}{\alpha_n} = \text{konst.}\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)\left(n^2\pi^2 - \varkappa^2 + \Psi + \frac{\Psi}{n}\right)$$

$$= \text{konst.}\,(n^2\pi^2 - \varkappa^2)\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

$$\frac{\alpha_n h}{\sin \alpha_n \cdot \omega'(\alpha_n) \cdot (\alpha_n^2 - \varkappa^2)} = \frac{A\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2},$$

wo A eine Konstante ist. Es wird also zunächst

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \alpha_n \xi \cdot \{\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n\} A\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}.$$

Ferner ist

$$\sin \alpha_n \xi = \sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n},$$

$$\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n = q^2 \left(n\pi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) + \frac{\Psi}{n}$$
$$= (q^2 n\pi \cos n\pi x + \Psi)\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

Es wird also

$$\sin \alpha_n \xi \cdot (\alpha_n q^2 \cos \alpha_n x + \sin \alpha_n)$$
$$= q^2 n\pi \left(\sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right)\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right).$$

Damit erhalten wir die asymptotische Darstellung

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \left(\sin n\pi\xi + \frac{\Psi}{n}\right)\left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi\Psi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}.$$

Die zweite Summe konvergiert überall absolut und gleichmäßig; wir können uns also auf die Untersuchung der ersten Summe beschränken.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n^2\pi^2 - \varkappa^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varkappa^2 \sin n\pi\xi \left(\cos n\pi x + \frac{\Psi}{n}\right) A'\left(1 + \frac{\Psi}{n}\right)}{n\pi(n^2\pi^2 - \varkappa^2)}.$$

Die zweite Summe konvergiert wieder gleichmäßig. Die erste Summe kann durch Auflösung der beiden Klammern in vier Summen zerlegt werden:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \cos n\pi x \cdot A'}{n\pi} + \text{drei weiteren Summen.}$$

Die drei letzten Summen konvergieren wieder gleichmäßig; es bleibt also nur zu untersuchen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin n\pi\xi \cos n\pi x}{n\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(x+\xi)}{n\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(x-\xi)}{n\pi}.$$

Nun ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}$ gleichmäßig konvergent für $0 < t < 2\pi$.

Daher konvergieren die beiden letzten Summen gleichmäßig im Intervall 0 bis 2 mit Ausnahme der Endpunkte 0 und 2; es sind also auszuschließen die Fälle

1. $x+\xi=0$; 2. $x-\xi=0$; 3. $x+\xi=2$; 4. $x-\xi=2$.

Der Fall 4 kommt wegen $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq \xi \leqq 1$ nicht in Frage. Die drei anderen Fälle ergeben, daß folgende Systeme auszuschließen sind:

$$x=\xi=0, \qquad x=\xi, \qquad x=\xi=1.$$

In diesen Punkten ist der Reihenwert wegen der bekannten Gibbsschen Erscheinung das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial G}{\partial \xi}(\xi-0,\xi)+\frac{\partial G}{\partial \xi}(\xi+0,\xi)\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{U_n'(\xi)X_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Mit Hilfe dieser unstetigen, nach den X_ν entwickelten Funktion $\frac{dG}{d\xi}$ zeigt man nach der Kneserschen[6]) Methode, daß sich auch unstetige, die Randbedingungen verletzende Funktionen nach den X_ν in eine Fouriersche Reihe entwickeln lassen.

Damit ist das Entwicklungsproblem für den Stab, der den thermischen Randbedingungen (3), (4) unterworfen ist, und dessen Enden fest sind, vollkommen gelöst.

§ 3.

Integration der verallgemeinerten thermoelastischen Differentialgleichungen.

Verallgemeinert man die Gleichungen (1), (2), (3) des § 1 auf k Dimensionen, so geht zwar für $k>3$ ihre physikalische Bedeutung verloren, wir wollen aber auch dann die physikalische Ausdrucksweise beibehalten.

Seien $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die unabhängigen Variablen, $u_1, u_2, \ldots, u_k$ die zugehörigen Verschiebungen. Ferner setzen wir

$$\theta=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad \Delta V=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \qquad \Delta u_j=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}.$$

Wenn wir wie beim Stabe von äußeren Kräften absehen und die Differentialgleichungen in der Gleichgewichtsform ansetzen, lauten die zu integrierenden verallgemeinerten Gleichungen (1), (2) des § 1 folgendermaßen:

---

[6]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 5.

$$p\frac{\partial V}{\partial x_i} = (\lambda+\mu)\frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, k). \tag{1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \Delta V - b^2 \frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{2}$$

Ist

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2}, \qquad \cos(n, x_i) = \frac{x_i}{r},$$

so setzen wir als sinngemäße Verallgemeinerung der Gleichungen § 1 (3) folgende Ausdrücke für die Spannungskomponenten an der Oberfläche an:

$$X_j^n = \left\{\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - pV\right\}\cos(n, x_j) + \mu \sum_{i=1}^{k}{}' \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\cos(n, x_i) + \mu \sum_{i=1}^{k}{}' \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\cos(n, x_i), \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{3}$$

Der Strich an den Summenzeichen in (3) soll bedeuten, daß bei der Summation der Wert $i = j$ auszulassen ist.

Die Integration des Systems (1), (2) geschieht in Anlehnung an die von Jaroschek für die Kreisscheibe ($k = 2$) durchgeführte Integration der thermoelastischen Differentialgleichungen. Wir nehmen an, daß die Temperatur V nur eine Funktion von t und $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$ sei. Ferner sollen die elastischen Verschiebungen nur in Richtung des Radiusvektors r erfolgen. Unter diesen Voraussetzungen können wir die k Gleichungen (1) zu einer einzigen zusammenfassen, in der als unabhängige Variable nur r und t vorkommen; ebenso können wir Gleichung (2) auf die neuen Koordinaten transformieren.

Wenn wir (1) mit x_i multiplizieren und dann über i von 1 bis k summieren, entsteht aus den k Gleichungen (1) unter Beachtung von

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial V}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r}\frac{\partial V}{\partial r}$$

die Gleichung

$$pr\frac{\partial V}{\partial r} = (\lambda+\mu) r \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mu \sum_{i=1}^{k} x_i \Delta u_i. \tag{4}$$

Wir setzen nun an

$$u_i = R \cdot \cos\varphi_i = R \cdot \frac{x_i}{r} = S \cdot x_i,$$

wo R und S nur von r und t abhängige Funktionen sind. Dann wird

$$\theta = kS + r\frac{\partial S}{\partial r}.$$

$$\sum_{j=1}^{k} x_j \Delta u_j = r^2 \frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + (k+1) r \frac{\partial S}{\partial r} = r\frac{\partial \theta}{\partial r}.$$

Gleichung (4) geht dann über in

$$p\frac{\partial V}{\partial r} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(kS + r\frac{\partial S}{\partial r}\right). \tag{5}$$

Gleichung (2) nimmt nach der Transformation folgende Gestalt an:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r} + \frac{k-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) - b^2\left(k\frac{\partial S}{\partial t} + r\frac{\partial^2 S}{\partial r\,\partial t}\right). \tag{6}$$

Die Spannungskomponenten (3) transformieren sich in

$$X^n = \sqrt{\sum_j (X_j^n)^2} = (k\lambda + 2\mu)S + (\lambda + 2\mu)r\frac{\partial S}{\partial r} - pV. \tag{7}$$

In (5), (6), (7) bedeutet k zunächst eine positive Zahl. Nachdem wir aber die Transformation von (1), (2), (3) in (5), (6), (7) vollzogen haben, können wir in den letzten drei Gleichungen und ebenso in allen folgenden Gleichungen k auch jeden beliebigen positiven Wert erteilen.

Aus (5) und (6) wollen wir nun zwei Differentialgleichungen herstellen, in denen nur V bzw. S allein als abhängige Veränderliche auftreten. Aus (5) folgt durch Integration

$$pV = (\lambda + 2\mu)\left(kS + r\frac{\partial S}{\partial r} + T(t)\cdot\gamma\right), \tag{8}$$

wo $T(t)\cdot\gamma$ die Integrationskonstante ist. T sei eine Funktion von t, γ eine absolute Konstante. Setzen wir

$$U = kS + r\frac{\partial S}{\partial r},$$

so folgt aus (8)

$$U = \frac{pV}{\lambda + 2\mu} - T\cdot\gamma,$$

womit (6) in folgende Differentialgleichung für V allein übergeht:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) - \frac{b^2 p}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial V}{\partial t} + b^2\gamma\frac{dT}{dt}.$$

Durch die Bernoullische Substitution

$$V(r, t) = L(r)\cdot T(t)$$

gelingt die Separierung dieser Differentialgleichung; man bekommt, wenn man

$$\lambda + 2\mu + pb^2 = q^2 \tag{9}$$

setzt,

$$\frac{T'}{a^2(\lambda + 2\mu)T} = \frac{L'' + \frac{k-1}{r}L'}{q^2 L - b^2(\lambda + 2\mu)\gamma} = -\alpha^2.$$

Hieraus folgt, wenn man von einer Konstanten absieht:

$$T(t) = e^{-\alpha^2 a^2(\lambda + 2\mu)t}.$$

Ferner erhält man für L die Differentialgleichung

$$(10) \qquad r L'' + (k-1) L' + \alpha^2 r \{q^2 L - b^2 (\lambda + 2\mu) \gamma\} = 0 .$$

Eine analoge Differentialgleichung wollen wir für die elastischen Eigenfunktionen herstellen. Gleichung (8) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$V = \frac{\lambda + 2\mu}{p} (U + T \cdot \gamma) .$$

Diesen Wert setze ich in (6) ein:

$$(11) \qquad \frac{\lambda + 2\mu}{p} \left(\frac{\partial U}{\partial t} + T' \cdot \gamma \right) = \frac{a^2 (\lambda + 2\mu)}{p} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{k-1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - b^2 \frac{\partial U}{\partial t} .$$

Wir setzen nun an

$$S(r, t) = N(r) \cdot T(t) .$$

Dann ist

$$U = kS + r \frac{\partial S}{\partial r} = T \left(kN + r \frac{dN}{\partial r} \right) = M(r) \cdot T ,$$

wo

$$M(r) = kN + r \frac{dN}{dr}$$

gesetzt ist. Es ist

$$r^{k-1} M = k r^{k-1} N + r^k \frac{dN}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^k N \right) ,$$

$$(12) \qquad N(r) = \frac{1}{r^k} \int_0^r r^{k-1} M(r) \, dr .$$

Setze ich $U = M \cdot T$ in (11) ein, so kann ich wieder separieren:

$$\frac{T'}{a^2 (\lambda + 2\mu) T} = \frac{M'' + \frac{k-1}{r} M'}{q^2 M + (\lambda + 2\mu) \gamma} = - \alpha^2 .$$

Für T erhält man hieraus denselben Wert wie oben, für M ergibt sich die Differentialgleichung

$$(13) \qquad r M'' + (k-1) M' + \alpha^2 r \{q^2 M + (\lambda + 2\mu) \gamma\} = 0 .$$

Die Integration des Systems (1), (2) ist damit auf die Integration der beiden Gleichungen (10) und (13) zurückgeführt, die denselben Bau haben.

Setze ich in (10)

$$q^2 L - b^2 (\lambda + 2\mu) \gamma = L_0 , \qquad \alpha q r = r_1 ,$$

so geht (10) über in

$$\frac{d^2 L_0}{dr_1^2} + \frac{k-1}{r_1} \frac{dL_0}{dr_1} + L_0 = 0 .$$

Diese Gleichung ordnet sich der Differentialgleichung

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x} y' + \left(\beta^2 + \frac{\alpha^2 - \nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

unter, deren allgemeine Lösung [7])

$$y = x^\alpha \left[c_1 J_\nu(\beta x) + c_2 Y_\nu(\beta x)\right]$$

ist, wo J und Y die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art sind [8]). Es wird demnach

$$L_0(r_1) = r_1^{1-\frac{k}{2}} \left\{c_1 J_{\frac{k}{2}-1}(r_1) + c_2 Y_{\frac{k}{2}-1}(r_1)\right\}.$$

Genau so kann man mit (13) verfahren. Die allgemeinen Lösungen von (10) und (13) sind also

$$(14)\quad L(\alpha q r) = (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} \left\{c_1 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + c_2 Y_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r)\right\} + \frac{\lambda+2\mu}{q^2} b^2 \gamma,$$

$$(15)\quad M(\alpha q r) = (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} \left\{c_3 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + c_4 Y_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r)\right\} - \frac{\lambda+2\mu}{q^2} \gamma.$$

Die Integrationskonstanten c_1, c_2, c_3, c_4 und γ lassen sich vermöge der aus (8) folgenden Gleichung

$$(16)\qquad pL = (\lambda + 2\mu)(M + \gamma)$$

auf vier Konstanten zurückführen. Setze ich den Wert (15) für M in (12) ein, so kann ich mit Hilfe der Gleichung

$$\int_0^x u^{\nu+1} J_\nu(u)\, du = x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \qquad (\nu > -1)$$

das Integral in (12) ausrechnen. Es wird

$$(17)\quad N(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) + c_4 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} Y_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{k q^2} \gamma.$$

Die Konstanten sind durch die Randbedingungen zu bestimmen. Wir wollen stets voraussetzen, daß V und S für $r = 0$ endlich sind, also

$$(18),\ (19)\qquad L(0) = \text{fin.}, \qquad N(0) = \text{fin.}$$

Dann muß, wenn

$$k \geqq 2$$

angenommen wird,

$$(20)\qquad c_2 = c_4 = 0$$

---

[7]) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln (1923), S. 166.

[8]) Wir benutzen P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen (1908).

sein. Wegen (20) gehen (14), (15) und (17) über in

$$L(\alpha q r) = c_1 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{\lambda+2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{21}$$

$$M(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{q^2} \gamma, \tag{22}$$

$$N(\alpha q r) = c_3 (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{k q^2} \gamma. \tag{23}$$

Durch Einsetzen von (21) und (22) in (16) findet man unter Beachtung von (9)

$$c_3 = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu},$$

also wird aus (21), (22), (23)

$$L = c_1 (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{\lambda+2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{24}$$

$$M = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu} (\alpha q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{q^2} \gamma, \tag{25}$$

$$N = \frac{p c_1}{\lambda+2\mu} (\alpha q r)^{-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r) - \frac{\lambda+2\mu}{k q^2} \gamma. \tag{26}$$

§ 4.

Kreisscheibe mit festem Rand, welcher auf der Temperatur Null gehalten wird.

Wie schon bemerkt, entsprechen die Formeln des vorigen Paragraphen für $k = 2$ dem Fall einer Kreisscheibe, welchen wir jetzt näher betrachten wollen.

Die Kreisscheibe habe den Radius $r = 1$. Die Randbedingungen sind

(1), (2) $\qquad L(0) = \text{fin.}, \qquad N(0) = \text{fin.},$

(3), (4) $\qquad L(1) = 0, \qquad N(1) = 0.$

Nach § 3 (9), (12), (16) haben wir

$$q^2 = \lambda + 2\mu + p b^2, \tag{5}$$

$$N(r) = \frac{1}{r^2} \int_0^r r M(r)\, dr, \tag{6}$$

$$pL = (\lambda + 2\mu)(M + \gamma). \tag{7}$$

Die Differentialgleichungen von L und M lauten nach § 3 (10) und (13):

$$rL'' + L' + \alpha^2 q^2 r L = \alpha^2 r b^2 (\lambda + 2\mu)\gamma, \tag{8}$$

$$rM'' + M' + \alpha^2 q^2 r M = -\alpha^2 r (\lambda + 2\mu)\gamma. \tag{9}$$

Wegen (1) und (2) erhält man nach § 3 (24), (25), (26):

$$L(\alpha q r) = c_1 J_0(\alpha q r) + \frac{\lambda + 2\mu}{q^2} b^2 \gamma, \tag{10}$$

$$M(\alpha q r) = \frac{p c_1}{\lambda + 2\mu} J_0(\alpha q r) - \frac{\lambda + 2\mu}{q^2}\gamma, \tag{11}$$

$$N(\alpha q r) = \frac{p c_1}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q r)}{\alpha q r} - \frac{\lambda + 2\mu}{2 q^2}\gamma. \tag{12}$$

Aus (7) folgt wegen der Randbedingung (3)

$$\gamma = -M(\alpha q). \tag{13}$$

Setzen wir in (11) $r = 1$, so wird nach (13) und (5)

$$\gamma = -\frac{c_1 q^2}{b^2(\lambda + 2\mu)} J_0(\alpha q), \tag{14}$$

d. h.

$$M(\alpha q) = \frac{c_1 q^2}{b^2(\lambda + 2\mu)} J_0(\alpha q). \tag{15}$$

Wegen (14) gehen die Gleichungen (10), (11), (12), wenn wir c_1 durch C ersetzen, über in

$$L = C\{J_0(\alpha q r) - J_0(\alpha q)\}, \tag{16}$$

$$M = C\left\{\frac{p}{\lambda + 2\mu} J_0(\alpha q r) + \frac{1}{b^2} J_0(\alpha q)\right\}, \tag{17}$$

$$N = C\left\{\frac{p}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q r)}{\alpha q r} + \frac{1}{2 b^2} J_0(\alpha q)\right\}. \tag{18}$$

Die Randbedingung (4) liefert, wenn in (18) $r = 1$ gesetzt wird, für die Größen α die transzendente Gleichung

$$\omega(\alpha) = \frac{p}{\lambda + 2\mu} \frac{J_1(\alpha q)}{\alpha q} + \frac{1}{2 b^2} J_0(\alpha q) = 0. \tag{19}$$

Durch Multiplikation von L und N mit T erhalten wir nach § 3 V und S als Partikularlösungen der thermoelastischen Gleichungen für die Kreisscheibe.

Die Funktion M werden wir bei der Diskussion der transzendenten Gleichung (19) verwenden. Im folgenden soll untersucht werden, ob sich eine willkürliche Funktion nach den Eigenfunktionen L entwickeln läßt.

Ehe wir (19) diskutieren, wollen wir einige Hilfsformeln ableiten.

Wegen (13) können wir statt (8) und (9) schreiben:

$$r L'' + L' + \alpha^2 q^2 r L = -\alpha^2 r b^2 (\lambda + 2\mu) M(1), \tag{20}$$

$$r M'' + M' + \alpha^2 q^2 r M = \alpha^2 r (\lambda + 2\mu) M(1). \tag{21}$$

Gleichung (21) denken wir uns für zwei verschiedene Funktionen M_ν und M_σ gebildet und darauf die Greensche Operation angewandt. Integrieren wir dann nach r von 0 bis 1 und beachten, daß nach (4) und (6)

$$N(1) = \int_0^1 r M dr = 0$$

ist, so wird

$$r(M_\sigma M_\nu' - M_\nu M_\sigma')\Big|_0^1 + q^2(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 r M_\sigma M_\nu dr = 0. \tag{22}$$

Mit Benutzung von (19) und (15) und der Formel

$$J_0'(x) = -J_1(x), \quad \text{d. h. } J_0'(\alpha q r)\Big|^{r=1} = -\alpha q J_1(\alpha q)$$

wird

$$r(M_\sigma M_\nu' - M_\nu M_\sigma')\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)(\lambda + 2\mu) M_\sigma(1) M_\nu(1),$$

womit Gleichung (22) übergeht in

$$\int_0^1 r M_\nu M_\sigma dr = -\frac{\lambda + 2\mu}{2 q^2} M_\nu(1) M_\sigma(1). \tag{23}$$

Integriert man (20) von 0 bis 1, so erhält man

$$(r L')\Big|_0^1 + \alpha^2 q^2 \int_0^1 r L dr = -b^2(\lambda + 2\mu)\frac{\alpha^2}{2} M(1).$$

Da nach (19) und (15)

$$L'(1) = \frac{(\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2 M(1)}{2p}$$

ist, wird

$$\frac{(\lambda + 2\mu)^2 \alpha^2}{2p} M(1) + \alpha^2 q^2 \int_0^1 r L dr = -b^2(\lambda + 2\mu)\frac{\alpha^2}{2} M(1),$$

oder mit Benutzung von (5):

$$\int_0^1 r L dr = -\frac{\lambda + 2\mu}{2p} M(1). \tag{24}$$

Verfährt man nun mit der Differentialgleichung (20) genau so wie mit (21), so gelangt man wegen (1), (3) und (24) zur Gleichung

$$\int_0^1 r L_\nu L_\sigma dr = \frac{b^2(\lambda+2\mu)^2 M_\nu(1) M_\sigma(1)}{2pq^2}. \tag{25}$$

Diskussion der transzendenten Gleichung. Gleichung (19) besitzt keine rein imaginären Wurzeln; wäre nämlich $\alpha = i\beta$ eine Wurzel, so würden die bekannten Reihenentwicklungen für $J_0(iq\beta)$ und $\frac{J_1(iq\beta)}{iq\beta}$ nur positive Glieder enthalten, die linke Seite von (19) würde dann nur positive Summanden enthalten, es kann daher nicht $\omega(i\beta) = 0$ werden.

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ besitzt auch keine komplexen Wurzeln, wie aus (23) folgt. Wären nämlich α_ν und α_σ zwei konjugiert komplexe Wurzeln, so wären M_ν und M_σ auch konjugiert komplex, also $M_\nu \cdot M_\sigma > 0$, die linke Seite von (23) wäre also positiv, die rechte Seite negativ, es gibt also keine komplexen Wurzeln von (19).

Die Gleichung $\omega(\alpha) = 0$ hat also nur reelle Wurzeln; $\alpha = 0$ ist keine Wurzel. Mit α ist auch $-\alpha$ eine Wurzel. Die Wurzeln sind die Schnittpunktsabszissen der beiden Kurven

$$y = \frac{p}{(\lambda+2\mu)\alpha q} J_1(\alpha q) \quad \text{und} \quad \eta = -\frac{1}{2b^2} J_0(\alpha q). \tag{25a}$$

Diese Kurven schneiden nun unendlich oft die reelle Achse, und zwischen zwei Nullstellen von J_0 liegt immer eine und nur eine Nullstelle von J_1. Wegen der Stetigkeit von y und η existieren unendlich viele Schnittpunkte, $\omega(\alpha) = 0$ besitzt also unendlich viele reelle Wurzeln. Für große Argumentwerte gelten für die Besselschen Funktionen J_0 und J_1 die asymptotischen Darstellungen

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad (x = \infty);$$

die Nullstellen von y sind also im wesentlichen die Größen $n\pi + \frac{\pi}{4}$, ebenso sind die Nullstellen von η die Größen $n\pi - \frac{\pi}{4}$. Da nun für große α y verschwindend klein gegen η ist, werden die Schnittpunkte der Kurven (25a) im wesentlichen mit den Nullstellen von η identisch sein, d. h. die Wurzeln von (19) werden dargestellt durch

$$\alpha_n q = n\pi - \frac{\pi}{4} + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{26}$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Gleichung (25) zeigt, daß die L_ν kein Orthogonalsystem bilden; wohl aber

läßt sich zu den L_ν ein Biorthogonalsystem aufstellen. Mit Benutzung von (24) können wir der Gleichung (25) folgende Form geben:

$$\int_0^1 r L_\nu \left[L_\sigma + \frac{b^2(\lambda+2\mu)}{q^2} M_\sigma(1) \right] dr = 0.$$

Das System der Biorthogonalfunktionen ist also

$$X_\sigma = L_\sigma + \frac{b^2(\lambda+2\mu)}{q^2} M_\sigma(1)$$

oder nach (15) und (16)

$$X_\nu = C_\nu J_0(\alpha_\nu q r).$$

Die Differentialgleichung der X_ν lautet

$$r X_\nu'' + X_\nu' + \alpha_\nu^2 q^2 r X_\nu = 0. \tag{27}$$

Durch Integration von 0 bis 1 folgt hieraus

$$\int_0^1 r X_\nu \, dr = -\frac{X_\nu'(1)}{\alpha_\nu^2 q^2}. \tag{28}$$

Um zu normieren, setzen wir

$$X = C J_0(\beta q r),$$

wo β noch nicht die Gleichung (19) erfüllen soll. Verbinden wir die Differentialgleichungen

$$r L_\nu'' + L_\nu' + \alpha_\nu^2 q^2 r L_\nu + b^2(\lambda+2\mu)\alpha_\nu^2 r M_\nu(1) = 0,$$
$$r X'' + X' + \beta^2 q^2 r X = 0$$

durch die Greensche Operation und beachten (1), (3), (28), (15) und (19), so gelangen wir zur Gleichung

$$\int_0^1 r L_\nu(\alpha_\nu q r) X(\beta q r) dr = \frac{-J_0(\alpha_\nu q)\alpha_\nu^2 C C_\nu (\lambda+2\mu)\omega(\beta)}{p(\alpha_\nu^2 - \beta^2)}.$$

Hieraus finden wir durch den Grenzübergang $\beta = \alpha_\nu$ und durch Normierung

$$C_\nu^2 = \frac{2p}{\alpha_\nu(\lambda+2\mu)\omega'(\alpha_\nu) J_0(\alpha_\nu q)} = -\frac{q}{b^2 \omega'(\alpha_\nu) J_1(\alpha_\nu q)}. \tag{29}$$

Aufstellung der Integralgleichungen und des Kernes $G(r, \varrho)$. Wir definieren einen Kern $G(r, \varrho)$ durch die Differentialgleichung

$$r G''(r, \varrho) + G'(r, \varrho) + \varkappa^2 q^2 r G(r, \varrho) = 0. \tag{30}$$

Hierbei ist $\varkappa$ ein willkürlicher, von sämtlichen α_ν verschiedener Parameter. Ferner erfülle der Kern die drei Bedingungen

(31), (32) $$G(0, \varrho) = \text{fin.}, \quad (r G')\big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0} = 1,$$

(33) $$\frac{(\lambda+2\mu) G(1, \varrho)}{2p} + b^2 \int_0^1 r G(r, \varrho)\, dr = 0.$$

Durch Kombination der Differentialgleichungen (20) und (30) gelangt man dann unter Beachtung von (1), (3), (31), (32) und (33) zur Integralgleichung

$$L_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 r G(r, \varrho) L_\nu(r)\, dr,$$

wo

$$\Lambda_\nu = q^2(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)$$

gesetzt ist.

Mit Hilfe von (19) und (28) verifiziert man leicht, daß die Funktionen X_ν eine der Gleichung (33) analoge Randbedingung erfüllen:

(34) $$\frac{(\lambda+2\mu) X_\nu(1)}{2p} + b^2 \int_0^1 r X_\nu\, dr = 0.$$

Ferner ist

(35) $$X_\nu(0) = \text{fin.}$$

Integriert man (30) von 0 bis 1, so wird wegen (31) und (32)

$$\int_0^1 r G(r, \varrho)\, dr = -\frac{1 + G'(1, \varrho)}{\varkappa^2 q^2},$$

so daß (33) auch folgendermaßen geschrieben werden kann:

(36) $$\varkappa^2 q^2 (\lambda + 2\mu) G(1, \varrho) - 2p b^2 (1 + G'(1, \varrho)) = 0.$$

Für den Kern erhalten wir mit Beachtung von (31)

$$\underset{r<\varrho}{G(r, \varrho)} = C_1 J_0(\varkappa q r):$$
$$\underset{r>\varrho}{G(r, \varrho)} = C_2 J_0(\varkappa q r) + C_3 Y_0(\varkappa q r).$$

Die Stetigkeit von $G(r, \varrho)$ für $r = \varrho$ und die Gleichungen (32) und (36) liefern uns drei Bestimmungsgleichungen für C_1, C_2 und C_3:

(37) 1. $C_1 J_0(\varkappa q \varrho) - C_2 J_0(\varkappa q \varrho) - C_3 Y_0(\varkappa q \varrho) = 0,$

(38) 2. $\varrho\{C_1 J_0'(\varkappa q \varrho) - C_2 J_0'(\varkappa q \varrho) - C_3 Y_0'(\varkappa q \varrho)\} = 1,$

3. $C_2\{\varkappa q^2(\lambda + 2\mu) J_0(\varkappa q) - 2p b^2 J_0'(\varkappa q r)\big|^{r=1}\}$
$+ C_3\{\varkappa^2 q^2 (\lambda + 2\mu) Y_0(\varkappa q) - 2p b^2 Y_0'(\varkappa q r)\big|^{r=1}\} = 2p b^2.$

Nun ist

$$J_0'(\varkappa q r)|^{r=1} = -\varkappa q J_1(\varkappa q), \qquad Y_0'(\varkappa q r)|^{r=1} = -\varkappa q Y_1(\varkappa q);$$

führen wir ein

$$\omega_1(\varkappa) = \frac{p}{\lambda+2\mu}\frac{Y_1(\varkappa q)}{\varkappa q} + \frac{1}{2b^2}Y_0(\varkappa q),$$

so kann die letzte Bestimmungsgleichung in folgender Form geschrieben werden:

$$(39)\quad C_2 \cdot 2b^2\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)\cdot\omega(\varkappa) + C_3\cdot 2b^2\varkappa^2 q^2(\lambda+2\mu)\cdot\omega_1(\varkappa) = 2pb^2.$$

Aus (37), (38), (39) sind mit Benutzung der Gleichung

$$Y_\nu(x)J_\nu'(x) - J_\nu(x)Y_\nu'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

die Konstanten C_1, C_2 und C_3 zu berechnen. Führen wir noch ein

$$A(\varkappa) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\varkappa^2 q^2},$$

so erhalten wir für den Kern die Ausdrücke:

$$G\underset{r<\varrho}{(r,\varrho)} = \frac{-\{J_0(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa) - Y_0(\varkappa q\varrho)\,\omega(\varkappa)\} + A(\varkappa)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}\cdot J_0(\varkappa q r),$$

$$G\underset{r>\varrho}{(r,\varrho)} = \frac{\{-J_0(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa) + A(\varkappa)\}J_0(\varkappa q r) + J_0(\varkappa q\varrho)\,\omega(\varkappa)\,Y_0(\varkappa q r)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}.$$

Der Kern ist wegen des Auftretens von $A(\varkappa)$ unsymmetrisch. Als Funktion von ϱ erfüllt er die Differentialgleichung

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial\varrho} + \varkappa^2 q^2\varrho G = \frac{A(\varkappa)\cdot\varkappa^2 q^2\varrho J_0(\varkappa q r)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)} = \frac{p\varrho J_0(\varkappa q r)}{(\lambda+2\mu)\omega(\varkappa)}.$$

Durch Differentiation nach ϱ findet man

$$\frac{\partial G}{\partial\varrho}\Big|^{\varrho=1} = -\frac{J_0(\varkappa q r)}{2b^2\omega(\varkappa)},$$

so daß wir schreiben können:

$$(40)\qquad \varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial G}{\partial\varrho} + \varkappa^2 q^2\varrho G = -\frac{2pb^2\varrho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial G}{\partial\varrho}(r,1).$$

Mit Benutzung der allgemeinen Relation

$$Y_\nu(x)J_{\nu-1}(x) - J_\nu(x)Y_{\nu-1}(x) = \frac{2}{\pi x}$$

findet man

$$(41)\qquad J_0(\varkappa q)\,\omega_1(\varkappa) - Y_0(\varkappa q)\cdot\omega(\varkappa) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\varkappa^2 q^2} = A(\varkappa).$$

Daher wird

$$G(r, 1) = 0. \tag{42}$$

Ferner ist

$$G(r, 0) = \text{fin.}, \quad \left(\varrho \frac{\partial G}{\partial \varrho}\right)\Big|_{\varrho=r+0}^{\varrho=r-0} = 1. \tag{43), (44}$$

Kombinieren wir nun die Differentialgleichungen (27) und (40), so gelangen wir mit Benutzung von (34), (35), (42), (43), (44) zur Integralgleichung

$$X_\nu(r) = \Lambda_\nu \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, X_\nu(\varrho)\, d\varrho.$$

Die beiden Integralgleichungen für L_ν und X_ν stellen wir zusammen:

$$L_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 r\, G(r, \varrho)\, L_\nu(r)\, dr,$$

$$X_\nu(\varrho) = \Lambda_\nu \int_0^1 r\, G(\varrho, r)\, X_\nu(r)\, dr.$$

Beweis der bilinearen Formel. Wir wollen den Kern in Partialbrüche zerlegen. Für $r < \varrho$ definieren wir dann eine Funktion $f_1(z)$ durch

$$\frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_0(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_0(zq\varrho)\,\omega(z) + A(z)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)} \cdot J_0(zqr).$$

Die Stelle $z = 0$ ist kein Pol von $f_1(z)$. Fassen wir z als komplexe Veränderliche auf, so sind $z = \pm \alpha_\nu$ und $z = \varkappa$ die Pole der meromorphen Funktion $\frac{f_1(z)}{z-\varkappa}$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = G(r, \varrho; \varkappa).$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\, J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu - \varkappa)}.$$

Mit Benutzung von

$$Y_0(-x) = Y_0(x) - 2i\,J_0(x) \tag{44a}$$

und der transzendenten Gleichung (19) findet man $\omega_1(\alpha_\nu) = \omega_1(-\alpha_\nu)$, also

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\, J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu + \varkappa)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} = \frac{2\alpha_\nu J_0(\alpha_\nu qr)\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)}. \tag{45}$$

Setzen wir in (41) $\varkappa = \alpha_\nu$, so wird

$$\omega_1(\alpha_\nu) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\alpha_\nu^2 q^2 J_0(\alpha_\nu q)}.$$

Führen wir diesen Wert in (45) ein und beachten (29), so erhalten wir schließlich

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} = -\frac{X_\nu(r)\,L_\nu(\varrho)}{A_\nu}.$$

Im Falle $r > \varrho$ setzen wir

$$\frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(zq\varrho)\,\omega_1(z) + A(z)\}\,J_0(zqr) + J_0(zq\varrho)\cdot\omega(z)\,Y_0(zqr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)}.$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = \underset{r>\varrho}{G(r,\varrho;\varkappa)},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_2(z)}{z-\varkappa} = \frac{\{-J_0(\alpha_\nu q\varrho)\cdot\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)\}\,J_0(\alpha_\nu qr)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)\cdot(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Es ergibt sich also derselbe Wert wie im Falle $r < \varrho$; die weitere Rechnung ist demnach dieselbe, und wir erhalten allgemein nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(46)\quad G(r,\varrho;\varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{X_\nu(\alpha_\nu qr)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{A_\nu} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}.$$

Zur Abschätzung des Konturintegrals gebrauchen wir folgende von Freund[9]) bewiesenen Gleichungen:

$$(47)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{e^{\alpha z} R(z)}{e^z - S(z)} \cdot \frac{dz}{z-\varkappa} = 0, \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha < 1,$$

$$(48)\qquad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{e^{\beta z} R(z)}{e^z - S(z)} \frac{dz}{z^k (z-\varkappa)} = 0, \quad \text{für} \quad 0 \leqq \beta \leqq 1,\ k \geqq 1.$$

Hierbei sind $R(z)$ und $S(z)$ zwei beliebige Funktionen, die auf einer unbegrenzten Folge von Konturen $\mathfrak{K}_n$ endlich bleiben und mit unbegrenzt wachsendem z gleichmäßig gegen Konstante konvergieren. Als Konturen $\mathfrak{K}_n$ wähle ich bei der Abschätzung des in (46) auftretenden Integrals eine unendliche Folge von Kreisen mit wachsendem Radius, die die Achse der reellen Zahlen in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Polen α_ν und $\alpha_{\nu+1}$ schneiden mögen. Beachten wir, daß wegen (44a) und (19) $G(r,\varrho;z)$ eine gerade Funktion von z ist, und verstehen

[9]) E. Freund, Entwicklungen willkürlicher Funktionen vermittelst meromorpher. Diss. Breslau 1909.

wir unter $\mathfrak{K}_n'$ die in der rechten Halbebene gelegene Hälfte des Kreises $\mathfrak{K}_n$, so ist

$$\int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa} = \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa} + \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z+\varkappa}.$$

Es genügt also, das Verschwinden der rechts stehenden Integrale nachzuweisen, wobei z auf den unendlich wachsenden Konturen $\mathfrak{K}_n'$ einen positiven reellen Bestandteil hat. Zur Abschätzung führen wir gemäß den Formeln (49), (50) $J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$, $Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$ die asymptotischen Ausdrücke der Besselschen Funktionen bei großen Argumentwerten ein, die sowohl für positive reelle als auch komplexe Argumentwerte mit positivem reellen Bestandteil gelten. Die durch Einführung der asymptotischen Ausdrücke (49), (50) begangene Vernachlässigung soll später als erlaubt nachgewiesen werden.

Wir setzen für $r < \varrho$ etwa $zq = \zeta$; die folgenden Gleichungen betrachten wir unter der Voraussetzung, daß ζ sehr groß ist; in diesem Sinne sind die Gleichheitszeichen im folgenden zn verstehen.

$$(51)\quad f_1(z) = \underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)} = \frac{J_0(\zeta r)}{\frac{2}{\pi}\omega(\zeta)}\left\{-J_0(\zeta\varrho)\,\omega_1(\zeta) + Y_0(\zeta\varrho)\,\omega(\zeta) + \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\zeta^2}\right\}.$$

Durch Anwendung von (49), (50) für $\nu = 0$ und $\nu = 1$ findet man

$$-J_0(\zeta\varrho)\,\omega_1(\zeta) + Y_0(\zeta\varrho)\cdot\omega(\zeta) = -\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\cdot\frac{2}{\pi\zeta\sqrt{\varrho}}\cos\zeta(1-\varrho) + \frac{1}{2b^2}\frac{2}{\pi\zeta\sqrt{\varrho}}\sin\zeta(1-\varrho),$$

und durch Einsetzen dieses Wertes in (51) erhalten wir

$$\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)} = \frac{J_0(\zeta r)}{\sqrt{\varrho}\,\zeta\,\omega(\zeta)}\left\{\frac{1}{2b^2}\sin\zeta(1-\varrho) - \frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\cos\zeta(1-\varrho) + \frac{p\sqrt{\varrho}}{(\lambda+2\mu)\zeta}\right\}.$$

Hier führen wir

$$J_0(\zeta r) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\zeta r}}\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4}\right)$$

ein und zerlegen die dann in $\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)}$ auftretenden Produkte von trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}
&\underset{r<\varrho}{G(r;\varrho;z)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\,\omega(\zeta)}\cdot\frac{1}{2b^2}\left\{\cos\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} - \zeta + \zeta\varrho\right) - \cos\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} + \zeta - \zeta\varrho\right)\right\} \\
&- \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\,\omega(\zeta)}\cdot\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta}\left\{\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} + \zeta - \zeta\varrho\right) + \sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4} - \zeta + \zeta\varrho\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{\sqrt{r\varrho}\sqrt{2\pi\zeta}\cdot\zeta\,\omega(\zeta)}\cdot\frac{2p\sqrt{\varrho}\sin\left(\zeta r + \frac{\pi}{4}\right)}{(\lambda+2\mu)\zeta}.
\end{aligned}$$

Gemäß den Relationen

$$\cos x = \frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}$$

ersetze ich die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialgrößen; ferner führe ich für die Faktoren der auftretenden Exponentialgrößen folgende Abkürzungen ein:

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}\frac{1}{2b^2} - \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2i}\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta},$$

$$\varphi_2(\zeta) = \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{2}\frac{1}{2b^2} + \frac{e^{\frac{-i\pi}{4}}}{2i}\frac{p}{(\lambda+2\mu)\zeta},$$

$$\varphi_3(\zeta) = \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{2}\frac{2p\sqrt{\varrho}}{(\lambda+2\mu)\zeta}.$$

Es ist

$$\lim_{\zeta\to\infty}\varphi_1(\zeta) = \text{konst.}, \quad \lim_{\zeta\to\infty}\varphi_2(\zeta) = \text{konst.}, \quad \lim_{\zeta\to\infty}\varphi_3(\zeta) = 0.$$

Ferner wird

$$\omega(\zeta) = \frac{2e^{i\zeta}}{\sqrt{2\pi\zeta}}\cdot\varphi_2(\zeta) + \frac{2e^{-i\zeta}}{\sqrt{2\pi\zeta}}\cdot\varphi_1(\zeta).$$

Auf diese Weise ergibt sich

$$G\underset{r<\varrho}{(r,\varrho;z)} = \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}\,\zeta\{e^{i\zeta}\varphi_2(\zeta)+e^{-i\zeta}\varphi_1(\zeta)\}}\{e^{i(\zeta r+\zeta\varrho-\zeta)}\cdot\varphi_1(\zeta)+e^{-i(\zeta r+\zeta\varrho-\zeta)}\varphi_2(\zeta)$$
$$-e^{i(\zeta r-\zeta\varrho+\zeta)}i\,\varphi_2(\zeta)+e^{-i(\zeta r-\zeta\varrho+\zeta)}i\,\varphi_1(\zeta)+e^{i\zeta r}\varphi_3(\zeta)+e^{-i\zeta r}i\,\varphi_3(\zeta)\}.$$

Ich erweitere nun rechts mit $e^{i\zeta}$ und kürze durch $\varphi_2(\zeta)$; außerdem setze ich

$$2i\zeta = u; \qquad z-\varkappa = \frac{u-2iq\varkappa}{2iq}, \qquad dz = \frac{du}{2iq},$$

$$\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)} = -S(u), \qquad \frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)} = R(u).$$

Das abzuschätzende Konturintegral nimmt dann folgende endgültige Form an:

(52)
$$\int_{\mathfrak{K}_n'}\frac{\underset{r<\varrho}{G(r,\varrho;z)}\,dz}{z\mp\varkappa}$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} + \frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}-\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}.$$

Wegen

$$0\leqq r\leqq 1,\quad 0\leqq\varrho\leqq 1,\quad r\leqq\varrho$$

ist

$$0\leqq\frac{\varrho+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq 1-\frac{\varrho+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq 1-\frac{\varrho-r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{\varrho-r}{2}\leqq 1,$$

$$0\leqq\frac{1+r}{2}\leqq 1,\quad 0\leqq\frac{1-r}{2}\leqq 1.$$

Ferner ist

$$\lim_{u\to\infty}S(u)=\text{konst.},\qquad\lim_{u\to\infty}R(u)=0.$$

Alle Voraussetzungen für die Freundsche Gleichung (48) sind somit erfüllt, jedes der in (52) auftretenden Konturintegrale verschwindet für unendlich große Konturen $\mathfrak{R}_n'$, es ist also $\lim_{n\to\infty}\int_{\mathfrak{R}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}=0$, d. h.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\substack{\mathfrak{R}_n\\ r<\varrho}}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}=0. \tag{53}$$

Gleichung (53) gilt für alle Werte von r und ϱ mit Ausnahme von $r=0$ und $\varrho=0$. Diese Fälle sind auszuschließen, da in (52) $\sqrt{r\varrho}$ im Nenner auftritt. Der Ausschluß der Fälle $r=0$, $\varrho>0$ und ebenso $\varrho=0$, $r>0$ ist belanglos, da weiter unten gezeigt werden wird, daß auch für diese Wertsysteme die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert und somit als stetige Funktion auch an diesen Stellen den entsprechenden Wert des Kernes $G(r,\varrho)$ darstellt. Für $r=\varrho=0$ ist der Kern logarithmisch unendlich, er gehört aber zu den brauchbar unstetigen Kernen[10]).

Im Falle $r>\varrho$ erhalten wir auf ganz analoge Weise die der Gleichung (52) entsprechende Formel. Da der Kern bis auf den Summanden $\frac{A(\varkappa)J_0(\varkappa qr)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}$ in r und ϱ symmetrisch ist, sind nur in den vier ersten Summanden von (52) r und ϱ zu vertauschen. Man bekommt also

[10]) Vgl. Kneser § 19 und 31.

$$(54)\qquad \int\limits_{\mathfrak{K}_n'}^{r>\varrho} \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\{(u\mp 2iq\varkappa)} + \frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r-\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} + \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} - \frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}.$$

Wegen $0\leqq r\leqq 1$, $0\leqq\varrho\leqq 1$, $r\geqq\varrho$ sind die Koeffizienten von u in den Exponentiellen wieder echte Brüche, und es wird nach (48)

$$(55)\qquad \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}^{r>\varrho}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}=0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}_n}^{r>\varrho}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z-\varkappa}=0.$$

Wegen (53) und (55) geht (46) über in die bilineare Entwicklung des Kernes

$$G(r,\varrho;\varkappa)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu(\alpha_\nu q r)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{A_\nu}.$$

Es soll noch gezeigt werden, daß die mit der Einführung der asymptotischen Ausdrücke der Besselschen Funktionen begangene Vernachlässigung erlaubt ist. Wenn z einen positiven reellen Bestandteil hat, gelten für die Besselschen Funktionen J_ν und Y_ν die Ausdrücke[11])

$$(\mathrm{I})\quad i\sqrt{2\pi z}\,J_\nu(z)=S_\nu(-2iz)\cdot e^{i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)}-S_\nu(2iz)\cdot e^{-i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)},$$

$$(\mathrm{II})\quad \sqrt{2\pi z}\,Y_\nu(z)=S_\nu(-2iz)\cdot e^{i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)}+S_\nu(2iz)\cdot e^{-i\left(z-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)}.$$

Hierbei sind die Funktionen $S_\nu(z)$ auf unseren Integrationskonturen endlich, werden dargestellt durch die halbkonvergente Reihe

$$S_\nu(z)=1+\frac{4\nu^2-1}{1!\cdot 4z}+\frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!\,(4z)^2}+\cdots,$$

[11]) Vgl. Jahnke-Emde, Funktionentafeln (1923), S. 98; die dort angegebenen Ausdrücke sind allerdings etwas abzuändern, da wir als Besselsche Funktionen 2 Art die Funktionen Y_ν von Schafheitlin benutzen.

und es ist für große z

$$\lim_{z\to\infty} S_\nu(z) = 1. \tag{III}$$

Die Ausdrücke (I) und (II) gehen wegen (III) bei großem z in (49) und (50) über. Die strenge Abschätzung des in (46) auftretenden Konturintegrals würde dann folgendermaßen vor sich gehen: Die aus (I) und (II) sich ergebenden genau, nicht mehr asymptotisch geltenden Werte für J_0, J_1, Y_0, Y_1 kann ich in $G(r, \varrho; z)$ einsetzen, kann ausmultiplizieren und nach den auftretenden Exponentiellen ordnen. Auf demselben Wege wie im vorhergehenden gelange ich zu Ausdrücken für $\int \frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{z \mp \varkappa}$, die mit den Ausdrücken (52) und (54) fast identisch sind. Bezeichne ich z. B. mit $\bar{S}(u) = -\frac{\bar{\varphi}_1(\zeta)}{\bar{\varphi}_2(\zeta)}$ die der Größe $S(u) = -\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}$ entsprechende Größe, so unterscheidet sich $\bar{S}(u)$ bei großem ζ beliebig wenig von $S(u)$, und es ist wegen (III) $\lim_{u\to\infty} \bar{S}(u) = \lim_{u\to\infty} S(u)$. Entsprechendes gilt von den anderen Größen, womit die unter Benutzung von (49), (50) durchgeführte Abschätzung des in (46) auftretenden Konturintegrals gerechtfertigt ist.

Wir zeigen nun, daß die bilineare Reihe gleichmäßig konvergiert. Für große α_ν ist

$$X_\nu = C_\nu \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}, \qquad L_\nu = C_\nu \cdot \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}.$$

Bildet man aus (19) $\omega'(\alpha_\nu)$, so wird

$$\omega'(\alpha_\nu) = \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right).$$

Nach (29) ist also

$$C_\nu^2 = \frac{-q}{b^2\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_1(\alpha_\nu q)} = \alpha_\nu\,\Psi\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right). \tag{56}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{X_\nu(r)\,L_\nu^{\prime}(\varrho)}{A_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{q^2(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)}.$$

Wegen (26) ergibt sich hieraus leicht die gleichmäßige Konvergenz der bilinearen Reihe. Die gleichmäßige Konvergenz gilt auch für die Randwerte $r = 0$, $\varrho > 0$ und $\varrho = 0$, $r > 0$, da in diesen Fällen mit Benutzung von (56) die bilineare Reihe die Darstellung $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{q^2\,\alpha_\nu^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\alpha_\nu^2}\right)}$ annimmt

Entwicklung quellenmäßiger Funktionen.

a) Wir definieren eine quellenmäßige Funktion durch die Gleichung

$$F(\varrho) = \int_0^1 r\,G(r, \varrho)\,f(r)\,dr.$$

Wegen (42) ist

$$F(1) = 0.$$

Als Differentialgleichung von F findet man mit Beachtung von (40) und (44)

$$\varrho F''(\varrho) + F'(\varrho) + \varkappa^2 q^2 \varrho F(\varrho) + \frac{2 p b^2 \varrho}{\lambda + 2\mu} F'(1) = -\varrho f(\varrho).$$

Umgekehrt sei nun $\Phi(r)$ eine mit ihrer ersten Ableitung stetige Funktion, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht. Es sei ferner

(57), (58) $$\Phi(0) = \text{fin.}, \qquad \Phi(1) = 0.$$

Dann definiere ich $f(r)$ durch die Gleichung

$$r \Phi''(r) + \Phi'(r) + \varkappa^2 q^2 r \Phi(r) + \frac{2 p b^2 r}{\lambda + 2\mu} \Phi'(1) = -r f(r).$$

Verbinde ich diese Gleichung mit der Differentialgleichung (30) des Kernes und beachte (31), (32), (33), (57) und (58), so gelange ich auf dem üblichen Wege zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\varrho) = \int_0^1 r G(r, \varrho) f(r) dr.$$

b) Wir können eine quellenmäßige Funktion auch durch

$$F(r) = \int_0^1 \varrho G(r, \varrho) f(\varrho) d\varrho$$

definieren. Dann bekommt man mit Hilfe von (30) und (32)

$$r F''(r) + F'(r) + \varkappa^2 q^2 r F(r) = -r f(r).$$

Außerdem ist auf Grund der Gleichung (33)

$$(\lambda + 2\mu) F(1) + 2 p b^2 \int_0^1 r F(r) dr = 0.$$

Umgekehrt sei $\Phi(\varrho)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion; $\Phi(\varrho)$ erfülle die Randbedingungen

(59), (60) $$(\lambda + 2\mu) \Phi(1) + 2 p b^2 \int_0^1 \varrho \Phi(\varrho) d\varrho = 0, \qquad \Phi(0) = \text{fin.}$$

Eine Funktion $f(\varrho)$ werde dann definiert durch

$$\varrho \Phi''(\varrho) + \Phi'(\varrho) + \varkappa^2 q^2 \varrho \Phi(\varrho) = -\varrho f(\varrho).$$

Hieraus finden wir durch Kombination mit (40) unter Verwendung von (42), (43), (44), (59) und (60) die quellenmäßige Darstellung

$$\Phi(r) = \int_0^1 \varrho G(r, \varrho) f(\varrho) d\varrho.$$

Diese beiden quellenmäßigen Funktionen $\Phi(\varrho)$ und $\Phi(r)$ lassen sich nun wegen der gleichmäßig konvergenten bilinearen Entwicklung des Kernes nach den $L_\nu(\varrho)$ bzw. $X_\nu(r)$ in Fouriersche Reihen entwickeln.

Entwicklung nicht quellenmäßiger Funktionen. Differenzieren wir die Gleichung

$$G(r, \varrho; \varkappa) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{X_\nu(\alpha_\nu q r)\, L_\nu(\alpha_\nu q \varrho)}{\Lambda_\nu} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r, \varrho; z)\, dz}{z - \varkappa},$$

in der die Summe nur endlich viele Glieder enthält, gliedweise nach r und führen dann den Grenzübergang $n = \infty$ aus, so erhalten wir

$$G'(r, \varrho; \varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty}{}' \frac{X_\nu'(r)\, L_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu} + \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G'(r, \varrho; z)\, dz}{z - \varkappa}.$$

Um zu zeigen, daß das Konturintegral verschwindet, differenzieren wir im Falle $r < \varrho$ Gleichung (52) nach r. Jeder der sechs Summanden in (52) enthält r zweimal; die bei der Differentiation des Faktors $\frac{1}{\sqrt{r}}$ entstehenden Integrale lassen sich zu $-\frac{1}{2r} \int_{r<\varrho} \frac{G\, dz}{z \mp \varkappa}$ zusammenziehen. Also wird

$$\int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G'(r, \varrho; z)\, dz}{z \mp \varkappa} = -\frac{1}{2r} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{G(r, \varrho; z)\, dz}{z \mp \varkappa} \tag{61}$$

$$- \frac{i}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)} S(u)\, du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)} - \frac{i}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)} du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)}$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)} du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)} - \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)} S(u)\, du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)}$$

$$+ \frac{i}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)} R(u)\, du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)} + \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}} \int_{\mathfrak{K}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)} R(u)\, du}{\{e^u - S(u)\}(u \mp 2iq\varkappa)}.$$

Nach (53) und (47) verschwinden alle in (61) auftretenden Konturintegrale bei unendlich wachsenden Konturen. Da in (47) $\alpha < 1$ sein muß, sind die Fälle $r = \varrho = 0$, $r = \varrho$, $r = \varrho = 1$ hierbei auszuschließen.

Im Falle $r > \varrho$ folgt aus (54)

$$(62)\qquad \int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{G'(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z\mp\varkappa \\ r>\varrho}} = -\frac{1}{2r}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{G(r,\varrho;z)}{\substack{z\mp\varkappa \\ r>\varrho}}\,dz$$

$$-\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} - \frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(1-\frac{r-\varrho}{2}\right)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} + \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{r-\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)} + \frac{1}{2\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'} \frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}\,.$$

Wie im Falle $r<\varrho$ verschwinden auch hier sämtliche Integrale bei ins Unendliche wachsenden Konturen. Für $|r-\varrho|\neq 0$ ist also

$$G'(r,\varrho;\varkappa)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu'(\alpha_\nu q r)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}\,.$$

Im Falle $r=\varrho$ ist

$$(63)\qquad \frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho)+G'(\varrho+0,\varrho)]$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{X_\nu'(\alpha_\nu q\varrho)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{\Lambda_\nu}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathfrak{R}_n}\frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z-\varkappa}\,dz\,.$$

Aus (61) und (62) findet man

$$\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z\mp\varkappa}\,dz=-\frac{1}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{G(\varrho,\varrho;z)\,dz}{z\mp\varkappa}$$

$$-\frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\varrho}S(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}-\frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u(1-\varrho)}du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1+\varrho}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{1}{2\varrho}\int\limits_{\mathfrak{R}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1-\varrho}{2}\right)}R(u)\,du}{\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}\,.$$

Nach (47) ist wiederum

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{R}_n}\frac{\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho;z)+G'(\varrho+0,\varrho;z)]}{z-\varkappa}\,dz=0\,,$$

womit Gleichung (63) übergeht in

$$\frac{1}{2}[G'(\varrho-0,\varrho)+G'(\varrho+0,\varrho)]=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{X_\nu'(\alpha_\nu q\varrho)\,L_\nu(\alpha_\nu q\varrho)}{A_\nu}\,.$$

Es lassen sich jetzt nach der Kneserschen[12]) Methode auch unstetige, nicht quellenmäßige Funktionen nach den L_ν entwickeln; der Wert der Reihe in einem Unstetigkeitspunkte ist gleich dem arithmetischen Mittel der dort auftretenden Funktionswerte.

Hiermit ist die thermoelastische Aufgabe für die Kreisscheibe, deren fester Rand die Temperatur Null hat, vollständig erledigt.

§ 5.

Verallgemeinerung der Randwertaufgabe des § 4 und Zusammenfassung.

Nach der Kreisscheibe würde sich die Kugel als das zunächstliegende Grundgebiet ergeben. Wir wollen aber der Allgemeinheit wegen unsere Betrachtungen sofort in der Weise erweitern, daß wir untersuchen, ob sich willkürliche Funktionen bei derselben Wahl der Randbedingungen wie in § 4 nach den in § 3 gefundenen allgemeinen Eigenfunktionen entwickeln lassen, wenn k eine beliebige Zahl >2 ist.

Die Randbedingungen sind

(1), (2) $\qquad L(0)=\text{fin.},\quad L(1)=0\,,$

(3), (4) $\qquad N(0)=\text{fin.},\quad N(1)=0\,.$

Nach § 3 erhält man durch Benutzung von (1), (2), (3):

$$L=C\left\{(\alpha qr)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha qr)-(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\},$$

$$M=C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu}(\alpha qr)^{1-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha qr)+\frac{(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}}{b^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\},$$

$$N=C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu}(\alpha qr)^{-\frac{k}{2}}J_{\frac{k}{2}}(\alpha qr)+\frac{(\alpha q)^{1-\frac{k}{2}}}{k\cdot b^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\}.$$

Die Bedingung (4) liefert für α die transzendente Gleichung

$$\omega(\alpha)=\frac{p}{\lambda+2\mu}\,\frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q}+\frac{1}{kb^2}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)=0\,. \tag{5}$$

---

[12]) Vgl. Kneser, a. a. O. § 32.

Man findet, daß die Funktionen

$$X_\nu = C_\nu (\alpha_\nu q r)^{1-\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r)$$

zu den L_ν orthogonal sind. Es zeigt sich aber, daß der zum Biorthogonalsystem L_ν, X_ν gehörige Kern für $r = \varrho = 0$ einen Pol von der Ordnung $\frac{k}{2} - 1$ hat und so kein brauchbar unstetiger Kern ist; daß ferner die bilineare Reihe für $r = 0$, $\varrho > 0$ und $\varrho = 0$, $r > 0$ bei beliebigem k nicht gleichmäßig konvergiert. Daher sind die obigen Funktionen L_ν für eine Fouriersche Entwicklung willkürlicher Funktionen nicht geeignet. Wir können sie aber dafür geeignet machen, indem wir sie mit dem Faktor $(\alpha q r)^{\frac{k}{2}-1}$ multiplizieren. Die in dieser Weise abgeänderten Funktionen L und M wollen wir mit $\bar{L}$ und $\bar{M}$ bezeichnen. Dann läßt sich zeigen, daß sich nach diesen abgeänderten Eigenfunktionen $\bar{L}_\nu$ willkürliche Funktionen entwickeln lassen.

$$\bar{L} = C\left\{J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) - r^{\frac{k}{2}-1} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\},$$

$$\bar{M} = C\left\{\frac{p}{\lambda+2\mu} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q r) + \frac{r^{\frac{k}{2}-1}}{b^2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)\right\}.$$

Es ist

(6), (7) $$\bar{L}(0) = 0, \quad \bar{L}(1) = 0.$$

Diskussion der transzendenten Gleichung. Gleichung (5) hat keine rein imaginären Wurzeln, da für $\alpha = i\beta$ die Reihenentwicklungen von $J_{\frac{k}{2}-1}$ und $J_{\frac{k}{2}}$ nur positive Glieder enthalten, so daß die linke Seite von (5) positiv ist und nicht zum Verschwinden gebracht werden kann.

Um zu beweisen, daß keine komplexen Wurzeln α vorhanden sind, gehen wir aus von der Differentialgleichung der Funktion $\bar{M}$:

$$r^2 \bar{M}'' + r\bar{M}' + \left\{\alpha^2 q^2 r^2 - \left(\frac{k}{2} - 1\right)^2\right\} \bar{M} = \frac{C\alpha^2 q^2 r^{\frac{k}{2}+1}}{2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q).$$

Dividiere ich durch r und benutze

$$\bar{M}(1) = \frac{Cq^2}{b^2(\lambda+2\mu)} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q),$$

so erhalte ich

(8) $$r\bar{M}'' + \bar{M}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right] \bar{M} = \alpha^2 (\lambda+2\mu) r^{\frac{k}{2}} \bar{M}(1).$$

Wegen

$$\int_a^b x^\nu J_{\nu-1}(x)\,dx = [x^\nu J_\nu]_a^b$$

findet man

$$\overline{N}(r) = (\alpha q r)^{\frac{k}{2}-1} N(r) = \frac{1}{r^{\frac{k}{2}+1}} \int_0^r r^{\frac{k}{2}} \overline{M}(r)\,dr.$$

Wegen (4) ist

$$\int_0^1 r^{\frac{k}{2}} \overline{M}(r)\,dr = 0. \tag{9}$$

Bilden wir nun Gleichung (8) für zwei Funktionen $\overline{M}_\nu$ und $\overline{M}_\sigma$, so findet man auf dem üblichen Wege mit Benutzung von (9):

$$\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}_\nu'(1) - \overline{M}_\nu(1)\overline{M}_\sigma'(1) + q^2(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)\int_0^1 r\,\overline{M}_\sigma\,\overline{M}_\nu\,dr = 0. \tag{10}$$

Benutzt man die Gleichung (5) und die Beziehung

$$J_{\nu+1} = \frac{\nu}{x} J_\nu - J_\nu',$$

so gelangt man zur Gleichung

$$\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}_\nu'(1) - \overline{M}_\nu(1)\overline{M}_\sigma'(1) = \frac{1}{k}(\alpha_\nu^2 - \alpha_\sigma^2)(\lambda + 2\mu)\overline{M}_\sigma(1)\overline{M}_\nu(1),$$

so daß (10) übergeht in

$$\int_0^1 r\,\overline{M}_\nu\,\overline{M}_\sigma\,dr = -\frac{\lambda+2\mu}{k q^2}\,\overline{M}_\nu(1)\overline{M}_\sigma(1).$$

Hieraus folgt wie in § 4, daß keine komplexen Wurzeln von (5) vorhanden sind.

Die transzendente Gleichung hat unendlich viele reelle Wurzeln, welche im wesentlichen mit den Nullstellen von $J_{\frac{k}{2}-1}$ übereinstimmen; da für große α nach § 4 (49)

$$J_{\frac{k}{2}-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{k-3}{4}\pi\right)$$

ist, erhalten wir folgende Darstellung der Wurzeln:

$$\alpha_n q = n\pi + \frac{k-3}{4}\pi + \varepsilon_n, \quad \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0. \tag{11}$$

Aufstellung des Biorthogonalsystems und Normierung. Die Differentialgleichung der Funktion $\overline{L}$ lautet

$$r\overline{L}'' + \overline{L}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]\overline{L} = -\alpha^2 b^2 (\lambda + 2\mu)\, r^{\frac{k}{2}}\,\overline{M}(1). \tag{12}$$

Hieraus findet man auf dieselbe Weise wie bei der Funktion $\overline{M}$ mit Benutzung von (1), (2) und

$$(13)\quad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{L}(\alpha q r)\,dr = C\left\{\frac{1}{(\alpha q)^{\frac{k}{2}+1}}\left[(\alpha q r)^{\frac{k}{2}} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q r)\right]_0^1 - \frac{J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)}{k}\right\}$$

$$= -\frac{\lambda+2\mu}{kp}\,\overline{M}(1)$$

die Gleichung

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\nu\,\overline{L}_\sigma\,dr = \frac{(\lambda+2\mu)^2 b^2\,\overline{M}_\nu(1)\,\overline{M}_\sigma(1)}{kpq^2},$$

die ich nach (13) folgendermaßen schreiben kann:

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\sigma\left[\overline{L}_\nu + \frac{b^2(\lambda+2\mu)\,\overline{M}_\nu(1)}{q^2}\,r^{\frac{k}{2}-1}\right]dr = 0.$$

Als Biorthogonalsystem erhalte ich also

$$\overline{X}_\nu = C_\nu J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r).$$

Es ist

$$(14)\quad \overline{X}(0) = 0,$$

$$(15)\quad r\,\overline{X}'' + \overline{X}' + \left[\alpha^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]\overline{X} = 0,$$

$$(16)\quad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{X}\,dr = \frac{C}{\alpha q} J_{\frac{k}{2}}(\alpha q).$$

Hier braucht α noch keine Wurzel von (5) zu sein. Ist dies aber der Fall, so geht (16) wegen (5) über in

$$(17)\quad \int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\,\overline{X}_\nu\,dr = -\frac{C_\nu(\lambda+2\mu)}{kpb^2} J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q) = -\frac{\overline{X}_\nu(1)\cdot(\lambda+2\mu)}{kpb^2}.$$

Um die Funktionen $\overline{X}$ und $\overline{L}$ zu normieren, verfahren wir wie in § 2 und 4 nach der Methode des Grenzüberganges von d'Alembert und erhalten zunächst mit Benutzung von (5), (6), (7), (14) und (16):

$$\int_0^1 r\,\overline{L}_\nu(\alpha_\nu q r)\,\overline{X}(\beta q r)\,dr = -\frac{CC_\nu\alpha_\nu^2 J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)\cdot(\lambda+2\mu)}{p(\alpha_\nu^2-\beta^2)}\cdot\omega(\beta).$$

Wenn ich nun den Grenzübergang $\beta = \alpha_\nu$ vollziehe und normiere, wird

$$(18)\quad C_\nu^2 = \frac{2p}{(\lambda+2\mu)\,\alpha_\nu\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)} = \frac{-2q}{kb^2\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}}(\alpha_\nu q)}.$$

Aufstellung des Kerns und der Integralgleichungen. Wir definieren einen Kern $G(r, \varrho)$ durch die Differentialgleichung

$$(19) \qquad rG''(r,\varrho)+G'(r,\varrho)+\left[\varkappa^2 q^2 r-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{r}\right]G(r,\varrho)=0$$

und die Bedingungen

$$(20),\ (21) \qquad G(0,\varrho)=0, \qquad (rG')\Big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0}=1,$$

$$(22) \qquad \frac{(\lambda+2\mu)\,G(1,\varrho)}{kp}+b^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

Dann ergibt sich durch Kombination von (12) und (19) unter Benutzung von (6), (7), (20), (21), (22) die Integralgleichung

$$\bar{L}_\nu(\varrho)=\Lambda_\nu\int_0^1 rG(r,\varrho)\bar{L}_\nu(r)\,dr.$$

Mit Hilfe von (17) und (5) verifiziert man, daß $\overline{X}_\nu(\alpha_\nu qr)$ folgende der Gleichung (22) analoge Randbedingung erfüllt:

$$(23) \qquad \frac{(\lambda+2\mu)\,\overline{X}_\nu(1)}{kp}+b^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}\overline{X}_\nu\,dr=0.$$

Wir wollen der Gleichung (22) eine andere Form geben. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Differentialgleichung (19) mit $r^{\frac{k}{2}-1}$. Dann kann sie in folgender Form geschrieben werden:

$$\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}'+\varkappa^2 q^2 r^{\frac{k}{2}}G=0.$$

Integrieren wir nun von 0 bis 1 und benutzen (20) und (21), so wird

$$\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}\Big|_0^1+\{r^{k-1}[r^{1-\frac{k}{2}}G]'\}\Big|_{r=\varrho+0}^{r=\varrho-0}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$\left[r^{\frac{k}{2}}G'-\left(\frac{k}{2}-1\right)r^{\frac{k}{2}-1}G\right]_0^1+(r^{\frac{k}{2}-1}\cdot rG')\Big|_{\varrho+0}^{\varrho-0}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)+\varrho^{\frac{k}{2}-1}+\varkappa^2 q^2\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=0.$$

$$\int_0^1 r^{\frac{k}{2}}G\,dr=-\frac{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)}{\varkappa^2 q^2}.$$

Damit geht (22) über in

$$\frac{\lambda+2\mu}{kp}G(1,\varrho)-\frac{b^2}{\varkappa^2q^2}\left\{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)\right\}=0$$

oder

$$(24)\qquad \varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)G(1,\varrho)-kpb^2\left\{\varrho^{\frac{k}{2}-1}+G'(1,\varrho)-\left(\frac{k}{2}-1\right)G(1,\varrho)\right\}=0.$$

Für den Kern setze ich an:

$$G\underset{r<\varrho}{(r,\varrho)}=C_1J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr),$$

$$G\underset{r>\varrho}{(r,\varrho)}=C_2J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)+C_3Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr).$$

Setze ich diese Ausdrücke in (24) ein, und benutze ich

$$J'_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)\Big|^{r=1}=\left(\frac{k}{2}-1\right)J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)-\varkappa qJ_{\frac{k}{2}}(\varkappa q),$$

$$Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)\Big|^{r=1}=\left(\frac{k}{2}-1\right)Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)-\varkappa qY_{\frac{k}{2}}(\varkappa q),$$

so bekomme ich für Gleichung (24)

$$\{\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)C_2J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)+kpb^2C_3\varkappa qJ_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)\}$$

$$+\{\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)C_3Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)+kpb^2C_3\varkappa qY_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)\}=\varrho^{\frac{k}{2}-1}\cdot kpb^2.$$

Zur Abkürzung setze ich noch

$$\omega_1(\varkappa)=\frac{p}{\lambda+2\mu}\frac{Y_{\frac{k}{2}}(\varkappa q)}{\varkappa q}+\frac{1}{kb^2}Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q);$$

dann nimmt die letzte Gleichung folgende einfache Gestalt an:

$$(25)\qquad C_2\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)kb^2\omega(\varkappa)$$

$$+C_3\varkappa^2q^2(\lambda+2\mu)kb^2\omega_1(\varkappa)=\varrho^{\frac{k}{2}-1}\cdot kpb^2.$$

Zur Bestimmung von C_1, C_2, C_3 dienen die Gleichungen (21), (25) und die Stetigkeit von $G(r,\varrho)$ für $r=\varrho$. Führen wir

$$A(\varkappa)=\frac{2}{\pi}\frac{p\varrho^{\frac{k}{2}-1}}{(\lambda+2\mu)\varkappa^2q^2}$$

ein, so erhalten wir für den Kern die Ausdrücke:

$$G\underset{r<\varrho}{(r,\varrho)}=\frac{-\{J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa)-Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\cdot\omega(\varkappa)\}+A(\varkappa)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}\cdot J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr).$$

$$G\underset{r>\varrho}{(r,\varrho)} = \frac{\{-J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\cdot\omega_1(\varkappa)+A(\varkappa)\}\,J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)+J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)\,\omega(\varkappa)\,Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}.$$

Der Kern ist unsymmetrisch. Es ist

$$G(0,\varrho)=0, \qquad G(r,0)=0. \tag{26}$$

Für $r=\varrho=0$ wird der Kern zwar nicht unendlich, aber in gewisser Weise unbestimmt, wie man erkennt, wenn man die Besselschen Funktionen zweiter Art $Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)$ und $Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)$ durch die Funktionen erster Art ausdrückt[13]).

Die Differentialgleichung des Kernes als Funktion von ϱ lautet:

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial G}{\partial\varrho}+\left[\varkappa^2q^2\varrho-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{\varrho}\right]G=\frac{\varrho^{\frac{k}{2}}pJ_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)}{(\lambda+2\mu)\,\omega(\varkappa)}.$$

Durch Ausrechnung ergibt sich

$$\frac{-\partial J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)}{\partial\varrho}\Bigg|^{\varrho=1}\omega_1(\varkappa)+\frac{\partial Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q\varrho)}{\partial\varrho}\Bigg|^{\varrho=1}\cdot\omega(\varkappa)$$

$$=-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)p}{(\lambda+2\mu)\varkappa^2q^2}\cdot\frac{2}{\pi}-\frac{1}{kb^2}\cdot\frac{2}{\pi}.$$

Damit findet man leicht

$$\frac{\partial G}{\partial\varrho}\Bigg|^{\varrho=1}=-\frac{J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)}{kb^2\,\omega(\varkappa)},$$

so daß die Differentialgleichung des Kernes nun folgende Gestalt annimmt:

$$\varrho\frac{\partial^2 G}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial G}{\partial\varrho}+\left[\varkappa^2q^2\varrho-\frac{\left(\frac{k}{2}-1\right)^2}{\varrho}\right]G=-\frac{kpb^2}{\lambda+2\mu}\varrho^{\frac{k}{2}}\frac{\partial G}{\partial\varrho}(r,1). \tag{27}$$

Außerdem ist

$$J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)\,\omega_1(\varkappa)-Y_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa q)\cdot\omega(\varkappa)=\frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\varkappa^2q^2}, \tag{28}$$

also ist

$$G(r,1)=0. \tag{29}$$

Ferner ist

$$\left(\varrho\frac{\partial G}{\partial\varrho}\right)\Big|_{\varrho=r+0}^{\varrho=r-0}=1. \tag{30}$$

Durch Kombination der Differentialgleichungen (15) und (27) findet

[13]) Vgl. P. Schafheitlin 12 (4) und (6).

man unter Beachtung der geltenden Randbedingungen (14), (23), (26), (29) und (30) die Integralgleichung

$$\overline{X}_\nu(r) = \Lambda_\nu \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, \overline{X}_\nu(\varrho)\, d\varrho.$$

Beweis der bilinearen Formel. Für $r < \varrho$ definieren wir $f_1(z)$ durch

$$\frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega(z) + A(z)}{\frac{2}{\pi}\,\omega(z)\cdot(z-\varkappa)} \cdot J_{\frac{k}{2}-1}(zqr).$$

Die nähere Untersuchung zeigt, daß $z = 0$ kein Pol von $f_1(z)$ ist. Der Beweis gestaltet sich z. B. für den Fall, daß k keine gerade ganze Zahl ist, folgendermaßen: Es scheint zunächst die Stelle $z = 0$ ein Pol von $f_1(z)$ zu sein; denn es ist $A(z)$ für $z = 0$ unendlich groß. Ersetzen wir aber vermöge der Formel

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\sin \nu\pi} J_{-\nu}(x) - \operatorname{ctg} \nu\pi\, J_\nu(x)$$

die Besselschen Funktionen zweiter Art durch die Funktionen erster Art, so tritt unter den vielen Summanden, in die

$$-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega_1(z) + Y_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\,\omega(z)$$

dann zerfällt, auch ein Glied

$$\frac{p}{(\lambda+2\mu)zq}\left\{-J_{\frac{k}{2}-1}(zq\varrho)\frac{J_{-\frac{k}{2}}(zq)}{\sin\frac{k\pi}{2}}\right\}$$

auf, und dafür kann ich (vgl. Schafheitlin **2** (7) und **1** (15)) auch schreiben

$$\frac{p}{(\lambda+2\mu)zq\sin\frac{k\pi}{2}}\left\{-\frac{(zq\varrho)^{\frac{k}{2}-1}(zq)^{-\frac{k}{2}}[1+z^2\mathfrak{P}(z^2)]}{2^{\frac{k}{2}-1}\Pi\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{-\frac{k}{2}}\Pi\left(-\frac{k}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{p}{(\lambda+2\mu)zq\sin\frac{k\pi}{2}}\left\{-\frac{2}{\pi}\frac{\varrho^{\frac{k}{2}-1}}{zq}\sin\frac{k\pi}{2} + z\mathfrak{P}(z^2)\right\} = -A(z) + \text{const.}\cdot\mathfrak{P}(z^2).$$

Es hebt sich also das in $f_1(z)$ auftretende $A(z)$ gegen das hier auftretende $-A(z)$; so findet man, daß $z = 0$ kein Pol von $\frac{f_1(z)}{z-\varkappa}$ ist. Pole sind dann also nur $z = \varkappa$ und $z = \pm\alpha_\nu$.

$$\operatorname*{Res}_{z=\varkappa} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = G(r, \varrho; \varkappa).$$
$$r<\varrho$$

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = \frac{-J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q\varrho)\,\omega_1(\alpha_\nu) + A(\alpha_\nu)}{\frac{2}{\pi}\,\omega'(\alpha_\nu)(\alpha_\nu-\varkappa)} \cdot J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r).$$

Nun ist nach (28) und (5)

$$J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)\,\omega_1(\alpha_\nu) = \frac{2p}{\pi(\lambda+2\mu)\,\alpha_\nu^2 q^2},$$

also ergibt sich leicht mit Benutzung von (18)

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = -\frac{\overline{X}_\nu(r)\,\overline{L}_\nu(\varrho)}{2\alpha_\nu q^2(\alpha_\nu-\varkappa)}.$$

Ersetze ich hier α_ν durch $-\alpha_\nu$, so wird:

$$\operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} \frac{f_1(z)}{z-\varkappa} = -\frac{\overline{X}_\nu(r)\,\overline{L}_\nu(\varrho)}{2\alpha_\nu q^2(\alpha_\nu+\varkappa)},$$

also

$$\operatorname*{Res}_{z=\alpha_\nu} + \operatorname*{Res}_{z=-\alpha_\nu} = -\frac{\overline{X}_\nu(r)\,\overline{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Zu demselben Resultat gelangt man für $r > \varrho$, so daß nach dem Cauchyschen Residuensatze folgt:

$$(31) \qquad G(r, \varrho; \varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\overline{X}_\nu(r)\,\overline{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathfrak{K}_n} \frac{G(r, \varrho; z)\,dz}{z-\varkappa}.$$

Die Abschätzung des Konturintegrals geschieht wie in § 4. Wir setzen $zq = \zeta$ und führen die asymptotischen Ausdrücke § 4 (49) und (50) ein[14]). Wenn übrigens k eine ungerade ganze Zahl ist, lassen sich bekanntlich $J_{\frac{k}{2}-1}$ und $Y_{\frac{k}{2}-1}$ für beliebige Argumentwerte, nicht nur für große, streng durch trigonometrische Funktionen ausdrücken.

Für $r < \varrho$ geschieht die Abschätzung des in (31) auftretenden Konturintegrals ganz genau so wie in § 4. Wir setzen

$$\frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2} \cdot \frac{1}{kb^2} - \frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i} \cdot \frac{p}{(\lambda+2\mu)\,\zeta} = \varphi_1(\zeta),$$

$$\frac{e^{\frac{k-3}{4}\pi i}}{2} \cdot \frac{1}{kb^2} + \frac{e^{\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i} \cdot \frac{p}{(\lambda+2\mu)\,\zeta} = \varphi_2(\zeta),$$

[14]) Ihre Einführung ist erlaubt, vgl. § 4 (I), (II) und (III).

$$\frac{e^{-\frac{k-3}{4}\pi i}}{2i}\,\frac{2p\varrho^{\frac{k-1}{2}}}{(\lambda+2\mu)\zeta}=\varphi_3(\zeta);$$

$$2i\zeta=u;\qquad e^{(k-2)\pi i}\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=e^{k\pi i}\frac{\varphi_1(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=-S(u),$$

$$e^{\frac{k-2}{2}\pi i}\frac{\varphi_3(\zeta)}{\varphi_2(\zeta)}=R(u).$$

Dann ergibt sich folgende definitive Gestalt des abzuschätzenden Konturintegrales:

(32)
$$\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z\mp\varkappa\\ r<\varrho}}$$

$$=\frac{e^{-\frac{k-1}{2}\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{r+\varrho}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{e^{\frac{k-1}{2}\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{r+\varrho}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{e^{-k\pi i}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(1-\frac{\varrho-r}{2}\right)}du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{1}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{\varrho-r}{2}\right)}S(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}$$

$$+\frac{i}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1+r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}+\frac{e^{\frac{k\pi i}{2}}}{\sqrt{r\varrho}}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{e^{u\left(\frac{1-r}{2}\right)}R(u)\,du}{u\{e^u-S(u)\}(u\mp 2iq\varkappa)}.$$

Nach der Freundschen Formel § 4 (48), für die alle Voraussetzungen erfüllt sind, folgt hieraus $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}_n'}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z\mp\varkappa\\ r<\varrho}}=0$, also auch

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z-\varkappa\\ r<\varrho}}=0.$$

Diese Formel gilt wegen des im Nenner der einzelnen Summanden von (32) auftretenden Faktors $\sqrt{r\varrho}$ nicht für $r=0$ und $\varrho=0$.

Im Falle $r>\varrho$ erhält man, da der Kern bis auf das Glied $\frac{A(\varkappa)J_{\frac{k}{2}-1}(\varkappa qr)}{\frac{2}{\pi}\omega(\varkappa)}$ in r und ϱ symmetrisch ist, auf demselben Wege die der Gleichung (32) entsprechende Gleichung. In den vier ersten Summanden von (32) sind nur r und ϱ zu vertauschen. So wird

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathfrak{K}_n}\frac{G(r,\varrho;z)\,dz}{\substack{z-\varkappa\\ r>\varrho}}=0.$$

Die Partialbruchzerlegung (31) geht damit über in die bilineare Formel

$$G(r, \varrho; \varkappa) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu}.$$

Die hier auftretende unendliche Reihe läßt sich als gleichmäßig konvergent nachweisen. Differenziert man (5) nach α_ν, so wird

$$\omega'(\alpha_\nu) = \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right),$$

$$C_\nu^2 = \frac{-2q}{kb^2\,\omega'(\alpha_\nu)\,J_{\frac{k}{2}}(\alpha_\nu q)} = \alpha_\nu \Psi\left(1 + \frac{\Psi}{\alpha_\nu}\right),$$

$$\bar{X}_\nu = C_\nu \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}}, \qquad \bar{L}_\nu = C_\nu \frac{\Psi}{\sqrt{\alpha_\nu}},$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\bar{X}_\nu(r)\,\bar{L}_\nu(\varrho)}{\Lambda_\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\Psi}{q^2(\alpha_\nu^2 - \varkappa^2)},$$

woraus wegen (11) die gleichmäßige Konvergenz folgt. Für $r = 0$, $\varrho = 0$ ergibt die Reihe den Wert Null, sie ist also auch für diese Randwerte dem Kern G gleich.

Entwicklung quellenmäßiger und nicht quellenmäßiger Funktionen.

a) Definiert man eine quellenmäßige Funktion durch

$$F(\varrho) = \int_0^1 r\,G(r, \varrho)\,f(r)\,dr,$$

so ist wegen (26) und (29): $F(0) = F(1) = 0$.

Als Differentialgleichung von F findet man

$$\varrho F''(\varrho) + F'(\varrho) + \left[\varkappa^2 q^2 \varrho - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{\varrho}\right] F(\varrho) + \frac{kpb^2}{\lambda + 2\mu}\varrho^{\frac{k}{2}} F'(1) = -\varrho f(\varrho).$$

Umgekehrt sei $\Phi(r)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion, während die zweite Ableitung nur stückweise stetig zu sein braucht; $\Phi(r)$ erfülle die Randbedingungen

$$\Phi(0) = \Phi(1) = 0.$$

Dann definieren wir $f(r)$ durch

$$(33)\quad r\Phi''(r) + \Phi'(r) + \left[\varkappa^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{r}\right] \Phi(r) + \frac{kpb^2}{\lambda + 2\mu} r^{\frac{k}{2}} \Phi'(1) = -r f(r).$$

Damit $f(r)$ auch für $r = 0$ definiert sei, setzen wir fest, daß

$$\lim_{r \to 0} \frac{\Phi(r)}{r} = \text{fin.}$$

sei. Diese Bedingung für $\Phi(r)$ umfaßt die Bedingung $\Phi(0) = 0$.

Durch Kombination mit (19) steigt man von (39) auf dem gewöhnlichen Wege zur quellenmäßigen Darstellung

$$\Phi(\varrho) = \int_0^1 r\, G(r, \varrho)\, f(r)\, dr$$

empor.

b) Es sei

$$F(r) = \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, f(\varrho)\, d\varrho\,.$$

Nach (20) und (22) hat man

$$F(0) = 0, \qquad (\lambda + 2\mu) F(1) + k p b^2 \int_0^1 r^{\frac{k}{2}} F(r)\, dr = 0\,.$$

Als Differentialgleichung von F ergibt sich

$$r F''(r) + F'(r) + \left[\varkappa^2 q^2 r - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{r} \right] F(r) = - r f(r).$$

Wenn umgekehrt $\Phi(\varrho)$ eine mit der ersten Ableitung stetige Funktion ist und die Randbedingungen

$$\lim_{\varrho \to 0} \frac{\Phi(\varrho)}{\varrho} = 0, \qquad (\lambda + 2\mu) \Phi(1) + k p b^2 \int_0^1 \varrho^{\frac{k}{2}} \Phi(\varrho)\, d\varrho = 0$$

erfüllt, werde $f(\varrho)$ durch

$$\varrho\, \Phi''(\varrho) + \Phi'(\varrho) + \left[\varkappa^2 q^2 \varrho - \frac{\left(\frac{k}{2} - 1\right)^2}{\varrho} \right] \Phi(\varrho) = - \varrho f(\varrho)$$

definiert. Durch Kombination dieser Gleichung mit (27) erhält man

$$\Phi(r) = \int_0^1 \varrho\, G(r, \varrho)\, f(\varrho)\, d\varrho\,.$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz der bilinearen Reihe lassen sich nun diese quellenmäßigen Funktionen $\Phi(\varrho)$ und $\Phi(r)$ nach den $\overline{L}_\nu(\varrho)$ bzw. $\overline{X}_\nu(r)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln.

Hinsichtlich der Entwicklung unstetiger Funktionen ist genau so zu verfahren wie in § 4. Man beweist die Fouriersche Entwicklung der an der Stelle $r = \varrho$ unstetigen Funktion $G'(r, \varrho)$.

Mit Hilfe der Kneserschen Methode zeigt man dann, daß jede mit ihren beiden ersten Ableitungen im Grundgebiete stückweise stetige Funk-

tion F, für die $\frac{F(r)}{r}$ an der Stelle $r=0$ einen endlichen Grenzwert besitzt, nach den $\bar{L}_\nu$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt werden kann.

Setzen wir

$$\frac{\lambda+2\mu}{kpb^2}=c,$$

so hat die transzendente Gleichung (5) die Form

$$\frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q}+c\,J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)=0. \tag{34}$$

Dann können wir sagen:

Die Funktionen

$$\bar{L}_\nu=C_\nu\left\{J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r)-r^{\frac{k}{2}-1}J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q)\right\},$$

$$\bar{X}_\nu=C_\nu J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha_\nu q r)$$

bilden ein Biorthogonalsystem, und es lassen sich willkürliche Funktionen nach den $\bar{L}_\nu$ oder $\bar{X}_\nu$ in Fouriersche Reihen entwickeln. Dabei sind die Größen α_ν Wurzeln der Gleichung (34), wo c eine beliebige Konstante ist. Die Konstante c darf auch $=0$ und <0 sein. Schreiben wir (34) in der Form

$$\frac{1}{c}\,\frac{J_{\frac{k}{2}}(\alpha q)}{\alpha q}+J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)=0,$$

so erhalten wir für $c=\infty$

$$J_{\frac{k}{2}-1}(\alpha q)=0.$$

Dann wird $\bar{L}_\nu=\bar{X}_\nu$, wir erhalten so als Spezialfall die Entwicklung nach Orthogonalfunktionen.

Hiermit ist auch für das allgemeine Grundgebiet, dessen Rand fest ist und auf der Temperatur Null gehalten wird, die thermoelastische Aufgabe bei beliebigem $k>2$ vollkommen gelöst.

Nach der an diesen speziellen Randwertaufgaben durchgeführten Methode läßt sich auch bei anderer Wahl der thermischen und elastischen Randbedingungen das Entwicklungsproblem mit Erfolg behandeln.

(Eingegangen am 17. Januar 1925.)