Werk

Titel: Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques .

Autor: Zygmund, A,

Ort: Berlin

Jahr: 1926

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0024|log6

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Sur la théorie riemannienne des séries trigonométriques.

Par

A. Zygmund (Varsovie).

1. On sait que la théorie des séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

données par la suite de leurs coefficients a été fondée par Riemann.

Dans la dissertation classique de Riemann („Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe") deux points paraîssent jouer le rôle essentiel: 1°. le théorème sur la signification analytique de la double intégration terme à terme, 2°. les théorèmes sur la localisation.

Ce sont les théorèmes »de localisation« qui font l'objet de ce mémoire.

2. La forme primitive qu'a donné Riemann à ces théorèmes n'était pas bien facile à débrouiller et c'était le mérite de M. Rajchman d'avoir exposé ces résultats d'une manière plus simple et plus accessible aux généralisations.

M. Rajchman met en évidence une opération qu'il appelle »la multiplication formelle« des séries trigonométriques; c'est cette opération qui est implicitement contenue dans les calculs de Riemann et paraît être leur point le plus essentiel.

En appliquant la multiplication formelle on établit facilement les énoncés classiques de Riemann (je le montre dans ce mémoire); mais cette méthode est applicable à bien d'autres occasions (ensembles d'unicité, construction des séries trigonométriques présentant quelques singularités particulières etc.), inaccessibles à la méthode classique sous sa forme primitive.

3. Les résultats de M. Rajchman concernent les séries à coefficients tendant vers zéro avec l'inverse de leur rang. Ce mémoire contient la

généralisation de ces résultats aux séries trigonométriques dont les coefficients sont du type[1]) $o(n^\gamma)$ $(\gamma > -1)$ et quelques applications de la méthode de la multiplication formelle à l'étude des séries trigonométriques et des séries de Taylor.

À côté des résultats qui me paraîssent nouveaux, j'expose ici des nouvelles démonstrations de quelques théorèmes connus, dans le but de simplifier les démonstrations antérieures et de mettre en relief la méthode dont je fais l'usage.

Je crois qu'il est de mon devoir d'exprimer ici mes remerciements empressés à M. Rajchman qui par ses indications et son encouragement a largement contribué aux résultats qui font l'objet de ce mémoire.

Chapitre I.

Lemmes préliminaires.

Ce chapitre est consacré à la démonstration de quelques lemmes qui sont très simples, mais qui jouent un rôle fondamental dans nos raisonnements ultérieurs.

Lemme I.[2]) *Étant donné deux suites de nombres (réels ou non)*

$$\{a_n\} \quad \text{et} \quad \{\alpha_n\} \qquad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$$

infinies dans les deux sens, si la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|$ *converge et si* $\lim_{n \to \pm\infty} a_n = 0$, *alors, en posant*

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}, \tag{1}$$

on a: $\lim_{n \to \pm\infty} u_n = 0$.

Démonstration. Supposons que $n \to +\infty$ et soit ε un nombre positif arbitraire. Soit: $M = \operatorname{Max}(a_n)$, $K = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_p|$. Choisissons un indice $n_0 > 0$, tel que la condition $|n| > n_0$ entraine

$$1^\circ. \quad \sum_{p=|n|}^{\infty} |\alpha_p| + |\alpha_{-p}| \qquad \text{et} \qquad 2^\circ. \quad |a_n| < \varepsilon.$$

Pour $n > 2n_0$ on a donc:

$$\left|\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}\right| \leqq \left|\sum_{p=-\infty}^{-n_0-1}\right| + \left|\sum_{p=-n_0}^{n_0}\right| + \left|\sum_{p=n_0+1}^{\infty}\right| < \varepsilon K + \varepsilon M + \varepsilon K = \varepsilon(2k + M).$$

---

[1]) Notation de M. Landau qui paraît être universellement admise.

[2]) Cf. A. Rajchman, O Riemannowskiej zasadzie umiejscowienia (Sur le principe de localisation de Riemann). Comptes Rendus de la Soc. Scientif. de Varsovie **11** (1918), fascic. 2, pp. 115—152.

Le cas où n tend vers $-\infty$ se réduit au précédent; en effet:

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{-p} \alpha_{n+p}$$

et en posant $a_{-p} = a_p$, $\alpha_{-p} = \alpha'_p$, on a: $u_{-n} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a'_p \alpha'_{n-p}$, a'_n et α'_n vérifiant les conditions du lemme.

Lemme II. *Soit γ un nombre réel non négatif. Supposons que les nombres a_n et α_n verifient les conditions*:

$$1°.\ \lim_{n\to\pm\infty} \frac{a_n}{|n|^\gamma} = 0, \qquad 2°.\ \text{la série } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |n|^\gamma \text{ converge.}$$

En posant

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p}$$

on a

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{u_n}{|n|^\gamma} = 0.$$

Démonstration. Posons:

$$|a_0| = \varepsilon_0, \quad |\alpha_0| = \eta_0; \quad \frac{|a_n|}{|n|^\gamma} = \varepsilon_n, \quad |\alpha_n| \cdot |n|^\gamma = \eta_n \qquad (n \neq 0).$$

Soit n positif:

$$\frac{|u_n|}{n^\gamma} \leqq \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |a_p \alpha_{n-p}| = \frac{1}{n^\gamma}\Big[\sum_{p=-\infty}^{0} + \sum_{p=1}^{2n} + \sum_{p=2n+1}^{\infty}\Big]$$

$$= \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{-1} \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma + \frac{|a_0 \alpha_n|}{n^\gamma} + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=1}^{2n}{}' \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma$$

[3])

$$+ \frac{1}{n^\gamma}|a_n \alpha_0| + \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=2n+1}^{+\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p} \left|\frac{p}{n-p}\right|^\gamma \leqq \frac{1}{n^\gamma} \sum_{p=-\infty}^{-1} \varepsilon_p \eta_{n-p} + 2^\gamma \sum_{p=1}^{2n}{}' \varepsilon_p \eta_{n-p}$$

$$+ \frac{2^\gamma}{n^\gamma} \sum_{p=2n+1}^{\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p} + \varepsilon_0 \eta_n + \eta_0 \varepsilon_n \leqq 2^\gamma \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \varepsilon_p \eta_{n-p},$$

ε_n et η_n vérifiant les conditions du lemme I, notre assertion est donc démontrée pour $n \to +\infty$. Le cas $n \to -\infty$ se démontre d'une manière analogue.

Lemme III. *Si pour $\gamma > 0$ on a*

$$1°.\ \lim_{n\to\pm\infty} a_n |n|^\gamma = 0, \qquad 2°.\ \lim_{n\to\pm\infty} \alpha_n |n|^{\gamma+1} = 0$$ [4])

---

[3]) L'apostrophe ' désigne qu'un terme de la somme est omis (dans le cas du texte le terme à l'indice n).

[4]) Pour $\gamma > 1$ la condition 2° peut être remplacée par $\lim_{n\to\pm\infty} \alpha_n |n|^\gamma = 0$. Cela résulte immédiatement de la démonstration du lemme.

alors, en posant

$$u_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p},$$

on a:

$$\lim_{n \to \pm\infty} u_n |n|^\gamma = 0.$$

Démonstration. Posons

$$|a_0| = \varepsilon_0, \quad |\alpha_0| = \eta_0; \qquad |a_n| \cdot |n|^\gamma = \varepsilon_n, \qquad |\alpha_n| \cdot |n|^{\gamma+1} = \eta_n.$$

Pour $n > 0$ on a

$$|u_n| \cdot n^\gamma \leqq \sum_{p=-\infty}^{+\infty}{}'' n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} + \varepsilon_0 \eta_n + \eta_0 \varepsilon_n$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{-1} + \sum_{p=1}^{n-1} + \sum_{p=n+1}^{\infty} + o(1) = A_n + B_n + C_n + o(1).$$

On voit sans peine que

$$A_n = \sum_{p=-\infty}^{-1} n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} \leqq \operatorname*{Max}_{k>n} \eta_k \cdot \sum_{p=-\infty}^{-1} \frac{\varepsilon_p}{|p|^\gamma |n-p|} = o(1),$$

$$C_n = \sum_{p=n+1}^{\infty} n^\gamma \frac{\varepsilon_p \eta_{n-p}}{|p|^\gamma |n-p|^{\gamma+1}} \leqq \operatorname*{Max}_{k>n} \varepsilon_k \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{\eta_{n-p}}{|n-p|^{\gamma+1}} = o(1).$$

Démontrons maintenant que $B_n = o(1)$. A cet effet il suffit au lieu de 2° faire l'hypothèse que $|\alpha_n| |n|^{\gamma+1} \leqq K$ (K = une constante).

$$B_n = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} + \sum_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} = B_n' + B_n'',$$

$$B_n' = \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n^\gamma \cdot \varepsilon_p \eta_{n-p}}{p^\gamma (n-p)^{\gamma+1}} \leqq 2^\gamma K \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\varepsilon_p}{(n-p)\, p^\gamma} \leqq \frac{2^{\gamma+1} K}{n} \sum_{p=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_p = o(1),$$

$$B_n'' = \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{n^\gamma \varepsilon_p \eta_{n-p}}{p^\gamma (n-p)^{\gamma+1}} \leqq 2^\gamma K \sum_{p=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n-1} \frac{\varepsilon_p}{(n-p)^{\gamma+1}}$$

$$\leqq 2^\gamma K \cdot \operatorname*{Max}_{k>\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_k \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^{1+\gamma}} = o(1).$$

Le lemme est ainsi démontré.

Passons à présent à quelques remarques sur les lemmes I—III qui résultent immédiatement du raisonnement précédent.

1°. Si dans ces lemmes on remplace les sommes u_n par

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \alpha_{n-p},$$

les w_n vérifient les mêmes conditions que les u_n.

2°. Si dans les lemmes I—III on remplace les sommes u_n par

$$v_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p},$$

les v_n remplissent les mêmes conditions que les u_n. On a notamment

$$v_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_{-p} \alpha_{n-p}$$

et il suffit de remarquer que les suites $\{a_p\}$ et $\{a_{-p}\}$ $(p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ vérifient les mêmes conditions.

3°. Les lemmes I—III subsistent, si, à la place des sommes u_n et v_n, nous considérons les sommes

$$u_n' = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p+k}; \qquad v_n' = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n+p+k},$$

k entier arbitraire mais fixe. Par exemple:

$$u_n' = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p+k} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p' \alpha_{n-p},$$

où $a_p' = a_{p+k}$; les a_p' remplissent les mêmes conditions que les a_p.

4°. Si on remplace dans les lemmes et les remarques précédentes les conditions:

$$a_n \to 0; \qquad \frac{a_n}{|n|^\gamma} \to 0; \qquad a_n |n|^\gamma \to 0 \quad (\text{pour } n \to \pm\infty)$$

respectivement par les conditions:

$$|a_n| < M; \qquad \frac{|a_n|}{|n|^\gamma} < M; \qquad |a_n| \cdot |n|^\gamma < M \quad (M \text{ une constante})$$

(les conditions sur les α_n restant les mêmes), nous obtenons respectivement:

$$|v_n| < M'; \qquad \frac{|u_n|}{|n|^\gamma} < M'; \qquad |u_n| \cdot |n|^\gamma < M' \qquad (M' \text{ une constante}).$$

5°. Si les a_n et α_n $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sont des fonctions d'une variable x et si, pour x appartenant à un ensemble donné E, les conditions énoncées dans les lemmes et dans les remarques précédentes sont réalisées *uniformément*, les thèses correspondantes sont également vérifiées uniformément, pour x appartenant à E.

Lemme IV. *Soit donnée une serie* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$. *Si*

$$1^\circ.\ a_n = O\left(\frac{1}{n^{2k+1}}\right)^{5)} \qquad 2^\circ.\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^j a_p = 0$$

on a: $(j = 0, 1, 2, \ldots, k-1,\ k > 0,$ entier)

$$(2) \qquad \sum_{p_k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_{k-1}=p_k}^{\infty} \sum_{p_{k-2}=p_{k-1}}^{\infty} \cdots \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \frac{1}{k!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p.^{6)}$$

Ce lemme montre le lien qui existe (sous certaines restrictions) entre les restes k'itérées de la série Σa_p et la somme de la série $\Sigma p^k a_p$. Nous allons démontrer ce lemme par l'induction.

a) Soit $k = 1$. Posons

$$R_n = \sum_{p=n}^{\infty} a_p.$$

La condition 1° et l'égalité $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p = 0$ (cond. 2°) entraînent la convergence de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} R_n$. On a:

$$\sum_{p=-n}^{+n} R_p = \sum_{p=-n}^{+n} p R_p - \sum_{p=-n}^{+n} (p-1) R_p = \sum_{p=-n}^{+n} p R_p - \sum_{p=-n}^{n-1} p R_{p+1}$$
$$= \sum_{p=-n}^{+n} p a_p + (n+1) R_{-n} + n R_{n+1}.$$

En passant à la limite et en tenant compte de l'ordre de grandeur de R_n, on obtient:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p = \sum_{p_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p a_p.$$

b) Supposons notre lemme démontré pour tous les entiers positifs $< k$. Nous le démontrerons pour k. Il nous sera commode d'introduire les notations suivantes:

$$\sum_{p=n}^{\infty} a_p = R_n^{(1)}; \qquad \sum_{p=n}^{\infty} R_p^{(i-1)} = R_n^{(i)} \qquad (i = 2, 3, \ldots).$$

---

5) La condition 1° peut être remplacée par la condition $a_n = O(n^{-2k-\varepsilon})$ (ε positif arbitraire) ou même par: $a_n = o(n^{-2k})$. Dans ce dernier cas pour $k = 1$, les deux séries de (2) convergent ou divergent simultanément et leur différence converge vers zéro cf. a). Nous dirons que $a_n = O(f(n))$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ si $a_n = O(|f(n)|)$ en même temps: pour $n \to +\infty$ et pour $n \to -\infty$. D'une manière analogue pour le symbole o.

6) La proposition subsiste, mutatis mutandis, pour les sommes $\sum_0^{\infty} a_n$; la démonstration ne diffère pas essentiellement de la démonstration donnée dans le texte.

On déduit aisément de la condition 1°, que toutes ces expressions pour $0 < i \leqq k$, ont un sens, toutes les séries qui s'y présentent étant convergentes. Je dis qu'aussi le premier membre de (2), c'est-à-dire la $(k+1)$-uple série

$$\sum_{p_k=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_{k-1}=p_k}^{\infty} \cdots \sum_{p=p_1}^{\infty} a_p = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(k)}$$

converge.

En effet, notre lemme étant supposé vrai pour les valeurs de j: $1 \leqq j < k$ et en tenant compte des hypothèses concernant la convergence vers zéro des séries $\Sigma p^j a_p$ $(1 \leqq j < k)$, on peut raisonner comme suit:

α_1) Les $R_n^{(1)}$ sont $O(n^{-2k})$ et comme

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(i)} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p a_p = 0$$

on en deduit que $R_p^{(2)}$ sont $O(n^{-2k+1})$.

α_2) Comme, par hypothèse

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(2)} = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^2 a_p = 0$$

on a: $R_n^{(3)} = \sum_{p=n}^{\infty} R_n^{(2)} = O(n^{-2k+2}) \ldots\ldots$

Enfin: α_{k-1}) L'ordre de grandeur de $R_n^{(k-1)}$ est $O(n^{-k-2})$ et comme, par hypothèse:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_n^{(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^{k-1} a_p = 0$$

on en conclut que

$R_n^{(k)} = O(n^{-k-1})$, c'est-à-dire la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_n^{(k)}$ converge. La formule (2) peut être écrite sous la forme suivante:

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} R_p^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} p^k a_p.$$

Selon la formule connue du calcul des différences finies, d'après laquelle la k'ième différence de n^k est égale à $k!$, on a

$$1 = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} A_k^{(j)} (-1)^j (p-j)^k \tag{2'}$$

où $A_k^{(j)} = \binom{k}{j} = \frac{k \cdot (k-1) \ldots (k-j+1)}{j!}$ et p un entier arbitraire. On peut donc écrire:

$$\sum_{p=-N}^{+N} R_p^{(k)} = \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_p^{(k)} (p-j)^{\cdot}$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N}^{+N} (-1)^j A_k^{(j)} R_p^{(k)} (p-j)^k$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N-j}^{N-j} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} p^k$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \sum_{p=-N}^{+N} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} p^k + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} p^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{k!} \sum_{p=-N}^{+N} p^k a_p + O\left(\frac{1}{N}\right)$$

car les sommes $\sum_{j=0}^{k} (-1)^j A_k^{(j)} R_{p+j}^{(k)}$, c'est-à-dire k 'ièmes différences de $R_p^{(k)}$, sont égales à a_p. En passant à la limite, nous obtenons l'égalité (2).

Chapitre II.

Théorèmes sur la multiplication des séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes signalés, rappelons quelques remarques et définitions, dont nous ferons constamment usage. Supposons donnée une série trigonométrique (convergente ou non)

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

à coefficients tendant vers zéro: $\lim \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 0$.

Parfois il et plus avantageux de présenter la série (1) dans la forme d'une série infinie dans les deux directions:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n,$$

où le symbole $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n$ doit être compris comme $\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=-N}^{N} u_n$ (la limite existant dans le sens ordinaire ou dans le sens généralisé, rélatif à une méthode de sommation). Appliquons à cet effet aux termes de la série (1) les formules connues d'Euler. A l'aide d'un calcul facil on parvient à l'égalité:

$$(2) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=-N}^{N} (a_n - i\, b_n)\, e^{inx} \qquad (N > 0)$$

où l'on a, par définition

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad b_0 = 0.$$

Nous pouvons donc écrire

$$(3) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n - i\,b_n)\,e^{inx},$$

même dans le cas de la divergence ou non-sommabilité de ces séries. Rappelons une fois encore que, par définition de la somme de la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$, cette dernière peut exister, sans que les sommes $\sum_{-\infty}^{0} u_n$ et $\sum_{0}^{\infty} u_n$ existent (évidemment, la réciproque n'est pas vraie). La formule (3) nous apprend, que la série trigonométrique (1) peut être traitée comme une série de Laurent sur le cercle de convergence[7]).

On sait que le produit de deux séries de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n z^n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n z^n$ peut être défini comme une série de Laurent $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n z^n$, w_n étant égale à $\sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p v_{n-p}$.

En tenant compte de ce fait, nous désignons par le produit *laurentien* de deux séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n$ la série $\sum_{-\infty}^{+\infty} w_n$, les w_n étant définiés par les égalités $w_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} u_p v_{n-p}$. On peut démontrer sur les produits de ce type plusieurs théorèmes analogues à ceux qui subsistent pour les produits formés par la règle de multiplication de Cauchy[8]), mais entre ces deux méthodes de multiplication il y a des différences essentielles. Par exemple: dans le cas de la multiplication laurentienne, les séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n$ peuvent être convergentes, sans que leur produit laurentien puisse être défini[9]).

---

[7]) Si les coeficients a_n et b_n ne tendent qu'assez lentement vers zéro, tous les points de convergence de cette série de Laurent, s'ils existent, sont situés sur la circonference $|z| = 1$.

[8]) Cf. p. ex. S. Chapman, Quarterly Journal **44**. — M. Chapman d'aileurs ne considère que de telles séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ pour lesquelles les deux séries $\sum_{0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{0} u_n$ convergent simultanement.

[9]) Cf. p. ex. S. Chapman l. c. Le produit laurentien des séries $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{|n|^\alpha}$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{(-1)^n}{|n|^\beta}$ (convergentes pour α et β positifs) n'existe pas pour $\alpha + \beta < 1$.

Si, cependant, l'une au moins des séries $\sum_{-\infty}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} v_n$ converge *absolument*, la formule pour les termes du produit laurentien subsiste et, d'après le lemme I du Chapitre I, les termes w_n du produit tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En s'appuyant sur la formule (3), nous pouvons prendre pour définition du produit formel des séries trigonométriques

$$(4) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ et } \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$$

dont l'une au moins, par exemple la deuxième, converge absolument[10]), la définition du produit des séries de Laurent:

$$(4') \quad 2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(a_n - ib_n)e^{inx} \text{ et } \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(\alpha_n - i\beta_n)e^{inx}$$

$$(a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad \alpha_{-n} = \alpha_n, \quad \beta_{-n} = -\beta_n)$$

c'est-à-dire, la série

$$(5) \quad \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(A_n - iB_n)e^{inx},$$

où

$$(6) \quad A_n - iB_n = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty}(a_p - ib_p)(\alpha_{n-p} - i\beta_{n-p}).$$

Supposons d'abord que tous les coefficients a_p, b_p, α_p, β_p sont réels; nous pouvons écrire dans ce cas:

$$(6') \quad A_n = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p\alpha_{n-p} - b_p\beta_{n-p}; \quad B_n = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p\beta_{n-p} + b_p\alpha_{n-p}.$$

On peut prouver aisement que les A_n et B_n vérifient aussi les égalités:

$$(7) \quad A_{-n} = A_n, \quad B_{-n} = -B_n;$$

autrement dit, la série (5) où A_n et B_n sont donnés par (6) peut être presentée dans la forme:

$$(8) \quad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nx + B_n \sin nx).$$

Cette dernière série nous appelons le «*produit formel*»[11]) des séries (4). Il est aisé de voir que le produit formel (c'est-à-dire le terme général du produit) ne dépend pas de l'ordre des multiplicateurs.

---

[10]) C'est-à-dire la série $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}$ converge.

[11]) Cf. Al. Rajchman, l. c. p. 120.

Si $a_p, b_p, \alpha_p, \beta_p$ sont des nombres complexes, c'est-à-dire, si nous supposons que les A_p et B_p peuvent être aussi complexes, dans ce cas les formules (6) *ne sont* pas des consequences de la formule (6), et A_n et B_n, en général, ne sont pas définies d'une manière univoque. Mais en tenant compte, qu'opérant avec les séries de Laurent — nous avons à faire avec des séries trigonométriques, il faut donc demander que A_n et B_n remplissent les égalités (7). Les nombres uniques A_n et B_n (en géneral — complexes) qui vérifiaient les conditions (7) — sont des nombres donnés par (6′).

En effet, la deuxième des expressions (6′) étant une fonction impaire de n, on a:

$$(A_n - iB_n) + (A_{-n} - iB_{-n}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p \alpha_{n-p} - b_p \beta_{n-p}$$

et si A_n et B_n vérifiaient les conditions (7), on obtient, comme formule pour A_n, la première des égalités (6). D'une manière analogue on obtient la formule (6′) pour B_n. En partant de ces expressions pour A_n et B_n on parvient par le calcul facil aux formules:

(9)
$$A_n \cos nx + B_n \sin nx$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)(\alpha_{n-p} \cos(n-p)x + \beta_{n-p} \sin(n-p)x)$$
$$- (a_p \sin px - b_p \cos px)(\alpha_{n-p} \sin(n-p)x + \beta_{n-p} \cos(n=p)x)$$

(9′)
$$A_n \sin nx - B_n \cos nx$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} (a_p \cos px + b_p \sin px)(\alpha_{n-p} \sin(n-p)x - \beta_{n-p} \cos(n-p)x)$$
$$+ (a_p \sin px - b_p \cos px)(\alpha_{n-p} \cos(n-p)x + \beta_{n-p} \sin(n-p)x).$$

Si l'on introduit pour les termes des séries trigonométriques et des séries conjuguées les notations suivantes:

$$a_p \cos px + b_p \sin px = a_p(x) \qquad b_p \cos px - a_p \sin px = b_p(x)$$
$$\alpha_p \cos px + \beta_p \sin px = \alpha_p(x) \qquad \beta_p \cos px - \alpha_p \sin px = \beta_p(x)$$
$$A_p \cos px + B_p \sin px = A_p(x) \qquad B_p \cos px - A_p \sin px = B_p(x).$$
$$(\text{d'où } a_p(0) = a_p, \quad b_p(0) = b_p \quad \text{etc.}).$$

on peut écrire les égalités (9) dans la forme:

(10)
$$A_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\alpha_{n-p}(x) - b_p(x)\beta_{n-p}(x)$$
$$B_p(x) = \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\beta_{n-p}(x) + b_p(x)\alpha_{n-p}(x)$$

tout-à-fait analogue à celle des expressions (6′). On voit sans peine que $A_{-n}(x) = A_n(x)$, $B_{-n}(x) = -B_n(x)$. Les formules (10) joueront un rôle fondamental dans la suite.

Remarquons encore que les théorèmes sur la multiplication des séries trigonométriques subsistent, si, au lieu des séries, on considère les intégrales trigonométriques

$$\int_0^\infty [A(n)\cos nx + B(n)\sin nx]\,dn$$

(analogues aux intégrales de Fourier) qui peuvent être écrites sous la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [A(n) - iB(n)]\,e^{inx}\,dn; \quad A(-n) = A(n),\ B(-n) = -B(n).$$

Les démonstrations restent, au fond, les mêmes.

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes sur la multiplication.

Théorème I[12]). *Si les coefficients de la série trigonométrique (convergente ou non)*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) \tag{1}$$

tendent vers zéro, et si la série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-3}) \tag{11}$$

pour $x \subset E$[13]) converge vers zéro, le produit formel de ces deux séries, c'est-à-dire la série

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx), \tag{12}$$

A_n et B_n étant donnés par la formule (6′), converge uniformément vers zéro pour $x \subset E$[14]).

Démonstration. On déduit immédiatement du lemme I (Chap. I) que les coefficients A_n et B_n du produit formel tendent vers zéro.

---

[12]) Cf. Al. Rajchman, l. c. p. 128. L'énoncé, donné ici, de ce théorème et des théorèmes III et III′ ne diffère pas essentiellement de l'énoncé donné par M. Rajchman.

[13]) C'est-à-dire pour x appartenant à un ensemble E de nombres, situé sur $(0, 2\pi)$.

[14]) Évidemment dans (11) l'exposant 3 — peut être abaissé. Pour la simplicité d'écriture nous n'insistons pas sur ce point (de même dans la suite).

Puis, en désignant par $S_n(x)$ la n'ième somme partielle du produit 12) et en tenant compte que $A_{-p}(x) = A_p(x)$, on a:

$$4\,S_n(x) = 2\sum_{k=-n}^{+n} A_k(x) = \sum_{k=-n}^{+n}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,\alpha_{k-p}(x) - b_p(x)\,\beta_{k-p}(x).$$

En changeant l'ordre de sommation (ce qui est permis) — on obtient

$$(13)\qquad 4\,S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\sum_{k=-n}^{+n}\alpha_{k-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\sum_{k=-n}^{+n}\beta_{k-p}(x)$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\sum_{k=-n-p}^{n-p}\alpha_k(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\sum_{k=-n-p}^{n-p}\beta_k(x).$$

Si l'on désigne par $R_n(x)$ et $T_n(x)$ les restes

$$R_n(x) = \sum_{p=n}^{\infty} a_p(x),\quad T_n(x) = \sum_{p=n}^{\infty}\beta_p(x)\quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

on peut écrire l'égalité (13) sous la forme suivante:

$$(14)\qquad 4\,S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,[R_{-n-p}(x) - R_{n-p+1}(x)]$$
$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,[T_{-n-p}(x) - T_{n-p+1}(x)]$$
$$= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,R_{n-p+1}(x)$$
$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{n-p}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,T_{n-p+1}(x).$$

Comme, par hypothèse, $\sum_{-\infty}^{+\infty}\alpha_k(x) = 0$ pour $x \subset E$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty}\beta_n(x) = 0$ (les $\beta_n(x)$ étant des fonctions impaires de n), on en conclut que $R_n(x)$ et $T_n(x)$ sont $O(n^{-2})$ et même uniformément pour $x \subset E$. On en déduit (d'après le lemme I, Chap. I) que tous les quatres termes du côté droit de l'égalité (14) tendent uniformément vers zéro pour $x \subset E$, ce qui prouve le théorème.

En examinant cette démonstration et en s'appuyant sur la remarque 4° au lemme I (Chap. I) nous observons qu'en même temps nous avons démontré le théorème suivant:

Thérème II. *Si la série* (1) *a des coefficients bornés et si la série* (11) *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *le produit formel* (13) *de ces deux séries* (*à coefficients* A_n *et* B_n *bornés*) *a pour* $x \subset E$ *les sommes partielles uniformément bornées.*

Remarquons encore que les théorèmes sur la multiplication des séries trigonométriques étant au fond des théorèmes sur la multiplication laurentienne des séries quelconques, on en déduit que les théorèmes I et II

subsistent même dans le cas où les coefficients a_p, b_p, α_p, β_p des séries (1) et (11) sont des fonctions de la variable x, pourvu que les coefficients A_n et B_n du produit sont donnés par les formules (6′).

Nous dirons[15]) qu'une méthode quelconque de sommation est *du type* K_0 (ou tout court est K_0), si elle satisfait aux tros conditions suivantes[16]):

1°. La convergence (uniforme) de Σa_n entraîne la sommabilité (uniforme) de Σa_n vers la même somme.

2°. La sommabilité (uniforme) des Σa_n et Σb_n entraîne la sommabilité (uniforme) de la série $\Sigma(a_n + b_n)$ vers la somme $(\Sigma a_n) + (\Sigma b_n)$.

3°. La sommabilité (uniforme) de la série Σa_n entraîne la sommabilité (uniforme) de la série $\Sigma c a_n$ vers la somme $c \Sigma a_n$, c-étant une constante, ou, plus généralement, une fonction bornée en valeur absolue.

D'une façon analogue, nous dirons qu'une méthode quelconque de sommation est du type L_0, si elle satisfait aux trois conditions:

1°. Si les sommes partielles de Σa_n sont bornées (uniformément), la série Σa_n est aussi finie (uniformément) par rapport à la méthode considérée[17]).

2°. Si les séries Σa_n et Σb_n sont finies (uniformément) par la méthode considérée, il est de même de la série $\Sigma(a_n + b_n)$.

3°. Si la série Σa_n est finie (uniformément) par la méthode considérée, il est de même de la série $\Sigma c a_n$, c-étant une constante, ou, plus généralement, une fonction bornée en valeur absolue.

A l'aide de ces termes nous allons énoncer à présent deux nouveaux théorèmes; la démonstration du deuxième ne différant essentiellement de celle du premier, nous l'omettrons.

Théorème III.[18]) *Si les coefficients de la série* (1) *tendent vers zéro et si l'on désigne par* $\sigma(x)$ *la somme de la série* (11), *alors la différence des deux séries*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x) \tag{15}$$

$$\text{et} \quad \sigma(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \right]$$

converge dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ *uniformément vers zéro.*

---

[15]) Cf. une remarque de M. Rajchman, l. c. p. 135.

[16]) Les termes a_n peuvent dépendre d'une variable. Si l'on tient compte de l'uniformité, il faut le faire dans toutes les trois conditions.

[17]) On dit que la série Σa_n est finie (uniformément) dans le sens ordinaire ou généralisé, si les sommes partielles, ou les expressions qui définissent la limite généralisée de la série Σa_n — sont bornées (uniformément).

[18]) A. Rajchman l. c. p. 135.

Théorème IV. *Si les coefficients de la série* (1) *sont bornés, la différence des deux séries* (15) — *est uniformément bornée pour* $0 \leqq x \leqq 2\pi$.

Démonstration du théorème III. Étudions le produit formel des deux séries

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x), \tag{1}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x). \tag{11'}$$

La deuxième de ceux séries converge vers zéro, même uniformément, sur $(0, 2\pi)$ et possède des coefficients du type $O(n^{-3})$. Rien ne nous empêche d'appliquer à ces deux séries le théorème I. Le produit formel des séries (1) et (11), que nous désignerons par

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n' \cos n x + B_n' \sin n x)$$

(A_n' et B_n' dépendant en général de x) converge uniformément vers zéro sur $(0, 2\pi)$. Par un calcul facil on démontre que

$$A_n' = A_n - \sigma(x) a_n, \quad B_n' = B_n - \sigma(x) b_n,$$

A_n et B_n étant les coefficients du produit formel des séries (1) et (11). De là découle immédiatement le théorème III.

De ces théorèmes on déduit aisément les conséquences suivantes:

Théorème III'.[19]) *Si pour* $x \subset E$, *la somme* $\sigma(x)$ *de la série* (11) *remplit la condition*

$$|\sigma(x)| \geqq k > 0, \qquad (k \text{ une konstante}) \tag{16}$$

alors, la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (uniforme) pour $x \subset E$ *de la série* (12) *par une méthode quelconque du type* K_0, *est la sommabilité (uniforme), par la même méthode, de la série* (1).

En désignant respectivement par $S(x)$ *et* $s(x)$ *les sommes ordinaires ou généralisées des séries* (12) *et* (11), *on a*

$$S(x) = \sigma(x) s(x)^{20}).$$

Théorème IV'. *Si pour* $x \subset E$ *la condition* (16) *est remplie, la condition nécessaire et suffisante pour que la série* (12) *soit finie (uni-*

---

[19]) Al. Rajchman l. c.

[20]) On voit de la démonstration de ce théorème que la sommabilité uniforme de la série (1) entraîne la sommabilité uniforme de (12), indépendamment de la condition (16). Cette condition n'est nécessaire que pour la proposition réciproque.

formément) L_0 *pour* $x \subset E$, *est que la série* (1) *soit finie (uniformément), par la même méthode.*

Remarque: Si nous ne tenons pas compte de *l'uniformité* de la sommation, la condition (16) dans les théorèmes III et IV peut être remplacée par la condition plus faible: $\sigma(x) \neq 0$.

Démonstration du théorème III'.

1°. Supposons que la série (1) est sommable K_0 (uniformément) vers la somme $s(x)$ pour $x \subset E$. On en déduit la sommabilité (uniforme) K_0 de la série

$$\frac{\sigma(x)\, a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x)(a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{17}$$

vers la somme $\sigma(x)\, s(x)$ (cond. 3°).

La série

$$\frac{A_0 - \sigma(x)\, a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n - \sigma(x)\, a_n) \cos n x + (B_n - \sigma(x)\, b_n) \sin n x\} \tag{18}$$

converge uniformément vers zéro, donc (cond. 1°) est sommable uniformément K_0 vers zéro sur $(0, 2\pi)$. En ajoutant les séries (17) et (18) et en s'appuyant sur la condition 2°, on obtient que la série (12) est sommable (uniformément) pour $x \subset E$ vers la somme $\sigma(x)\, s(x)$.

2°. Réciproquement: de la sommabilité (uniforme) K_0 de la série (12) vers la somme $S(x)$ on obtient, en soustrayant la série (18), (cond. 2° et 3°), la sommabilité uniforme vers la même somme de la série (17). En s'appuyant sur l'inégalité (16) on obtient (cond. 3°, pour $c = 1 : \sigma(x)$, que pour $x \subset E$ la série (1) est sommable (uniformément) K_0 vers $S(x) : \sigma(x)$.

Remarque au théorème III'. On voit du théorème III, que si $\sigma(x) \neq 0$ et si la série (1) n'est pas sommable K_0 — la série (12) n'est sommable non plus, mais qu'alors la non-sommabilité (en particulier: la divergence) de ces deux séries est de même caractère (la différence des séries (15) étant le zéro uniforme sur $(0, 2\pi)$). En se bornant donc au cas de convergence (le cas de sommabilité généralisée étant analogue), et en désignant respectivement par $s_n(x)$, $\sigma_n(x)$, $S_n(x)$ les n'ièmes sommes partielles des séries (1), (11) et (12), on a[21]):

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \sigma(x) > 0;$$

[21]) Cf. aussi Nina Bary, Comptes Rendus 3. XII. 23.

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \underline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, S_n(x) &= \sigma(x)\, \overline{\lim_{n\to\infty}}\, s_n(x) \end{aligned}\right\} \quad \sigma(x) < 0.$$

Remarque sur le théorème IV'. Si les sommes partielles $s_n(x)$ de la série (1) sont bornées inférieurement ou supérieurement, on conclut du théorème IV que les sommes $S_n(x)$ de la série (12) sont aussi bornées: du même côté si $\sigma_n(x) > 0$, et du côté contraire si $\sigma(x) < 0$.

Au lieu de supposer que les $s_n(x)$ sont bornées, on peut supposer que $s_n(x)$ sont $O(\varphi(n))$ on $o(\varphi(n))$, $\varphi(n)$ tendant vers $+\infty$ avec n; on a alors le même ordre de grandeur pour $S_n(x)$.

Toutes ces remarques sont évidentes, mais comme des remarques analogues concernent tous les théorèmes sur la multiplication qui vont suivre, nous les énonçons à présent pour ne pas être obligés à y revenir plus tard. Nous nous occuperons maintenant des théorèmes sur la multiplication pour les séries conjuguées aux séries données. On sait qu'on appelle *conjuguée* à la série (1) — la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{19}$$

qui, multipliée par i, et ajoutée à la série (1), nous donne une série de puissances:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n)\, e^{inx}.$$

Nous verrons, que sur les séries conjuguées on peut sans peine démontrer quelques théorèmes d'un caractère très simple et nous aurons l'occasion bien de fois d'en profiter.

Les théorèmes V et VI correspondent aux théorèmes I et III.

Théorème V.[22]) *Si la série* (1) *a des coefficients tendant vers zéro, et si la série* (11) *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \tag{20}$$

conjuguée au produit formel des séries (1) *et* (11) *converge uniformément pour* $x \subset E$ (*en général — pas vers zéro*).

Théorème VI. *Si la série* (1) *a des coefficients tendant vers zéro, et si nous désignerons par* $\sigma(x)$ *la somme de la série* (11), *la différence des séries*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x)\, (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{21}$$

converge uniformément sur $(0, 2\pi)$.

---

[22]) Les théorèmes V et VI étaient démontrés en commun par M. Rajchman et moi.

Du théorème VI on déduit immédiatement, comme un corollaire simple, la proposition suivante:

Théorème VI. *Si pour $x \subset E$ l'inégalité* (16) *est remplie, la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (uniforme) de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \tag{19}$$

pour $x \subset E$ par une méthode quelconque de K_0, est la sommabilité (uniforme), par la même méthode, de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx). \tag{20}$$

Démonstration du théorème V. En désignant par $u_n(x)$ les sommes partielles de la série (20), on a

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} A_k \sin kx - B_k \cos kx = -\sum_{k=1}^{n} B_k(x) \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,\beta_{n-p}(x) + b_p(x)\,\alpha_{n-p}(x) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \beta_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \alpha_k(x). \end{aligned}$$

En désignant respectivement par $R_n(x)$ et $T_n(x)$ les restes des séries $\sum_{-\infty}^{\infty} \alpha_n(x)$ et $\sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_n(x)$, et en tenant compte, que pour $x \subset E$ ces restes sont $O(n^{-2})$ (uniformément) — on a:

$$\begin{aligned} u_n(x) = &-\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} [a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{n-p+1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_{n-p+1}(x). \end{aligned}$$

En passant à la limite, on voit que pour $x \subset E$ les deux derniers termes de cette égalité tendant *uniformément* vers zéro (Lemme I, Chap. I). On a donc *uniformément* pour $x \subset E$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} u_n(x) &= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_p(x) - a_p(x)\,T_p(x) \end{aligned}$$

car, comme on démontre sans peine, on a pour $x \subset E$:

$$R_{-n}(x) = -R_{n+1}(x); \qquad T_{-n}(x) = T_{n+1}(x).$$

Le théorème V est donc démontré.

Passons maintenant à la démonstration du théorème VI. Si

$$\sigma(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

la série conjuguée au produit formel des séries (11′), c'est-à-dire la série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A'_n \sin nx - B'_n \cos nx),$$

où $A'_n = A_n - \sigma(x)a_n$, $B'_n = B_n - \sigma(x)b_n$, converge uniformément sur $(0, 2\pi)$ et cela prouve le théorème VI. En raisonnant de la même façon, comme dans le cas du théorème III, on obtient la démonstration du théorème VI′.

D'une manière analogue nous allons démontrer les propositions suivantes:

Théorème VII. *La série conjuguée au produit des séries trigonométriques, dont l'une (série* (1)*), a des coefficients bornés, et l'autre (série* (11)*), converge vers zéro pour $x \subset E$, possède pour $x \subset E$ les sommes partielles uniformément bornées.*

Théorème VIII. *Si les coefficients de la série* (1) *sont bornés, la différence des séries* (21) *a les sommes partielles uniformément bornées sur* $(0, 2\pi)$.

On en déduit aisément un corollaire analogue au celui du théorème VI.

Chapitre III.

Les sommabilités par les moyennes de Cesàro. Théorèmes sur la multiplication pour des séries trigonométriques à coefficients du type $o(n^\gamma)$ et $O(n^\gamma)$ $(\gamma \leqq 0)$.

La série $\sum_0^{\infty} u_n$ est dite sommable vers la somme s par la méthode des moyennes arithmétiques de Cesàro d'ordre γ, ou tout court (C, γ), si la limite (pour $n \to \infty$) de l'expression

$$\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} \tag{1}$$

existe et est égale à s.[23]) Dans la formule (1) les quantités $S_n^{(\gamma)}$ et $C_n^{(\gamma)}$ sont définies par les égalités

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = (1-x)^{\gamma+1} \sum_{n=0}^{\infty} S_n^{(\gamma)} x^n; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\gamma)} x^n = (1-x)^{-(\gamma+1)}.$$

En partant de ces expressions, on a:

$$C_0^{(\gamma)} = 1, \qquad C_n^{(\gamma)} = \binom{\gamma+n}{n} = \frac{(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n)}{1\cdot 2\dots n} \qquad (n>0),$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} S_n^{(\gamma)} &= u_n + \binom{\gamma+1}{1} u_{n-1} + \binom{\gamma+2}{2} u_{n-2} + \dots + \binom{\gamma+n}{n} u_0 \\ &= s_n + \binom{\gamma}{1} s_{n-1} + \binom{\gamma+1}{2} s_{n-2} + \dots + \binom{\gamma+n-1}{n} s_0, \end{aligned}$$

où $s_k = u_0 + u_1 + \dots + u_k$.

Nous nous bornons au cas: $\gamma > -1$, le cas: $\gamma < -1$ étant le plus souvent dépourvu de l'intêret. Nous rappelons quelques propriétés des constantes $C_n^{(\gamma)}$. Pour tout γ subsiste la formule

$$C_n^{(\gamma)} = C_n^{(\gamma+1)} - C_{n-1}^{(\gamma+1)}.$$

En profitant de la formule connue, donnée par Gauss pour la fonction Eulerienne $\Gamma(x)$:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^x}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \qquad (x \neq -1, -2, \dots)$$

on peut aisément obtenir l'égalité asymptotique

$$C_n^{(\gamma)} \sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}.$$

On en conclut, que pour $\gamma < -1$, la série $\sum C_n^{(\gamma)}$ converge absolument. Après ces remarques préliminaires nous pouvons passer à la démonstration des théorèmes sur la multiplication. Commençons du cas $\gamma < 0$.

Théorème I. *Si les coefficients de la série trigonométrique*

$$(4) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

sont:

$$(5) \qquad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{-\gamma}) \qquad (0 < \gamma < 1)$$

et si la série

$$(6) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \qquad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-3})$$

---

[23]) Si les expressions (1) sont bornées (uniformément), on dit que la série Σu_n est *finie* (C, γ) (uniformément).

converge vers zéro pour $x \subset E$, le produit formel

$$(7) \qquad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x)$$

de ces séries, qui d'après de lemme III (*Chap.* I) *a des coefficients du type* $o(n^{-\gamma})$, *est sommable* $(C, -\gamma)$ *uniformément vers zéro pour* $x \subset E$. *Si l'on a* O, *au lieu de* o, *dans* (5) — *la série* (7) *est uniformément finie* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Soit

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_n(x), \qquad \text{donc:}$$

$$(8) \qquad 4 S_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, \alpha_{n-p}(x) - b_p(x)\, \beta_{n-p}(x).$$

Posons encore:

$$(9) \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k(x) = R_n(x), \qquad \sum_{k=n}^{\infty} \beta_k(x) = T_n(x) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Puisque:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \beta_k(x) = 0, \qquad (x \subset E),$$

on a, uniformément, pour $x \subset E$

$$R_n(x) = O(n^{-2}), \qquad T_n(x) = O(n^{-2}).$$

D'après l'égalité (8):

$$(10) \qquad 4 S_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, R_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, R_{n-p+1}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, T_{-n-p}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, T_{n-p+1}(x).$$

Prenons la n'ième somme de Cesàro d'ordre $-\gamma$ de la série (7). En s'appuyant sur les formules connues, on a:

$$4 \frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = 4 \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} S_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}}$$

$$= \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, R_{-k-p}(x) - a_p(x)\, R_{k-p+1}(x) - b_p(x)\, T_{-k-p}(x) + b_p(x)\, T_{k-p+1}(x) \right]}{C_n^{(-\gamma)}}.$$

Les quantités $R_n(x)$ et $T_n(x)$ étant pour $x \subset E$ uniformément $O(n^{-2})$, on en déduit, d'après le lemme III (Chap. I) que les expressions

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, R_{-k-p}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, R_{k-p+1}(x),$$

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, T_{-k-p}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, T_{k-p+1}(x)$$

sont pour $x \subset E$ uniformément: $o(k^{-\gamma})$. Désignons par $D_k(x)$ l'une quelconque de ces expressions. Nous démontrerons que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = 0$$

pour $x \subset E$, et même uniformément.

Puisque $-1 < -\gamma < 0$, on a:

$$C_n^{(-\gamma)} \sim \frac{n^{-\gamma}}{\Gamma(-\gamma+1)}, \qquad C_n^{(-\gamma-1)} \sim \frac{n^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}.$$

Maintenant il suffit de s'appuyer sur le lemme III (Chap. I), en particulier sur la remarque concernant B_n.

On peut aussi sans peine démontrer le théorème suivant:

Théorème II. *La série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) \tag{11}$$

conjuguée au produit formel de deux séries trigonométriques, dont l'une, la série (4), *a des coefficients vérifiant la condition* (5) *et l'autre, la série* (6), *converge vers zéro pour* $x \subset E$, *est uniformément sommable* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$. *Si* $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = O(n^{-\gamma})$ — *la série* (11) *est uniformément finie* $(C, -\gamma)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Désignons par $u_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série (11). Évidemment:

$$u_0(x) = 0, \quad u_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (A_n \sin nx - B_n \cos nx) = -\sum_{k=1}^{n} B_k(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, \beta_{k-p}(x) + b_p(x)\, \alpha_{k-p}(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \beta_k(x) - \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=1-p}^{n-p} \alpha_k(x)$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{1-p}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{n-p+1}(x)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, R_{1-p}(x) + \frac{1}{2} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, R_{n-p+1}(x),$$

en profitant, comme d'habitude, des notations (9). Prenons la n'ième somme de Cesàro d'ordre $-\gamma$ pour la série (11):

$$\frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} u_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = -\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{1-p}(x) + b_p(x)\, R_{1-p}(x)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{k-p+1}(x) + b_p(x)\, R_{k-p+1}(x)\right]}{C_n^{(-\gamma)}}.$$

Désignons par $D_k(x)$ l'une quelconque des expressions

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{k-p+1}(x), \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, R_{k-p+1}(x)$$

qui sont, pour $x \subset E$, uniformément $o(k^{-\gamma})$. Comme d'après la démonstration du théorème I, pour $x \subset E$, on a uniformément:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(-\gamma)}} = 0,$$

donc

$$\lim \frac{S_n^{(-\gamma)}}{C_n^{(-\gamma)}} = -\frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, T_{1-p}(x) + b_p(x)\, R_{1-p}(x)$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, R_p(x) - a_p(x)\, T_p(x)$$

uniformément pour $x \subset E$, la série du second membre étant évidemment convergente. Le théorème II est ainsi démontré[24]).

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes analogues sur la multiplication des séries dans le cas des coefficients non tendant vers zéro. Les démonstrations auront le caractère un peu différent des démonstrations précédentes, car, étant donnée une série

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

qui converge vers zéro dans un ensemble E, nous sommes obligés de faire quelques hypothèses supplémentaires, notamment que pour $x \subset E$ la somme de cette série possède un certain nombre des dérivées nulles. Désignons

---

[24]) Les théorèmes analogues aux théorèmes I et II subsistent aussi dans le cas: $\gamma < -1$. Mais nous nous bornons au cas $\gamma > -1$, car, d'après un théorème enoncé par M. Chapman, Proc. London Math. Society 9 (1911), p. 406 — toute série $\sum_0^\infty u_n$ est sommable (C, γ) pourvu que l'on ait $u_n = o(n^\gamma)$ $(\gamma < -1,\ \gamma \neq -2, -3, \ldots)$.

par $\langle\gamma\rangle$ le plus petit entier $\geqq\gamma$; c'est-à-dire pour γ entier: $\langle\gamma\rangle=\gamma$ et pour γ non entier: $\langle\gamma\rangle=[\gamma]+1$.[25])

Théorème III. *Supposons que les coefficients de la série* (4) *sont* $o(n^\gamma)$ $(\gamma>0)$ *et que la série*

$$(12)\qquad \frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx),\quad \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2}=O(n^{-(2\gamma+3)})$$

converge avec toutes dérivées d'ordre $\leqq\langle\gamma\rangle$ *pour* $x\subset E$ *vers zéro. Alors le produit formel des séries* (4) *et* (12) *est sommable* (C,γ) *uniformément vers zéro pour* $x\subset E$.

Si les coefficients de la série (4) *sont* $O(n^\gamma)$ — *le produit considéré est uniformément fini* (C,γ) *pour* $x\subset E$.

Démonstration. Supposons d'abord que les α_n et β_n ne dépendent pas de x. Dans ce cas on peut écrire les égalités suivantes:

$$(13)\quad x\subset E\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}(\alpha_n\cos nx+\beta_n\sin nx)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}(\beta_n\cos nx-\alpha_n\sin nx)=0.\end{cases}$$

Les unes de ces égalités résultent des hypothèses faites sur les dérivés de la série (12), les autres sont des conséquences du fait que les termes des séries considérées sont des fonctions impaires de n. En employant les notations introduites dans le chapitre I, les égalités (13) peuvent être écrites dans la forme

$$(13')\qquad x\subset E\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\beta_n(x)=0\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n\beta_n(x)=0\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}\alpha_n(x)=0 & \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}n^{\langle\gamma\rangle}\beta_n(x)=0.\end{cases}$$

---

[25]) Par $[\gamma]$ nous désignons, comme d'habitude, le plus grand entier ne dépassant pas γ.

Posons de plus

$$(14)\quad \sum_{p=n}^{\infty} \alpha_p(x) = R_n^{(1)}(x) \qquad \sum_{p=n}^{\infty} \beta_p(x) = T_n^{(1)}(x)$$

$$\sum_{p=n}^{\infty} R_p^{(i)}(x) = R_n^{(i+1)}(x) \quad \sum_{p=n}^{\infty} T_p^{(i)}(x) = T_n^{(i+1)}(x) \qquad i = 1, \ldots, \langle\gamma\rangle.$$

En s'appuyant sur les égalités (13′) on déduit, d'après le lemme IV (Chap. I), que

$$(15)\quad \sum_{p=-\infty}^{\infty} R_p^{(j)}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} T_p^{(j)}(x) = 0, \qquad (x \subset E,\ j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle),$$

donc:

$$(15')\quad x \subset E \begin{cases} R_n^{(1)}(x) = O(n^{-(2\gamma+2)}) & T_n^{(1)}(x) = O(n^{-(2\gamma+2)}) \\ R_n^{(2)}(x) = O(n^{-(2\gamma+1)}) & T_n^{(2)}(x) = O(n^{-(2\gamma+1)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ R_n^{j}(x) = O(n^{-(2\gamma+3-j)}) & T_n^{(j)}(x) = O(n^{-(2\gamma+3-j)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ R_n^{\langle\gamma+1\rangle}(x) = O(n^{-(2\gamma+2-\langle\gamma\rangle)}) & T_n^{\langle\gamma+1\rangle}(x) = O(n^{-(2\gamma+2-\langle\gamma\rangle)}). \end{cases}$$

Désignons par $S_n(x)$ la somme partielle du produit formel:

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x),$$

d'où

$$\begin{aligned} 4S_n(x) = 2\sum_{k=-n}^{+\infty} A_k(x) &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-n-p}^{(1)}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{n-p+1}^{(1)}(x) \\ &\quad - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{-n-p}^{(1)}(x) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x) T_{n-p+1}(x) \\ &= D_n(x) + E_n(x) + F_n(x) + G_n(x). \end{aligned}$$

Prenons la n'ième somme de Cesàro d'ordre γ pour le produit considéré.

$$4\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{4\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} S_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} [D_k(x) + E_k(x) + F_k(x) + G_k(x)]}{C_n^{(\gamma)}}.$$

Le second membre de cette égalité peut être décomposé en somme de quatre expressions tout-à-fait analogues l'une à l'autre et il suffit de ne considérer que l'une d'elles, par exemple, la première.

Nous démontrerons que

$$(16)\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} D_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \left[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(1)}(x)\right]}{C_n^{(\gamma)}} = 0$$

uniformément pour $x \subset E$.

Supposons d'abord γ entier: $\langle\gamma\rangle = \gamma$. Nous allons montrer plus tard que des légères modifications de la démonstration peuvent la faire étendre pour tout γ positif.

Des hypothèses faites sur l'ordre de grandeur des coefficients a_n et des $R_n^{(1)}(x)$ pour $x \subset E$, résulte la convergence des séries

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(1)}(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

on peut donc dans l'expression

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{(1)}(x)$$

changer l'ordre de sommation, d'où

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x).$$

L'idée directrice de la démonstration consiste en application itérée de la transformation d'Abel à la somme

(17)
$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x).$$

Nous pouvons ainsi introduire les restes $R_n^{(j)}$ d'ordre de plus en plus élevé et les différences des coefficients $C_n^{(j)}$; γ étant, selon l'hypothèse provisoire un entier, on voit que les coefficients $C_n^{(j)}$ disparaissent après un certain nombre de transformations. En posant $C_{-1}^{(j)} = 0$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} [R_{-k-p}^{(2)}(x) - R_{-k-p+1}^{(2)}(x)] \\
&= \sum_{k=0}^{n} [C_{n-k}^{(\gamma-1)} - C_{n-k-1}^{(\gamma-1)}] R_{-k-p}^{(2)} - C_n^{(\gamma-1)} R_{-p+1}^{(2)}(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-2)} R_{-k-p}^{(2)} - C_n^{(\gamma-1)} R_{-p+1}^{(2)}(x).
\end{aligned}$$

Je dis que le dernier terme peut être négligé. En effet, en substituant cette égalité dans l'égalité (16), on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R_{-k-p}^{(1)}(x)}{C_n^{(\gamma)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-2)} R_{-k-p}^{(2)}(x)}{C_n^{(\gamma)}} - \lim_{n\to\infty} \frac{C_n^{(\gamma-1)}}{C_n^{(\gamma)}} \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-p+1}^{(1)}(x)$$

et le dernier terme du droit est uniformément $o(1)$ pour $x \subset E$, car la série $\Sigma a_p(x) R^{(1)}_{-p+1}$ converge pour $x \subset E$ et $\frac{C_n^{(\gamma-1)}}{C_n^{(\gamma)}} \leqq \frac{K}{n}$ (K — une constante indépendante de n).

En appliquant plusieurs fois la transformation d'Abel à l'expression (17), on déduit aisément que la limite de (16) est égale à

$$\lim \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-j)} R^{(j)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle = \gamma). \tag{18}$$

En posant dans (18) $j = \gamma$, on a:

$$\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-j)} R^{(j)}_{-k-p}(x) = \sum_{k=0}^{n} R^{(\gamma)}_{-k-p}(x) = R^{(\gamma+1)}_{-n-p} - R^{(\gamma+1)}_{-p-1},$$

donc

$$\frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} R^{(1)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-n-p}(x) - \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-p+1}(x)}{C_n^{(\gamma)}}$$

$$= \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(\gamma+1)}_{-n-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} + o(1).$$

Puisque $a_p(x) = o(p^\gamma)$, $R_p^{(\gamma+1)} = O(p^{-\gamma-2})$[26] (uniformément pour $x \subset E$) et $C_n^{(\gamma)} \sim \frac{n^\gamma}{\Gamma(\gamma+1)}$, on a, d'après le lemme II (Chap. I):

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R^{(1)}_{-k-p}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = o(1)$$

(uniformément pour $x \subset E$), ce qui démontre le théorème pour γ positif et entier.

Supposons maintenant que $\gamma \neq \langle\gamma\rangle$. Posons $\langle\gamma\rangle - \gamma = \xi$. Évidemment $0 < \xi < 1$. Avant d'avoir établi l'égalité (18) nous n'avons fait aucun usage de l'hypothèse que γ est entier. En appliquant plusieurs fois la transformation d'Abel, nous démontrons que la limite de (16) est égale à la limite de (18) pour $j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle$, donc égale à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi)} R^{\langle\gamma\rangle}_{-k-p}}{C_n^{(\gamma)}}.$$

---

[26]) Cf. les égalités (15′).

En appliquant une fois encore la transformation d'Abel, on trouve que cette dernière limite est égale à

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} R_{-k-p}^{\langle\gamma+1\rangle}(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{\langle\gamma+1\rangle}}{C_n^{(\gamma)}}.$$

Puisque $a_p(x) = o(p^\gamma)$, $R_p^{\langle\gamma+1\rangle} = O(p^{-(\gamma+2-\xi)})$, on a, d'après le lemme II (Chap. I),

$$\left| \frac{\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) R_{-k-p}^{\langle\gamma+1\rangle}(x)}{C_n^{(\gamma)}} \right| \leqq \varepsilon_k(x)$$

où $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$ (uniformément pour $x \subset E$). La série $\Sigma C_k^{(-\xi-1)}$ étant absolument convergente, on déduit du lemme I la conclusion suivante: pour $x \subset E$, on a uniformément: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \varepsilon_k(x) = 0$, ce qui prouve la première partie du théorème pour tout $\gamma > 0$. Si $a_p(x) = O(p^\gamma)$, les quantités $\varepsilon_k(x)$ sont uniformément bornées pour $x \subset E$, donc les $\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(-\xi-1)} \varepsilon_k(x)$ sont uniformément bornées pour $x \subset E$. Cela prouve la deuxième partie du théorème.

Remarque. Cette démonstration est valable même dans les cas des α_n et β_n dépendant de x, pourvu que les conditions (13) soient remplies. Cela a lieu toujours, si c'est ne que le premier coefficient (c'est-à-dire α_0) de la série (12) qui dépend de x et si les premières dérivées de cette série et de α_0 sont égales à zéro pour $x \subset E$.

Évidemment, dans le théorème V, la sommabilité (C, γ) du produit est le résultat le plus fort que l'on puisse obtenir, car les coefficients du produit sont d'ordre $o(n^\gamma)$ et dans le cas général *précisement* $o(n^\gamma)$. Donc la sommabilité du produit (C, γ') $(\gamma' < \gamma)$ est *en général* impossible [27]).

Les remarques analogues concernent aussi les théorèmes I et III.

Théorème IV. *La série trigonométrique conjuguée au produit formel des séries* (4) *et* (12), *dont la première a les coefficients d'ordre* $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$ *et la seconde converge avec ses* $\langle\gamma\rangle$ *premières dérivées vers zéro pour* $x \subset E$ *est sommable* (C, γ) *uniformément pour* $x \subset E$. *Si les coefficients de la série* (4) *sont* $O(n^\gamma)$ — *le produit est uniformément fini* (C, γ) *pour* $x \subset E$.

---

[27]) On voit sans peine que les n'ièmes sommes de Cesàro, d'ordre $(\gamma' < \gamma)$, du produit considéré sont $o(n^{\gamma-\gamma'})$.

Démonstration. En désignant, comme d'habitude, par $t_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n \sin n x - B_n \cos n x), \tag{19}$$

conjuguée au produit formel, on a

$$-2\,t_n(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) - a_p(x)\,T_{n-p+1}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) - b_p(x)\,R_{n-p+1}(x),$$

où

$$R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\alpha_k(x), \quad T_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty}\beta_k(x).$$

En désignant par $\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}}$ la n'ième somme de Cesàro d'ordre γ pour la série (19), on obtient

$$-2\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = -2\frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)}\,t_k(x)}{C_n^{(\gamma)}} = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) - \frac{\sum_{k=0}^{n} C_{n-k}^{(\gamma-1)}[\Sigma\, a_p(x)\,T_{k-p+1}(x) + b_p(x)\,R_{k-p+1}(x)]}{C_n^{(\gamma)}}.$$

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons appliqués dans la démonstration du théorème V, donnent que, pour $x \subset E$, on a uniformément

$$-2\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,T_{1-p}(x) + b_p(x)\,R_{1-p}(x) + o(1),$$

donc, après un calcul facil:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^{(\gamma)}}{C_n^{(\gamma)}} = \frac{1}{2}\sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,R_p(x) - a_p(x)\,T_p(x)$$

(uniformément pour $x \subset E$).

La série du seconde membre converge, $R_n(x)$ et $T_n(x)$ étant d'ordre $O(n^{-\overline{2\gamma+2}})$ pour $x \subset E$.

Passons maintenant aux conséquences des théorèmes I—VI. Généralisons d'abord quelques notions, dont nous avons fait usage dans le chapitre précédent. Soit γ un nombre réel quelconque > -1. Nous dirons qu'une méthode de sommation est du type K_γ (ou tout court — est K_γ), si elle remplit les trois conditions suivantes (si l'on tient compte de l'uniformité, il faut le faire dans toutes les trois conditions).

1°. La sommabilité (uniforme) (C, γ) de la série Σa_n entraine la sommabilité (uniforme) de cette série par une méthode quelconque K_γ vers la même somme.

2°. La sommabilité (uniforme) K_γ des séries Σa_n et Σb_n entraine la sommabilité (uniforme) de la série $\Sigma(a_n + b_n)$ et on a: $\Sigma(a_n + b_n) = \Sigma a_n + \Sigma b_n$.

3°. La sommabilité (uniforme) K_γ de la série Σa_n entraine la sommabilité (uniforme) de la série $\Sigma c a_n$ vers la somme $c \Sigma a_n$, c-étant un nombre constant ou une quantité variable, mais bornée en valeur absolue.

D'une manière analogue on peut définir L_γ, une classe des sommations vérifiant les trois conditions analogues, que l'on obtient en remplaçant le terme «sommable» par «fini». Pour $\gamma = 0$ les notions K_0 et L_0 définies par ces conditions sont, évidemment, identiques aux notions K_0 et L_0 définies antérieurement.

Théorème V. *Désignons par*

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x) \tag{20}$$

le produit formel des deux séries trigonométriques

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{-\gamma}) \ (o < \gamma < 1) \tag{21}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-3}) \tag{22}$$

et soit $\sigma(x)$ la somme de la série (22). Alors les deux différences

$$\frac{A_0}{2} - \sigma(x)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \cos nx + B_n \sin nx) - \sigma(x)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\} \tag{23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \sin nx - B_n \cos nx) - \sigma(x)(a_n \sin nx - b_n \cos nx)\}$$

sont sommables $(C, -\gamma)$ uniformément sur $(0, 2\pi)$ et de plus la première vers zéro.

Théorème VI. *Soit (20) le produit formel des séries*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \ (\gamma > 0) \tag{24}$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-(2\gamma+3)}). \tag{25}$$

Désignons par $\sigma(x)$ *la somme de la série* (25) *et supposons que pour* $x \subset E$ *on a:* $\sigma'(x) = \sigma''(x) = \cdots = \sigma^{\langle\gamma\rangle}(x) = 0$. *Alors les deux séries* (23) *sont pour* $x \subset E$ *sommables uniformément* (C, γ), *la somme de la première étant zéro.*

Si l'on remplace dans (21) et (24) le symbole o par O — on obtient que les séries (23) sont *finies* uniformément.

Démonstration du théorème V. Désignons par

$$\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \cos n x + B_n' \sin n x) \tag{26}$$

le produit formel des séries: (21) et

$$\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x). \tag{27}$$

On obtient alors, en vertu des théorèmes I et III de ce chapitre que les séries

(26) $\frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \cos nx + B_n' \sin nx)$ et (28) $\sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \sin nx - B_n' \cos n x)$

sont sommables uniformément $(C, -\gamma)$ sur $(0, 2\pi)$, la somme de la série (26) étant zéro. Maintenant il suffit de remarquer que $A_n' = A_n - \sigma(x) a_n$ et $B_n' = B_n - \sigma(x) b_n$.

Démonstration du théorème VI. Cette démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème VII. Pour démontrer, par exemple, que le produit des séries (24) et (27) est sommable uniformément (C, γ) vers zéro pour $x \subset E$, on n'a que s'appuyer sur la remarque finale concernant la démonstration du théorème V.

Des théorèmes V et VI on peut déduire, comme conséquences, les théorèmes suivants (les démonstrations étant immédiates, nous les omettons).

Théorème V'. *Supposons que pour* $x \subset E$ *on a:* $\sigma(x) \geqq k > 0$ (k — *une constante*), *alors la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité* (*uniforme*) *de la série* (20) *pour* $x \subset E$ *par une quelconque des méthodes* $K_{-\gamma}$, *est la sommabilité* (*uniforme*) *par la même méthode de la série* (21)[28]. *Une remarque analogue pour les séries conjuguées.*

Théorème VI. *Supposons que pour* $x \subset E$ *on a:* $\sigma(x) \geqq k > 0$, $\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{\langle\gamma\rangle}(x) = 0$. *Alors, pour que la série* (20) *soit sommable* (*uniformément*) K_γ *pour* $x \subset E$, *il faut et il suffit que la série* (22) *le soit aussi*[28]. *De même pour les séries conjuguées.*

---

[28]) Si l'on désigne respectivement par $S(x)$ et $s(x)$ les sommes généralisées (si elles existent) des séries (20) et (21) (ou (24)), on a pour $x \subset E$: $S(x) = \sigma(x) s(x)$.

Si l'on remplace dans (21) et (24) o par O, on peut énoncer les théorèmes analogues en substituant au lieu «sommable» le mot «fini». Nous n'insistons pas sur ce point.

En rapprochant les démonstrations des théorèmes I—VIII on peut se rendre compte des différences qu'il y a entre les deux cas: $\gamma < 0$ et $\gamma > 0$. Dans le premier cas, pour la sommabilité vers zéro du produit des deux séries il suffisait que la série $\frac{\alpha_0}{2} + \sum(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx)$ possédait les coëfficients suffisammement petits et la somme égale à zéro. Dans le cas $\gamma > 0$, ces conditions, tout en restant nécessaires, ne sont plus suffisantes et il faut supposer qu'un certain nombre des dérivées premières de la fonction $\sigma(x)$ s'évanouisse dans l'ensemble considéré E.

Cette condition supplémentaire, concernant les dérivées de la série, est essentielle dans le cas $\gamma > 0$. Cela peut être mis en évidence par l'exemple très simple que je dois à M. Rajchman. Considérons le produit formel des séries

$$1°. \quad \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx + \ldots \qquad 2°. \quad \sin x.$$

La première de ces séries a les coefficients bornés [29]), la deuxième peut être traitée, évidemment comme une série trigonométrique à coefficients du type $O(n^{-\gamma})$ quelque soit γ positif. La valeur de 1° et 2° pour $x = 0$ est égale à zéro. Cependant, le calcul facil montre que le produit formel de 1° et 2° est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos x, \text{ [30])}$$

c'est-à-dire est égale à 1 pour $x = 0$.

Donc, si les conditions concernant les dérivées de la fonction $\sigma(x)$ ne sont pas remplies, les théorèmes sur la multiplication formelle, dans le cas des coefficients non tendant vers zéro, peuvent être en défaut. Ainsi dans ce cas il y a d'autres circonstances, qui peuvent avoir influence sur la sommabilité et la valeur du produit. Nous allons essayer de les connaître et les étudier.

Considérons le produit formel des séries

$$(29) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \quad (\gamma > 0)$$

[29]) C'est le cas le plus simple parmis tous les cas où les coefficients ne tendent pas vers zéro.

[30]) On peut comprendre cela facilement, en tenant compte que la série 1° est sommable (C, γ) $(\gamma > 0)$ vers la somme $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ et que $\left[\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} \cdot \sin x\right]_{x=0} = \left[\frac{1+\cos x}{2}\right]_{x=0} = 1$.

et

$$(30) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-(2\gamma+3)}),$$

où nous ne faisons aucune hypothèse sur la valeur de la somme et des dérivées de la deuxième de ces séries. Considérons aussi un polynôme trigonométrique

$$P(x) = \frac{\lambda_0}{2} + \sum_{(k)} (\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$$

tel que

$$P(x_0) = \sigma(x_0), \quad P^{(j)}(x_0) = \sigma^{(j)}(x_0) \quad (j = 1, 2, \ldots, \langle\gamma\rangle).$$

La multiplication formelle est distributive. On peut donc traîter le produit de séries (29) et (30) comme la somme des produits: 1° de la série (29) par $P(x)$ et 2° de la série (29) par

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) - P(x).$$

D'après le théorème V, le dernier produit est sommable (C, γ) vers zéro pour $x = x_0$. Il suffit donc d'étudier le produit de la série (29) par le polynôme trigonométrique, ou, même, par le binôme

$$(31) \qquad \lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx.$$

On peut, sans que les raisonnements cessent être générales, se restreindre à la considération du point $x = 0$. Désignons par

$$(32) \qquad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

le produit formel des séries (29) et (31). Considérons les sommes de Poisson[31]) de la série (32) pour $x = 0$:

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n r^{|n|},$$

où

$$A_n = \frac{1}{2}(a_{n-k}\lambda_k - b_{n-k}\mu_k + a_{n+k}\lambda_k + b_{n+k}\mu_k).$$

Étudions la différence

$$(33) \quad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n - \lambda_k \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n\right) = \frac{1}{4}\lambda_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} r^{|n|}$$
$$+ \frac{1}{4}\lambda_k \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+k} r^{|n|} - \frac{\mu_k}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} r^{|n|} + \frac{\mu_k}{4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n+k} r^{|n|}$$
$$- \frac{\lambda_k}{4}\left[2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|}\right].$$

[31]) Pour le procédé de Cesàro subsistent les résultats analogues.

Examinons les différences

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n-k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} = D_1(r), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_{n+k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} = D_2(r),$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n+k} r^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n-k} r^{|n|} = D_3(r).$$

On voit sans peine que

$$D_1(r) + D_2(r) = 2 \cdot \frac{(1-r^k)^2}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + o(1) \quad [32])$$

$$D_3(r) = 2 \cdot \frac{(1-r^{2k})}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n + o(1).$$

Donc la différence (33) peut être écrite sous la forme

$$\lambda_k \frac{(1-r^k)^2}{2r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + \mu_k \frac{(1-r^{2k})}{2r^k} \sum_{n=1}^{\infty} b_n r^n + o(1).$$

Si l'on suppose que: 1° la série (29) est sommable ou finie par le procédé de Poisson [33]) pour $x = 0$, 2° les coefficients b_n (c'est-à-dire les termes de la série conjuguée à (29) pour $x = 0$) *tendent vers zéro par le procédé de Poisson*, on obtient que la différence (33) tend vers zéro pour $x = 0$. En passant des binômes (31) aux polynômes $P(x)$ et en tenant compte des remarques faites tout-à-l'heure, on obtient le théorème suivant:

Théorème VII. *Si la série trigonométrique* (29) *est sommable ou finie par le procédé de Poisson pour* $x = x_0$ *et si les termes de la série conjuguée tendent vers zéro par le procédé de Poisson pour* $x = x_0$, *la différence*

$$(34) \quad \frac{A_0}{2} - \sigma(x_0)\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(A_n \cos nx - B_n \sin nx) - \sigma(x_0)(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\}$$

est sommable vers zéro par la même méthode pour $x = x_0$.

---

[32]) Par exemple

$$D_1(r) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (r^{|n+k|} - r^{|n|}) = \sum_{n=k}^{\infty} + \sum_{n=-\infty}^{-k} + o(1) = (r^k - 1) \sum_{n=k}^{\infty} a_n r^n$$

$$+ \sum_{n=k}^{\infty} a_n (r^{n-k} - r^n) + o(1) = \left(r^k + \frac{1}{r^k} - 2\right) \sum_{n=k}^{\infty} a_n r^n + o(1) = \frac{(1-r^k)^2}{r^k} \sum_{n=1}^{\infty} a_n r^n + o(1).$$

De même pour $D_2(x)$ et $D_3(x)$.

[33]) Il suffit, évidemment, de supposer que les sommes de Poisson de la série (29) sont $o\left(\frac{1}{(1-r)^2}\right)$ pour $x = 0$.

Remarque. Évidemment, si la série (30) se réduit à un polynôme et si les hypothèses concernant la série (29) sont remplies *uniformément* pour $x_0 \subset E$, la série (34) est sommable *uniformément* vers zéro pour $x_0 \subset E$.

Chapitre IV.

Sur la dérivation du produit formel.

Supposons données deux séries trigonométriques

$$(1) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \qquad (\gamma \geqq 0)$$

et

$$(2) \qquad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

En examinant les démonstrations des théorèmes du chapitre précédent, on peut prouver, que si les coefficients de la série (2) sont suffisamment petits et si pour $x = x_0$ $(x_0 \subset E)$, un nombre suffisamment grand des dérivées de la série (2) s'évanouit, alors, ce n'est pas seulement le produit formel des séries (1) et (2), mais aussi le produit formel différentié terme à terme m-fois, qui est sommable vers zéro (pour $x = x_0$), dans ce cas sommable $(C, \gamma + m)$. En précisant, on peut énoncer:

Théorème I. 1°. *Si les coefficients de la série* (2) *sont* $O(n^{-2(\gamma+m)+3})$ *et si l'on a pour* $x \subset E$: $\sigma(x) = \sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(\gamma+m)}(x) = 0$ [34]), *alors le produit formel*

$$(3) \qquad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

des séries (1) *et* (2), *différentié terme-à-terme m-fois, est uniformément sommable vers zéro* $(C, \gamma + m)$ *pour* $x \subset E$.

2°. *La série conjuguée au produit différentié, est uniformément sommable* $(C, \gamma + m)$ *pour* $x \subset E$.

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, que m est un entier pair. En désignant par $S_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série (3), différentiée formellement m-fois

$$(4) \qquad S_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \sum_{k=0}^{n} k^m A_k(x), \text{ [35]}$$

---

[34]) $\sigma(x)$ désigne, comme auparavant, la somme de la série (2).

[35]) Dans le cas de m impair on a: $S_n(x) = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \sum_{k=1}^{m} B_k(x)$ et la démonstration du théorème reste la même.

on a:

$$4S_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \Big[\sum_{k=-n}^{+n} k^m \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, \alpha_{k-p}(x) - b_p(x)\, \beta_{k-p}(x) \Big]$$

$$= (-1)^{\frac{m}{2}} \Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-p} \alpha_n(x)(k+p)^m$$

$$- \sum_{p=-n}^{+\infty} b_p(x) \sum_{k=-n-p}^{n-p} \beta_k(x)(k-p)^m \Big].$$

En décomposant $(k+p)^m$ suivant la formule de Newton

$$(k+p)^m = k^m + \binom{m}{1} k^{m-1} p + \ldots + \binom{m}{m} p^m$$

on peut représenter $4s_n(x)$ sous la forme d'une somme de $m+1$ termes du type

$$(5) \quad (-1)^{\frac{m}{2}} \binom{m}{j} \Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, p^j \sum_{k=-n-p}^{n-p} \alpha_k(x)\, k^{m-j}$$

$$- \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\, p^j \sum_{k=-n-p}^{n-p} \beta_k(x)\, k^{m-j} \Big] \qquad (0 \leqq j \leqq m).$$

On voit sans peine que chacune des expressions (5), pour j (donc $m-j$) pair, peut être considérée (à un facteur constant près) comme la n'ième somme partielle du produit formel de la série (1), différentiée formellement j fois et de la série (2), différentiée $m-j$ fois[36]). Il en est de même pour j (donc $m-j$) impair. On voit donc, en vertu des hypothèse faites sur les séries (1) et (2) et en s'appuyant sur le théorème III du chapitre précédent que les expressions (5) sont uniformément sommables vers zéro $(C, \gamma+j)$ $(0 \leqq j \leqq m)$ pour $x \subset E$. Donc $S_n(x)$ est uniformément sommable vers zéro $(C, \gamma+m)$ pour $x \subset E$.

2°. Supposons, comme auparavant, m pair, et désignons par $u_n(x)$ la n'iéme somme partielle de la série conjuguée à la série (3), différentiée terme-à-terme m-fois, on a

$$u_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \sum_{k=0}^{n} B_k(x)$$

ou

$$2u_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}-1} \Big[\sum_{k=0}^{n} k^m \sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\, \beta_{k-p}(x) + b_p(x)\, \alpha_{k-p}(x) \Big].$$

---

[36]) La décomposition de $S_n(x)$ en somme de $(m+1)$ termes (5) peut être traitée comme l'application *formelle* de la formule de Leibniz (concernant la n'ième dérivée du produit des deux fonctions) au produit des deux séries trigonométriques.

On peut, donc, décomposer $2u_n(x)$ en somme de $m+1$ termes de la forme

$$(6)\quad (-1)^{\frac{m}{2}}\binom{m}{j}\Big[\sum_{p=-\infty}^{+\infty} a_p(x)\,p^j \sum_{k=-p}^{n-p} \beta_k(x)\,k^{m-j} + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} b_p(x)\,p^j \sum_{k=-p}^{n-p} \alpha_k(x)\,k^{m-j}\Big].$$

Le raisonnement analogue au précédent montre que les expressions (6) peuvent être considérées (à un facteur constant près), comme les n'ièmes sommes partielles de la série *conjuguée* au produit formel: de la série (1) différentiée j fois et de la série (2) différentiée $m-j$ fois. En s'appuyant donc sur le théorème IV du chapitre précédent, on voit sans peine que $u_n(x)$ est uniformément sommable $(C, \gamma+m)$ pour $x \subset E$.

Théorème II. *Considérons le produit formel* (3) *des séries trigonométriques*

$$(7)\quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad \sqrt{a_n^2+b_n^2} = o(n^{-\gamma}) \quad (\gamma \geqq 0)$$

et

$$(8)\quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \quad \sqrt{\alpha_n^2+\beta_n^2} = O(n^{-\xi}),$$

où ξ est égale à $m+3$ pour: $-\gamma+m \leqq 0$ et égale à

$$\operatorname{Max}[m+3, 2(-\gamma+m)+3]$$

pour: $-\gamma+m>0$. Supposons que $\sigma(x)=\sigma'(x)=\sigma''(x)=\ldots=\sigma^{(m)}(x)=0$ pour $x \subset E$ (m — nombre entier et >0). Alors

1°. *La série* (3), *différentiée terme à terme m-fois, est uniformément sommable $(C, -\gamma+m)$ vers zéro $(x \subset E)$.*

2°. *La série conjuguée à cette dernière série est uniformément sommable $(C, -\gamma+m)$ pour $x \subset E$.*

Évidemment ce théorème n'est intéressant que pour $-\gamma+m>-1$; nous pouvons donc nous borner à ce dernier cas[37]). En désignant par $S_n(x)$ la n'ième somme partielle de la série (3), différentiée m-fois (nous supposons, pour fixer les idées, m pair), on voit sans peine que $4S_n(x)$ se décompose en somme de $m+1$ termes (5). Il suffit de démontrer que chacune de ces expressions (pour $j=0, 1, 2, \ldots, m$) est uniformément sommable $(C, -\gamma+m)$ vers zéro pour $x \subset E$. Distinguons 3 cas: a) $-\gamma+j \leqq -1$, b) $-1<\gamma+j \leqq 0$, c) $0<\gamma+j$.

a) On peut démontrer sans peine que les termes du premier groupe sont

[37]) Supposons $-\gamma+m<-1$. On peut démontrer, à l'aide du lemme III Chap. I, que les coefficients de la série différentiée sont $o(n^{-\gamma+m})$, donc en vertu du théorème M. Chapman, la série différentiée est sommable $(C, -\gamma+m)$.

uniformément $o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $x \subset E$. En effet, on a: $a_p(x)\, p^j = o\left(\frac{1}{p}\right)$, $b_p(x) p^j = o\left(\frac{1}{n}\right)$. En s'appuyant sur la convergence vers zéro, pour $x \subset E$, des séries

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} \alpha_p(x)\, p^{m-j}, \qquad \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \beta_p(x)\, p^{m-j}$$

(ce qui résulte des hypothèses faites sur $\sigma(x)$) et en introduisant, comme d'habitude, les restes de ces séries, qui sont certainement $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ pour $x \subset E$, on obtient, en vertu du lemme III (chap. I), que les expressions (5) pour $-\gamma + j \leqq -1$ sont uniformément $o\left(\frac{1}{n}\right)$ pour $x \subset E$. On déduit d'après un théorème connu[38]), qu'elles sont uniformément sommables $(C, -1+\varepsilon)$ vers zéro pour $x \subset E$ (ε arbitraire positif).

b) Supposons $-1 < -\gamma + j \leqq 0$. Considérons un terme correspondant de (5). Je dis qu'il est sommable $(C, -\gamma + j)$ uniformément vers zéro pour $x \subset E$. Ce terme représente, à un facteur constant près, la n'ième somme partielle du produit de la série (7), différentiée j fois et de la série (8), différentiée $m - j$ fois. Comme les coefficients du premier multiplicateur sont $o(n^{-\gamma+j})$ $(-1 < -\gamma + j \leqq 0)$ et du second sont certainement $O(n^{-3})$ — il suffit de s'appuyer sur le théorème I du Chapitre précédent[39]).

c) Soit $0 < -\gamma + j$. Les termes (5) sont, en négligeant un facteur constant, les sommes partielles du produit des séries (7) et (8), différentiées respectivement j et $m - j$ fois. Les coefficients du premier multiplicateur sont $o(n^{-\gamma+j})$, et du second: $O\left(\frac{1}{n^{2(-\gamma+m)+3}} \cdot n^{m-j}\right) = O\left(\frac{1}{n^{-2\gamma+m+j+3}}\right)$ $= O\left(\frac{1}{n^{2(-\gamma+j)+3}}\right)$. On voit donc, en vertu du théorème III (Chap. préc.), qu'aussi dans ce cas les termes de (5) sont uniformément sommables $(C, -\gamma + j)$ vers zéro pour $x \subset E$. La démonstration de la proposition 2°, ne différant essentiellement de celle du 1°, nous l'omettrons.

Théorème III. *Supposons que pour $x \subset E$, la somme $\sigma(x)$ de la série* (2) $\left(\text{où } \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O\left(n^{-2(\gamma+m)+3}\right)\right)$, *vérifie les conditions*:

---

[38]) Toute série convergente Σu_n à coefficients $O\left(\frac{1}{n}\right)$ est sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$. Il en est de même pour les suites s_n convergentes pourvu que l'on ait $S_n - S_{n-1} = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Cf. Hardy and Littlewood, Proc. Lond. Math. Soc. 2 (1911), p. 462.

[39]) Si $-\gamma + m \leqq 0$ c'est-à-dire, si le cas c) na pas lieu, la démonstration de 1° est finie.

$\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{((\gamma+m))}(x) = 0$ et $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma)(\gamma \geqq 0)$. *Alors, pour* $x \subset E$, *les différences des séries* [40])

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx + B_n \sin nx\right)^{(m)} \text{ et } \sigma(x)\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)^{(m)}, \\ \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx - B_n \cos nx\right)^{(m)} \text{ et } \sigma(x)\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx - b_n \cos nx\right)^{(m)} \end{cases}$$

sont uniformément sommables $(C, \gamma + m)$, *la valeur de la première différence étant zéro.*

Théorème IV. *Si la série* (3) *est le produit formel des séries* (7) *et* (8), *et si l'on a pour* $x \subset E$: $\sigma'(x) = \sigma''(x) = \ldots = \sigma^{(m)}(x) = 0$, *les différences* (9) *sont uniformément sommables* $(C, -\gamma + m)$ *pour* $x \subset E$. *La valeur de la première différence est zéro.*

Les démonstrations de ces théorèmes ne présentent aucune difficulté. Par exemple, pour démontrer le théorème III, il suffit de différentier terme-à-terme m-fois le produit formel des séries

$$(10)\qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

et

$$(11)\qquad \frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x) + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx).$$

En effet, désignons par

$$(12)\qquad \frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n' \cos nx + B_n' \sin nx)$$

(où $A_n' = A_n - \sigma(x)\,a_n$, $B_n' = B_n - \sigma(x)\,b_n$) le produit formel des séries (3). Bien que les coefficients des séries (11) et donc (12), dépendent de x, on voit sans peine que les théorèmes I et II subsistent aussi dans ce cas, pourvu que l'on comprenne par $(A_n \cos nx + B_n \sin nx)^{(m)}$ l'expression: $A_n(\cos nx)^{(m)} + B_n(\sin nx)^{(m)}$, c'est-à-dire, si l'on traite les coefficients comme constants [41]). «Différentions» donc dans ce sens la série (12); la série obtenue sera la première des différences (9) [42]).

---

[40]) Nous désignons par $(\sum u_n(x))^{(p)}$ la série $\sum u_n(x)$, différentiée terme-à-terme p-fois, c'est-à-dire: $(\sum u_n(x))^{(p)} = \sum u_n^{(p)}(x)$.

[41]) Cf. une remarque analogue concernant la démonstration du théorème III du chapitre précédent.

[42]) Si nous résignons de l'uniformité (c'est-à-dire, si nous supposons que l'ensemble E se compose d'un seul point $x = x_0$), les démonstrations des théorèmes III et IV se simplifient encore, puisque au lieu de la série (11) on peut considérer la

Il est aisé de voir comment les énoncés des théorèmes I—IV doivent être modifiées si l'on remplace dans (1) et (7) le symbole o par O.

Chapitre V.

Théorèmes sur la localisation. Applications immédiates des théorèmes sur la multiplication formelle.

Avant de passer à la démonstration des théorèmes, nous introduirons quelques termes qui nous permettent de simplifier nos énoncés. Nous dirons qu'une fonction $\lambda(x)$ de période 2π est une *fonction localisante* sur l'intervalle (a, b), si: 1° $\lambda(x) \neq 0$ à l'intérieur de l'intervalle (a, b), 2° $\lambda(x) = 0$ en dehors[43]) de (a, b), 3° $\lambda(x)$, ainsi qu'un certain nombre des dérivées premières, est partout continue. Dans chaque cas particulier ce nombre des dérivées sera précisé. La condition 3° est nécessaire pour que la fonction

$$\lambda(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x) \tag{1}$$

possède les coefficients de Fourier suffisamment petits, c'est-à-dire, pour que $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} = O(n^{-k})$, k étant un nombre positif arbitrairement donné[44]). Mais dans la plupart des cas, les propriétés de la fonction $\lambda(x)$ énoncées tout à l'heure, ne suffisent plus. Il faut souvent demander que dans un point x_0, ou même dans un intervalle (a', b') intérieur à (a, b), la fonction $\lambda(x)$, tout en étant différente de zéro, possède un certain nombre des dérivées premières égales à zéro. Dans certains cas il est avantageux de supposer que sur (a, a') (et sur (b', b)) la fonction est égale à

---

série $\frac{\alpha_0}{2} - \sigma(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n x + \beta_n \sin n x)$ dont les coefficients ne dépendent pas de x. Il tant alors appliquer le théorème I au produit de cette dernière série et de la série (10).

[43]) Autant que la périodicité le permet.

[44]) On peut aisément construire des fonctions de ce type. Il suffit par exemple de poser (si $0 < b - a \leqq \pi$):

$$\lambda(x) = [\sin(x-a)\sin(b-x)]^{m+1} \quad \text{pour } x \subset (a, b) \quad (m \text{ entier positif}),$$
$$\lambda(x) = 0 \quad \text{pour } x \text{ non appartenant à } (a, b).$$

Cette fonction est continue avec ses dérivées d'ordre $\leqq m$. Évidemment pour $x \subset (a, b)$ elle est égale à un polynôme trigonométrique. Il est bien connu que la fonction $e^{-\frac{1}{x^2}}$ possède les dérivées de tous les ordres (x réel). En profitant de cette fonction, il est aisé de construire une fonction localisante, dont les coefficients sont $O(n^{-k})$ quelque soit k-positif.

un polynôme trigonométrique. La construction des fonctions $\lambda(x)$ de ce type ne présente aucune difficulté[45]).

Théorème I. *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \tag{2}$$

est sommable P[46]) *vers zéro partout*[47]) *pour* $a < x < b$, *alors*

1°. *Cette série converge vers zéro à l'intérieur de* (a, b) *et même uniformément dans* $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$.

---

[45]) On peut par exemple poser

1°. $\lambda(x) = 0$ en déhors de (a, b) sur $(0, 2\pi)$,
2°. $\lambda(x) = k \sin^m (x - a) [\sin^m (x - a') + 1]$ dans (a, a'),
3°. $\lambda(x) = l \sin^m (x - b) [\sin^m (x - b') + 1]$ dans (b, b'),
4°. $\lambda(x) = 1$ dans (a', b').

On peut choisir k et l de tel façon que la fonction $\lambda(x)$, définie tout-à-l'heure, soit continue. Cela étant remplie, cette fonction possède, évidemment, toutes ses dérivées d'ordre $\leqq m - 1$, continues.

[46]) C'est-à-dire par le procédé de Poisson. On voit de la démonstration du théorème que ce procédé peut être remplacé par toute méthode de sommation du type K_0 pour laquelle subsistent les plus simples théorèmes sur l'unicité (par exemple par le procédé de Cesàro, celle de Riemann etc. Dans ce dernier cas nous obtenons l'énoncé classique de Riemann); cf. aussi l. c.[2]).

[47]) Ou, plus généralement, partout sauf peut-être d'un ensemble d'unicité. On dit qu'un ensemble E est un ensemble d'unicité rélatif à une méthode (M) de sommation, si toute série trigonométrique, *à coefficients tendant vers zéro*, sommable (M) vers zéro partout, sauf peut-être dans E, a tous ses coefficients nuls. En ce qui concerne les ensembles d'unicité, M. Rajchman a démontré que tous les ensembles dénombrables (Prace Matematyczno-Fizyczne **30**) et certains ensembles non denombrables (Fundamenta Mathematicae **3**, Comptes Rendus 1923, 3 septembre), qu'il a nommé les ensembles H, sont des ensembles d'unicité pour le procédé de Poisson. Mlle Bary a généralisé ce résultat (C. R., 3. XII. 1923) en démontrant que les ensembles H_σ (c'est-à-dire les ensembles obtenus par la réunion d'une infinite dénombrable des ensembles H) sont aussi les ensembles d'unicité pour le procédé Poisson. Mlle Bary a démontré cela pour la convergence ordinaire, mais la démonstration reste la même pour le procédé P. Il suffit de s'appuyer sur un théorème de M. Rajchman (Prace Mat. Fiz. loc. cit.). On voit de la démonstration de Mlle Bary (loc. cit.) qu'on peut supposer la sommabilité vers zéro de la série (2) *presque partout*, pourvu que les limites d'indétermination de cette série sont finies, sauf peut-être dans un ensemble du type H_σ.

Soit (M) une méthode quelconque de sommation du type K_0. Supposons que toute série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, sommable (M) vers zéro *partout*, ait tous ses coefficients nuls. Alors les ensembles H sont des ensembles d'unicité rélatifs à (M). Cela résulte immédiatemment du raisonnement de M. Rajchman (C. R., 3. IX. 1923). Probablement cette proposition subsiste si l'on remplace les ensembles H par H_σ, mais je ne connais pas la démonstration de ce théorème hypothétique.

2°. *La série conjuguée à* (2) *converge uniformément dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ (ε *positif arbitraire*).

Démonstration. Considérons la fonction localisante $\lambda(x)$, s'évanouissant en dehors de (a, b) et possédant trois dérivées successives continues. D'après les théorèmes I et III (Chap. II) le produit des séries (1) et (2) est une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro et sommable P vers zéro *partout*. On en déduit que tous les coefficients du produit sont nuls[48]), donc le produit, ainsi que la série conjuguée, *convergent uniformément partout*. Comme, par définition de la fonction localisante $\lambda(x)$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $k = k(\varepsilon)$ telle, que pour x appartenant à $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, on a $|\lambda(x)| \geqq k$, on voit, en vertu des théorèmes III et IV (du Chap. II) que la série (2), ainsi que la série conjuguée, convergent uniformément dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, la somme de la prémière étant zéro.

Théorème I'. *Si deux séries trigonométriques*

$$(3)\quad \frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx),\quad \frac{a_0''}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n''\cos nx+b_n''\sin nx),$$

à coefficients tendant vers zéro, sont sommables P partout[49]) *dans* (a, b) *vers les mêmes sommes, alors*: 1° *la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (uniforme)* K_0 *d'une de ces séries pour* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *est la sommabilité (uniforme) de l'autre par la même méthode et vers la même somme*, 2° *les séries conjuguées aux* (3) *sont sommables* K_0 *(uniformément) ou non — simultanément.*

La démonstration consiste en l'application du théorème précédent à la différence des séries (3).

Passons maintenant au cas des séries à coefficients $o(n^{-\gamma})$ $(0<\gamma<1)$.

Théorème II. *Si la série trigonométrique*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\qquad \sqrt{a_n^2+b_n^2}=o(n^{-\gamma})\qquad (0<\gamma<1)$$

est sommable P vers zéro partout[50]) *dans* (a, b), *cette série, ainsi*

---

[48]) A. Rajchman, Prace Mat. Fiz. 30.

[49]) Ou plus généralement, partout sauf dans un ensemble d'unicité. On peut supposer que les sommabilités en question ont lieu *presque partout* dans (a, b), pourvu que les limites d'indétermination des séries (3) soient partout (ou plus généralement partout, sauf peut-être dans un ensemble du type H_σ) finies sur (a, b).

[50]) Désignons par U_γ $(0<\gamma<1)$ tout ensemble E de points, situé sur $(0, 2\pi)$, vérifiant la condition suivante: toute série trigonométrique à coeficients $o(n^{-\gamma})$ convergente (ou sommable P) vers zéro partout, sauf peut-être dans E, a tous ses coefficients nuls. Évidemment, les ensembles du type H où H_σ sont aussi U_γ, mais

que la série conjuguée, sont uniformément sommables $(C, -\gamma)$ *dans* $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$, *la somme de la première étant zéro.*

La démonstration ne diffère pas essentiellement de celle du théorème I. Il faut s'appuyer sur les théorèmes I, II, V du Chap. III. On en déduit le

Théorème II'. *Si deux séries trigonométriques* (3) *à coefficients* $o(n^{-\gamma})$ $(0 < \gamma < 1)$ *sont sommables P partout sur* (a, b) *vers les mêmes sommes, les séries* (3) *sont simultanément — sommables (uniformément) ou non, par une méthode quelconque de* $K_{-\gamma}$ *dans* $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$.

De même pour les séries conjuguées à (3).

On peut énoncer les théorèmes analogues aux II et II' pour le cas des coefficients de $O(n^{-\gamma})$. On n'a qu'à remplacer dans II et II' les mots *sommable* $(C, -\gamma)$ *ou* $K_{-\gamma}$, par *finie* $(C, -\gamma)$ *ou* $(L, -\gamma)$.

Passons maintenant au cas des coefficients $o(n^{\gamma})$ $(\gamma > 0)$. Les démonstrations dans ce cas seront un peu plus compliquées, mais l'idée des démonstrations reste la même.

Théorème III. *Si la série trigonométrique*

$$(4) \qquad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^{\gamma}) \qquad (0 < \gamma < 1)$$

est sommable P vers zéro partout sur (a, b), *cette série, ainsi que la série conjuguée, sont sommables* (C, γ) *uniformément sur* $(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)$, *la somme de la première série étant, évidemment, égale à zéro. Si l'on remplace dans* (4) *o par O, les séries en question sont uniformément finies*[51]).

La démonstration est basée sur le théorème concernant les relations entre les limites d'indétermination de la série, données par les procédés de Riemann et de Poisson[52]) et dont la démonstration sera donnée

---

on peut démontrer que pour tout $\gamma > 0$ existent des ensembles U_γ de mesure positive et aussi voisine de 2π que l'on veut. Cf. A. Zygmund, Contribution à l'unicité du développement trigonométrique. Math. Ztschr., ce volume. Le mot «partout» dans les théorèmes II et II' peut être remplacé par: «partout, sauf peut-être dans un ensemble du type U_γ».

[51]) La condition $\gamma < 1$ peut être remplacée par la condition plus faible, notamment par la condition que la série (4) integrée terme à terme deux fois, est une série de Fourier (en négligeant un polynôme en x) d'une fonction intégrable L et continue sur (a, b).

On peut supposer que la série (4) est sommable vers zéro presque partout sur (a, b), pourvu que partout les limites d'indétermination de Poisson soient finies.

La dernière restriction peut-être omise dans un ensemble au plus dénombrable, si, pour x appartenant à cet ensemble, on a

$$\lim_{r \to 1} (1-r) \left| \sum (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n \right| = 0 .$$

[52]) Cf. A. Rajchman, C. R. 3. IX. 24 (pour le cas des coefficients tendant vers zéro) et A. Zygmund, C.R . 17. IX. 1923.

ailleurs. Désignons par $R_1(x)$, $R_2(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ respectivement les sommes inférieures et supérieures de Riemann et de Poisson de la série (4). En vertu du théorème mentionné, les intervalles $(R_1(x), R_2(x))$ et $(P_1(x), P(x))$ ont des points communs. Comme dans les conditions du théorème III on a: (pour $a < x < b$) $P_1(x) = P_2(x) = 0$, donc $R_1(x) \leqq 0 \leqq R_2(x)$; on en déduit, d'après un théorème connu de Schwarz, que la série

$$\frac{a_0}{2} x^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}$$

représente une fonction linéaire sur (a, b).

Maintenant il est aisé de prouver que la série (4) et la série conjuguée sont *uniformément* sommables P dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.[53])

Soit $\lambda(x)$ une fonction de période 2π, égale à zéro en dehors de $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, égale à 1 dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ et égale aux polynômes trigonométriques dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right)$ et $\left(b-\varepsilon, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Supposons, de

---

[53]) En effet, soit $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ une fonction intégrable L et soit

(A) $$f(x) \sim \frac{\mu_0}{2} + \sum (\mu_n \cos nx + \nu_n \sin nx).$$

Posons

(B) $$f(r, x) = \frac{\mu_0}{2} + \sum (\mu_n \cos nx + \nu_n \sin nx) r^n$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \frac{1-r^2}{1-2r\cos(t-x)+r^2}\, dt.$$

Supposons que dans l'intervalle (a, b) on a $f(x) = 0$. Alors on voit sans peine que la série (A), différentiée terme à terme k-fois (k entier positif), est uniformément sommable P vers zéro sur $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. À cet effet il suffit de différentier l'égalité (B) par rapport à x et de tenir compte que

$$\lim_{r \to 1} \frac{d^k}{dt^k} \frac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2} = 0 \quad \text{pour:} \quad 0 < \varepsilon \leqq t \leqq \pi.$$

On en déduit, également, la sommabilité uniforme des séries conjuguées aux séries différentiées, car la sommabilité uniforme P de la série Σa_n entraîne la sommabilité uniforme de la série

$$\sum \frac{a_n}{n} \left(\text{on a } \sum \frac{a_n}{n} r^n = \int_0^r \left(\sum a_n r^{n-1} \right) dr \right).$$

Si $f(x)$ est égale dans (a, b), par exemple, à un polynôme, on peut poser $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, où $f_1(x)$ est égale à zéro dans (a, b) et $f_2(x)$ est une fonction de période 2π, possédant partout un nombre des premières dérivées continues aussi grand que l'on veut. La dérivation terme à terme de la série de Fourier de $f_2(x)$ ne présente aucune difficulté.

plus, que $\lambda(x)$ possède cinq dérivées successives continues. En vertu des théorèmes (III et VI du Chap. III) le produit formel des séries (2) et (4) est *uniformément* sommable P vers zéro en dehors de $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. La série conjuguée à (4) étant uniformément sommable P dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, les termes de cette série tendent P uniformément vers zéro dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. On voit donc sans peine, en vertu de la remarque finale dans le Chap. III, que le produit considéré est aussi dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, a+\varepsilon\right)$ et $\left(b-\varepsilon, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$ uniformément sommable P vers zéro. Mais la série trigonométrique uniformément sommable P partout vers zéro a tous ses coefficients nuls, donc converge, ainsi que la série conjuguée, vers zéro. Maintenant il suffit de s'appuyer sur le théorème VI du Chap. III. En examinant cette démonstration, on voit sans peine que les relations entre $R_1(x)$, $R_2(x)$, $P_1(x)$, $P_2(x)$ n'étaient nécessaires que pour la démonstration de ce que la série (4) et par conséquent le terme général de la série conjuguée, est uniformément sommable P vers zéro dans $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Si l'on *suppose* donc, que la série (4) ($\gamma \geqq 0$ — quelconque) est uniformément sommable vers zéro sur $\left(a+\frac{\varepsilon}{2}, b-\frac{\varepsilon}{2}\right)$, on en conclut, que la série (4), ainsi que la série conjuguée sont uniformément sommables (C, γ) dans l'intervalle $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$.

Du théorème III on déduit aisément le

Théorème III′. *Si deux séries trigonométriques* (3) *à coefficients* $o(n^\gamma)$ $(0<\gamma<1)$ *sont uniformément sommables P vers la même somme (finie) sur* (a, b), *la condition nécessaire et suffisante de la sommabilité (uniforme)* K_γ *sur* (a, b) *de l'une d'elles, est la sommabilité (uniforme) de l'autre. De même pour les séries conjuguées.*

L'énoncé analogue subsiste si les coefficients des séries considérées sont $O(n^\gamma)$ $(\gamma<1)$.

En se servant des théorèmes sur la multiplication formelle, on démontre sans peine des théorèmes, déjà classiques, de MM. Fatou et M. Riesz.

Théorème IV (de M. Fatou). *La série de puissances*

$$F(z)=\sum a_n z^n \tag{5}$$

à coefficients tendant vers zéro converge uniformément dans tout intervalle fermé, situé sur le cercle de convergence, dont tous les points sont réguliers. Si $a_n = O(1)$, *les sommes partielles de la série* (5) *sont uniformément bornées dans l'intervalle considéré.*

Théorème IV (de M. M. Riesz). *La série de puissances* (5) *à coefficients* $O(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ *est uniformément sommable* (C, γ) *dans tout*

intervalle fermé, situé sur le cercle de convergence, dont tous les points sont réguliers. Ou même:

2°. *Si* $F(z) = F(re^{i\theta})$ $(0 \leqq r < 1)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ *tend (pour* $r \to 1$*) uniformément vers une limite continue*:

$$f(\theta) = \lim_{r \to 1} F(re^{i\theta}) \qquad (a < \theta < b)$$

et, si $a_n = o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$, *la série* (5) *est uniformément sommable* (C, γ) *dans* $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ *vers la somme* $f(\theta)$.

La démonstration du théorème M. Fatou est immédiate. Soit (a, b) un intervalle considéré, dont tous les points sont réguliers et soit (a', b') un intervalle plus vaste que (a, b), dont tous les points sont encore réguliers. La série (5) est pour $z = e^{i\theta}$ une série trigonométrique. Multiplions la par la série de Fourier d'une fonction localisante $\lambda(x)$ rélative à (a', b'). Le produit formel est une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, sommable P *uniformément* sur $(0, 2\pi)$ vers une fonction possédant un certain nombre des dérivées continues. Évidemment, cette dernière série est une série de Fourier et converge uniformément partout. Donc, d'après le théorème III′ du Chap. II, la série $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ converge uniformément pour $a \leqq x \leqq b$. On voit sans peine que dans le cas considéré, la régularité n'est aucunement une condition nécessaire. Il suffit que la fonction $F(z)$ admette uniformément sur (a', b') les valeurs limites à variation bornée.

La démonstration des théorèmes de M. M. Riesz ne diffère pas essentiellement de la démonstration précédente. Plaçons nous, par exemple, aux conditions 1°. On considère le produit formel de la série trigonométrique $F(e^{i\theta})$ et de la fonction localisante rélative à (a', b').[54])

Ce produit (à coefficients $o(n^\gamma)$) est partout uniformément sommable P vers une fonction, possédant un certain nombre de dérivées premières continues. Le produit est donc sommable uniformément (C, γ). En vertu des théorèmes du Chap. III, on en déduit la sommabilité uniforme (C, γ) de la série (5) dans (a, b). On voit, qu'aussi dans le cas considéré, la régularité peut être remplacée par la condition que les valeurs limites de $F(re^{i\theta})$ sur (a, b) existent uniformément et sont à variation bornée. Pour $\gamma > 0$, en s'appuyant sur le théorème connu de M. M. Riesz et Chapman[55]), on voit

---

[54]) Pour $\gamma > 0$, les fonctions localisantes doivent être égales à 1, dans (a, b) et égales aux polynômes, trigonométriques dans (a', a) et (b, b'). Dans le cas: $-1 < \gamma < 0$ nous nous appuyons sur un théorème de MM. Hardy et Littlewood, cf. [38]).

Rappelons encore que la série conjuguée à $\sum a_n e^{in}$, est la même série, à un facteur constant près.

[55]) D'après lequel la série de Fourier est sommable (C, ε) $(\varepsilon > 0)$ dans tout point de continuité de la fonction.

Cf. M. Riesz, Sur les séries de Dirichlet et les séries entières, C. R. 1909 et

que la démonstration, que nous avons donné tout à l'heure, subsiste dans le cas de $f(\theta)$ *continue* sur (a', b'). La partie 2° est donc démontrée[56]).

Les relations entre les d'indétermination limites de Poisson et de Riemann nous permettent de généraliser un peu les théorèmes IV et IV′ dans le cas de $-1 < \gamma < 1$.

Théorème V. *Soit* (5) *une série de puissances à coefficients du type* $o(n^\gamma)$ $(-1 < \gamma < 1)$ *et supposons que pour* $a < \theta < b$ *les limites radiales de* $F(re^{i\theta})$ *existent et forment une fonction* $f(\theta)$ *à variation bornée, alors la série* (5) *est uniformément sommable* (C, γ) *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. *Si* $f(\theta)$ *est une fonction continue (on ne suppose rien de plus), la série* (5) *est sommable* (C, γ) *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *pourvu que* $0 < \gamma < 1$.

On peut même démontrer le théorème plus général que voici:

Théorème VI. *Supposons que pour* $a \leqq x \leqq b$ *les limites d'indétermination*

$$\overline{\lim_{r\to 1}}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) r^n\right], \quad \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = o(n^\gamma) \quad (-1 < \gamma < 1)$$

sont finies[57]) *et intégrables L. Soit* $f(x)$ *une fonction quelconque comprise entre ces limites. Complétons cette fonction, en la posant égale à zéro en dehors de* (a, b) *sur* $(0, 2\pi)$. *Alors la différence de la série*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{6}$$

et de la série de Fourier de $f(x)$, *ainsi que la série conjuguée à cette différence, sont uniformément sommables* (C, γ) *dans* $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$, *la valeur de la différence étant zéro.*

---

du même auteur: Sur la sommation des séries de Fourier, Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae **1** (1922); S. Chapman, On non integral orders of summability, Proc. Lond. Math. Soc. 1911.

[56]) Nous avons, au fond, démontré le théorème suivant (due à M. M. Riesz): Si la série trigonométrique à coefficients $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$ est uniformément sommable P sur (a, b) vers une fonction continue, cette série est sommable (C, γ) uniformément dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. Pour la démonstration il faut tenir compte que les coefficients de la série conjuguée sont uniformément sommables P vers zéro dans $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$. M. Riesz énonce un théorème plus général (Sur les séries de Dirichlet, Théorème III), mais ce théorème peut être aisément réduit au cas traité tout à l'heure. (Cf. A. Zygmund, C. R. 7. I. 1924.) Si les valeurs limites sont à variation bornée — on peut supposer que $\gamma > -1$.

[57]) Nous nous bornons au cas le plus simple. Les prémisses de ces théorèmes peuvent être remplacées par des moins restrictives (en particulier dans le cas de $\gamma < 0$).

En s'appuyant sur les rélations mentionnées entre les limites d'indétermination de Poisson et de Riemann, on démontre[58]) que pour $a \leqq x \leqq b$ on a

$$\frac{a_0 x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2} = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + Ax + B.$$

Soit

$$f(x) \sim \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1} a_n' \cos nx + b_n' \sin nx. \tag{7}$$

Évidemment

$$\frac{a_0' x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n' \cos nx + b_n' \sin nx}{n^2} = \int_a^x dy \int_a^y f(t)\,dt + A'x + B'$$

(A, B, A', B' étant des constants). Donc la différence des séries (6) et (7) intégrée terme-à-terme deux fois, représente une fonction linéaire dans (a, b). On en déduit, en se servant d'un raisonnement tout à fait analogue au celui du théorème III, que cette différence, ainsi que la série conjuguée, sont sommables (C, γ) uniformément pour $a + \varepsilon \leqq x \leqq b - \varepsilon$.[59], [60])

---

[58]) En se servant des théorèmes connus de M. De la Vallée-Poussin sur la dérivée deuxième généralisée (Cours d'Analyse **1**, 3-ième édition).

[59]) Comme une des conséquences de ce théorème, on déduit que la série (6) est sommable (C, γ) $(\gamma > 0)$, dans tout point de continuité de $f(x)$. Cela résulte du théorème mentionné de MM. Riesz et Chapman.

Supposons $\gamma = 0$. Désignons par $s_n(x_0)$ les sommes partielles de la série (6) dans un point x_0 de continuité de f. En s'appuyant sur un théorème de MM. Hardy et Littlewood («Sur la sommation de la série de Fourier d'une fonction à carré sommable». C. R. **156**, pp. 1307–1309) on peut démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} |s_k(x_0) - f(x_0)|}{n+1} = 0.$$

Il suffit de décomposer la série (6) en somme de deux séries: 1° de la série de Fourier de la fonction $f(x)$ bornée et continue pour $x = x_0$, et 2° de la série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, *convergente* vers zéro dans certain voisinage du point $x = x_0$.

[60]) Soit E un ensemble fermé de mesure nulle, situé sur $(0, 2\pi)$. Supposons que la série trigonométrique (4) est sommable *partout*, sauf peut-être dans E, vers une fonction finie $f(x)$, intégrable L. Alors la différence de la série (4) et de la série de Fourier de $f(x)$ est sommable vers zéro partout, sauf peut-être dans E, la sommabilité étant uniforme dans tout intervalle fermé ne contenant pas des points de E.

En particulier, si $\gamma = 0$ et E est un ensemble fermé *d'unicité*, on a: *la série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, sommable P partout, sauf peut-être dans un ensemble fermé d'unicité, vers une fonction finie et intégrable L — est une série de Fourier de cette fonction.* Ce dernier théorème était aussi démontré indépendamment par M. Privaloff (Recueil de la Soc. Math. de Moscou, 1923).

Il est très probable que le théorème V subsiste aussi dans le cas de $\gamma \geqq 1$, mais je n'en connais pas la démonstration. La démonstration de ce théorème que nous avons donné, repose sur la localisation dans le cas des *séries trigonométriques* à coefficients du type $o(n^\gamma)$ $(\gamma < 1)$, mais, comme le montre l'exemple de la série $\sum_1^\infty n \sin nx$ (sommable $(C, 1+\varepsilon)$ vers zéro partout et non uniformément dans le voisinage du point $x = 0$; dans ce point la série conjuguée $\sum n \cos nx$ n'est pas sommable) le théorème VI ne subsiste pas dans le cas $\gamma > 1$. Cependant, il est probable que si l'on considère simultanément avec la série donnée la série *conjuguée* (par exemple, si l'on suppose la sommabilité P de la série conjuguée dans (a, b)), le théorème VI sur la localisation reste vrai pour $\gamma \geqq 1$. Donnons encore quelques applications de la multiplication des séries trigonométriques.

M. Fejér a démontré les deux théorèmes suivants:

1°. *Si la série de puissances*

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots \tag{8}$$

converge pour $|z| < 1$ *et représente une fonction continue pour* $|z| \leqq 1$, *la convergence uniforme de la partie réelle de cette série sur* $(0, 2\pi)$ *entraîne la convergence de la partie imaginaire, et réciproquement.*

2°. *Si la partie réelle de la série* (8) *converge uniformément sur* $(0, 2\pi)$, *la partie imaginaire converge presque partout sur* $(0, 2\pi)$.

Ces théorèmes étaient généralisés: 1° par M. M. Riesz et 2° par M. Privaloff[61]). On peut démontrer sans peine que ces généralisations sont des conséquences immédiates des théorèmes mentionnés de M. Fejér et des théorèmes sur la multiplication.

Théorème VII (de M. M. Riesz). *Si la série de puissances* (8) *converge pour* $|z| < 1$ $(z = re^{i\theta})$ *et représente dans le secteur* $(0 \leqq r \leqq 1,\ a \leqq \theta \leqq b)$ *une fonction continue, la convergence uniforme de la partie réelle de la série* (8) *pour* $a \leqq \theta \leqq b$, *entraîne la convergence uniforme de la partie imaginaire dans* $(a + \varepsilon,\ b - \varepsilon)$, *quelque soit* $\varepsilon > 0$.

Théorème VII′ (de M. Privaloff). *Si la composante réelle de la série* (8) *converge uniformément dans* (a, b) — *la composante imaginaire converge presque partout dans* (a, b).

Les démonstrations étant presque identiques, nous ne prouvons que le premier de ces théorèmes. Soient

---

[61]) M. Riesz, Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome. Jahresber. d. Deutschen Math.-Ver. 1914. — Privaloff, L'intégrale de Cauchy. Saratoff, 1918 (en russe), Voir aussi: Recueil de la Société Mathématique de Moscou, 1923.

$$U(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b \sin n\theta), \tag{9}$$

$$V(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) \tag{10}$$

les composantes réelle et imaginaire de la série (8). Soit $\lambda(\theta)$ une fonction localisante relative à l'intervalle (a, b). Des hypothèses faites sur $U(\theta)$ et $\lambda(\theta)$ résulte que le produit formel de $U(\theta)$ et de la série de Fourier de $\lambda(\theta)$ converge uniformément sur $(0, 2\pi)$, donc la fonction harmonique $H(r, \theta)$, rélative au produit, est continue pour $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Je dis qu'il en est de même de la fonction harmonique $H_1(r, \theta)$ rélative à la série conjuguée au produit considéré. Pour $a \leqq \theta \leqq b$ cela résulte de nos hypothèses et du théorème VI (Chap. II) et pour x non appartenant à (a, b): du théorème V (Chap. I). D'après le théorème I° de M. Fejér, on en déduit, que la série conjuguée au produit, converge partout sur $(0, 2\pi)$, donc, d'après le théorème VI (Chap. I), la série $V(\theta)$ converge uniformément dans $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$ [62].

---

[62]) Dans le cas des coefficients non tendant vers zéro a lieu le théorème analogue à celui de M. Privaloff.

Théorème. *Si la série trigonométrique* (9), *à coefficients du type* $o(n^\gamma)$ $(\gamma > 0)$, *est uniformément sommable P pour* $a \leqq \theta \leqq b$, *la série conjuguée* (10) *est presque partout sommable* (C, γ) *dans* (a, b). *Pour* $0 < \gamma < 1$ *la condition de l'uniformité peut être omise.*

La démonstration est très simple. Des hypothèses faites sur la série (9), il résulte qu'elle peut être décomposée en somme de deux séries: 1° de la série de Fourier d'une fonction continue et 2° de la série trigonométrique à coefficients $o(n^\gamma)$ qui est sommable (C, γ) uniformément vers zéro dans $\left(a + \frac{\varepsilon}{2}, b - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. La série conjuguée à 2° est uniformément sommable (C, γ) dans $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, et la série conjuguée à la série de Fourier de 1° est sommable presque partout (C, δ) quelque soit $\delta > 0$, car toute série conjuguée à la série de Fourier d'une fonction de carré sommable est elle même la série de Fourier. Ce théorème peut être généralisé. Nous y reviendrons à une autre occasion.

L'idée de la décomposition d'une série trigonométrique possédant une propriété donnée sur un arc (a, b) en somme de deux séries: 1° de la série trigonométrique sommable uniformément vers zéro dans (a, b) et 2° de la série de Fourier d'une fonction possédant partout sur $(0, 2\pi)$ la propriété considérée, est souvent fort utile. Comme un exemple nous donnons une généralisation du théorème de M. Privaloff. M. Privaloff a démontré (Bull. de la Soc. Math. de France, 1915) que si la fonction $f(x)$ de période 2π vérifie partout la condition de Lipschitz d'ordre α: $0 < \alpha < 1$, la fonction $g(x)$, conjuguée à $f(x)$ (c'est-à-dire la somme de la série conjuguée à la série de Fourier de $f(x)$), la vérifie aussi. En s'appuyant sur ce théorème, on démontre sans peine que si la série trigonométrique (9) à coefficients $o(n^\gamma)$ est uniformément sommable P sur (a, b) vers une fonction continue, vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre $0 < \alpha < 1$, la série (10) est également sommable P sur $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$

En terminant ce chapitre, nous donnons quelques applications de la multiplication aux séries trigonométriques ou à celles de puissances, présentant quelques singularités concernant la convergence ou sommabilité.

Le théorème VIII, que je donne ici, n'est pas nouveau, mais la construction qui s'y rattache est très simple et mérite, peut-être, quelque attention. Elle s'appuye sur l'existence des séries, présentant les singularités considérées *partout*.

Les premiers exemples des séries de puissances et des séries trigonométriques (à coefficients tendant vers zéro) partout (pour les séries de puissances partout sur la circonférence $|z|=1$) divergentes, étaient donnés respectivement par MM. N. Lusin et H. Steinhaus[63]). On sait que l'ensemble de points, où la série trigonométrique (ou, plus généralement, une suite de fonctions continues) converge ou diverge, est respectivement $F_{\sigma\delta}$ et $G_{\delta\sigma}$ (suivant la terminologie de M. Hausdorff[64])). Il est donc naturel de se demander, si chaque ensemble $F_{\sigma\delta}$ situé sur $(0, 2\pi)$ peut être considéré comme l'ensemble des points de convergence d'une série trigonométrique ou d'une série de puissances.

Le problème n'est résolu que dans des cas particuliers.

Théorème VIII[65]). *Pour tout ensemble fermé E, situé sur la circonférence $|z|=1$, on peut construire une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, convergente dans E et divergente en dehors de E.*

---

vers une fonction lipschitzienne d'ordre α. Il suffit de s'appuyer sur le théorème mentionné de M. Privaloff et sur le fait que, si la série (9) est sommable P uniformément vers zéro sur (a, b), la série (10) est uniformément sommable P sur $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ vers une fonction possédant les dérivées de tous les ordres, donc certainement vérifiant la condition de Lipschitz d'ordre α (cf. la remarque [53])).

[63]) N. Lusin, Über eine Potenzreihe. Rend. del Circolo Mat. di Palermo **32**, p. 386–390. — H. Steinhaus, Sur une série trigonométrique partout divergente. Comptes Rendus de la Soc. Scientif. de Varsovie 1912, p. 219–223.

[64]) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, p. 305–306. M. Hausdorff désigne par F et G, respectivement, des ensembles fermés et ouverts, par F_σ la somme d'une infinité au plus dénombrable des ensembles F, par G_δ le produit d'une infinité au plus dénombrable des ensembles G. Les ensembles $F_{\sigma\delta}$ sont des produits d'une infinité au plus dénombrable des ensembles F_σ et les $G_{\delta\sigma}$ sont des ensembles complémentaires aux $F_{\sigma\delta}$.

[65]) Ce théorème était démontré, pour la première fois, par M. Rajchman. La démonstration (qui s'appuye sur l'existence de la série *trigonométrique* à coefficients tendant vers zéro partout divergente) n'était pas publiée. M. Mazurkiewicz (Fund. Math. III) a donné une autre démonstration de ce théorème, en s'appuyant sur un exemple de M. Neder. (Inauguraldissertation, Göttingen 1919).

Un théorème analogue à VIII et concernant des séries trigonométriques était démontré par M. Rajchman (loc. cit.) à l'aide de la série trigonométrique divergente partout.

Démonstration. Soit $L(z)$ une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, divergente partout pour $|z|=1$. Posons $L(e^{i\theta}) = U(\theta)+iV(\theta)$, $U(\theta)$ et $V(\theta)$ étant des séries trigonométriques à coefficients réels et tendant vers zéro. Soit $\lambda(\theta)$ une fonction de période 2π, continue avec ses dérivées de trois premiers ordres qui s'annule dans E et est différente de zéro ailleurs. Désignons par $(U\lambda)$ le produit formel de la série $U(\theta)$ et de la série de Fourier de $\lambda(\theta)$, et par $(\overline{U\lambda})$ la série conjuguée à $(U\lambda)$. Je dis que la série

$$R(e^{i\theta}) = (U\lambda) + i(\overline{U\lambda})$$

présente les propriétés démandées. Il s'agit donc de démontrer que $R(e^{i\theta})$: 1° converge dans E, et 2° diverge dans $(0, 2\pi) - E$. Le 1° est évident, en vertu des théorèmes I et V (du Chap. II). Supposons maintenant que θ_0 n'appartient pas à E. Deux cas peuvent se présenter: α) la série $U(\theta)$ diverge pour $\theta=\theta_0$, donc il est de même de la série $(U\lambda)$ (th. III′, Chap. I), donc de la série $R(e^{i\theta})$. β) La série $U(\theta)$ converge, donc la série $V(\theta)$ diverge pour $\theta=\theta_0$; d'après la théorème VI (Chap. I) la série $(U\lambda)$ diverge aussi pour $\theta=\theta_0$, donc la série $R(e^{i\theta})$ pareillement.

Dans une de ses notes M. Mazurkiewicz[66]) a démontré que pour tout procédé linéaire[67]) de sommation qui n'est pas moins puissant que la convergence ordinaire, on une peut construire série de puissances à coefficients tendant vers zéro, non sommable partout sur la circonférence $|z|=1$ par le procédé considéré. Les méthodes linéaires étant toutes du type K_0, on démontre aisément le théorème suivant[68]).

Théorème IX. *Étant donnée une méthode linéaire de sommation, qui n'est pas moins puissante que la convergence ordinaire, on peut faire correspondre à tout ensemble E fermé et situé sur la circonférence* $|z|=1$, *une série de puissances à coefficients tendant vers zéro, sommable par cette méthode (et même convergente) dans E et non sommable en dehors de E.*

Le théorème de M. Mazurkiewicz et le théorème IX gagnent d'intêret, si l'on tient compte qu'il existe des méthodes linéaires de sommation qui sont plus puissantes que le procédé de Poisson[69]). On peut donc, pour tout ensemble fermé E, situé sur la circonférence $|z|=1$,

---

[66]) St. Mazurkiewicz, «Sur les séries de puissances et les séries trigonométriques non sommables» (en polonais, avec un résumé en français), Prace Mat. Fiz. 28 (1917), pp. 109–118.

[67]) Cf. O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen. Prace Mat. Fiz. 23.

[68]) La démonstration est *tout-à-fait* analogue à celle du théorème VIII.

[69]) Une de telles méthodes était donnée par M. H. Steinhaus. Prace Mat. Fiz. 23.

construire une série de puissances (à coefficients tendant vers zéro) sommable par le procédé de Poisson dans E et non sommable ailleurs [70]).

Chapitre VI.
Quelques généralisations des formules de Riemann.

Soit

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

une série trigonométrique à coefficients tendant vers zéro, et soit

$$F(x)=\frac{a_0x^2}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^2}. \tag{2}$$

Dans son mémoire classique [71]) Riemann a démontré que *la convergence de la série* (1) *pour* $x=x_0$ *ne dépend que de la manière dont se comporte* $F(x)$ *autour de* $x=x_0$; c'est-à-dire, si deux séries trigonométriques à coefficients tendant vers zéro, possèdent dans un certain voisinage du point $x=x_0$ des fonctions $F(x)$ égales, alors ces séries convergent ou divergent simultanément pour $x=x_0$. [72]) Nous démontrerons le théorème analogue.

Théorème I. *Supposons que les coefficients de la série* (1) *sont* $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ *et soit* k *un entier positif et tel que* $k-\gamma>1$. *Désignons par* $F(x)$ *la somme de la série* (1) *intégrée terme à terme* k*-fois. Alors la sommabilité* (*uniforme*) (C,γ) *de la série* (1), *ainsi que de la série conjuguée à* (1), *ne dépend que de la manière dont se comporte* $F(x)$ *dans* $(a-\varepsilon, b+\varepsilon)$, *quelque soit* $\varepsilon>0$.

Démonstration. Supposons, pour fixer les idées, k pair et soit

$$F(x)=\frac{a_0}{2}\cdot\frac{x^k}{k!}+A_{k-1}x^{k-1}+\ldots+A_1x+A_0 \tag{3}$$
$$+(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^k},$$

[70]) En partant des séries de puissances qui convergent partout sur la circonférence $|z|=1$ et non uniformément dans tout intervalle, on démontre aisément que pour tout ensemble fermé E de cette circonférence on peut construire une série de puissances, convergente uniformément dans E et non uniformément dans chaque intervalle contenant au moins un point appartenant au complémentaire de E. De même pour les séries trigonométriques.

[71]) „Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe". Riemanns Gesammelte Werke. Leipzig, Teubner.

[72]) Cf. aussi L. Neder: Zur Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Ann. 81. M. Neder a donné quelques généralisations de ce théorème de Riemann. Le résultat de M. Neder s'obtient comme le cas particulier (pour $\gamma=0$) du théorème II de ce chapitre.

où $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{k-1}$ sont des constantes. Soit donnée une autre série trigonométrique

$$(4) \qquad \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n' \cos nx + b_n' \sin nx), \qquad \sqrt{a_n'^2 + b_n'^2} = o(n^\gamma) \ (\gamma > -1),$$

et soit

$$(5) \qquad F_1(x) = \frac{a_0'}{2} \cdot \frac{x^k}{k!} + A_{k-1}' x^{k-1} + \ldots + A_1' x + A_0' + (-1)^{\frac{k}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n' \cos nx + b_n' \sin nx}{n^k}.$$

Évidemment les séries (3) et (5) convergent absolument et représentent des fonctions continues. Supposons que $F(x) = F_1(x)$ pour $a - \varepsilon \leqq x \leqq b + \varepsilon$. Nous démontrerons que: 1°, si l'une des séries trigonométriques (1) et (4) est sommable (uniformément) (C, γ) dans l'intervalle (a, b) vers une fonction $f(x)$, il est de même de l'autre de ces séries, 2°, la sommabilité (uniforme) (C, γ) dans (a, b) de la série conjuguée à l'une des séries (1) et (4), entraîne la sommabilité (uniforme) (C, γ) de la série conjuguée à l'autre. À cet effet il suffit de démontrer que la différence des séries (1) et (4), ainsi que la différence des séries conjuguées, sont uniformément sommables (C, γ) pour $a \leqq x \leqq b$, la valeur de la première différence étant zéro.

Cela ne présente aucune difficulté. La différence des séries (3) et (5) est égale à zéro dans l'intervalle $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. On en déduit aisément (cf. la remarque [53]) que cette différence, ainsi que la différence des séries conjuguées, différentiées terme à terme k-fois, sont uniformément sommables P pour $a - \frac{\varepsilon}{2} \leqq x \leqq b + \frac{\varepsilon}{2}$, la valeur de la première différence étant zéro.

D'après la remarque [56]) ces séries sont aussi uniformément sommables (C, γ) et cela démontre le théorème.

On peut énoncer le principe de localisation sous une autre forme, qui dans le cas $\gamma = 0$ est due à Riemann (loc. cit.).

Théorème II. *Soit $\lambda(t)$ une fonction de période 2π, continue avec ses dérivées successives d'ordre suffisamment élevé* [73]), *égale à 1 pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$ $(a < \alpha < \beta < b$;* [74]) *pour fixer les idées nous supposons que $0 \leqq a < b \leqq 2\pi$) et égale à zéro en dehors de (a, b). Alors les deux suites:*

---

[73]) Pour $-1 < \gamma < 0$ il suffit que les coefficients de la série de Fourier de $\lambda(t)$ soient $O(n^{-k-3})$. Dans le cas de $\gamma \geqq 0$ il faut supposer que les coefficients de Fourier de la fonction $\lambda(t)$ sont $O(n^{-\alpha})$ où $\alpha = \mathrm{Max}(k+3, 2\gamma+3)$. (Cf. l'énoncé du théorème II, Chap. IV); $\lambda(x)$ possède donc certainement $k+1$ dérivées continues.

[74]) Si $\alpha = \beta$, donc l'intervalle (α, β) se réduit à un point, il faut faire l'hypothèse supplémentaire que $\lambda^{(j)}(\alpha) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$.

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx) \\ \qquad -\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\int\limits_a^b F(t)\lambda(t)\dfrac{d^k}{dt^k}\left[\dfrac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt, \\ \sum\limits_{m=1}^{n}(a_m\sin mx-b_m\cos mx) \\ \qquad -\dfrac{(-1)^k}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\overline{F(t)\lambda(t)}\,\dfrac{d^k}{dt^k}\left[\dfrac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt, \\ (n=1,2,3,\ldots) \end{cases}$$

sont uniformément sommables (C,γ) *pour* $\alpha\leqq x\leqq\beta$, *la limite généralisée de la première suite étant zéro*[75]).

Dans les expressions (6) *nous désignons par* $\overline{F(t)\lambda(t)}$ *la fonction conjuguée à la fonction* $F(t)\lambda(t)$.

$\lambda(t)$ étant égale à zéro en dehors de (a,b), on voit sans peine que la sommabilité (C,γ) *de la série conjuguée* dans (α,β) ne dépend que des valeurs de la fonction $F(t)$ dans l'intervalle (a,b). Posons, pour fixer les idées, k-pair et désignons par $\Phi(x)$ la partie périodique de $F(x)$ dans (3):

$$F(x)=P(x)+\Phi(x),\qquad \Phi(x)=(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx+b_n\sin nx}{n^k}.$$

La série, représentant $\Phi(x)$, converge absolument, donc il en est de même de la série de Fourier de la fonction $\Phi(x)\lambda(x)$.[76]) On en déduit que la fonction $\overline{\Phi(x)\lambda(x)}$, conjuguée à $\Phi(x)\lambda(x)$, est une fonction continue. Si l'on tient compte que la fonction égale à $\lambda(x)P(x)$ sur $(0,2\pi)$ et complétée par la condition de périodicité pour tous les x réels, possède un certain nombre des dérivées successives continues, on voit aisément que la fonction conjuguée $\overline{P(x)\lambda(x)}$ existe partout, étant de plus continue. Donc la fonction

$$\overline{F(x)\lambda(x)}=\overline{\Phi(x)\lambda(x)}+\overline{P(x)\lambda(x)}$$

est partout continue.

[75]) On suppose, que les coefficients de la série (1) sont $o(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$ et que k est un entier tel que $k-\gamma>1$. On peut supposer même, que $k-\gamma>\frac{1}{2}$. Si les coefficients de la série (1) sont $O(n^\gamma)$ $(\gamma>-1)$, les suites (6) sont uniformément finies (C,γ) pour $\alpha\leqq x\leqq\beta$.

[76]) La série de Fourier de $\Phi(x)\lambda(x)$ étant évidemment égale au produit des séries de Fourier de $\Phi(x)$ et de $\lambda(x)$.

1°. Nous démontrerons d'abord que les deux suites

$$(6a)\quad \begin{cases} \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx + b_m \sin mx) - \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_a^b \Phi(t)\lambda(t)\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt, \\ \sum_{m=1}^{n}(a_m\sin mx - b_m\cos mx) - \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(t)\lambda(t)\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt \end{cases}$$

sont uniformément sommables (C,γ) pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, la limite de la première étant zéro.

Considérons à cet effet le produit formel

$$(7)\qquad \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n \sin nx)$$

des deux séries trigonométriques

$$(8)\quad \begin{cases} \Phi(x) = (-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\cos nx + b_n\sin nx}{n^k} = \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n\cos nx + b'_n\sin nx), \\ \sqrt{a'^2_n + b'^2_n} = o(n^{\gamma-k}), \\ \text{et} \qquad \lambda(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n\cos nx + \beta_n\sin nx). \end{cases}$$

Le produit formel (7) de ces séries, est la série de Fourier de la fonction $F(x)\lambda(x)$. D'après le théorème IV (du Chap. IV), les deux suites

$$(9)\quad \begin{cases} \left[\sum_{m=1}^{n}(a'_m\cos mx + b'_m\sin mx)\right]^{(k)} - \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(A_m\cos mx + B_m\sin mx)\right]^{(k)}, \\ \left[\sum_{m=1}^{n}(a'_m\sin mx - b'_m\cos mx)\right]^{(k)} - \left[\sum_{m=1}^{n}(A_m\sin mx - B_m\cos mx)\right]^{(k)} \end{cases}$$

sont, pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, uniformément sommables (C,γ), la première vers la limite égale à zéro. Si l'on tient compte de ce que

$$\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(A_m\cos mx + B_m\sin mx)\right]^{(k)} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t)\lambda(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\right]^{(k)}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_a^b \Phi(t)\,\lambda(t)\frac{d^k}{dx^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_a^b \Phi(t)\,\lambda(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

on voit que les termes de la première des suites (6a) sont respectivement égaux aux termes de la première suite (9).

D'une manière analogue on a

$$\left[\sum_{m=1}^{n}(A_m \sin mx - B_m \cos mx)\right]^{(k)} = \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{\Phi(t)\lambda(t)}\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt.$$

2°. Pour démontrer le théorème dans le cas général, il suffit de démontrer que les deux suites

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{(-1)^k}{2\pi}\int_a^b P(t)\lambda(t)\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

$$v_n(x) = \quad -\frac{(-1)^k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(t)\lambda(t)}\,\frac{d^k}{dt^k}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\right]dt,$$

où $P(t) = \frac{a_0 t^k}{2\cdot k!} + A_{k-1}t^{k-1} + \ldots + A_1 t + A_0$, sont uniformément sommables $(C, -1+\varepsilon)$ pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$, quelque soit $\varepsilon > 0$, et que la limite de la première suite est égale à zéro.

Les démonstrations étant identiques, nous nous bornons au cas des $u_n(x)$. Nous nous appuyons sur le théorème de MM. Hardy et Littlewood [77]), d'après lequel toute série convergente (uniformément) dont les termes sont $O\left(\frac{1}{n}\right)$ (uniformément), est sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ (uniformément). Donc toute série de Fourier d'une fonction continue et à variation bornée — est uniformément sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ sur $(0, 2\pi)$.

En intégrant k-fois par parties et en tenant compte des hypothèses faites sur la fonction $\lambda(x)$ et sur les dérivées de cette fonction, on obtient sans peine:

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)]\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt$$

$$= \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)]\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}\,dt.$$

---

[77]) Cf. la remarque [58]).

En vertu de la formule de Leibniz

$$\frac{d^k}{dt^k}[P(t)\lambda(t)] = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t) + P^{(k)}(t)\lambda(t).$$

Donc, en s'appuyant sur l'égalité $P^{(k)}(t) = \frac{a_0}{2}$, on a

$$u_n(x) = \frac{a_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a_0}{2}\lambda(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)\Big]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a_0}{2}\int_0^{2\pi}[1-\lambda(t)]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t)\Big]\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt.$$

Désignons par $\varphi(t)$ l'une quelconque des fonctions continues et à variation bornée:

$$1-\lambda(t), \qquad \binom{k}{j}P^{(j)}(t)\lambda^{(k-j)}(t) \qquad (j=0,1,2,\ldots,k-1)$$

s'évanouissant dans (α, β). Il suffit de démontrer que la suite

$$w_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}}dt$$

est uniformément sommable $(C, -1+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ vers zéro pour $\alpha \leqq x \leqq \beta$. Mais cela est évident si l'on remarque que $w_n(x)$ est la n'ième somme partielle de la série de Fourier d'une fonction continue et à variation bornée.

(Eingegangen am 12. Juli 1924.)