Werk

Titel: Theorie der Darstellung kontinunierlicher durch lineare Transformationen II.

Autor: Weyl, H.

Ort: Berlin

Jahr: 1926

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0024|log41

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. II.

Von

H. Weyl in Zürich.

Kapitel II.

Die Darstellungen der Komplexgruppe und der Drehungsgruppe.

§ 1.

Das einzelne Element der Komplexgruppe. Die unitäre Beschränkung.

Unter der *Komplexgruppe* verstehe ich den Inbegriff $\mathfrak{c}$ aller homogenen linearen Transformationen, welche eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform zweier willkürlicher Vektoren ungeändert lassen. Nur in einem Raum $\mathfrak{r}$ von gerader Dimensionszahl $2n$ existieren solche Formen; und wenn wir die Komponenten eines Vektors x mit $x_1, x_1', x_2, x_2', \ldots, x_n, x_n'$ bezeichnen, so können wir annehmen, daß jene Form, das „schiefe Produkt" der beiden willkürlichen Vektoren x und y, die Gestalt hat:

$$(1) \qquad S(xy) = (x_1 y_1' - x_1' y_1) + (x_2 y_2' - x_2' y_2) + \ldots + (x_n y_n' - x_n' y_n).$$

Die Multiplikatoren einer zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Transformation t sind paarweise zueinander reziprok. Denn geht durch t der Vektor $e_1 \neq 0$ über in $\varepsilon \cdot e_1$, so kann man e_1 zu einem *normalen* Koordinatensystem ergänzen, d. h. einem solchen, in welchem das schiefe Produkt die Normalform (1) hat. Wird t in diesem Koordinatensystem beschrieben durch:

$$\begin{cases} e_1 \to \varepsilon\, e_1, \\ e_1' \to * e_1 + \varepsilon' e_1' + \ldots, \\ e_2 \to * e_1 + \alpha_2 e_1' + \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ e_n' \to * e_1 + \alpha_n' e_1' + \ldots, \end{cases}$$

[1]) zugehörige Matrix $\left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \right|$

so liefert die Forderung, daß die Gleichungen

$$S(e_1 e_1') = 1; \quad S(e_1 e_2) = 0, \ \ldots, \ S(e_1 e_n') = 0$$

bei t bestehen bleiben sollen, die Beziehungen

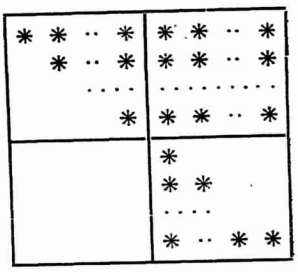
$$\varepsilon\varepsilon' = 1; \quad \alpha_2 = \ldots = \alpha_n' = 0.$$

Infolge des Verschwindens der α enthält das charakteristische Polynom $f(\zeta) = |e - \zeta t|$ den Faktor

$$(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon'\zeta) = (1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta).$$

Die Fortsetzung der eingeleiteten Schlußweise führt zu

Satz 1. *Die Multiplikatoren einer zu der Komplexgruppe gehörigen Transformation t sind paarweise zueinander reziprok. Der Matrix von t kann in einem geeigneten normalen Koordinatensystem die nebenstehende Gestalt verliehen werden.* Die befolgte Reihenfolge der Variablen ist



(2) $\qquad x_1, x_2, \ldots, x_n; \ x_1', x_2', \ldots, x_n',$

und nur an den mit einem * bezeichneten Stellen finden sich von 0 verschiedene Glieder. In der Hauptdiagonale stehen die Multiplikatoren von t. *Sind die Multiplikatoren alle voneinander verschieden, so ist t innerhalb* c *sogar mit der Diagonalmatrix* (ε) *seiner Multiplikatoren konjugiert.*

Der Beweis der letzten Verschärfung erfordert die Konstruktion einer Matrix u in c, welche die Gleichung

(3) $$t = u^{-1}(\varepsilon)u$$

erfüllt. Zunächst existiert überhaupt ein Koordinatensystem, in welchem die S invariant lassende Abbildung t mit lauter verschiedenen Multiplikatoren durch die Matrix (ε) ausgedrückt wird. Geht S in diesem Koordinatensystem in die schiefsymmetrische Form S^* über, so läßt die Transformation (ε), bei welcher jede Variable mit einem Faktor ε_i multipliziert wird, die Form S^* ungeändert. Jeder Koeffizient von S^* multipliziert sich aber durch diese Transformation mit einem Produkt zweier ε_i, und daraus folgt in Berücksichtigung der gemachten Voraussetzung über die Multiplikatoren, daß S^* die Gestalt haben muß:

(4) $$s_1(x_1 y_1' - x_1' y_1) + s_2(x_2 y_2' - x_2' y_2) + \ldots + s_n(x_n y_n' - x_n' y_n),$$

wo die zu zwei Variablen wie x_i, x_i' gehörigen Multiplikatoren $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ zueinander reziprok sind. Die Form ist nicht-ausgeartet, also sind alle $s_i \neq 0$. Die Normalform (ε) der Abbildung t wird nicht zerstört, wenn jeder der Grundvektoren des neuen Koordinatensystems mit einer will-

kürlichen von 0 verschiedenen Konstanten multipliziert wird; infolgedessen kann noch dafür gesorgt werden, daß in (4) die Koeffizienten s_i alle gleich 1 sind. Dann ist $S^* = S$, das neue Koordinatensystem ist wie das alte ein normales, und die Transformation u, welche den Übergang von dem einen zum andern vermittelt, gehört zu $\mathfrak{c}$.

Die Gruppe der in $\mathfrak{c}$ enthaltenen unitären Transformationen werde mit $\mathfrak{c}_u$ bezeichnet. Innerhalb $\mathfrak{c}_u$ gilt die Gleichung (3) ausnahmslos:

Satz 2. *Innerhalb der unitär beschränkten Komplexgruppe* $\mathfrak{c}_u$ *ist jedes Element* t *mit der Diagonalmatrix seiner Multiplikatoren konjugiert.*

Die Multiplikatoren ε_i, $\varepsilon_i' = \frac{1}{\varepsilon_i} = \bar{\varepsilon}_i$ sind vom absoluten Betrag 1. Nehmen wir zunächst wieder an, daß sie alle untereinander verschieden sind, so ist es bekanntlich möglich, die Gleichung (3) durch eine unitäre Transformation u zu erfüllen. Da die Koeffizientenmatrix S der Form S, mit der konjugiert-komplexen $\bar{S}$ multipliziert, die negative Einheitsmatrix $-e$ ergibt, gilt, wie man sofort sieht, dasselbe für S^*; darum sind die Koeffizienten s_i in (4) vom absoluten Betrag 1; und indem man z. B. die neuen Grundvektoren e_1', e_2', ..., e_n' mit geeigneten Konstanten vom absoluten Betrag 1 multipliziert, kann man alle s_i zu 1 machen, ohne den unitären Charakter des Koordinatensystems zu zerstören. — Der Satz überträgt sich auf *jedes* t, weil es zu einem Element von $\mathfrak{c}_u$ stets beliebig benachbarte gibt, die lauter verschiedene Multiplikatoren besitzen, und weil die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{c}_u$, auf welcher u variiert, geschlossen ist.

Aber auch auf direktem algebraischen Wege kann man die Ausnahmefälle mitumfassen, wenn man sich stützt auf den

Hilfssatz. *Eine schiefsymmetrische Form* S^* *geht dann und nur dann aus* S *durch eine unitäre Koordinatentransformation hervor, wenn ihre Koeffizientenmatrix selber unitär ist.*

Wie S selber muß jede aus S durch unitäre Transformation entstandene Form S^* der Gleichung genügen: $S^* \bar{S}^* = -e$. Berücksichtigt man die schiefe Symmetrie von S^*, so folgt daraus, daß die Koeffizientenmatrix von S^* unitär ist.

Es sei umgekehrt S^* eine schiefsymmetrische Form, deren Koeffizientenmatrix unitär ist; es gilt einzusehen, daß in einem unitären Koordinatensystem (das aus dem ursprünglichen durch eine unitäre Transformation hervorgeht) S^* die Normalform S annimmt. Die erste Zeile der Koeffizientenmatrix S^* laute:

$$s_1 = 0,\ s_2,\ s_3,\ \ldots\ .$$

Wir bilden die beiden Vektoren

$$e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ \ldots),$$
$$e_1' = (\bar{s}_1,\ \bar{s}_2,\ \bar{s}_3,\ \ldots).$$

Sie sind zueinander unitär-orthogonal: die Quadratsumme der absoluten Beträge in jeder der beiden Komponentenzeilen ist $= 1$, und die Produktsumme

$$1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3 + \ldots = 0.$$

Darum kann man e_1, e_1' durch Hinzunahme weiterer Vektoren $e_2, e_3, \ldots$ zu einem unitären Koordinatensystem ergänzen. Da

$$S^*(e_1 e_1') = s_1 \bar{s}_1 + s_2 \bar{s}_2 + s_3 \bar{s}_3 + \ldots = 1$$

ist, verwandelt sich in diesem Koordinatensystem S^* in eine schiefsymmetrische Form S^{**}, deren unitäre Koeffizientenmatrix links oben die Zahl m trägt

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da die Quadratsumme der absoluten Beträge in den beiden ersten Zeilen und Spalten der Matrix S^{**} gleich 1 sein muß, zerfällt sie notwendig in der aus (5) ersichtlichen Weise. Damit ist der Beweis des Hilfssatzes durch vollständige Induktion eingeleitet.

(5)

$0\ 1$ $-1\ 0$	$0 \ldots 0$ $0 \ldots 0$
$0\ 0$ $\vdots\ \vdots$ $0\ 0$	$*$

(6)

$1 \ldots n$	$1' \ldots n'$
$0 \ldots 0$ $\ldots\ldots$ $0 \ldots 0$	$*$
$*$	$0 \ldots 0$ $\ldots\ldots$ $0 \ldots 0$

Zusatz. *Hat die Matrix S^* von vornherein die Gestalt* (6), *so kann man die mit den Nummern* $1, 2, \ldots, n$ *bezeichneten Grundvektoren beibehalten und braucht nur die andere Hälfte* $1', 2', \ldots, n'$ *unitär zu transformieren.* —

Die zu c_u gehörige Matrix t läßt sich unter allen Umständen durch eine unitäre Transformation u in die Hauptmatrix (ε) ihrer Multiplikatoren überführen. In dem durch u neu eingeführten Koordinatensystem werde das schiefe Produkt durch die Form S^* dargestellt. Eine Rotte gleicher Multiplikatoren von t ist entweder von dem Typus

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \quad [\text{dann ist auch } \varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3' \text{ und } \varepsilon_1 \neq \pm 1]$$

oder von dem Typus

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \varepsilon_2 = \varepsilon_2' \ (= \pm 1).$$

In jedem der beiden Fälle sondert sich aus der Matrix S^*, da die Form S^* invariant ist gegenüber der Transformation (ε), ein Quadrat von 6 bzw. 4 Zeilen ab, das zu den Koordinaten 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ bzw. 1, 1′, 2, 2′ gehört. Ihm kann man auf Grund des Hilfssatzes und seiner Ergänzung durch eine unitäre Transformation von e_1', e_2', e_3' bzw. von e_1, e_1', e_2, e_2' die Normalform verleihen. Damit ist gezeigt, daß die unitäre Transformation u in (3) unter allen Umständen so normiert werden kann, daß sie S invariant läßt.

Eine zu c gehörige Diagonalmatrix (ε) besteht, wenn die Variablen in der Reihenfolge (2) verwendet werden, aus den Gliedern

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n; \ \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n' \qquad (\varepsilon_i \varepsilon_i' = 1).$$

Sie ist innerhalb c zu derjenigen Diagonalmatrix konjugiert, die aus ihr entsteht durch Vertauschung der beiden Glieder ε_1 und ε_2 und die damit

verbundene Vertauschung von ε_1' mit ε_2'; ebenso bleibt sie in ihrer Klasse, wenn man ε_1 mit ε_1' vertauscht. Das gleiche gilt innerhalb der unitär beschränkten Komplexgruppe $\mathfrak{c}_u$. Im letzteren Fall setzen wir noch

$$\varepsilon_i = e(\varphi_i), \qquad \varepsilon_i' = e(-\varphi_i)$$

und bezeichnen die reellen Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ als die Drehwinkel von t, wenn t in $\mathfrak{c}_u$ zur selben Klasse gehört wie (ε). Die Klasse ändert sich nicht, wenn man die Drehwinkel beliebig untereinander permutiert oder in einigen von ihnen das Vorzeichen wechselt.

In der Gleichung (3) darf man u ersetzen durch $(\varepsilon^*)u$, ohne daß t sich ändert; handelt es sich um die Gruppe $\mathfrak{c}_u$, so bedeutet (ε^*) hierin eine beliebige zu $\mathfrak{c}_u$ gehörige Diagonalmatrix. Auch hier werden wir sagen, daß alle Elemente oder „Punkte" von $\mathfrak{c}_u$, welche aus einem, u, auf diese Weise hervorgehen, die *Gerade* $[u]$ auf $\mathfrak{c}_u$ bilden; und wir werden durch Projektion, dadurch, daß wir alle Punkte von $\mathfrak{c}_u$ auf einer und derselben Geraden in einen einzigen Punkt zusammenfallen lassen, eine Mannigfaltigkeit $[\mathfrak{c}_u]$ von n reellen Dimensionen weniger erzeugen. — In dem besonderen Falle aber, wo zwei Multiplikatoren einander gleich werden: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ oder $\varepsilon_1 = \varepsilon_1'$, läßt sich u in der Gleichung (3) von t sogar ersetzen durch $s \cdot u$, wo s folgendermaßen gebaut ist:

1. Im ersten Fall $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\varepsilon_1' = \varepsilon_2'$ zerfällt s in zwei zu den Variablen x_1, x_2 bzw. x_1', x_2' gehörige Quadrate (12), (12)′ von der Seitenlänge 2 und $2(n-2)$ Quadrate von der Seitenlänge 1, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. In (12) steht eine beliebige zweireihige unitäre Matrix, in (12)′ die zu ihr kontragrediente. Da eine unitäre Matrix in zwei Variablen von 4 reellen Parametern abhängt, beträgt die Zahl der reellen Parameter $(n-2)+4 = n+2$ für die Gruppe der s, während die Untergruppe der Hauptmatrizen (ε) in $\mathfrak{c}_u$ nur n-parametrig ist.

2. Im Falle $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ zerfällt s in ein zu den Variablen x_1, x_1' gehöriges Quadrat (11′) von der Seitenlänge 2 und $2(n-1)$ Quadrate von der Seitenlänge 1, die sich längs der Hauptdiagonale aneinanderreihen. In (11′) steht eine beliebige unitäre Matrix von der Determinante 1. Da eine solche von 3 Parametern abhängt, ist die Gruppe der s auch jetzt $(n+2)$-parametrig. So kommen wir zu dem für die Analysis situs der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{c}_u$ fundamentalen Resultat:

Hilfssatz. *Innerhalb der Gruppe* $\mathfrak{c}_u$ *bilden die singulären* t, *deren Multiplikatoren nicht alle voneinander verschieden sind, eine Mannigfaltigkeit von* 3 *Dimensionen weniger als* $\mathfrak{c}_u$.

Die Parameterzahl von $\mathfrak{c}_u$ selber ist, wie wir alsbald sehen werden, gleich $n(2n+1)$.

§ 2.

Darstellungen der Komplexgruppe: Infinitesimaler Teil.

Eine infinitesimale Transformation

$$(7)\qquad \begin{cases} dx_i = \sum_k \varrho_{ik} x_k + \sum_k \varrho'_{ik} x'_k, \\ dx'_i = \sum_k \sigma'_{ik} x_k + \sum_k \sigma_{ik} x'_k \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

gehört zu $\mathfrak{c}$ dann und nur dann, wenn

$$\varrho_{ik} + \sigma_{ki} = 0, \quad \varrho'_{ik} \text{ symmetrisch} \quad \text{und} \quad \sigma'_{ik} \text{ symmetrisch}$$

ist. Die infinitesimale Komplexgruppe $\mathfrak{c}^0$ ist demnach eine lineare Schar von

$$n^2 + 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(2n+1)$$

komplexen Parametern. Die allgemeine Hauptmatrix $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ in $\mathfrak{c}^0$, deren Glieder mit

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; \quad -\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$$

bezeichnet seien, durchläuft eine n-parametrige infinitesimale Abelsche Untergruppe von $\mathfrak{c}^0$. Bildet man aus h und dem Element c, Formel (7), den Kommutator $[hc] = hc - ch$, so erhält man die infinitesimale Transformation mit der Koeffizientenmatrix

$\varrho_{ik}(\lambda_i - \lambda_k)$	$\varrho'_{ik}(\lambda_i + \lambda_k)$
$-\sigma'_{ik}(\lambda_i + \lambda_k)$	$\sigma_{ik}(-\lambda_i + \lambda_k)$

Als Wurzeln treten daher auf:

$\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ ($i < k$, alle vier Vorzeichenkombinationen) und $\alpha = \pm 2\lambda_i$.

Man liest aus der Tabelle ohne weiteres ab, welches die zu diesen Wurzeln α gehörigen Elemente e_α von $\mathfrak{c}^0$ sind; und wir bekommen analog zu den Kompositionsformeln in § 2 des I. Kapitels:

$$[h\,h'] = 0, \quad [h\,e_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha, \quad [e_\alpha\,e_{-\alpha}] = h_\alpha.$$

Dabei ist h_α im Falle $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ ($i < k$) dasjenige h, für welches $\lambda_i = \pm 1$, $\lambda_k = \pm 1$, alle übrigen $\lambda = 0$ sind; im Falle $\alpha = \pm 2\lambda_i$ aber besitzt h_α die Parameterwerte: $\lambda_i = \pm 1$, die übrigen $\lambda = 0$. Der Wert irgendeiner Linearform

$$(8)\qquad \Lambda = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_n\lambda_n$$

für diese Parameterwerte wird wie in I, § 2 mit Λ_α bezeichnet; die Normierung ist bereits so getroffen, daß $\alpha_\alpha = 2$ wird. Man hat

$$\text{für } \alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k\colon \quad \Lambda_\alpha = \pm m_i \pm m_k,$$
$$\text{für } \alpha = \pm 2\lambda_i\colon \quad \Lambda_\alpha = \pm m_i.$$

Wie dort gilt der Satz, daß für irgendeine Darstellung $\mathfrak{C}^0$ von $\mathfrak{c}^0$ neben Λ auch immer $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ als Gewicht auftritt, und daß Λ_α stets eine ganze Zahl ist. Darum müssen die Koeffizienten m_i eines Gewichtes Λ ganz sein. Für die Wurzel $\alpha = 2\lambda_i$ besteht der Übergang von Λ zu Λ' darin, daß die eine Variable λ_i in $-\lambda_i$ verwandelt wird, für die Wurzel $\alpha = \lambda_i - \lambda_k$ $(i < k)$ aber in der Vertauschung von λ_i mit λ_k. Daß durch diese beiden Operationen aus einem vorkommenden Gewicht immer wieder ein Gewicht entsteht, erklärt sich aus der schon im vorigen Paragraphen erwähnten Tatsache, daß die Klasse einer zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Hauptmatrix (ε) sich nicht ändert, wenn ε_i mit ε_k oder ε_i mit ε_i' vertauscht wird. Für das höchste vorkommende Gewicht ergeben sich daraus die Ungleichungen

$$m_i \geqq 0 \quad \text{und} \quad m_i \geqq m_k \quad \text{für} \quad i < k.$$

Indem wir das Ergebnis aus I, § 3 hinzunehmen, können wir zusammenfassen:

Satz 3. *Alle in einer Darstellung $\mathfrak{C}^0$ von $\mathfrak{c}^0$ vorkommenden Gewichte* (8) *haben ganzzahlige Koeffizienten m_i. Durch Vertauschung von λ_i mit λ_k oder Verwandlung von λ_i in $-\lambda_i$ geht aus einem Gewicht immer wieder ein Gewicht hervor. Die Koeffizienten des höchsten Gewichtes genügen den Ungleichungen*

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \geqq 0. \tag{9}$$

Eine irreduzible Darstellung ist durch das höchste Gewicht eindeutig bestimmt.

$\mathfrak{c}$ selber mit dem höchsten Gewicht $\mu_1 = \lambda_1$ ist irreduzibel, da die vorkommenden Gewichte $\pm\lambda_i$ alle untereinander verschieden sind und aus jedem der Grundvektoren e_i, e_i' unseres Koordinatensystems im Raume $\mathfrak{r}$ alle andern durch Transformationen der Gruppe $\mathfrak{c}$ gewonnen werden können. Unter den Gewichten $\pm\lambda_i \pm \lambda_k$ der zweidimensionalen Grundvektoren, welche durch äußere Multiplikation aus irgend zwei verschiedenen der e_i, e_i' hervorgehen, ist $\mu_2 = \lambda_1 + \lambda_2$ das höchste; doch sind jetzt nicht mehr alle vorkommenden Gewichte untereinander verschieden, da

$$e_1 \times e_1',\ e_2 \times e_2',\ \ldots,\ e_n \times e_n'$$

das Gewicht 0 besitzen. Immerhin geht aus dem Gesagten hervor, daß sich eine irreduzible Darstellung mit dem höchsten Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2$ muß absondern lassen. Ebenso erweist man mit Hilfe der $3, \ldots, n$-dimen-

sionalen Vektoren von $\mathfrak{r}$ die Existenz je einer irreduziblen Darstellung mit dem höchsten Gewicht

$$\mu_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \ \ldots, \ \mu_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

und ist auch leicht imstande, diese vollständig zu kennzeichnen (vgl. S. 342). Durch Komposition gewinnt man daraus eine irreduzible Darstellung mit dem höchsten Gewicht

$$p_1 \mu_1 + p_2 \mu_2 + \ldots + p_n \mu_n,$$

wo p_i irgendwelche nicht-negative ganze Zahlen bedeuten. Damit ist bewiesen: *Zu jeder Linearform Λ, deren Koeffizienten m_i ganzzahlig sind und den Ungleichungen (9) genügen, existiert eine irreduzible Darstellung von $\mathfrak{c}^0$, deren höchstes Gewicht $= \Lambda$ ist.*

Nach der in I, § 4 geschilderten Konstruktionsmethode von Cartan muß sie dadurch gewonnen werden, daß man die kleinste lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{R}$ bildet, welche den „Hypervektor"

$$e_1^{p_1} (e_1 \times e_2)^{p_2} (e_1 \times e_2 \times e_3)^{p_3} \ldots$$

und alle daraus durch die Transformationen t von $\mathfrak{c}$ entstehenden enthält. Freilich läßt sich die Methode erst durch das im nächsten Paragraphen auf integralem Wege bewiesene Ergebnis rechtfertigen, daß jede Darstellung von $\mathfrak{c}$ in irreduzible Darstellungen zerfällt.

Verwandelt t die Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (um $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ haben wir uns nicht zu kümmern) nach der Tabelle:

$$\begin{cases} e_1 \to \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n + \xi_1' e_1' + \ldots + \xi_n' e_n', \\ e_2 \to \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n + \eta_1' e_1' + \ldots + \eta_n' e_n', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

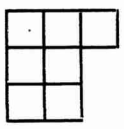
so liefern die Invarianzforderungen $S(e_i e_k) = 0$ Relationen von dem Typus $(i = 1, k = 2)$:

$$S(\xi\eta) \equiv (\xi_1 \eta_1' - \xi_1' \eta_1) + (\xi_2 \eta_2' - \xi_2' \eta_2) + \ldots + (\xi_n \eta_n' - \xi_n' \eta_n) = 0.$$

Andern Beschränkungen sind die Koeffizienten des von uns benötigten Halbteils von t nicht unterworfen. Das aus n Zeilen bestehende Schema $\{m\}$, Kap. I, § 4, besitze die Zeilenlängen

$$m_i = p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n.$$

Wieder werde $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = \nu$ gesetzt. Hat $\{m\}$ z. B. die unten stehende Gestalt $(\nu = 7)$, so ist die kleinste lineare Mannigfaltigkeit (f) von Tensoren 7. Stufe zu bilden, welche die Tensoren mit den Komponenten



$$\xi_{i_1} \cdot \xi_{i_2} \cdot \xi_{i_3} \cdot$$
$$\eta_{k_1} \cdot \eta_{k_2} \cdot$$
$$\zeta_{l_1} \cdot \zeta_{l_2}$$

enthält; dabei sind die ξ, η, ζ irgendwelche Zahlen, welche den Bedingungen

$$S(\eta\zeta) = 0, \qquad S(\zeta\xi) = 0, \qquad S(\xi\eta) = 0$$

genügen. Auf einen willkürlichen Tensor f aus (f) ist dann die Alternation bezüglich jeder Spalte des Schemas anzuwenden: die Mannigfaltigkeit der so erzeugten Tensoren ν-ter Stufe f^* ist das Substrat $\mathfrak{R}$ der gesuchten irreduziblen Darstellung von c mit dem höchsten Gewicht $3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3$. Das Resultat bedarf noch der genaueren algebraischen Durcharbeitung durch Angabe eines Prozesses, der aus einem völlig willkürlichen Tensor ν-ter Stufe den allgemeinsten Tensor der Mannigfaltigkeit (f) hervorbringt[1]); im Augenblick würde sie uns aber zu weit vom Wege abführen.

Das infinitesimale Element (7) von c gehört der unitär beschränkten Gruppe c_u an, wenn

(10) $\varrho_{ik} + \bar{\varrho}_{ki} = 0$ und damit auch $\sigma_{ik} + \bar{\sigma}_{ki} = 0$, ferner $\sigma'_{ik} + \bar{\varrho}'_{ki} = 0$

gilt. Insbesondere wird $\varrho_{ii} = \lambda_i$ rein imaginär. Die Anzahl der reellen Parameter von c_u ist demnach $= n(2n+1)$. Eine Linearform des willkürlichen Elementes (7) von c läßt sich auf eine und nur eine Weise in die Gestalt bringen

$$\sum_{ik} (a_{ik}\varrho_{ik} + b_{ik}\sigma_{ik} + a'_{ik}\varrho'_{ik} + b'_{ik}\sigma'_{ik}),$$

wo die Koeffizienten analogen Bedingungen genügen wie die Variablen:

$$a_{ik} + b_{ki} = 0, \quad a'_{ik} \text{ symmetrisch}, \quad b'_{ik} \text{ symmetrisch}.$$

Verschwindet eine solche Form identisch, falls die Parameter den Einschränkungen (10) genügen, so verschwindet sie überhaupt identisch. Denn zunächst setze man $\varrho'_{ik} = \sigma'_{ik} = 0$; es kommt $a_{ik} = 0$, $b_{ik} = 0$, weil $\sum_{ik} a_{ik}\varrho_{ik}$ identisch verschwindet, falls es das unter der Einschränkung (10) tut. Die verbleibende Bedingung lautet

$$\sum_{ik} a'_{ik}\varrho'_{ik} + \sum_{ik} b'_{ik}\bar{\varrho}'_{ik} = 0.$$

Man braucht hierin die willkürlichen symmetrischen Größen ϱ'_{ik} nur durch $\sqrt{-1}\cdot\varrho'_{ik}$ zu ersetzen, um auf das gesonderte Verschwinden beider Teile der letzten Summe zu schließen.

§ 3.

Darstellungen der Komplexgruppe: Integraler Teil.

Gilt der Satz von der vollen Reduzibilität für die Darstellungen der unitär beschränkten inf. Gruppe c_u^0, so gilt er nach der letzten Überlegung des vorigen Paragraphen auch für die ganze Gruppe c^0. Für c_u aber wird er bewiesen durch die Hurwitz-Schursche Integrationsmethode. Nur ist es nötig, sich zuvor davon zu überzeugen, *daß* c_u *einfach zusammenhängend ist.*

[1]) Vgl. dazu J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, S. 262.

Die geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{c}_u$ gehe durch keines der singulären Elemente hindurch, die nach dem letzten Hilfssatz von § 1 eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen weniger bilden. Für ein nicht-singuläres t markieren wir auf dem Einheitskreis die Multiplikatorpunkte ε_i, ε_i' $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und verbinden das konjugierte Paar ε_i, ε_i' durch eine vertikale Strecke, welche die reelle Achse der ε-Ebene im Punkte $P_i = \cos 2\pi\varphi_i$ trifft. Die Punkte P_i überholen sich nicht gegenseitig, sondern bewahren ihre Anordnung. Außerdem passieren ε_i, ε_i' niemals die Punkte ± 1. Infolgedessen vollführen die vertikalen Strecken und auch die zugehörigen Punkte ε_i, ε_i' auf dem Einheitskreis lediglich Pendelungen, die Winkelwerte φ_i kehren nach Durchlaufung der Kurve $\mathfrak{K}$ bei stetiger Variation zu ihren Ausgangswerten zurück. Daraus folgt, daß sich $\mathfrak{K}$ stetig in den Einheitspunkt zusammenziehen läßt. — Aus dem einfachen Zusammenhang von $\mathfrak{c}_u$ ergibt sich von neuem, daß die Gewichte (8) ganzzahlige Koeffizienten m_i besitzen müssen.

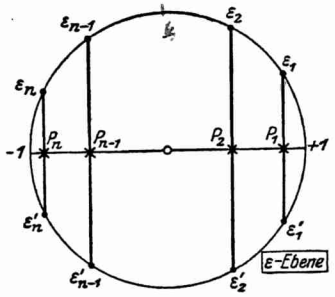


Fig. 1. Multiplikatoren von t.

Weiter haben wir nach dem Vorgehen von § 6 des I. Kapitels das Volumen $d\Omega$ desjenigen Stücks von $\mathfrak{c}_u$ zu berechnen, auf welchem die Elemente t liegen, deren Drehwinkel dem Spielraum $\varphi_i \ldots \varphi_i + d\varphi_i$ angehören. Wie dort bekommen wir aus (3) die Gleichung

$$u \cdot \delta t \cdot u^{-1} = \{\varepsilon \cdot \delta u \cdot (\varepsilon)^{-1} - \delta u\} + 2\pi\sqrt{-1}\, d\varphi. \tag{11}$$

$d\varphi$ ist die Hauptmatrix, welche aus den Gliedern $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_n$; $-d\varphi_1, -d\varphi_2, \ldots, -d\varphi_n$ besteht. Für ein beliebiges Element δt von $\mathfrak{c}_u^0$, Formel (7), können wir als unabhängige Komponenten verwenden[2]):

alle ϱ_{ik} und diejenigen ϱ_{ik}' und σ_{ik}', für welche $i \leqq k$ ist.

Man muß einsehen, daß der Übergang von δt zu $\delta^* t = u \cdot \delta t \cdot u^{-1}$ auf eine unimodulare Substitution jener Komponenten hinauskommt. Für diesen Nachweis will ich hier eine bequemere Methode angeben als in Kap. I. u läßt sich in die Form bringen

$$u = v^{-1}(\varepsilon^*)\, v,$$

wo v und (ε^*) wieder zu $\mathfrak{c}_u$ gehören, (ε^*) aber eine Hauptmatrix ist. Es gilt

$$(v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}) = (\varepsilon^*)\,(v \cdot \delta t \cdot v^{-1})\,(\varepsilon^*)^{-1}.$$

[2]) An Stelle des Realteils und Imaginärteils von ϱ_{12} werden dabei z. B. ϱ_{12} und $-\bar{\varrho}_{12} = \varrho_{21}$ benutzt.

Nun ist $\delta t \to \delta^* t$ eine unimodulare Substitution, wenn der Übergang

$$v \cdot \delta t \cdot v^{-1} \to v \cdot \delta^* t \cdot v^{-1}$$

unimodular ist. Es kommt also nur darauf an, daß für eine *Hauptmatrix* (ε) von $\mathfrak{c}_u$ der Übergang

$$\delta t \to (\varepsilon) \cdot \delta t \cdot (\varepsilon)^{-1} \tag{12}$$

eine unimodulare Substitution ist. Dies ist bereits dafür erforderlich, daß in der Mannigfaltigkeit $[\mathfrak{c}_u]$ überhaupt eine independente Volummessung zustande kommt. Durch (12) verwandeln sich, da $\varepsilon_i' = \frac{1}{\varepsilon_i}$ ist, die Komponenten von δt, wie folgt:

$$\begin{aligned} &\varrho_{ik} \to \varrho_{ik} \cdot \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}, \\ &\varrho_{ik}' \to \varrho_{ik}' \cdot \varepsilon_i \varepsilon_k && (i \leqq k), \\ &\sigma_{ik}' \to \sigma_{ik}' \cdot \frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} && (i \leqq k). \end{aligned} \tag{12a}$$

Das Produkt der hinzutretenden Faktoren ist $= 1$ und damit die Behauptung bewiesen. Dieselbe Rechnung benötigen wir auf der rechten Seite von (11) für δu an Stelle von δt: das Volumen $d\Omega$ wird, unter Fortlassung eines von den Drehwinkeln unabhängigen Faktors,

$$= \prod_{i \neq k} \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) \cdot \prod_{i \leqq k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1) \left(\frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} - 1\right) \cdot d\varphi_1 \, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n. \tag{13}$$

Ich bediene mich der Abkürzungen

$$\begin{aligned} e^{2\pi i \varphi} = e(\varphi); \quad & 2 \cos 2\pi\varphi = e(\varphi) + e(-\varphi) = c(\varphi), \\ & 2i \sin 2\pi\varphi = e(\varphi) - e(-\varphi) = s(\varphi). \end{aligned}$$

Die Produkte in (13) ergeben zusammen das Quadrat des absoluten Betrages von

$$\prod_i (\varepsilon_i^2 - 1) \cdot \prod_{i<k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right).$$

Hier kann

$$\varepsilon_i^2 - 1$$

ersetzt werden durch

$$\varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i} = s(\varphi_i),$$

$$(\varepsilon_i \varepsilon_k - 1) \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\right) = \varepsilon_i^2 + 1 - \varepsilon_i \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\varepsilon_k}\right)$$

durch

$$\left(\varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}\right) - \left(\varepsilon_k + \frac{1}{\varepsilon_k}\right) = c(\varphi_i) - c(\varphi_k).$$

Also darf in

$$d\Omega = \Delta^2 d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n: \tag{14}$$

$$\Delta = \prod_i s(\varphi_i) \cdot \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k)) \tag{15}$$

genommen werden. Das zweite Produkt läßt sich als Determinante schreiben:

$$|c^{n-1}(\varphi), \ldots, c^2(\varphi), c(\varphi), 1| = |\ldots, c(2\varphi), c(\varphi), 1|,$$

und darum ist auch

$$\Delta = |s(n\varphi), \ldots, s(2\varphi), s(\varphi)|.$$

Die zu irgendeiner irreduziblen Darstellung von $\mathfrak{c}_u$ gehörige Charakteristik $\chi(t)$ hängt nur von den Drehwinkeln $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ von t ab, und zwar ist sie eine endliche Fourierreihe derselben, die sich nicht ändert bei den $2^n \cdot n!$ linearen Substitutionen derjenigen endlichen Gruppe (S), deren Erzeugende die Transpositionen sind von dem Typus

$$\varphi_1 \to \varphi_2, \quad \varphi_2 \to \varphi_1, \quad \varphi_i \to \varphi_i \quad (i \neq 1, 2)$$

und die Vorzeichenänderungen vom Typus

$$\varphi_1 \to -\varphi_1, \quad \varphi_i \to \varphi_i \quad (i \neq 1).$$

Die primitiven Charakteristiken genügen den Orthogonalitätsrelationen mit dem Integrationselement (14). $\Delta \cdot \chi = \xi$ ist eine endliche Fourierreihe, welche sich den Substitutionen der Gruppe (S) gegenüber alternierend verhält. Eine solche ist eine Summe von Elementarreihen der folgenden Gestalt

$$\sum_{(S)} \pm e(l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_n\varphi_n).$$

l_i sind ganze Zahlen, für welche

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0$$

gilt, und die Summe ist so zu verstehen, daß in dem hingeschriebenen Glied die φ allen Substitutionen der Gruppe (S) unterworfen werden und die Summe sich alternierend über die so hervorgehenden Ausdrücke erstreckt. In Form einer Determinante ist diese Elementarreihe

$$\xi(l_1\, l_2, \ldots, l_n) = |s(l_1\varphi), s(l_2\varphi), \ldots, s(l_n\varphi)|. \tag{16}$$

Δ ist nichts anderes als das niederste $\xi(l)$, das man erhält, wenn man für l_i die Zahlen

$$r_1 = n, \quad r_2 = n-1, \quad \ldots, \quad r_n = 1$$

wählt.

$$\chi^* = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\Delta} = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \tag{17}$$

ist eine endliche Fourierreihe mit den geforderten Symmetrieeigenschaften.

Das höchste Glied darin ist

$$e(m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2 + \ldots + m_n\varphi_n),$$

wo

$$m_i = l_i - r_i,$$

also

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \geqq 0$$

ist. Die verschiedenen χ^* sind zueinander orthogonal in bezug auf das Integrationselement (14). Ferner gilt

$$\frac{1}{\Omega}\int \chi^*(\varphi)\chi^*(-\varphi)\,d\Omega = \frac{2^n \cdot n!}{\Omega} \tag{18}$$

(die Integration geht nach allen Variablen φ_i von 0 bis 1). Da aber die rechte Seite von den l unabhängig ist und χ^* sich für $l_i = r_i$ auf 1 reduziert, muß

$$\Omega = \int d\Omega = 2^n \cdot n!$$

sein, und die linke Seite von (18) ist allgemein $= 1$. Berücksichtigt man nun aber, daß zu jedem höchsten Gewicht, dessen Koeffizienten die Ungleichungen (9) erfüllen, tatsächlich eine irreduzible Darstellung gehört, so erkennt man wie in I, § 6, daß χ^* die zugehörige Charakteristik ist. Der gleiche Schluß, wie er dort vollzogen wurde, gestattet die Dimensionszahl zu berechnen, den Wert der Charakteristik für $t = e$ oder $\varphi_i = 0$.

Kehrt man zur totalen Gruppe c zurück, so hat man in der Determinante

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1},\ \varepsilon^{l_2} - \varepsilon^{-l_2},\ \ldots,\ \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|$$

für ε der Reihe nach die Multiplikatoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ von t zu setzen, während gleichzeitig $\varepsilon' = \frac{1}{\varepsilon}$ die übrigen Multiplikatoren $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ durchläuft. $\chi((\varepsilon))$ ist nämlich ein Aggregat von Potenzprodukten

$$\varepsilon_1^{k_1}\,\varepsilon_2^{k_2}\ldots\varepsilon_n^{k_n}$$

mit ganzzahligen, wennschon nicht durchweg positiven Exponenten k_i. Ein solches aber ist durch die Fourierreihe eindeutig festgelegt, in welches es durch die Substitution $\varepsilon_i = e(\varphi_i)$ übergeht. Darum ist die behauptete Charakteristikenformel gewiß richtig für alle nicht-singulären Elemente t von c. Aus der in Satz 1 durch ein Schema gekennzeichneten, für alle t ausnahmslos gültigen Normalform schließt man aber leicht, daß jedes t innerhalb der Gruppe c beliebig nahe approximiert werden kann durch nicht-singuläre Elemente, und die Formel überträgt sich dadurch auch auf die singulären Elemente.

Endlich kann man statt der Multiplikatoren die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $f(\zeta)$ einführen. Wir setzen stets

$$f(\zeta) = |e - \zeta t|, \quad \frac{1}{f(\zeta)} = p_0 + p_1\zeta + p_2\zeta^2 + \dots. \tag{19}$$

Man bediene sich der Cauchyschen Formel

$$\left|\frac{1}{x_i - y_k}\right| = \frac{D(x_n \dots x_1)\, D(y_1 \dots y_n)}{\prod_{i,k}(x_i - y_k)}$$

und wähle, unter ζ_i Variable verstehend,

$$x_i = \zeta_i + \frac{1}{\zeta_i}, \quad y_i = \varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}.$$

Nun gilt

$$\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right) - \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\zeta}(1 - \varepsilon\zeta)\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\zeta\right),$$

und

$$\frac{\varepsilon^l - \varepsilon^{-l}}{\varepsilon^1 - \varepsilon^{-1}} = \varepsilon^{l-1} + \varepsilon^{l-3} + \dots + \varepsilon^{-(l-3)} + \varepsilon^{-(l-1)}$$

ist der Koeffizient von ζ^{l-1} in der Potenzentwicklung der Funktion

$$\frac{1}{(1 - \varepsilon\zeta)(1 - \varepsilon^{-1}\zeta)}.$$

Ferner ist

$$f(\zeta) = \prod_i (1 - \varepsilon_i\zeta)(1 - \varepsilon_i^{-1}\zeta).$$

In der Determinante

$$\left|1,\ \zeta + \frac{1}{\zeta},\ \left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^2,\ \dots\right|$$

kann man die Potenz $\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)^i$ ersetzen durch $\zeta^i + \zeta^{-i}$. So erhält man

$$\left|\frac{1}{(1 - \varepsilon_k\zeta_i)(1 - \varepsilon_k^{-1}\zeta_i)}\right| = \frac{|\zeta^{n-1}, \zeta^{n-2} + \zeta^n, \dots, 1 + \zeta^{2n}| \cdot |\dots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|}{f(\zeta_1) f(\zeta_2) \dots f(\zeta_n)}.$$

Vergleicht man auf beiden Seiten die Koeffizienten der Potenz

$$\zeta_1^{l_1 - 1}\zeta_2^{l_2 - 1} \dots \zeta_n^{l_n - 1} \quad (l_1 > l_2 > \dots > l_n > 0),$$

so kommt

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \dots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\dots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|} \cdot \frac{1}{\prod_i (\varepsilon_i - \varepsilon_i^{-1})}$$

$$= |p_{l-n},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} + p_{l-n-2}, \dots|. \tag{20}$$

Damit ist die Charakteristik ganz rational durch die Komponenten der Matrix t ausgedrückt.

Satz 4. *Jede Darstellung von* c *zerfällt in irreduzible Bestandteile. Die Charakteristik der irreduziblen Darstellung von dem höchsten Gewicht* (8), (9) *ist, wenn* $l_i = m_i + n + 1 - i$ *gesetzt wird:*

$$\chi(t) = \frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\varepsilon^{n} - \varepsilon^{-n}, \ldots, \varepsilon^{1} - \varepsilon^{-1}|}$$

$$= |p_{l-n}, p_{l-n+1} + p_{l-n-1}, p_{l-n+2} + p_{l-n-2}, \ldots|;$$

die zugehörige Dimensionszahl

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P(n, n-1, \ldots, 1)}$$

mit

$$P(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_i l_i \cdot \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k). \tag{21}$$

Z. B. ergibt sich für das höchste Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2$:

$$N = \frac{(2n+1)(2n-2)}{2}, \text{ d. i. um 1 geringer als } \frac{2n(2n-1)}{2}.$$

Das Substrat dieser Darstellung ist nicht der Inbegriff aller schiefsymmetrischen Tensoren 2. Stufe f_{ik}, sondern nur derjenigen, welche die eine gegenüber c invariante Relation erfüllen

$$f_{11'} + f_{22'} + \ldots + f_{nn'} = 0.$$

Analog gilt für die Darstellung vom höchsten Gewicht $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$:

$$N = \frac{2n(2n+1)(2n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \text{ d. i. um } 2n \text{ geringer als } \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

entsprechend dem invarianten System von $2n$ Relationen

$$f_{i11'} + f_{i22'} + \ldots + f_{inn'} = 0,$$

die dem willkürlichen schiefsymmetrischen Tensor 3. Stufe f_{ikl} aufzuerlegen sind.

§ 4.

Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Infinitesimaler Teil.

Unter der *Drehungsgruppe* verstehe ich hier den Inbegriff $\mathfrak{d}$ der homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1 (nicht -1), welche eine vorgegebene nicht-ausgeartete quadratische Form Q invariant lassen. Und zwar kann es sich entweder um alle *komplexen* Transformationen von dieser Art handeln, oder um die *reellen* Transformationen, welche eine reelle quadratische Form Q in sich überführen. Im reellen Gebiet gibt es die Unterschiede des Trägheitsindex, und unsere Resultate beziehen sich nicht etwa nur auf den definiten Fall[3]). Es wird nötig sein,

[3]) Den definiten Fall behandelte Herr I. Schur in seiner zweiten Mitteilung: Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie. Sitzungsber. Berl. Akad. 1924, S. 297.

zwischen gerader und ungerader Dimensionszahl $2n$, bzw. $2n+1$ zu unterscheiden. Als Normalform von Q verwenden wir

(22) $(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n')$, bzw. $x_0^2 + 2(x_1x_1' + x_2x_2' + \ldots + x_nx_n')$.

Die unitäre Beschränkung tritt ein, indem wir x_i' konjugiert zu x_i (und bei ungerader Dimensionszahl außerdem x_0 reell) nehmen und fordern, daß diese Bedingungen bei der Transformation erhalten bleiben. Ich verzichte hier auf die genauere Betrachtung der einzelnen Operation von $\mathfrak{d}$; es genügt die Bemerkung, daß bei gerader Dimensionszahl $2n$ ihre Multiplikatoren paarweise zueinander reziprok sind, bei ungerader Dimensionszahl $2n+1$ zu den n Paaren reziproker Multiplikatoren noch der Einspänner $\varepsilon_0 = 1$ hinzutritt. Von der Gruppe $\mathfrak{d}_u$ derjenigen unitären Transformationen mit der Determinante 1 in $2n$ bzw. $2n+1$ Variablen

$$(x_0),\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n',$$

welche die Form Q in sich überführen, ist es wohl bekannt, daß jedes ihrer Elemente t sich in der Form schreiben läßt

$$t = u^{-1}(\varepsilon)u,$$

wo u und die Diagonalmatrix (ε) der Multiplikatoren

$$(\varepsilon_0 = 1),\quad \varepsilon_i = e(\varphi_i),\quad \varepsilon_i' = \bar{\varepsilon}_i = e(-\varphi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

gleichfalls zu $\mathfrak{d}_u$ gehören. Bei ungerader Dimensionszahl ist mit (ε) jede derjenigen Hauptmatrizen innerhalb $\mathfrak{d}_u$ konjugiert, welche aus ihr durch die schon oben erwähnten $2^n \cdot n!$ Substitutionen der Gruppe (S) für die Drehwinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ hervorgehen. Bei gerader Dimensionszahl muß man sich jedoch auf diejenige Hälfte $(S)'$ von (S) beschränken, deren Elemente die Permutationen der φ sind, verbunden mit gleichzeitigem Wechsel des Vorzeichens an einer *geraden* Anzahl der Winkelargumente.

Die Matrix einer willkürlichen infinitesimalen Operation von $\mathfrak{d}$ ist in dem Schema (23) angegeben.

(23)

	0	ϱ_i	σ_i
σ_i'		ϱ_{ik}	ϱ_{ik}'
ϱ_i'		σ_{ik}'	σ_{ik}

(24)

	0	$\varrho_i\lambda_i$	$-\sigma_i\lambda_i$
$\sigma_i\lambda_i$		$\varrho_{ik}(\lambda_i - \lambda_k)$	$\varrho_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$
$\varrho_i'\lambda_i$		$-\sigma_{ik}'(\lambda_i + \lambda_k)$	$\sigma_{ik}(-\lambda_i + \lambda_k)$

$\varrho_{ik} + \sigma_{ki} = 0$, ϱ_{ik}' und σ_{ik}' schiefsymmetrisch $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

Der Rand von der Breite 1 tritt nur bei ungerader Dimensionszahl auf. Die zur infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{d}^0$ gehörigen Hauptmatrizen seien wieder mit $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ bezeichnet; $\varrho_{ii} = \lambda_i$, $\sigma_{ii} = -\lambda_i$. Das rechte Schema

(24) beschreibt, was aus der linken Matrix (23) entsteht durch die Kommutatormultiplikation mit h. Die Wurzeln sind also

$$\alpha = (\pm \lambda_i), \quad \pm \lambda_i \pm \lambda_k \quad (i < k, \text{ alle vier Vorzeichenkombinationen}).$$

Für eine Linearform Λ der λ_i mit den Koeffizienten m_i ist dementsprechend

$$\Lambda_\alpha = (\pm 2 m_i), \quad \pm m_i \pm m_k \qquad (i < k). \tag{25}$$

Es ist wiederum dafür Sorge getragen, daß $\alpha_\alpha = 2$ wird. Der Übergang von Λ zu $\Lambda' = \Lambda - \Lambda_\alpha \cdot \alpha$ ist in dem eingeklammerten Fall, der nur für die ungeraden Dimensionszahlen in Frage kommt, die Änderung des Vorzeichens eines einzigen λ_i; im Falle $\alpha = \lambda_i \mp \lambda_k$ $(i < k)$ die Vertauschung von λ_i mit λ_k, bzw. diese Vertauschung verbunden mit gleichzeitiger Vorzeichenänderung von λ_i und λ_k. Unter einer halbganzen Zahl verstehe ich eine solche von der Form: ganze Zahl $+\frac{1}{2}$. Aus der Tabelle (25) folgt: entweder sind die Koeffizienten m_i eines vorkommenden Gewichtes Λ alle ganze oder alle halbganze Zahlen. Für das höchste Gewicht ist außerdem stets

$$m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_n \quad \text{und} \quad m_i + m_k \geqq 0 \quad \text{für} \quad i \neq k.$$

Im Falle der ungeraden Dimensionszahl kommt die Ungleichung hinzu: $m_i \geqq 0$. Folglich:

$$\begin{cases} (\text{Dim. } 2n+1) & m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{n-1} \geqq m_n \geqq 0, \\ (\text{Dim. } 2n\ \ ) & m_1 \geqq m_2 \geqq \ldots \geqq m_{n-1} \geqq |m_n|. \end{cases} \tag{26}$$

Im zweiten Fall kann m_n auch negativ sein.

Realisierung. *Zu jedem der möglichen höchsten Gewichte gehört eine und nur eine irreduzible Darstellung.*

Dimensionszahl $2n+1$. Jedes mögliche höchste Gewicht setzt sich durch nicht-negative ganzzahlige Koeffizienten p_i zusammen aus

$$\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\mu_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n}{2}.$$

Wie man die irreduziblen Darstellungen mit dem höchsten Gewicht $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ findet, ist uns bekannt. In einer Darstellung, die das höchste Gewicht μ_n besitzt, müssen alle Linearformen

$$\frac{\pm \lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \ldots \pm \lambda_n}{2} \tag{27}$$

als Gewichte auftreten; ihre Variablenzahl beträgt also mindestens 2^n. Und wenn wir eine zum höchsten Gewicht μ_n gehörige Darstellung der Dimensionszahl 2^n finden, muß sie irreduzibel sein. Denn die Gewichte (27) sind alle voneinander verschieden, und aus einem von ihnen erhält man

die übrigen durch wiederholte Anwendung der zu den Wurzeln $\alpha = \lambda_i$ gehörigen Übergänge $A \to A'$. Eine solche Darstellung ist in der Tat von Cartan konstruiert worden[4]). Die 2^n Variablen werden zweckmäßig durch einen Buchstaben x mit n Indizes gekennzeichnet, deren jeder die Werte $+$ oder $-$ besitzen kann. Ich gebe die Operationen an, welche in der gesuchten Darstellung der Hauptmatrix h und den zu den Wurzeln α gehörigen Elementen e_α von $\mathfrak{c}^0$ korrespondieren.

$H = H(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$: jedes x geht über in $\frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \ldots \pm \lambda_n}{2} x$, wo die Vorzeichenkombination im Faktor zusammenfällt mit der Indizesfolge der betreffenden Variablen x.

E_α, $\alpha = \lambda_i$. Diejenigen x, deren i-ter Index $+$ ist, gehen über in 0. Ein $x = x_{\ldots -\ldots}$ aber, dessen i-ter Index $-$ ist, geht über in $\pm x_{\ldots +\ldots}$, wo $x_{\ldots +\ldots}$ aus $x_{\ldots -\ldots}$ entsteht, indem der i-te Index aus $-$ in $+$ verwandelt wird; das Vorzeichen vor $x_{\ldots +\ldots}$ ist gleich dem Produkt des 1-ten bis $(i-1)$-ten Index von $x_{\ldots +\ldots}$. — Analog für $\alpha = -\lambda_i$: die Rollen von $+$ und $-$ im i-ten Index sind zu vertauschen.

E_α, $\alpha = \lambda_i + \lambda_k$ $(i < k)$. Alle x außer denjenigen, welche an i-ter und k-ter Stelle den Index $-$ tragen, gehen in 0 über. Diese aber, $x_{\ldots --\ldots}$, gehen über in $\pm x_{\ldots ++\ldots}$, indem der i-te und k-te Index in $++$ umgewandelt werden und das Vorzeichen vor x gleich dem Produkt der zwischen der i-ten und k-ten Stelle stehenden Indizes von x genommen wird. — Analog für die andern drei in der Formel $\alpha = \pm\lambda_i \pm \lambda_k$ enthaltenen Möglichkeiten.

Durch Komposition gewinnt man aus den erwähnten irreduziblen Darstellungen, die zu den höchsten Gewichten μ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gehören, zu jedem der möglichen höchsten Gewichte eine derartige Darstellung. Diejenigen, in denen die Koeffizienten des höchsten Gewichtes den Nenner 2 haben, können selbstverständlich auf dem Gebilde $\mathfrak{d}$ nicht eindeutig, sondern müssen mindestens zweideutig sein[5]).

Dimensionszahl $2n$. Alle möglichen höchsten Gewichte können mittels ganzzahliger nicht-negativer Koeffizienten kombiniert werden aus

$$\mu_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-2),$$

$$\mu_{n-1} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} - \lambda_n}{2},$$

$$\mu_n = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_{n-1} + \lambda_n}{2}.$$

---

[4]) Cartan II, S. 86, 91.

[5]) Sie werden in den Schurschen Untersuchungen außer Betracht gelassen.

Es gilt, nur noch die beiden irreduziblen Darstellungen zu finden, die zu dem höchsten Gewicht μ_{n-1} bzw. μ_n gehören[4]); sie besitzen die Dimensionszahl 2^{n-1}. Die sämtlichen Gewichte sind

$$\frac{\pm\lambda_1 \pm \lambda_2 \pm \cdots \pm \lambda_n}{2},$$

wo im ersten Fall nur diejenigen Vorzeichenkombinationen zulässig sind, deren Produkt $-$ ist, im zweiten Fall diejenigen, deren Produkt $+$ ist. Die Definition dieser beiden Darstellungen ist genau die gleiche wie bei ungerader Dimensionszahl — mit der Modifikation, daß im ersten Fall die n Indizes der Variablen an die Bedingung gebunden sind, daß ihr Produkt $-$ sei, im zweiten Fall aber $+$, und die Wurzeln $\alpha = \pm\lambda_i$ samt den zugehörigen E_α zum Fortfall kommen.

§ 5.

Die Darstellungen der Drehungsgruppe: Integraler Teil.

Satz 5. *Die gewöhnliche reelle Drehungsgruppe* $\mathfrak{d}_u$ *ist nicht einfach zusammenhängend, aber ein gewisses zweiblättriges Überlagerungsgebilde* $\mathfrak{d}_u^*$ *über* $\mathfrak{d}_u$ *ist einfach zusammenhängend.* (Gültig für $n \geqq 3$.)

Der reelle Raum, in welchem sich die reellen Drehungen abspielen, ist dadurch gekennzeichnet, daß (x_0 reell ist,) x_i und x_i' zueinander konjugiert sind. Unsere Behauptung folgt für die Dimensionszahlen $n = 3$ und $n = 4$ aus den bekannten Quaternionenformeln für die Drehungen. Eine geschlossene Kurve auf $\mathfrak{d}_u$ ist eine kontinuierliche Kreiseldrehung um einen festen Punkt O, die den Kreisel in seine Anfangslage zurückbringt; und die Frage ist, ob ich jede solche geschlossene Bewegung des Kreisels stetig in die Ruhe überführen kann. Es ist nützlich, sich auch anschaulich im dreidimensionalen Raum klarzumachen, daß das einmalige Herumdrehen des Kreisels um eine feste durch O gehende Achse sich nicht stetig in die Ruhe verwandeln läßt, wohl aber das zweimalige Herumdrehen. Wir führen den Beweis allgemein nach der schon auf $\mathfrak{g}_u$ und $\mathfrak{c}_u$ angewendeten Methode.

Als singulär betrachte ich ein Element t von $\mathfrak{d}_u$, wenn von seinen Multipikatoren $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$; $\varepsilon_1' = \bar{\varepsilon}_1, \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'$ zwei mit verschiedenen Indizes behaftete, z. B. ε_i und ε_k oder ε_i und ε_k' $(i \neq k)$ einander gleich sind; bei ungerader Dimensionszahl außerdem den Fall, wo ein Multiplikator aus dieser Serie, z. B. ε_1 und damit auch ε_1', $= 1\,(= \varepsilon_0)$ wird. Hingegen gilt es nicht als ein singuläres Vorkommnis, wenn bei gerader Dimensionszahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = \pm 1$ oder wenn bei ungerader Dimensionszahl $\varepsilon_1 = \varepsilon_1' = -1$ wird. Wiederum sieht man leicht ein, daß die singulären t innerhalb $\mathfrak{d}_u$ eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen weniger bilden. Wir stellen mit

Hilfe der Drehwinkel φ_i des nicht-singulären t wiederum die Figur 1 her. Durchläuft t eine geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ auf $\mathfrak{d}_u$, welche durch keine singuläre Stelle hindurchgeht, so können die vertikalen Sehnen sich nicht gegenseitig überholen, jede muß in ihre Ausgangslage wieder zurückkehren. *Bei ungerader Dimensionszahl* kann aber das am weitesten nach links gelegene Paar $\varepsilon_n, \varepsilon_n'$ durch -1 hindurchgehen, so daß nach vollständiger Durchlaufung φ_n über $\frac{1}{2}$ in $1 - \varphi_n$ übergegangen ist. Kehren alle φ_i zu ihren Ausgangswerten zurück, so sind wir imstande, $\mathfrak{K}$ stetig in den Einheitspunkt zusammenzuziehen. Tritt hingegen die andere Möglichkeit ein, so lassen sich die Pendelungen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ noch immer stetig in den Ruhwert $\varphi = 0$ zusammenziehen; gleichzeitig führe man den von φ_n durchlaufenen Bogen, indem man seine vertikale Anfangssehne den übrigen vertikalen Strecken nach gegen 1 rücken läßt, in die einmalige Durchlaufung des ganzen Kreises von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 1$ über. Man erhält dann am Ende des Deformationsprozesses an Stelle von $\mathfrak{K}$ die stetig sich vollziehende volle Umdrehung einer reellen zweidimensionalen, mit dem Kurvenparameter μ stetig variierenden Ebene:

$$e_1 \to \cos\varphi \cdot e_1 - \sin\varphi \cdot e_2,$$
$$e_2 \to \sin\varphi \cdot e_1 + \cos\varphi \cdot e_2.$$

Die „reellen" Vektoren e_1, e_2 und der Drehwinkel φ hängen stetig von μ ab, und φ durchläuft einmal die Skala der Winkelwerte von 0 bis 1. Diesen Prozeß kann ich offenbar stetig überführen in die volle Umdrehung $\mathfrak{K}_0$ einer irgendwie fest vorgegebenen reellen zweidimensionalen Ebene. Darum ist jede geschlossene Kurve $\mathfrak{K}$ entweder homolog 0 oder homolog $\mathfrak{K}_0$. Da es evident ist, daß sich $\mathfrak{K}_0$ nicht stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt, ist unser Satz für ungerade Dimensionszahl bewiesen.

Bei gerader Dimensionszahl ist die Möglichkeit zu erwägen, daß das am weitesten nach rechts gelegene Paar $\varepsilon_1, \varepsilon_1'$ durch $+1$ hindurchgleiten kann und dadurch φ_1 über 0 in $-\varphi_1$ sich verwandelt. Wenn aber nicht bloß ein einziges Paar da ist, d. h. wenn n nicht $= 2$ ist, wird dem ersten Paar unter allen Umständen durch die übrigen Paare das Hinüberrücken nach -1 verwehrt. Die erwähnte Möglichkeit ist darum von keinen Folgen, weil die Deformation, welche φ_1 ersetzt durch $\sigma \cdot \varphi_1$ (σ der von 1 bis 0 abnehmende Deformationsparameter), den von φ_1 durchlaufenen Bogen ebenso wie die Pendelungen von $\varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ stetig in die Ruhelage $\varphi = 0$ überführt. Es bleibt nur die andere Möglichkeit zu diskutieren, daß das n-te, das am weitesten nach links gelegene Paar durch -1 hindurchgeht und φ_n über $\frac{1}{2}$ hinüber in $1 - \varphi_n$ sich verwandelt. Das Resultat ist dann offenbar das gleiche wie bei ungerader Dimensionszahl.

Die oben wiedergegebene Cartansche Tabelle läßt erkennen, daß es tatsächlich Darstellungen der abstrakten Gruppe $\mathfrak{d}_u^*$ gibt, die erst auf $\mathfrak{d}_u^*$, nicht schon auf $\mathfrak{d}_u$ eindeutig sind.

Dem schon im I. Kapitel eingeschlagenen Gedankengang gemäß folgt nun *die Berechnung des Volumens* $d\Omega$. Als Komponenten eines infinitesimalen Elementes (23) von $\mathfrak{d}_u$ können wir verwenden

$(\varrho_i, \sigma_i,)$ alle ϱ_{ik} und diejenigen $\varrho'_{ik}, \sigma'_{ik}$, für welche $i < k$ ist.

Darum gilt

$$d\Omega = \Big\{\prod_i (\varepsilon_i - 1)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i} - 1\Big)\Big\} \cdot \prod_{i \neq k} \Big(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k} - 1\Big) \cdot \prod_{i<k} (\varepsilon_i \varepsilon_k - 1)\Big(\frac{1}{\varepsilon_i \varepsilon_k} - 1\Big) \cdot d\varphi_1\, d\varphi_2 \ldots d\varphi_n.$$

Das Produkt in der geschweiften Klammer tritt nur auf bei ungerader Dimensionszahl. Wir bekommen also, wenn wir uns wieder der Schreibweise (14) bedienen:

$$(28) \qquad \Delta = \prod_i s\Big(\frac{\varphi_i}{2}\Big) \cdot \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k)), \qquad (\text{Dim.} = 2n+1),$$

$$(28') \qquad \Delta = \prod_{i<k} (c(\varphi_i) - c(\varphi_k)). \qquad (\text{Dim.} = 2n).$$

Weil wir immer ungerade und gerade Dimensionszahl unterscheiden müssen, beziehe sich die erste Aussage stets auf den ersten, die zweite auf den zweiten Fall.

Die primitiven Charakteristiken χ sind endliche Fourierreihen der Winkelargumente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in einem etwas erweiterten Sinne: Aggregate von Termen der Gestalt

$$e(m_1 \varphi_1 + m_2 \varphi_2 + \ldots + m_n \varphi_n),$$

wo die m_i entweder lauter ganze oder lauter halbganze Zahlen sind. Die Charakteristiken sind symmetrisch gegenüber der Gruppe (S) bzw. $(S)'$. $\Delta \cdot \chi = \xi$ ist eine endliche Fourierreihe von alternierendem Charakter gegenüber (S) bzw. $(S)'$; und darum additiv zusammengesetzt aus Elementarsummen

$$\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \sum \pm e(l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + \ldots + l_n \varphi_n).$$

Für die l_i, welche alle ganz oder alle halbganz sind, gelten die Ungleichungen

$$l_1 > l_2 > \ldots > l_n > 0 \quad \text{bzw.} \quad l_1 > l_2 > \ldots > l_{n-1} > |l_n|.$$

Die alternierende Summe erstreckt sich über die an den Argumenten vorzunehmenden Substitutionen von (S) bzw. (S'). In Determinantenform ist *im Falle der ungeraden Dimensionszahl*

$$(29) \qquad \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |s(l_1 \varphi), s(l_2 \varphi), \ldots, s(l_n \varphi)|$$

und Δ das niedrigste vorkommende ξ:

$$\Delta = \xi(r_1, r_2, \ldots, r_n), \tag{30}$$

$$r_1 = n - \frac{1}{2}, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = \frac{3}{2}, \quad r_n = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

$$\chi = \frac{\xi(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{\xi(r_1, r_2, \ldots, r_n)} \tag{32}$$

ist die Charakteristik der irreduziblen Darstellung „vom Gewichte" $m_i = l_i - r_i$, d. h. derjenigen, deren höchstes Gewicht diese Koeffizienten m_i trägt. Halbganze l_i liefern die auf $\mathfrak{d}_u$ eindeutigen, ganze l_i die zweideutigen Darstellungen. Die Ausdrücke (29) traten schon bei der Gruppe c auf, vgl. Formel (16).

Im Falle der geraden Dimensionszahl haben wir

$$2 \cdot \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |c(l_1\varphi), c(l_2\varphi), \ldots, c(l_n\varphi)|, \quad \text{wenn } l_n = 0 \text{ ist;}$$

ist hingegen $l_n \neq 0$, so gilt

$$2 \cdot \xi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = |c(l_1\varphi), \ldots, c(l_n\varphi)| + |s(l_1\varphi), \ldots, s(l_n\varphi)|. \tag{33}$$

Wiederum ist Δ das niedrigste vorkommende ξ, (30),

$$r_1 = n - 1, \quad \ldots, \quad r_{n-1} = 1, \quad r_n = 0, \tag{34}$$

und (32) liefert die Charakteristik der irreduziblen Darstellung vom Gewichte $m_i = l_i - r_i$. Die Variablenzahlen sind

$$N = \frac{P(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P\left(n - \frac{1}{2}, \ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)} \qquad (\text{Dim.} = 2n + 1) \tag{35}$$

bzw.

$$N = \frac{P'(l_1, l_2, \ldots, l_n)}{P'(n-1, \ldots, 1, 0)} \qquad (\text{Dim.} = 2n); \tag{35'}$$

P ist durch (21) erklärt,

$$P'(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \prod_{i<k} (l_i - l_k)(l_i + l_k).$$

Der Übergang von den Elementen der Gruppe $\mathfrak{d}_u$ zu denen der vollen Gruppe $\mathfrak{d}$ vollzieht sich ohne weiteres. Rational durch die Komponenten von t lassen sich natürlich nur die Charakteristiken $\chi(t)$ der auf $\mathfrak{d}$ *eindeutigen* irreduziblen Darstellungen ausdrücken. Neben den Entwicklungskoeffizienten p_i von $\frac{1}{f(\zeta)}$, vgl. Formel (19), treten im folgenden auch diejenigen von

$$\frac{1-\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1+\zeta}{f(\zeta)}, \qquad \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)}$$

auf; sie sind bzw.

$$= p_i - p_{i-1}, \qquad p_i + p_{i-1}, \qquad p_i - p_{i-2}.$$

Dimensionszahl $2n+1$. Nimmt man die l gleich ganzen Zahlen, so unterscheidet sich der Ausdruck (32) nur dadurch von (17), daß im Nenner (28) statt (15) steht. Außerdem ist

$$\frac{1}{\prod_i (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta)} \quad \text{jetzt nicht } = \frac{1}{f(\zeta)}, \quad \text{sondern } = \frac{1-\zeta}{f(\zeta)}.$$

Aus der in (20) angegebenen p-Determinante entsteht $\chi(t)$ also dadurch, daß p_i durch $p_i - p_{i-1}$ ersetzt und das Ganze mit

$$\delta = \prod_i c\left(\frac{\varphi_i}{2}\right) = \prod_i (\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}})$$

multipliziert wird.

$$\delta^2 \text{ ist } = \prod_i (2 + c(\varphi_i)).$$

Unter dem Produktzeichen steht der Wert von

$$1+\zeta^2 - c(\varphi_i)\zeta = (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta) \quad \text{für} \quad \zeta = -1.$$

Darum wird

$$\delta^2 = \frac{1}{2} f(-1) = \frac{1}{2}|e+t|.$$

Für *die zweideutigen Darstellungen* finden wir somit:

$$(36) \quad \chi(t) = \sqrt{\tfrac{1}{2}|e+t|} \cdot |p_{l-n} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} - p_{l-n-2}, \ldots, p_{l-1} - p_{l-2n}|.$$

$$[\text{Gewicht: } l_i + i - n - \tfrac{1}{2};\quad l_n > 0].$$

In der Charakteristikenformel für *die eindeutigen Darstellungen* ersetzen wir das Zeichen l durch $l+\frac{1}{2}$, damit wir auch hier auf ganze Zahlen l kommen.

$$\frac{\varepsilon^{l+\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-(l+\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}} = \varepsilon^l + \varepsilon^{l-1} + \ldots + \varepsilon^{-(l-1)} + \varepsilon^{-l}$$

ist der Koeffizient von ζ^l in der Potenzentwicklung von

$$\frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}, \text{ und es gilt } \prod_k \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon_k\zeta)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta)} = \frac{1-\zeta^2}{f(\zeta)}.$$

Darum bekommen wir jetzt aus der schon zur Herleitung von (20) benutzten Cauchyschen Formel

$$\left|\frac{1+\zeta_i}{(1-\varepsilon_k\zeta_i)(1-\varepsilon_k^{-1}\zeta_i)}\right| : |\varepsilon_k^{i-1} + \varepsilon_k^{-(i-1)}|$$

$$= \prod_i \frac{1-\zeta_i^2}{f(\zeta_i)} \cdot |\zeta^{n-1}, \zeta^{n-2} + \zeta^n, \ldots, 1 + \zeta^{2n}|$$

abermals die p-Determinante (20), in der jedoch p_i durch $p_i - p_{i-2}$, l zu ersetzen ist durch $l+1$:

$$(37)\qquad \chi(t) = |p_{l-n+1} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} - p_{l-n-2}, \ldots, p_l - p_{l-2n}|\ ^{6)}$$

$$[\text{Gewicht: } l_i + i - n;\quad l_n \geqq 0].$$

Dimensionszahl $2n$. Für die eindeutigen Darstellungen (l_i ganzzahlig) mit $l_n = 0$ hat man sofort, da $\varepsilon^l + \varepsilon^{-l}$ der Koeffizient von ζ^l $(l \neq 0)$ in der Potenzentwicklung von

$$\frac{1-\zeta^2}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)} \quad \text{ist und} \quad \prod_i (1-\varepsilon_i\zeta)(1-\varepsilon_i^{-1}\zeta) = f(\zeta),$$

die Gleichung (37). Sind die l_i ganze Zahlen und $l_n > 0$, so ist derselbe Ausdruck brauchbar für den ersten der beiden Summanden, in welche χ nach (33) zerfällt. Für den zweiten, den sin-Teil hat man

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} - \varepsilon^{-l_1}, \ldots, \varepsilon^{l_n} - \varepsilon^{-l_n}|}{|\ldots, \varepsilon^2 + \varepsilon^{-2}, \varepsilon + \varepsilon^{-1}, 1|},$$

d. i. die p-Determinante (20), multipliziert mit

$$\delta = \prod_i s(\varphi_i).$$

Man findet

$$(-1)^n \delta^2 = \prod_i (2 - c(\varphi_i))\,(2 + c(\varphi_i)) = f(1)f(-1) = |e-t|\cdot|e+t|.$$

Bezeichnet man die Koeffizientenmatrix (38) der invarianten quadratischen Form (22) mit $\tilde{e}$, so ist $|\tilde{e}| = (-1)^n$. Darum erhält man, nachdem man zunächst $|e-t|$ ersetzt hat durch die transponierte Determinante $|e-t'|$:

$$(38)\qquad \left|\begin{array}{c|c} 0 & \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right|$$

$$\delta^2 = |(\tilde{e} - t'\tilde{e})(e+t)|.$$

Nun ist $t'\tilde{e}t = \tilde{e}$, also δ^2 gleich der Determinante der schiefsymmetrischen Matrix $\tilde{e}t - t'\tilde{e}$. Die Determinante einer schiefsymmetrischen Matrix ist aber das Quadrat einer ganzen rationalen Funktion ihrer Komponenten, nämlich der „Pfaffiante". Setzt man also

$$\pi(t) = \text{Pfaffiante von } (\tilde{e}t - t'\tilde{e}),$$

---

[6]) Vgl. zu dieser und den übrigen Formeln die unter [3]) zitierte Abhandlung von I. Schur.

so kommt[7])

$$2\chi(t) = |p_{l-n+1} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+2} - p_{l-n-2}, \cdots|$$
$$\pm \pi(t) \cdot |p_{l-n},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-1}, \cdots| \tag{39}$$

[Gewicht: $l_1 - n + 1,\ l_2 - n + 2, \ldots, l_{n-1} - 1, \pm l_n \quad (l_n \geqq 0)$;

für $l_n = 0$ ist der Faktor 2 links zu löschen und fällt rechts das zweite Glied fort.]

Sind die l halbganze Zahlen, so schreiben wir an Stelle von l diesmal $l - \frac{1}{2}$.

$$\frac{\varepsilon^{l-\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-(l-\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}, \qquad \frac{\varepsilon^{l-\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-(l-\frac{1}{2})}}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{-\frac{1}{2}}}$$

sind die Koeffizienten von ζ^{l-1} in den Potenzentwicklungen der Funktionen

$$\frac{1-\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}, \quad \text{bzw.} \quad \frac{1+\zeta}{(1-\varepsilon\zeta)(1-\varepsilon^{-1}\zeta)}.$$

Darum ersetze man in der p-Determinante (20) p_i durch $p_i - p_{i-1}$, bzw. $p_i + p_{i-1}$; so kommen die beiden Determinanten in der Formel (40) zustande. Außerdem sind die Produkte

$$\prod_i \left(\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}}\right), \qquad \prod_i \left(\varepsilon_i^{\frac{1}{2}} - \varepsilon_i^{-\frac{1}{2}}\right)$$

ins Quadrat erhoben, bzw. gleich

$$f(-1) = |e + t| \quad \text{und} \quad (-1)^n f(1) = (-1)^n |e - t| = |\tilde{e} - t'\tilde{e}|.$$

Somit findet sich jetzt

$$2\chi(t) = \sqrt{|e+t|} \cdot |p_{l-n} - p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} - p_{l-n-2}, \cdots|$$
$$\pm \sqrt{(-1)^n |e-t|} \cdot |p_{l-n} + p_{l-n-1},\ p_{l-n+1} + p_{l-n-2}, \cdots| \tag{40}$$

$$\left[\text{Gewicht: } l_1 - n + \frac{1}{2},\ l_2 - n + \frac{3}{2}, \ldots, l_{n-1} - \frac{3}{2},\ \pm\left(l_n - \frac{1}{2}\right);\quad l_n > 0\right].$$

In den Formeln (36), (37), (39), (40) bedeuten $l_1, l_2, \ldots, l_n$ stets ganze Zahlen, die den Ungleichungen $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$ genügen; außerdem ist, wie jedesmal vermerkt ist, l_n entweder der Einschränkung $l_n > 0$ oder $l_n \geqq 0$ unterworfen. — Die vorkommenden Irrationalitäten sind

$$\sqrt{(-1)^n |e-t|} \quad \text{und} \quad \sqrt{|e+t|}.$$

Bei ungerader Dimensionszahl ist die erste $= 0$; bei gerader Dimensionszahl ist ihr Produkt rational $= \pi(t)$.

[7]) Die Berechnung dieser Charakteristiken, welche er η nennt, ist Herrn Schur noch nicht gelungen; ebenso fehlen bei ihm natürlich diejenigen der zweideutigen Darstellungen. Eine rekursive Bestimmung der η gelang im Anschluß an die Schurschen Untersuchungen, aber ohne Benutzung des Integralkalküls Herrn R. Brauer. (Dissertation Berlin, erscheint demnächst.)

Satz 6. *Jede Darstellung von* $\mathfrak{d}$ *zerfällt in irreduzible. Die Dimensionszahlen der irreduziblen Darstellungen sind unter* (35), (35′) *verzeichnet. Den Ausdruck der Charakteristiken durch die Multiplikatoren von t findet man nach Anweisung der Gleichung* (32) *in den Formeln* (29), (31) *bzw.* (33), (34), *durch die Matrix t selber in* (37), (36) *bzw.* (39), (40).

Auf die von Herrn I. Schur neben $\mathfrak{d}$ behandelte Gruppe *aller Q* invariant lassenden linearen Transformationen, zu welcher auch diejenigen von der Determinante -1 gehören, gehe ich hier nicht ein. Denn unser Standpunkt ist der infinitesimale. Auch die Charakteristiken

$$\chi = \sum_{(k)} r_{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot e(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \dots + k_n \varphi_n)$$

sind für uns lediglich die „erzeugenden Funktionen", welche die vorkommenden Gewichte $k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2 + \dots + k_n \varphi_n$ und ihre Multiplizitäten $r_{k_1 k_2 \dots k_n}$ zusammenfassen. — Die durch Hinzunahme der Dilatation erweiterten Gruppen $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}$ können analog behandelt werden wie in Kap. I, § 8.

Kapitel III.

Struktur der halb-einfachen Gruppen.

Begonnen wurde die Untersuchung der Struktur der halb-einfachen kontinuierlichen Gruppen endlicher Parameterzahl von Killing[8]; aber erst Cartan gelang in seiner Thèse (Paris 1894) ein einwandfreier Aufbau. Das Resultat war eine vollständige Tabelle aller abstrakten *einfachen* Gruppen (deren direkte Produkte die halb-einfachen sind): zu den drei großen Klassen der Gruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, deren Darstellungstheorie in den beiden vorigen Kapiteln entwickelt wurde, traten nur noch weitere fünf einzelne Gruppen hinzu. Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile, einen allgemeinen, in welchem die Haupteigenschaften der halb-einfachen Gruppen ausfindig gemacht werden, und einen speziellen, der durch viele Fallunterscheidungen hindurch zu den wenigen konkreten Möglichkeiten vordringt, welche zufolge jener Eigenschaften allein offen bleiben. Ich komme hier auf den allgemeinen Teil zurück, weil er nicht nur wesentlicher Vereinfachungen fähig ist, sondern für unsere Zwecke weitergeführt werden muß, als es durch Cartan geschehen ist. Das Hauptziel dabei ist, die „unitäre Beschränkung", die bisher eine so bedeutsame Rolle spielte, richtig auf alle halb-einfachen Gruppen zu übertragen.

---

[8]) Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen, Math. Annalen **31**, S. 252; **33**, S. 1; **34**, S. 57; **36**, S. 161 (1888–1890).

§ 1.

Grundbegriffe. Zerlegung nach einer maximalen auflösbaren Untergruppe.

Der Begriff der *infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{a}$ wurde schon in Kap. I, § 2 in Erinnerung gebracht. Eine lineare Teilschar $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ ist eine *Untergruppe*, wenn irgend zwei zu $\mathfrak{b}$ gehörige Elemente b_1, b_2 stets ein zu $\mathfrak{b}$ gehöriges Kommutatorprodukt $[b_1 b_2]$ erzeugen. Eine *invariante* (*ausgezeichnete, selbstkonjugierte*) *Untergruppe* liegt vor, wenn mit b zugleich $[bx]$ der Schar angehört, welches auch das Gruppenelement x innerhalb $\mathfrak{a}$ sein mag. Im letzten Fall ist $\mathfrak{a}$ mod. $\mathfrak{b}$ genommen (Projektion von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{b}$; in der durch Projektion entstehenden Mannigfaltigkeit gelten zwei Elemente von $\mathfrak{a}$ als gleich, wenn ihre Differenz zu $\mathfrak{b}$ gehört) ebenfalls eine Gruppe, die *Faktorgruppe*. Die Elemente von der Form $[xy]$ und alle diejenigen, die sich aus solchen additiv zusammensetzen, bilden die *Kommutatorgruppe* oder *abgeleitete Gruppe* $\mathfrak{a}'$; sie ist eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$. Schärfer gilt: Die Ableitung einer invarianten Untergruppe von $\mathfrak{a}$ ist wiederum eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$. Demnach sind die sukzessiven Ableitungen $\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'', \ldots$ samt und sonders invariante Untergruppen von $\mathfrak{a}$. Bricht diese Reihe ab mit der infinitesimalen Gruppe 0, so ist $\mathfrak{a}$ eine *auflösbare* (oder „integrable") *Gruppe*. Man kann diesen Begriff auch so fassen: Die Gruppe $\mathfrak{a}$ ist auflösbar, wenn sie sich mittels einer Reihe

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r, \mathfrak{a}_{r-1}, \ldots, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_0 = 0$$

abbauen läßt, in welcher jedes $\mathfrak{a}_{i-1}$ invariante Untergruppe des vorhergehenden $\mathfrak{a}_i$ ist und die Parameterzahl von Glied zu Glied um 1 sinkt. Enthält eine Gruppe keine andere invariante Untergruppe als 0 und sich selbst, so heißt sie *einfach*; *halb-einfach* hingegen, wenn sie keine andern auflösbaren invarianten Untergruppen enthält außer 0. Die einparametrigen Gruppen sind zugleich Abelsch und einfach; aber abgesehen von diesem trivialen Fall ist eine einfache Gruppe stets auch halb-einfach.

Zu einer beliebigen in abstracto gegebenen Gruppe gehört immer die von Lie als *Parametergruppe* bezeichnete Transformationsgruppe. In ihr korrespondiert dem Gruppenelement T die Transformation $X = TX'$ der Gruppenmannigfaltigkeit in sich selber; sie ist so auf die ursprüngliche Gruppe homomorph[2] bezogen.[1] Eine andere isomorphe Transformationsgruppe, die „*adjungierte*", erhält man, wenn man dem Element T die Transformation

$$X' = TXT^{-1}$$

zuordnet. Diese Darstellung ist jedoch unter Umständen „verkürzt"; es entspricht nämlich allen denjenigen Elementen T die Identität, welche dem *Zentrum* der Gruppe angehören, d. h. mit allen Elementen X der Gruppe vertauschbar sind. Im Gebiet der kontinuierlichen Gruppen ist sie dennoch von größerer Wichtigkeit als die Parametergruppe, da die Transformation aus jedem *infinitesimalen* Element x wieder ein infinitesimales x' entstehen läßt:

$$x' = Tx^*T^{-1}$$

ist eine homogene lineare Transformation im r-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{a}$, und wir bekommen so eine Darstellung der kontinuierlichen Gruppe durch lineare Transformationen. Das infinitesimale Element t wird dabei repräsentiert durch die infinitesimale lineare Transformation, welche dem willkürlichen Vektor x des Raumes $\mathfrak{a}$ die Änderung $(x' - x^*)$ gleich

$$dx = [tx] \tag{1}$$

erteilt. Daß dies eine isomorphe Darstellung ist, bildet den eigentlichen Inhalt des Multiplikationsgesetzes

$$d_{(st)}x = [[st]x] = [t[sx]] + [s[tx]] = d_s(d_t x) - d_t(d_s x).$$

t gehört dem Zentrum an, wenn $[tx]$ identisch in x gleich 0 ist. Das Zentrum ist eine invariante Untergruppe, deren Elemente s, t vertauschbar sind: $[st] = 0$. Für eine halb-einfache Gruppe $\mathfrak{a}$ besteht demnach das Zentrum nur aus 0, und hier ist die infinitesimale Gruppe $\mathfrak{A}$ der adjungierten linearen Transformationen (1) eine *homomorphe* Darstellung von $\mathfrak{a}$.

Jede homogene lineare Transformation in einem m-dimensionalen Vektorraum $\mathfrak{r}$, den die Variable x durchläuft,

$$dx = Tx = [tx] \qquad t \text{ fest},$$

besitzt ein von der Wahl des Koordinatensystems unabhängiges charakteristisches Polynom

$$f(\zeta) = |\zeta E - T| \qquad (E \text{ die } m\text{-dimensionale Einheitsmatrix}).$$

Ist $\zeta = \alpha$ eine Wurzel von f, so existiert ein Vektor $e \neq 0$, der durch diese Abbildung sich in αe verwandelt:

$$de = Te = \alpha e.$$

Den *verschiedenen* Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ von $f(\zeta)$ entsprechend, kann man den Raum $\mathfrak{r}$ in Teilräume $\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \ldots$ zerspalten, deren jeder invariant ist gegenüber T, von folgender Beschaffenheit[9]): Ist α_1 eine ν_1-fache

[9]) Vgl. etwa Weyl, Mathematische Analyse des Raumproblems, Berlin 1923, S. 88–95.

Wurzel des charakteristischen Polynoms, so ist $\mathfrak{r}_1$ von ν_1 Dimensionen, und alle Vektoren x, die zu $\mathfrak{r}_1$ gehören, erfüllen die Gleichung

$$(T - \alpha_1 E)^{\nu_1} x = (d - \alpha_1)^{\nu_1} x = 0.$$

Genügt umgekehrt ein Vektor x einer Gleichung $(d - \alpha_1)^l x = 0$ mit einem beliebig hohen positiven Exponenten l, so liegt x in $\mathfrak{r}_1$. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{r}_2, \ldots$.

Diese Tatsachen werden angewendet auf die Operationen der adjungierten Gruppe, auf die Matrix T der linearen Transformation

$$dx = [tx].$$

Benutzt man irgendeine Basis $e_1, e_2, \ldots, e_r$ der infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{a}$ und ist darin

$$t = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 + \ldots + \tau_r e_r \tag{2}$$

so besteht jene Matrix T aus den in den Gleichungen

$$Te_i = [te_i] = \sum_k \gamma_{ik} e_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

auftretenden Koeffizienten γ_{ik}. In ihrer Abhängigkeit vom Elemente t sind sie Linearformen der Parameter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$. Das charakteristische Polynom

$$f(\zeta; t) = |\zeta E - T| = \zeta^{\mathfrak{n}} - \psi_1(t)\zeta^{\mathfrak{n}-1} + \psi_2(t)\zeta^{\mathfrak{n}-2} - \ldots \pm \psi_r(t), \tag{3}$$

dessen Koeffizienten $\psi_i(t)$ homogene ganze rationale Funktionen der durch den Index i angezeigten Ordnung in den Parametern $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ von t sind, ist eine Invariante gegenüber der adjungierten Gruppe; d. h. es ist $df = 0$, wenn man t den infinitesimalen Zuwachs $dt = [at]$ erteilt, welches auch das Element a von $\mathfrak{a}$ sein mag.[2] Der letzte Koeffizient $\psi_r(t)$ verschwindet identisch.[1] Besonders wichtig ist die in den Parametern homogen-lineare *Spur*

$$\psi_1(t) = \sum_i \gamma_{ii} = \sum_{\kappa i} c_{\kappa i}^{(i)} \tau_\kappa$$

Ist $\mathfrak{b}$ eine q-parametrige Untergruppe von $\mathfrak{a}$, so ist das charakteristische Polynom $g(\zeta; t)$ des beliebigen Elements t von $\mathfrak{b}$ für die Gruppe $\mathfrak{b}$ — es ist vom Grade q — ein Teiler des Polynoms $f(\zeta; t)$. Ist $\mathfrak{b}$ insbesondere eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$, so gilt für die Elemente t von $\mathfrak{b}$:

$$f(\zeta; t) = \zeta^{r-q} \cdot g(\zeta; t). \tag{4}$$

Bei fest gegebenem $t = t_0$ zerspalten wir den r-dimensionalen linearen Raum $\mathfrak{a}$, in welchem sich die Transformation

$$T_0: \quad dx = [t_0 x]$$

abspielt, nach den verschiedenen charakteristischen Wurzeln von T_0 in Teilräume. Von einem Vektor oder Element x, das in dem zur Wurzel α_0 gehörigen Teilraum liegt, sagen wir kurz, es gehöre zu α_0.

Hilfssatz. *Gehört $x_\alpha \neq 0$ zur Wurzel α_0, $x_\beta \neq 0$ zur Wurzel β_0, so $[x_\alpha x_\beta]$ zu $\alpha_0 + \beta_0$.* (Insbesondere ist $[x_\alpha x_\beta] = 0$, wenn $\alpha_0 + \beta_0$ keine Wurzel des charakteristischen Polynoms ist.)

Beweis. Wird $\alpha_0 + \beta_0 = \gamma_0$, $[x_\alpha x_\beta] = x_\gamma$ gesetzt, so folgt

$$[t_0 [x_\alpha x_\beta]] = [[t_0 x_\alpha] x_\beta] + [x_\alpha [t_0 x_\beta]]$$

oder

$$T_0 x_\gamma = [T_0 x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, T_0 x_\beta],$$
$$(T_0 - \gamma_0) x_\gamma = [(T_0 - \alpha_0) x_\alpha, x_\beta] + [x_\alpha, (T_0 - \beta_0) x_\beta].$$

Durch wiederholte Anwendung dieser Relation ergibt sich, daß $(T_0 - \gamma_0)^l x_\gamma$ eine Summe von Ausdrücken der Form ist:

$$[(T_0 - \alpha_0)^i x_\alpha, (T_0 - \beta_0)^j x_\beta] \quad \text{mit } i + j = l.$$

Sobald l also mindestens so groß ist wie die Summe der Vielfachheiten der beiden Wurzeln α_0 und β_0, ist

$$(T_0 - \gamma_0)^l x_\gamma = 0.$$

Gemäß dem Hilfssatz bilden die zur Wurzel 0 gehörigen Vektoren, zu denen insbesondere t_0 selber gehört, nicht bloß eine lineare Mannigfaltigkeit, sondern eine *Gruppe $\mathfrak{h}$ innerhalb $\mathfrak{a}$.* Ist h ein Element $\neq 0$ von $\mathfrak{h}$, so läßt die Abbildung $dx = [hx]$ jeden der zu den verschiedenen Wurzeln α_0 von t_0 gehörigen Teilräume invariant; denn mit x_α gehört auch immer $[h x_\alpha]$ zur gleichen Wurzel α_0.

Das t_0, von welchem wir ausgehen, sei insbesondere als ein reguläres Element gewählt, d. h. als ein solches, dessen charakteristische Gleichung $f(\zeta; t_0)$ die Maximalzahl verschiedener Wurzeln hat, die überhaupt ein Element innerhalb $\mathfrak{a}$ besitzen kann[10]). Verschwinden unter den Koeffizienten von (3) die letzten n identisch, so hat für das spezielle t_0 die Wurzel 0 von $f(\zeta; t_0)$ nur gerade die Multiplizität n, und $\mathfrak{h}$ ist n-parametrig. Mit Hilfe einer Basis $h_1, h_2, \ldots, h_n$ von $\mathfrak{h}$ sei jedes Element von $\mathfrak{h}$ in die Form gesetzt:

$$h = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2 + \ldots + \lambda_n h_n.$$

---

[10]) Spaltet man, die Parameter τ als Unbestimmte behandelnd, aus f den größten gemeinsamen Teiler von $f(\zeta)$ und $\frac{df}{d\zeta}$ ab, so bedeutet diese Bedingung, daß die Diskriminante des übrigbleibenden Faktors $f_1(\zeta)$, eine ganze rationale, nicht identisch verschwindende Funktion der Parameter von t, für $t = t_0$ verschieden von 0 ist.

Es wird etwa

$$t_0 = h^0 = \lambda_1^0 h_1 + \lambda_2^0 h_2 + \ldots + \lambda_n^0 h_n$$

sein. α_0 bedeute eine Wurzel der charakteristischen Gleichung von t_0 und $\mathfrak{r}_\alpha$ den zugehörigen Teilraum. Da die Formel $dx = [hx]$ eine Abbildung des Teilraums $\mathfrak{r}_\alpha$ auf sich selber definiert, können wir deren charakteristisches Polynom $f_\alpha(\zeta; h)$ herstellen. Sein Grad ν_α ist gleich der Dimensionszahl von $\mathfrak{r}_\alpha$.

$$f(\zeta; h) \text{ ist } = \prod_{\alpha_0} f_\alpha(\zeta; h).$$

Das Produkt erstreckt sich über die verschiedenen Wurzeln α_0. Ich behaupte, daß $f_\alpha(\zeta; h)$ für alle Werte der Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die Potenz eines Linearfaktors sein muß: $(\zeta - \alpha)^{\nu_\alpha}$. Denn gäbe es λ-Werte, für welche f_α verschiedene Wurzeln besäße, so wäre für $t = t_0$ die Maximalzahl verschiedener Wurzeln des Polynoms $f(\zeta; t)$ nicht erreicht gewesen. $\nu_\alpha \cdot \alpha$ ist die Teilspur von h im Raume $\mathfrak{r}_\alpha$ und demnach α selber eine Linearform der Parameter λ_i; α_0 ist ihr Wert für $\lambda_i = \lambda_i^0$. Insbesondere muß $f_0(\zeta; h)$, das charakteristische Polynom von h in der Gruppe $\mathfrak{h}$, identisch $= \zeta^n$ sein, da im Produkt der übrigen Faktoren $f_\alpha(\zeta; h)$ der Koeffizient von ζ^0 nicht identisch verschwindet. In der gewonnenen Produktzerlegung

$$f(\zeta; h) = \prod(\zeta - \alpha)$$

nennen wir die Linearformen α der Parameter λ *die Wurzeln der Gruppe* $\mathfrak{a}$. Das Element $t_0 = h^0$ spielt von jetzt ab keine Rolle mehr, an seine Stelle ist die ganze Gruppe $\mathfrak{h}$ getreten.

Die Gruppe $\mathfrak{h}$ *ist auflösbar.* Das geht aus dem folgenden Satz von Engel[11]) hervor: *Ist das charakteristische Polynom eines willkürlichen Elementes* h *in einer* n*-parametrigen infinitesimalen Gruppe* $\mathfrak{h}$ *gleich* ζ^n, *so ist* $\mathfrak{h}$ *auflösbar.* Sein Beweis beruht auf dem fundamentalen Lieschen Theorem über *infinitesimale auflösbare Gruppen linearer Transformationen.* Ist $\mathfrak{H}$ eine solche, welche aus linearen Transformationen eines m-dimensionalen Raumes $\mathfrak{r}$ besteht:

$$dx = Hx = (\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_n H_n)\, x$$

— die λ_i sind die Parameter, H_i feste m-dimensionale Matrizen, x durchläuft die Vektoren des Raumes $\mathfrak{r}$ —, so besagt dieses Theorem: *daß im Raume* $\mathfrak{r}$ *ein durch den Nullpunkt gehender Strahl existiert, welcher*

---

[11]) Vgl. Umlauf, Dissertation, Leipzig 1891, S. 35; Cartan, Thèse, S. 46; und die Beweise für dieses und das Liesche Theorem im Anhang des gegenwärtigen Kapitels.

gegenüber allen Transformationen von $\mathfrak{H}$ *invariant ist.* Mit anderen Worten: es existiert ein von 0 verschiedener Vektor e in $\mathfrak{r}$, so daß

$$He = \Lambda \cdot e \tag{5}$$

ist, wo Λ eine Linearform der Parameter λ_i bedeutet. Gehört H insbesondere zur Ableitung $\mathfrak{H}'$, so wird $\Lambda = 0$. Denn aus (5) folgt in leicht verständlicher Bezeichnung

$$[HH^*]e = \Lambda(\Lambda^* e) - \Lambda^*(\Lambda e) = 0 .$$

Man kann den Lieschen Satz von neuem anwenden auf den $(m-1)$-dimensionalen Raum, der aus $\mathfrak{r}$ durch Projektion nach e entsteht; und so fortfahrend, erhält man eine Folge von Vektoren $e_1, e_2, \ldots, e_m$, welche ein Koordinatensystem in $\mathfrak{r}$ bilden und Gleichungen genügen

$$\begin{cases} He_1 = \Lambda_1 e_1, \\ He_2 \equiv \Lambda_2 e_2 (\mathrm{mod}\, e_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ He_m \equiv \Lambda_m e_m (\mathrm{mod}\, e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}), \end{cases} \tag{6}$$

in denen die Λ_i Linearformen der λ sind. Das charakteristische Polynom von H zerfällt demnach in Linearfaktoren

$$(\zeta - \Lambda_1)(\zeta - \Lambda_2)\ldots(\zeta - \Lambda_m). \tag{6a}$$

Dies Theorem kann man insbesondere anwenden auf die lineare Transformationsgruppe, welche zu einer auflösbaren infinitesimalen Gruppe adjungiert ist. Der Satz von Engel ist im wesentlichen die Umkehrung des so entstehenden Satzes über die Konstitution der auflösbaren Gruppen.

Hier machen wir von dem Lieschen Theorem Gebrauch für die zu $\mathfrak{h}$ isomorphe Gruppe von Abbildungen $dx = [hx]$ des zur Wurzel α gehörigen Teilraums $\mathfrak{r}_\alpha$. Danach existiert ein bestimmtes Element $e_\alpha \neq 0$, so daß simultan für alle h die Gleichung besteht

$$[he_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha . \tag{7}$$

Ist $\mathfrak{r}_\alpha$ nicht eindimensional, gibt es weiter ein von e_α linear unabhängiges Element e'_α, für welches

$$[he'_\alpha] \equiv \alpha \cdot e'_\alpha (\mathrm{mod}\, e_\alpha) \tag{7'}$$

gilt, usf. Für ein Element der Gruppe $\mathfrak{h}$ von der Form $[h_1 h_2]$ und damit für jedes Element der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{h}'$ sind die Wurzeln $\alpha = 0$.

Diese Ausführungen lassen bereits deutlich erkennen, daß die Konstitutionsformeln der Gruppen $\mathfrak{g}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ wesentliche Züge tragen, die allen Gruppen gemeinsam sind.

§ 2.
Die Gewichte.

Es liege eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{a}$ durch lineare Transformationen vor. Dabei entspreche dem Element h die Matrix H, dem Element e_α die Matrix E_α. Außerdem sei neben α auch $-\alpha$ Wurzel. $[E_\alpha E_{-\alpha}] = H_\alpha$ ist eine spezielle Matrix H. Der Wert einer beliebigen Linearform $\Lambda = \Lambda(H)$ der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ für $H = H_\alpha$ werde wie früher mit Λ_α bezeichnet. Gilt für einen Vektor e des Darstellungsraumes eine Gleichung

$$He = \Lambda \cdot e, \tag{5}$$

wo Λ eine Linearform der λ_i ist, so sagen wir, e sei vom *Gewichte* Λ, und falls $e \neq 0$ ist, Λ komme in der Darstellung als Gewicht vor. Wir können nun genau die in Kap. I, § 2 angestellte Überlegung wiederholen: Ist Λ ein vorkommendes Gewicht, nicht dagegen $\Lambda - \alpha$ (wir nehmen jetzt an, α sei eine von 0 verschiedene Wurzel), so bilde man aus dem der Gleichung (5) genügenden Vektor $e = e_0 \neq 0$ die Reihe e_0, $E_\alpha e_0 = e_1$, $E_\alpha e_1 = e_2, \ldots$. Ist in ihr e_{g+1} das erste Element, welches $= 0$ ist, so gilt

$$\Lambda_\alpha = -\frac{g}{2}\alpha_\alpha. \tag{8}$$

Daraus fließen wichtige Folgerungen:

1. Ist $\alpha_\alpha = 0$, so verschwindet Λ_α für jedes vorkommende Gewicht Λ. (Das ist selbstverständlich auch richtig, wenn $\alpha = 0$ ist.)

2. Unter der entgegengesetzten Voraussetzung $\alpha_\alpha \neq 0$ tritt mit Λ zugleich

$$\Lambda' = \Lambda - \frac{2\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}\cdot\alpha \tag{9}$$

als Gewicht auf; und $\frac{2\Lambda_\alpha}{\alpha_\alpha}$ ist eine ganze Zahl.

Aus dem früher geführten Beweise von (8) notieren wir noch (für $\alpha \neq 0$) die Gleichung

$$E_{-\alpha}E_\alpha e_i = -e_i \cdot \sum_{j=0}^{i} (\Lambda + j\alpha)_\alpha.$$

Der Faktor rechts ist

$$= (i+1)\Lambda_\alpha + \frac{i(i+1)}{2}\alpha_\alpha = -\frac{(i+1)(g-i)}{2}\alpha_\alpha.$$

Ersetzen wir das Zeichen $\Lambda + i\alpha$ durch Λ, so heißt das: Teilt Λ die konstruierte α-Serie

$$\Lambda - i\alpha, \ldots, \Lambda - \alpha, \Lambda, \Lambda + \alpha, \ldots, \Lambda + k\alpha$$

von Gewichten so, wie aus der Bezeichnung hervorgeht,[2] dann gilt für den von uns konstruierten Vektor $e_\Lambda\,(= e_i)$ vom Gewichte Λ die Gleichung

$$E_{-\alpha}E_\alpha e_\Lambda = \frac{(i+1)k}{2}\alpha_\alpha \cdot e_\Lambda. \tag{10}$$

Die Transformation $E_{-\alpha}E_\alpha$ besitzt also innerhalb des von den Vektoren $e_0, e_1, \ldots, e_g$ aufgespannten $(g+1)$-dimensionalen Teilgebiets, welches ihr gegenüber invariant ist, die Teilspur

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\{1\cdot g + 2\cdot(g-1) + \ldots + (g-1)\cdot 2 + g\cdot 1\} = \frac{\alpha_\alpha}{2}\cdot\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}.$$

In zweierlei Hinsicht bedarf diese Formel der Ergänzung.

1. Wir projizieren den Darstellungsraum $\mathfrak{r}$ modd $e_0, e_1, \ldots, e_g$ und wenden die gleiche Überlegung auf den entstehenden Raum $\mathfrak{r}'$ von $g+1$ Dimensionen weniger an. Es ist möglich, daß in ihm abermals eine Serie von Gewichten der Form $\Lambda + i\alpha$ auftritt mit der gleichen Linearform Λ und zugehörigen Vektoren e_i' an Stelle von e_i. Besteht sie aus $g'+1$ Gliedern, so ist der von der ersten und zweiten Vektorserie zusammen aufgespannte $(g+1)+(g'+1)$-dimensionale Raum invariant gegenüber der Abbildung $E_{-\alpha}E_\alpha$, und die Teilspur der Abbildung in diesem Gebiet ist

$$= \frac{\alpha_\alpha}{2}\left\{\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{g'(g'+1)(g'+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\right\}.$$

So kann man fortfahren. Für die Gesamtspur von $E_{-\alpha}E_\alpha$ findet man den Wert

$$\frac{\alpha_\alpha}{2}\sum'\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \tag{11}$$

wo sich die Summe über alle α-Serien erstreckt, in welche auf die geschilderte Weise die Reihe der Gewichte in verallgemeinertem Sinne, nämlich der charakteristischen Wurzeln $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_m$ von H — Formel (6) — zerlegt werden kann; $g+1$ bedeutet für jede α-Serie ihre Länge.

Ist insbesondere $\alpha_\alpha \neq 0$, so folgt aus der zu (8) analogen Gleichung, welche ausdrückt, daß die Werte der Seriengewichte für H_α Null zum Schwerpunkt haben, daß die zweite Serie die erste an beiden Enden um die gleiche Anzahl überragt oder um die gleiche Anzahl gegenüber der ersten verkürzt ist.[2] Es geht daraus hervor: Ist $\alpha_\alpha \neq 0$, so sind immer zwei durch die Formel (9) verbundene Linearformen Λ und Λ' charakteristische Wurzeln von H *der gleichen Multiplizität*,[3] während die dazwischen gelegenen Linearformen der arithmetischen Reihe $\Lambda + i\alpha$ Wurzeln von der gleichen oder höherer Multiplizität sind.

2. Die Resultate bleiben bestehen, wenn wir an Stelle von $E_{-\alpha}$ die irgendeinem zur Wurzel $-\alpha$ gehörigen Element $t_{-\alpha}$ von $\mathfrak{a}$ korrespondierende Matrix $T_{-\alpha}$ verwenden. $[E_\alpha T_{-\alpha}] = H_\alpha^*$ ist ebenfalls eine Matrix H, $\Lambda(H_\alpha^*)$ werde $= \Lambda_\alpha^*$ gesetzt. Für die Spur der Matrix $T_{-\alpha}E_\alpha$ bekommt man analog zu (11):

$$\frac{\alpha_\alpha^*}{2}\cdot\sum'\frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}. \tag{11*}$$

§ 3.

Cartans Kriterium für die auflösbaren und für die halb-einfachen Gruppen.

Daß die Spur $\psi_1(t)$ eine Invariante der adjungierten Gruppe ist, kommt darauf hinaus, daß $\psi_1(t) = 0$ ist für alle Elemente t der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{a}'$. Dies sieht man auch so ein: Korrespondieren den Elementen s, t von $\mathfrak{a}$ in der adjungierten Gruppe die Transformationen S, T, so dem Element $[st]$ die Transformation $ST - TS$. Aber die beiden

Transformationen ST und TS haben die gleiche Spur, $ST - TS$ also die Spur 0. — Benutzen wir als Basis von $\mathfrak{a}$ das willkürliche Element $h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ der in § 1 konstruierten maximalen auflösbaren Untergruppe $\mathfrak{h}$ und die zu den verschiedenen Wurzeln $\alpha \neq 0$ gehörigen Elemente $e_\alpha, e'_\alpha, \ldots$:

$$t = h(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_{\alpha \neq 0} (\tau_\alpha e_\alpha + \tau'_\alpha e'_\alpha + \ldots), \tag{12}$$

so hängt $\psi_1(t)$ nur von den Parametern λ_i ab, ist nämlich gleich der Summe aller Wurzeln α (jede in ihrer Vielfachheit gerechnet). Denn gehört t_α zur Wurzel $\alpha \neq 0$, so entsteht vermöge der Abbildung $dx = [t_\alpha x]$ aus einem zur Wurzel ϱ gehörigen x ein zur Wurzel $\varrho + \alpha \neq \varrho$ gehöriges dx. Die Spur dieser Abbildung ist also $= 0$. Darum ist $\psi_1(t) = \psi_1(h)$. Die Teilspur von $dx = [hx]$ in dem zur Wurzel α gehörigen Teilraum $\mathfrak{r}_\alpha$ ist aber gleich $\nu_\alpha \cdot \alpha$.

Von besonderer Wichtigkeit wird für uns die quadratische Form $\psi_2(t)$ oder die Spur $\varphi(t)$ der Transformation T^2; es ist $\varphi(t) = \psi_1^2 + 2\psi_2$. Die Spur $\varphi(s, t)$ der Abbildung ST:

$$dx = [t[sx]] \tag{13}$$

ist eine symmetrische Bilinearform von s und t, $\varphi(t, t) = \varphi(t)$ die zugehörige quadratische Form.

Die folgenden Entwicklungen beruhen darauf, daß die Resultate des § 2, insbesondere die Formel (8) angewendet werden auf die adjungierte Gruppe; für diese fallen die Gewichte mit den Wurzeln zusammen. Die Formel (8) muß noch dahin verallgemeinert werden: Sind $t_\alpha, t_{-\alpha}$ irgend zwei zu den entgegengesetzten Wurzeln $\alpha, -\alpha$ gehörige Elemente, so ist der Wert einer jeden Wurzel ϱ für das in $\mathfrak{h}$ enthaltene

$$h_\alpha^{**} = [t_\alpha t_{-\alpha}], \tag{14}$$

ϱ_α^{**}, ein rationales Multiplum von α_α^{**}. Daß im Falle $\alpha = 0$ für (14) alle Wurzeln verschwinden, wurde schon am Ende von § 2 erwähnt. Ist $\alpha \neq 0$, so sei

$$\varrho - i\alpha, \ldots, \varrho - \alpha, \varrho, \varrho + \alpha, \ldots, \varrho + k\alpha \tag{15}$$

eine zusammenhängende Reihe von Wurzeln, so daß weder $\varrho - (i+1)\alpha$ noch $\varrho + (k+1)\alpha$ als Wurzel auftritt. Wir betrachten die lineare Mannigfaltigkeit

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\varrho - i\alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\varrho - \alpha} + \mathfrak{r}_\varrho + \mathfrak{r}_{\varrho + \alpha} + \ldots + \mathfrak{r}_{\varrho + k\alpha}.$$

Sie ist invariant gegenüber den t_α und $t_{-\alpha}$ korrespondierenden Transformationen $T_\alpha, T_{-\alpha}$ der adjungierten Gruppe. Da

$$H_\alpha^{**} = T_\alpha T_{-\alpha} - T_{-\alpha} T_\alpha$$

ist, wird die Spur der Transformation H_α^{**} jenes Teilraums gleich 0:

$$\sum_{j=-i}^{k} g_j (\varrho + j\alpha)_\alpha^{**} = 0;$$

g_j bezeichnet die Dimensionszahl von $\tau_{\varrho+j\alpha}$.

Wenn $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Gruppe ist, so gilt nach dem Lieschen Theorem für alle Elemente t von $\mathfrak{a}'$:

$$f(\zeta; t) = \zeta^r;$$

d. h. für solche Elemente verschwinden die sämtlichen $\psi_i(t)$. Nach dem Satze von Engel ist — unter Berücksichtigung der Gleichung (4) für $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'$ — diese Bedingung auch hinreichend dafür, daß $\mathfrak{a}'$ und damit $\mathfrak{a}$ eine auflösbare Gruppe ist. Cartan verschärfte das Kriterium, indem er zeigte, daß man statt aller Koeffizienten nur den einen $\overline{\psi_2}$ ins Auge zu fassen braucht:

Hilfssatz. $\mathfrak{a}$ *ist dann (und nur dann) auflösbar, wenn für alle Elemente* t *von* $\mathfrak{a}'$ *die Gleichung* $\varphi(t) = 0$ *besteht.*

Beweis. Aus der Voraussetzung folgt insbesondere $\varphi(h_\alpha^{**}) = 0$. Nun ist aber ϱ_α^{**} ein rationales Multiplum von α_α^{**}. Das Verschwinden der Quadratsumme aller ϱ_α^{**} — $\varphi(h)$ ist nämlich die Quadratsumme aller Wurzeln — hat demnach zur Folge, daß α und damit jedes ϱ für $h = h_\alpha^{**}$ gleich 0 wird. Ein beliebiges Element der Kommutatorgruppe $\mathfrak{a}'$, das zu $\mathfrak{h}$ gehört, setzt sich additiv aus Elementen von der Form (14) zusammen. Darum verschwinden die Wurzeln samt und sonders für jedes Element von $\mathfrak{h}$, das der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{a}'$ angehört.

Hieraus folgt, daß $\mathfrak{a}'$ nicht mit der ganzen Gruppe $\mathfrak{a}$ zusammenfällt. Sonst würden alle Wurzeln identisch verschwinden, d. h. $\mathfrak{a}$ wäre $= \mathfrak{h}$; da aber $\mathfrak{h}$ auflösbar ist, besitzt $\mathfrak{h}'$ wenigstens einen Parameter weniger als $\mathfrak{h}$.

Darum ist die Parameterzahl von $\mathfrak{a}'$ geringer als die von $\mathfrak{a}$. Aber auch in dem charakteristischen Polynom, das zur Gruppe $\mathfrak{a}'$ gehört, verschwinden gemäß der Gleichung (4) die zu ψ_1, ψ_2 analogen Koeffizienten identisch. Die Anwendung unseres Ergebnisses auf $\mathfrak{a}'$ statt auf $\mathfrak{a}$ lehrt, daß wiederum $\mathfrak{a}''$ wenigstens einen Parameter weniger enthält als $\mathfrak{a}'$. So fortfahrend erkennt man die Auflösbarkeit von $\mathfrak{a}$.

Satz 1.[12]) $\mathfrak{a}$ *ist dann und nur dann halb-einfach, wenn die quadratische Form* $\varphi(t)$ *nicht ausgeartet ist.*

Da $\varphi(t)$ eine Invariante gegenüber der adjungierten Gruppe ist, bilden diejenigen Elemente t, deren Parameter $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ den linearen Gleichungen genügen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_2} = \ldots = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_r} = 0, \tag{16}$$

[12]) Cartan, Thèse, S. 52.

eine invariante Untergruppe von $\mathfrak{a}$.[13]) Nach dem Hilfssatz ist diese Untergruppe auflösbar. Wenn $\mathfrak{a}$ halb-einfach ist, dürfen die Gleichungen demnach nur die einzige Lösung $\tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_r = 0$ besitzen, oder $\varphi(t)$ muß eine nicht-ausgeartete quadratische Form der Parameter τ sein.

Die Umkehrung spielt für uns keine Rolle, ist aber leicht zu beweisen. Ist $\mathfrak{a}$ nicht halb-einfach, so gibt es eine von 0 verschiedene auflösbare ausgezeichnete Untergruppe $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$. Die Reihe der Ableitungen $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}', \mathfrak{b}'', \ldots$ bricht ab. Die letzte von 0 verschiedene darunter, $\mathfrak{c}$, ist eine ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{a}$, welche Abelsch ist. Wählt man die r-gliedrige Basis für $\mathfrak{a}$ so, daß darin eine Basis von $\mathfrak{c}$ enthalten ist, so kommen in der charakteristischen Gleichung $f(\zeta; t)$ und darum auch in $\varphi(t)$ die zu $\mathfrak{c}$ gehörigen Parameter offenbar nicht vor.

Mit Satz 1 ist das erste wesentliche Ziel der Strukturuntersuchung erreicht. Für eine beliebige halb-einfache Gruppe bietet sich als diejenige Darstellung durch lineare Transformationen, von der man seinen Ausgang nehmen kann, von selbst die adjungierte Gruppe dar. So verfuhren wir freilich nicht in Kap. I und II, wo uns von vornherein eine Darstellung in einem Raum von viel geringerer Dimensionszahl zur Verfügung stand, als die Parameterzahl der Gruppe beträgt. Dadurch aber, daß wir eine nicht-ausgeartete quadratische Form $\varphi(x)$ konstruiert haben, welche invariant ist gegenüber den Transformationen der adjungierten Gruppe, ist der Weg geebnet, der adjungierten Gruppe in analoger Weise sich zu bedienen wie der linearen Transformationsgruppen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}$ in den beiden vorigen Kapiteln.

Durch eine ähnliche Schlußweise wie die zu Satz 1 führende erkennt man, daß jede halb-einfache Gruppe das direkte Produkt von einfachen (nicht einparametrigen) Gruppen ist; diese Zerlegung ist eindeutig bestimmt. Doch bedürfen wir hier dieser für die Konstruktion aller halb-einfachen Gruppen fundamentalen Erkenntnis nicht[14]).

Von jetzt ab bedeute $\mathfrak{a}$ stets eine halb-einfache Gruppe, und die Bezeichnung *Wurzel* werde allein für die von 0 verschiedenen Wurzeln verwendet. Die in Satz 1 gewonnene Bedingung wird weiter ausgewertet in dem

Satz 2. *Ist $\mathfrak{a}$ halb-einfach, so ist die maximale auflösbare Untergruppe $\mathfrak{h}$ Abelsch. Die Wurzeln α treten nur einfach auf und sind paarweise einander entgegengesetzt: α, $-\alpha$. Es existieren unter ihnen n voneinander linear unabhängige. α_α, der Wert von α für $h_\alpha = [e_\alpha e_{-\alpha}]$, ist $\neq 0$. Die Multipla $2\alpha, 3\alpha, \ldots$ einer Wurzel α kommen nicht unter den Wurzeln vor.*

[13]) Cartan, Thèse, S. 21, 22.

[14]) Cartan, Thèse, S. 53.

Beweis. Wir verwenden wiederum die Basisdarstellung (12). Ist daneben s ein zweites willkürliches Element der Gruppe $\mathfrak{a}$:

$$s = h(\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n) + \sum_{\alpha \neq 0} (\sigma_\alpha e_\alpha + \sigma'_\alpha e'_\alpha + \ldots), \tag{17}$$

so hat die Spur der Abbildung (13) die Gestalt

$$\varphi(s, t) = Q(\varkappa, \lambda) + \sum_{\alpha}{}' (\sigma_\alpha \tau_{-\alpha}). \tag{18a}$$

Q ist eine symmetrische Bilinearform der Parameter $\varkappa$ und λ; die zugehörige quadratische Form $Q(\lambda)$ ist die Quadratsumme aller Wurzeln. $(\sigma_\alpha \tau_{-\alpha})$ soll je ein Glied bedeuten, das aus einem numerischen Koeffizienten, einer zur Wurzel α gehörigen Variablen $\sigma_\alpha, \sigma'_\alpha, \ldots$ und einer zu $-\alpha$ gehörigen $\tau_{-\alpha}, \tau'_{-\alpha}, \ldots$ multiplikativ zusammengesetzt ist.

1. $Q(\lambda)$, die Quadratsumme der Wurzeln, darf nicht ausgeartet sein; darum müssen unter den Wurzeln ebenso viele unabhängige vorkommen, als die Anzahl der Variablen λ beträgt. Und 0 ist das einzige Element von $\mathfrak{h}$, für welches alle Wurzeln verschwinden. Da nun aber für ein Element der abgeleiteten Gruppe $\mathfrak{h}'$ tatsächlich alle Wurzeln $= 0$ sind, reduziert sich $\mathfrak{h}'$ auf 0.

2. Wäre α Wurzel, aber nicht $-\alpha$, so käme die Variable σ_α in $\varphi(s, t)$ nicht vor — entgegen dem Umstand, daß $\varphi(s, t)$ nicht ausgeartet ist.

3. Aus demselben Grunde, weil die Variable σ_α in $\varphi(s, t)$ vorkommen muß, kann α nicht verschwinden für jedes zu $\mathfrak{h}$ gehörige Element von der Form $h^*_\alpha = [e_\alpha t_{-\alpha}]$, wo $t_{-\alpha} = e_{-\alpha}$ oder $e'_{-\alpha}$ oder $e''_{-\alpha} \ldots$; vgl. die Formel (11*). Es sei $t = t_{-\alpha}$ als ein zur Wurzel $-\alpha$ gehöriges Element so gewählt, daß $\alpha^*_\alpha = \alpha(h^*_\alpha) \neq 0$ ist. Die Annahme, es gäbe ein $e'_\alpha = e_1 \not\equiv 0 \pmod{e_\alpha}$, welches der Beziehung

$$[h e_1] \equiv \alpha \cdot e_1 \pmod{e_\alpha} \tag{18}$$

genügt, führt auf einen Widerspruch mit Hilfe der in § 2 befolgten Schlußweise. Man bilde wiederum die Reihe

$$e_1, \quad E_\alpha e_1 = [e_\alpha e_1] = e_2, \quad E_\alpha e_2 = e_3, \quad \ldots.$$

Für $t = t_{-\alpha}$ ergibt sich

$$T e_2 = [t e_2] \equiv -\alpha^*_\alpha \cdot e_1 \pmod{e_\alpha}. \tag{18a}$$

Denn es ist

$$[t[e_\alpha e_1]] = [e_\alpha [t e_1]] - [[e_\alpha t] e_1]. \tag{19}$$

Da $[t e_1]$ zu $\mathfrak{h}$ gehört, so ist das erste Glied rechts ein Multiplum von e_α; das zweite aber ist nach (18): $\equiv -\alpha^*_\alpha e_1 \pmod{e_\alpha}$. Durch Anwendung der Formel (19) auf $e_2, e_3, \ldots$ an Stelle von e_1 ergibt sich durch Induktion weiter

$$[t e_3] \equiv -3\alpha^*_\alpha \cdot e_2, \ldots;$$

allgemein

$$[te_{g+1}] = -\frac{g(g+1)}{2}\alpha_\alpha^* \cdot e_g$$

(absolut von $g = 2$ ab, mod e_α für $g = 1$). Weil ein e_{g+1} mit hinreichend hohem Index verschwinden muß, folgt daraus rückwärts das Verschwinden von $e_g, \ldots, e_3, e_2$ und schließlich $e_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, e_\alpha)$ gegen die Voraussetzung. Zugleich ist damit bewiesen, daß $\alpha_\alpha \neq 0$ ist. Ist $-i\cdot\alpha$ eine Wurzel, aber nicht mehr $-(i+1)\alpha$, so ergibt sich durch unsere Methode, von $e_{-i\alpha} = e_{-i}$ anfangend, eine Serie von Elementen

$$e_{-i}, \ldots, e_{-1}, e_0, e_1, \ldots, e_i, \ldots,$$

deren jedes aus dem vorhergehenden durch die Abbildung E_α erzeugt wird. Sie muß wegen $\alpha_\alpha \neq 0$ gerade mit e_i abbrechen.[1] Das zur Wurzel α gehörige e_1 ist notwendig ein Multiplum von e_α, folglich $e_2 = [e_\alpha e_1] = 0$. Darum kann i nicht $\geqq 2$ sein.

Die Analogie mit den in den beiden ersten Kapiteln benutzten Konstitutionsformeln ist vollkommen.

Satz 3. *Wir haben eine Abelsche Untergruppe* $\mathfrak{h}$, *deren allgemeines Element* h *von* n *Parametern* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *abhängt, und zu jeder Wurzel* α *ein Element* e_α. *h und die den verschiedenen Wurzeln korrespondierenden* e_α *bilden zusammen eine Basis für die ganze Gruppe* $\mathfrak{a}$. *Und es gelten die Beziehungen*

$$[hh'] = 0; \quad [he_\alpha] = \alpha \cdot e_\alpha; \quad [e_\alpha e_{-\alpha}] = h_\alpha;$$

$$[e_\alpha e_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{wenn } \alpha + \beta \neq 0 \text{ keine Wurzel ist.} \\ N_{\alpha\beta} \cdot e_{\alpha+\beta}, & \text{wenn } \alpha + \beta \text{ Wurzel ist.} \end{cases}$$

Willkürlich ist noch 1. die Wahl der Basis von $\mathfrak{h}$; und 2. kann e_α durch irgendein (nicht verschwindendes) Multiplum von e_α ersetzt werden. $\varphi(s, t)$ nimmt nunmehr die Gestalt an:

$$Q(\varkappa, \lambda) + \sum_\alpha N_\alpha \sigma_\alpha \tau_{-\alpha}. \tag{20}$$

Nach (11) ist der Koeffizient

$$N_\alpha = \frac{1}{2}\alpha_\alpha \sum \frac{g(g+1)(g+2)}{1\cdot 2\cdot 3}, \tag{21}$$

die Summe erstreckt über die verschiedenen α-Serien von Wurzeln, deren Länge mit $g+1$ bezeichnet ist. Zu diesen Serien ist auch die 3gliedrige $-\alpha, 0, \alpha$ zu rechnen. Faßt man immer mit einer α-Serie die entgegengesetzte zusammen, die entsteht, indem man jedes Glied ϱ in $-\varrho$ verwandelt (nur die eine Serie $-\alpha, 0, \alpha$ geht dabei in sich über), so erkennt man, daß N_α ein ganzzahliges Multiplum von α_α ist; der ganzzahlige Faktor ist positiv und $\geqq 2$.

§ 4.

Die Gruppe (S).

Bis hierher bin ich im wesentlichen, von einigen Modifikationen und das Folgende vorbereitenden Ergänzungen abgesehen, der Thèse von Cartan gefolgt. Von nun ab gehe ich eigene Wege.

Im λ-Raum der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ korrespondiert jeder Wurzel α eine homogene lineare Transformation S_α, welche die willkürliche Linearform ξ der λ verwandelt in

$$\xi' = \xi - \frac{2\xi_\alpha}{\alpha_\alpha}\cdot\alpha. \tag{22}$$

Sie führt insbesondere α selber in $-\alpha$ über. S_α ist $= S_{-\alpha}$. Für eine Wurzel ϱ ist insbesondere $\frac{2\varrho_\alpha}{\alpha_\alpha}$ eine ganze Zahl. Durch S_α werden die sämtlichen Wurzeln lediglich untereinander vertauscht. Infolgedessen erzeugen die S_α eine *endliche Gruppe* (S). Statt der Quadratsumme Q aller Wurzeln α muß ich zunächst die analog gebaute positiv-definite Hermitesche Form betrachten, die ich gleichfalls mit Q bezeichne:

$$Q = \sum_\alpha \alpha\bar{\alpha}.$$

Sie ist gegenüber S_α und darum gegenüber allen Operationen der Gruppe (S) invariant. Ich verwende geometrische Termini, welchen die dem λ-Raum durch die Form Q aufgeprägte Metrik zugrunde liegt. Die Transformation S_α von der Gestalt (22) kann, da sie Q invariant läßt und nicht die Identität ist, nichts anderes sein als die Spiegelung an der Ebene $\alpha = 0$. S_α ist folglich zu sich selbst invers, und es gilt mit der Bezeichnung (22):

$$S_{\varrho'} = S_\alpha S_\varrho S_\alpha.$$

Führt man Ebenenkoordinaten ein, indem man

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x^{(i)}\lambda_i, \qquad \text{insbesondere} \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} a^{(i)}\lambda_i$$

setzt, und bezeichnet G^* die zu Q reziproke Hermitesche Form bzw. die zugehörige bilineare Bildung

$$G^*(x\bar{y}) = \sum g_{ik}\, x^{(i)}\bar{y}^{(k)} \qquad (g_{ki} = \bar{g}_{ik}),$$

so wird

$$\frac{\xi_\alpha}{\alpha_\alpha} = \frac{G^*(x\bar{a})}{G^*(a\bar{a})}. \tag{23}$$

Ich schreibe von jetzt ab (mehr dem Setzer als dem Leser zuliebe) $(\xi\alpha)$ an Stelle von ξ_α. Sucht man sich insbesondere n unabhängige Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ heraus und verwendet sie als Koordinaten λ, so liefert (23)

$$2\frac{(\alpha_k \alpha_i)}{(\alpha_i \alpha_i)} = \frac{2 g_{ki}}{g_{ii}} = \text{ganze Zahl } a_{ik}.$$

Die Determinante der a_{ik} ist demnach $\neq 0$. Daraus folgt weiter, daß für eine beliebige Wurzel

$$\varrho = r^{(1)}\alpha_1 + r^{(2)}\alpha_2 + \ldots + r^{(n)}\alpha_n$$

die Koeffizienten $r^{(i)}$ rationale Zahlen sind, welche sich aus den ganzzahligen Gleichungen berechnen

$$\frac{2(\varrho\,\alpha_i)}{(\alpha_i \alpha_i)} = \sum_k a_{ik} r^{(k)}.$$

Jetzt kann ich von der Hermiteschen zur quadratischen Form

$$Q = \sum \varrho^2 \qquad (\varrho \text{ durchläuft alle Wurzeln})$$

zurückkehren: sie ist eine positiv-definite Form mit *rationalen* Koeffizienten, und das gleiche gilt für die reziproke Form G^*.

Will man die geometrisch evidente Gleichung (23) rechnerisch bestätigen, so geschieht das am bequemsten so, daß man die definite Hermitesche Form in solcher Weise auf die Gestalt bringt

$$Q = c(\lambda_1 \bar{\lambda}_1 + \lambda_2 \bar{\lambda}_2 + \ldots + \lambda_n \bar{\lambda}_n)$$

(c eine positive Konstante), daß $\alpha = \lambda_1$ wird. Schreibt man die Transformation (22):

$$\lambda_i' = \lambda_i - c_i \alpha, \qquad \left(\frac{2(\xi\,\alpha)}{(\alpha\,\alpha)} = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \ldots + c_n x^{(n)}\right)$$

so ergeben sich aus ihrem unitären Charakter sogleich die Relationen

$$c_1 = \frac{2\alpha_\alpha}{\alpha_\alpha} = 2, \qquad c_2 = c_3 = \ldots = c_n = 0;$$

darum

$$\frac{2(\xi\,\alpha)}{(\alpha\,\alpha)} = c_1 x^{(1)} = c\,c_1 G^*(x\,\bar{a}).$$ [1]

Satz 4. *Wir können die Parameter λ_i so wählen, daß alle Wurzeln Linearformen der λ_i mit rationalen Koeffizienten werden. Die Spiegelungen S_α an den Ebenen $\alpha = 0$ im Sinne der durch die definite quadratische Form Q im λ-Raum festgelegten Metrik erzeugen eine endliche Gruppe (S), die das System der Wurzeln invariant läßt.*

Wir wissen, wie bedeutungsvoll die Gruppe (S) auch für die Darstellungen von $\mathfrak{a}$ ist; denn in einer Darstellung treten mit einem Gewicht Λ immer auch diejenigen Linearformen der λ_i als Gewichte auf, die aus Λ durch die Operationen der Gruppe (S) hervorgehen: das System der

[1] $g_{ik} = \frac{1}{c}\delta_{ik}$ in diesen Koord., sympl.; $a^{(i)} = 0$ $i \neq 1$, $a^{(1)} = 1$, also $G^*(x,\bar{a}) = \ldots$

Gewichte ist gleichfalls invariant gegenüber (S). Und wenn wir das Wort „Gewicht" in dem erweiterten Sinne gebrauchen wie in Zusatz 1, § 2, so haben „äquivalente" Gewichte, welche durch eine Operation der Gruppe (S) auseinander hervorgehen, auch stets die gleiche Multiplizität.

Damit haben wir mehrere Resultate abgeleitet und zum Teil in einfachere Form gebracht, welche von Killing und Cartan durch komplizierte Determinantenrechnungen gefunden wurden. Die Formel

$$a_{ik} = 2\frac{g_{ki}}{g_{ii}}, \qquad g_{ki} = g_{ik}$$

ersetzt die unübersichtlichen Gleichungen in Cartans Thèse, Theorem X, S. 61. Da g_{ik} die Koeffizienten einer definiten quadratischen Form sind, gilt

$$0 < \det g_{ik} \leqq g_{11} \cdot g_{22} \cdots g_{nn}$$

oder

$$0 < \det a_{ik} \leqq 2^n,$$

und entsprechende Ungleichungen für jeden Ausschnitt der quadratischen Form; vgl. Cartan, Thèse, S. 61. Die wirkliche Bestimmung aller einfachen und halb-einfachen kontinuierlichen Gruppen basiert auf der Bestimmung der zugehörigen endlichen Gruppen (S), d. h. aller derjenigen endlichen Gruppen, deren Erzeugende Spiegelungen in einem n-dimensionalen euklidischen Raum sind und die gewissen Ganzzahligkeitsbedingungen genügen.

Durch die im Satz 4 ausgesprochene Forderung sind die Koordinaten λ_i im λ-Raum bis auf eine lineare Transformation mit rationalen Koeffizienten festgelegt. Es ist sogar eine invariante Festlegung bis auf *ganzzahlige unimodulare Transformationen* möglich. Ich bezeichne eine Linearform ξ der Variablen λ_i als ganzzahlig, wenn $\frac{2(\xi\alpha)}{(\alpha\alpha)}$ für alle Wurzeln α eine ganze Zahl ist. Die Wurzeln selber fallen unter diesen Begriff; ebenso, wie wir wissen, die Gewichte irgendeiner Darstellung von $\mathfrak{a}$. Die ganzzahligen Formen bilden ein *Gitter*, und ich kann infolgedessen unter ihnen n unabhängige auswählen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, aus denen sich alle andern mittels ganzzahliger Koeffizienten linear kombinieren lassen. Bei solcher Wahl des Koordinatensystems im λ-Raum bekommt auch die quadratische Form Q ganzzahlige Koeffizienten.

Da wir e_α und $e_{-\alpha}$ je noch mit einem willkürlichen von 0 verschiedenen Faktor multiplizieren können, läßt sich dafür sorgen, daß der Koeffizient N_α in (20) gleich -1 wird. Dann haben wir also

$$\varphi(t) = Q(\lambda) - \sum_{\varrho} \tau_\varrho \tau_{-\varrho}. \tag{24}$$

Aus (21) geht die wichtige Tatsache hervor, daß unter diesen Umständen $(\alpha\alpha)$ negativ ausfällt. Wir drücken aus, daß $\varphi(t)$ eine Invariante für

die adjungierte Gruppe ist, insbesondere gegenüber der zu ihr gehörigen Transformation $dt = [e_\alpha t]$; d. h. es ist $\varphi(s, t) = 0$, wenn $s = [e_\alpha t]$ genommen wird. In der Bezeichnung (12), (17) sind die Komponenten von s:

$$h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tau_{-\alpha} h_\alpha,$$

$$\sigma_\alpha = -\alpha,$$

$$\sigma_{\alpha+\varrho} = N_{\alpha,\varrho}\tau_\varrho \quad \text{oder}$$

$$\sigma_{-\varrho} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } \varrho + \alpha \neq 0 \text{ keine Wurzel ist;} \\ N_{\alpha,\,-\varrho-\alpha} \cdot \tau_{-\varrho-\alpha}, \text{ wenn } \varrho + \alpha \text{ Wurzel ist.} \end{cases}$$

Das Verschwinden des so entstehenden $\varphi(s, t)$ liefert die Gleichungen

$$-\alpha = \sum_\varrho (\varrho\alpha)\varrho \tag{25}$$

und

$$\sum_\varrho N_{\alpha,\,-\varrho-\alpha}\tau_\varrho \tau_{-\varrho-\alpha} = 0. \tag{26}$$

Die Summen erstrecken sich über alle Wurzeln ϱ; in der zweiten Gleichung bleiben nur diejenigen Glieder stehen, für welche auch $\varrho + \alpha$ Wurzel ist.

Wir beschäftigen uns aber zunächst mit der ersten. Aus ihr folgt, wenn β gleichfalls eine Wurzel ist,

$$-(\alpha\beta) = \sum_\varrho (\varrho\alpha)(\varrho\beta).$$

Daraus geht hervor, daß $(\alpha\beta)$ *symmetrisch* ist in α und β (wodurch sich nachträglich die Schreibweise $(\alpha\beta)$ rechtfertigen mag), und darum kann man auch schreiben

$$-(\alpha\beta) = \sum_\varrho (\alpha\varrho)(\beta\varrho).$$

Es ist demnach $-(\alpha\beta)$ der Wert der symmetrischen Bilinearform

$$G(\xi, \eta) = \sum_\varrho \xi_\varrho \eta_\varrho \quad \text{für} \quad \xi = \alpha,\ \eta = \beta. \tag{27}$$

Unter ξ, η verstehe ich hier zwei willkürliche Linearformen der λ:

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} x^i \lambda_i, \qquad \eta = \sum_{i=1}^{n} y^i \lambda_i.$$

Die quadratische Form $G(\xi\xi)$ ist positiv-definit, weil ξ_ϱ für alle Wurzeln ϱ nur dann verschwindet, wenn ξ identisch $= 0$ ist. Von neuem erkennen wir, daß $(\alpha\alpha)$ negativ ist für jede Wurzel α. Die Form G muß wohl bis auf einen konstanten Faktor mit der schon vorher eingeführten Form G^* identisch sein. In der Tat: aus

$$\beta_\alpha = -G(\beta, \alpha)$$

(α und β Wurzeln) folgt sogleich für jede Linearform ξ:

$$\xi_\alpha = G(\xi, \alpha),$$

darum nach der Definition (27)

$$G(\xi\eta) = \sum_\varrho G(\xi\varrho)\, G(\varrho\eta).$$

Das bedeutet für die Matrizen:

$$G = GQG$$

oder, weil die Determinante von G verschieden von 0 ist: G reziprok zu Q.

Ist außer α und β auch $\alpha+\beta$ Wurzel, so besagt die Gleichung $(\xi, \alpha+\beta) = (\xi\alpha) + (\xi\beta)$, daß

$$h_{\alpha+\beta} = h_\alpha + h_\beta \tag{28}$$

ist [15]).

§ 5.
Die unitäre Beschränkung.

Wir nutzen weiter die Identität (26) aus:

$$\sum_{\varrho,\omega} N_{\alpha\omega}\, \tau_\varrho \tau_\omega = 0.$$

Die Summe läuft über alle Wurzelpaare ϱ, ω, welche der Bedingung $\varrho + \omega + \alpha = 0$ genügen. Für ein solches Wurzelpaar gilt demnach

$$N_{\alpha\varrho} + N_{\alpha\omega} = 0.$$

Berücksichtigt man die schiefe Symmetrie

$$N_{\beta\alpha} = -N_{\alpha\beta}, \tag{29}$$

so heißt das: für drei Wurzeln α, β, γ, welche ein „Dreieck" bilden, d. h. die Summe 0 haben, gilt $N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}$; eine Gleichung, welche wir sofort durch zyklische Vertauschung ergänzen können zu:

$$N_{\beta\gamma} = N_{\gamma\alpha} = N_{\alpha\beta}. \tag{30}$$

Für diese Zahl ist demnach auch die Bezeichnung $N_{\alpha\beta\gamma}$ geeignet: $N_{\alpha\beta\gamma}$ bleibt ungeändert bei zyklischer Vertauschung der drei Wurzelindizes, bei ungerader Vertauschung wechselt das Vorzeichen. Sind α, β zwei Wurzeln, deren Summe nicht wieder eine Wurzel ist, so setze ich $N_{\alpha\beta} = 0$. Das Zeichen α' sei mit $-\alpha$ gleichbedeutend.

Die Gleichung

$$[e_\alpha [e_\beta e_\gamma]] + [e_\beta [e_\gamma e_\alpha]] + [e_\gamma [e_\alpha e_\beta]] = 0$$

---

[15]) Diese einfachere und weitertragende Beziehung tritt an Stelle des Theorem VII, S. 57, in Cartans Thèse.

liefert, wenn die drei Wurzeln α, β, γ ein Dreieck bilden, von neuem die Beziehung (28). Im andern Fall aber wird, wenn $\beta + \gamma \neq 0$ ist,

$$[e_\beta e_\gamma] = N_{\beta\gamma} e_{\beta+\gamma},$$
$$[e_\alpha [e_\beta e_\gamma]] = N_{\alpha,\beta+\gamma} N_{\beta,\gamma} e_{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Sind demnach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier Wurzeln, welche ein Viereck bilden:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0,$$

so gilt, weil nach (30) $N_{\alpha,\beta+\gamma}$ durch $N_{\delta\alpha}$ ersetzt werden kann, die Beziehung

$$N_{\beta\gamma} N_{\alpha\delta} + N_{\gamma\alpha} N_{\beta\delta} + N_{\alpha\beta} N_{\gamma\delta} = 0 \tag{31}$$
$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0; \quad \beta + \gamma,\ \gamma + \alpha,\ \alpha + \beta \neq 0).$$

Endlich eine letzte Vorbereitung. Nach der auf die adjungierte Gruppe anzuwendenden Gleichung (10) ist, wenn β der folgenden α-Serie von Wurzeln angehört,

$$\beta - i\alpha, \ldots, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \ldots, \beta + k\alpha:$$
$$[e_{-\alpha} [e_\alpha e_\beta]] = \frac{(i+1)k}{2} \alpha_\alpha \cdot e_\beta. \tag{32}$$

Ist $\beta + \alpha$ noch Wurzel ($k \geqq 1$), so ist der Faktor

$$-\frac{(i+1)k}{2} \alpha_\alpha = R_{\alpha\beta} \tag{33}$$

eine positive Zahl. Die Gleichung (32) liefert

$$N_{\alpha',\alpha+\beta} N_{\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta}.$$

Es ist aber nach (30)

$$N_{\alpha',\alpha+\beta} = N_{\beta'\alpha'} = -N_{\alpha'\beta'}.$$

Also ergibt sich:

$$N_{\alpha\beta} N_{\alpha'\beta'} = R_{\alpha\beta} \tag{34}$$

ist eine positive rationale Zahl, wenn neben α und β auch $\alpha + \beta$ als Wurzel auftritt. Daraus geht insbesondere hervor, daß unter dieser Voraussetzung $N_{\alpha\beta}$ stets $\neq 0$ ist; außerdem zeigt sich, daß die Zahl (33) symmetrisch von den beiden Wurzeln α und β abhängt.

Ohne die vollzogene Normierung von $h_\alpha = [e_\alpha e_{\alpha'}]$ zu zerstören, können wir e_α mit einer beliebigen von 0 verschiedenen Zahl μ multiplizieren, wenn wir gleichzeitig $e_{\alpha'}$ durch $\frac{1}{\mu} e_{\alpha'}$ ersetzen.

Hilfssatz. *Die e_α lassen sich unter Wahrung der Gleichung* (24) *so normieren, daß für irgend zwei Wurzeln α und β stets $N_{\alpha\beta} = N_{\alpha'\beta'}$ gilt. $N_{\alpha\beta}$ ist dann eine reelle Zahl.*

Wir benutzen die in den vorigen Kapiteln eingeführte Rangordnung: eine Linearform der Variablen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ mit rationalen Koeffizienten

heißt positiv, wenn der erste von 0 verschiedene Koeffizient positiv ist; die Wurzel β steht höher als α, in Zeichen: $\beta > \alpha$ oder $\alpha < \beta$, wenn $\beta - \alpha$ positiv ist. Es sei ϱ eine positive Wurzel und Σ_ϱ die Gesamtheit derjenigen Wurzeln α, für welche $\varrho' < \alpha < \varrho$ ist. Es sei bereits bewiesen, daß

$$N_{\alpha\beta\gamma} = N_{\alpha'\beta'\gamma'} \tag{35}$$

ist für alle ein Dreieck bildenden Wurzeln α, β, γ, welche dem System Σ_ϱ entnommen sind. Wir wollen die Gleichung (35) ausdehnen auf den Fall, daß dem System Σ_ϱ noch die beiden Wurzeln ϱ', ϱ hinzugefügt werden, d. h. auf das System Σ_{ϱ^*}, das durch die nächsthöhere Wurzel ϱ^* bestimmt wird.

Dazu dient die Relation (31). Besteht zwischen den Wurzeln α, β, ϱ die Gleichung $\alpha + \beta = \varrho$ und gehören α und β zu Σ_ϱ, so ist

$$0 < \alpha < \varrho, \qquad 0 < \beta < \varrho. \tag{36}$$

Ebenso, wenn die Wurzeln γ und δ zu Σ_ϱ gehören und $\gamma + \delta = \varrho$ ist. Mittels der Relation (31), in welcher γ', δ' an Stelle von γ, δ zu schreiben ist, wird $N_{\alpha\beta\varrho'} N_{\gamma'\delta'\varrho}$ in die Summe zweier Produkte verwandelt, deren jedes in der Drei-Indizes-Bezeichnung (35) nur Wurzeln aufweist, die dem Spielraum Σ_ϱ angehören. Denn es ist z. B.

$$N_{\beta\gamma'} N_{\alpha\delta'} = N_{\beta,\gamma',\gamma-\beta} \cdot N_{\alpha,\delta',\delta-\alpha};$$

wegen (36) und $0 < \gamma < \varrho$, $0 < \delta < \varrho$ entstammen hier alle sechs Indizes

$$\beta, \ -\gamma, \ \gamma - \beta, \quad \alpha, \ -\delta, \ \delta - \alpha$$

dem System Σ_ϱ. Wird auf gleiche Art das Produkt $N_{\alpha'\beta'\varrho} N_{\gamma\delta\varrho'}$ verwandelt, so schließen wir auf Grund unserer Annahme, daß (35) bereits im System Σ_ϱ gilt, auf die Gleichung

$$N_{\alpha\beta\varrho'} N_{\gamma'\delta'\varrho} = N_{\alpha'\beta'\varrho} N_{\gamma\delta\varrho'}$$

oder

$$\frac{N_{\alpha\beta}}{N_{\alpha'\beta'}} = \frac{N_{\gamma\delta}}{N_{\gamma'\delta'}}, \tag{37}$$

in Worten: Ist die positive Wurzel ϱ auf doppelte Art als Summe zweier zu Σ_ϱ gehöriger Wurzeln $\alpha + \beta$ bzw. $\gamma + \delta$ dargestellt, so gilt die Gleichung (37); *für alle derartigen Zerlegungen von ϱ hat also der Quotient $\frac{N_{\alpha\beta}}{N_{\alpha'\beta'}}$ denselben Wert μ_ϱ^2.* — Die Anwendbarkeit von (31) in der hier benutzten Modifikation der Bezeichnung ist an die Voraussetzung gebunden, daß weder α noch β gleich γ, d. h. daß die Zerlegung $\varrho = \gamma + \delta$ von der Zerlegung $\varrho = \alpha + \beta$ $(= \beta + \alpha)$ verschieden ist. Handelt es sich beidemal

um dieselbe Zerlegung, so ist die Gleichung (37) aber selbstverständlich. Der Beweis lehrt zugleich, daß die niedrigste positive Wurzel ϱ, die sich additiv aus zwei zwischen ϱ' und ϱ gelegenen Wurzeln $\alpha+\beta$ zusammensetzen läßt, nur *einer* solchen Zerlegung fähig ist. Denn für zwei verschiedene Zerlegungen $\varrho=\alpha+\beta=\gamma+\delta$ lieferte unsere Methode die unmögliche Gleichung $N_{\alpha\beta}N_{\gamma'\delta'\varrho}=0$.

Ersetzt man e_ϱ, $e_{\varrho'}$ bzw. durch $\mu_\varrho e_\varrho$, $\frac{1}{\mu_\varrho}e_{\varrho'}$, so verwandelt sich $N_{\alpha\beta\varrho'}$ in $\frac{1}{\mu_\varrho}N_{\alpha\beta\varrho'}$, $N_{\alpha'\beta'\varrho}$ in $\mu_\varrho N_{\alpha'\beta'\varrho}$ und $\frac{N_{\alpha\beta}}{N_{\alpha'\beta'}}$ in 1. Da es auf die Reihenfolge der Indizes nicht ankommt, gilt alsdann (35) innerhalb des auf Σ_ϱ nächstfolgenden Systems Σ_{ϱ^*}. Damit ist gezeigt, wie man, von niedrigeren zu höheren Wurzeln α aufsteigend, die Normierung der e_α so vollziehen kann, daß durchweg die Gleichung

$$N_{\alpha\beta}=N_{\alpha'\beta'}$$

zutrifft.

Zufolge (34) ist alsdann $N_{\alpha\beta}^2$ eine positive rationale Zahl und demnach $N_{\alpha\beta}$ selber reell.

Satz 5. *Bei geeigneter Normierung der zu den Wurzeln α gehörigen Basiselemente e_α gelten die folgenden Tatsachen:*

$$h_{\alpha+\beta}=h_\alpha+h_\beta;$$
$$N_{\alpha\beta}=N_{\beta\gamma}=N_{\gamma\alpha}$$

für drei Wurzeln α,β,γ, deren Summe $=0$ ist;

$$N_{\beta\gamma}N_{\alpha\delta}+N_{\gamma\alpha}N_{\beta\delta}+N_{\alpha\beta}N_{\gamma\delta}=0$$

für vier Wurzeln $\alpha,\beta,\gamma,\delta$, deren Summe $=0$ ist und unter denen sich keine zwei entgegengesetzte befinden. $N_{\alpha\beta}$ ist reell und

$$N_{-\alpha,-\beta}=N_{\alpha\beta}.$$

Wenn $\alpha+\beta$ neben α und β eine Wurzel ist, verschwindet $N_{\alpha\beta}$ nicht.

Nachdem wir in § 4 die Parameter λ_i, jetzt die Parameter τ_α normiert haben, *fassen wir in der Gruppe $\mathfrak{a}$ allein diejenigen Elemente t ins Auge, deren Parameter λ_i rein imaginär sind und deren Parameter τ_α, $\tau_{-\alpha}$ für jedes Wurzelpaar α, $-\alpha$ konjugiert-komplexe Werte annehmen* (*Analogon der unitären Beschränkung*). Diese t bilden eine infinitesimale *Gruppe* $\mathfrak{a}_u$, und zwar eine Gruppe von r reellen Parametern. Denn es ist mit den alten Bezeichnungen

$$(38)\qquad \begin{aligned}[s\,t]=&\sum_{\alpha\neq 0}\{\alpha(\varkappa_1,\varkappa_2,\ldots,\varkappa_n)\cdot\tau_\alpha-\alpha(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\cdot\sigma_\alpha\}e_\alpha\\&+\sum_{\alpha\neq 0}\sigma_\alpha\tau_{-\alpha}h_\alpha+\sum_{\varrho\neq 0}\Big(\sum_{\alpha+\beta=\varrho}N_{\alpha,\beta}\sigma_\alpha\tau_\beta\Big)e_\varrho\end{aligned}$$

$\alpha(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ ist eine Linearform der λ_i mit rationalen Koeffizienten; darum wird bei rein imaginären λ: $\bar{\alpha} = -\alpha$ sein. Die zweite Summe auf der rechten Seite von (38) ist gleich

$$\sum_{\alpha>0} (\sigma_\alpha \tau_{\alpha'} - \sigma_{\alpha'} \tau_\alpha) h_\alpha. = \sum a_\alpha h_\alpha, \quad \bar{a}_\alpha = -a_\alpha, \; a_\alpha \text{ ...}$$

Da für alle Wurzeln ϱ die Zahlen $\varrho(h_\alpha) = \varrho_\alpha$ rational sind, gilt das gleiche für die Werte der λ-Parameter von $h = h_\alpha$.[1] Nach dem letzten Hilfssatz ist endlich

$$N_{\alpha'\beta'} = \bar{N}_{\alpha\beta}. = N_{\alpha\beta}$$

Aus dem allen folgt in der Tat, daß mit s und t auch $[st]$ der linearen Schar $\mathfrak{a}_u$ angehört. Außerdem ist für die Elemente t von $\mathfrak{a}_u$ die Invariante der adjungierten Gruppe

$$-\varphi(t) = -Q(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) + \sum_\varrho \tau_\varrho \bar{\tau}_\varrho$$

positiv definit.

Satz 6. *Durch Reellitätsbedingungen kann man aus der infinitesimalen halb-einfachen Gruppe $\mathfrak{a}$ von r komplexen Parametern eine Untergruppe $\mathfrak{a}_u$ von r reellen Parametern herausheben, deren adjungierte Gruppe eine reelle positiv-definite quadratische Form invariant läßt.*

Damit ist das Fundament gewonnen, um die Darstellungstheorie der Gruppe $\mathfrak{a}$ in ähnlicher Weise aufzubauen, wie es in den beiden ersten Kapiteln für die speziellen halb-einfachen Gruppen $\mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{c}^0$, $\mathfrak{d}^0$ geschehen ist.

Anhang.

Beweis des Lieschen Theorems. Die von irgendwelchen Elementen (Vektoren oder Matrizen) $e_1, e_2, \ldots, e_g$ aufgespannte lineare Schar aller Elemente von der Form $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_g e_g$ bezeichne ich stets mit $(e_1, e_2, \ldots, e_g)$. Eine Basis der auflösbaren infinitesimalen Gruppe $\mathfrak{H}$ linearer Transformation $H_1, H_2, \ldots, H_n$ kann ich so bestimmen, daß

$$(H_1, H_2, \ldots, H_{i-1}) = \mathfrak{H}_{i-1}$$

ausgezeichnete Untergruppe von $\mathfrak{H}_i$ ist. Ich bezeichne die willkürliche Matrix $\lambda_1 H_1 + \lambda_2 H_2 + \ldots + \lambda_{i-1} H_{i-1}$ von $\mathfrak{H}_{i-1}$ jetzt mit H und setze $H_i = C$. Um den Lieschen Satz sukzessive für die Gruppen $\mathfrak{H}_0 = 0, \mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ zu beweisen, gilt es einzusehen, daß er für $\mathfrak{H}_i$ richtig ist, wenn er für $\mathfrak{H}_{i-1}$ zutrifft. Es sei also e ein von 0 verschiedener Vektor im Raume $\mathfrak{r}$, für welchen allgemein

$$He = \Lambda \cdot e, \qquad (H = \lambda_1 H_1 + \ldots \lambda_{i-1} H_{i-1})$$

gilt ($\Lambda = \gamma_1 \lambda_1 + \ldots + \gamma_{i-1} \lambda_{i-1}$ eine Linearform der Parameter von H); man soll ein e' so bestimmen, daß es außerdem einer Gleichung

$$Ce' = \gamma \cdot e'$$

genügt. Man bilde

$$e_0 = e, \quad Ce_0 = e_1, \quad Ce_1 = e_2, \ldots.$$

Unter diesen Vektoren sei e_g der erste, welcher von den vorigen linear abhängt. Man wird eine Gleichung haben

$$(*) \qquad f(C)e = 0,$$

[1] Sei α fest. Ist $h_\alpha = \sum h_i \lambda_i^{(\alpha)}$, so $\varrho = \sum d_k^{(\varrho)} \lambda_k$ (d_k^ϱ rat. nach Satz 4) sind $\varrho_\alpha = \sum d_k^\varrho \lambda_k^\alpha$ für alle ϱ (1). In (1) ϱ_α, d_k rat. (nach obigem) ...

wo

$$f(\zeta) = \zeta^g + \beta_1 \zeta^{g-1} + \ldots + \beta_g$$

ein gewisses Polynom vom Grade g ist.

Mit H gehört auch $H' = [HC]$ zu $\mathfrak{H}_{i-1}$. Der Wert von Λ für H' werde mit Λ' bezeichnet. Wir bekommen dann

$$[0] \qquad \begin{aligned} H e_0 &= \Lambda \cdot e_0, \\ H e_1 &= HC e_0 = H' e_0 + C H e_0 \end{aligned}$$

und daraus vermöge der auf H und H' angewendeten Gleichung [0]:

$$[1] \qquad \begin{aligned} H e_1 &= \Lambda' e_0 + \Lambda \cdot e_1; \\ H e_2 &= HC e_1 = H' e_1 + C H e_1 \end{aligned}$$

und daraus vermöge der auf H und H' anzuwendenden Gleichung [1]

$$[2] \qquad H e_2 = (\Lambda'' e_0 + \Lambda' e_1) + (\Lambda' e_1 + \Lambda e_2) = \Lambda'' e_0 + 2\Lambda' e_1 + \Lambda e_2,$$

. . . . . .

Die lineare Vektormannigfaltigkeit $\mathfrak{e} = (e_0, e_1, \ldots, e_{g-1})$ ist invariant sowohl gegenüber jedem H als auch gegenüber C. Die Spur von H in ihr ist gleich $g \cdot \Lambda$, die Spur von H' also $= g \cdot \Lambda'$. H' setzt sich aber aus zwei Abbildungen dieser Mannigfaltigkeit, H und C, gemäß der Formel zusammen: $H' = HC - CH$. Darum ist ihre Spur $= 0$, und wir bekommen $\Lambda' = 0$,

$$(**) \qquad H e_i = \Lambda \cdot e_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, g-1).$$

Ist γ irgendeine Wurzel von $f(\zeta)$:

$$f(\zeta) = (\zeta - \gamma) f^*(\zeta),$$

so hat der nicht-verschwindende Vektor $f^*(C)\, e$ nach (*) und (**) die gewünschten Eigenschaften.

Beweis des Satzes von Engel. Die Kette

$$\mathfrak{h}_0 = 0, \ \mathfrak{h}_1, \ \mathfrak{h}_2, \ \ldots, \ \mathfrak{h}_n = \mathfrak{h},$$

in der jedes Glied $\mathfrak{h}_{i-1}$ eine invariante Untergruppe des nächstfolgenden $\mathfrak{h}_i$ sein und die Parameterzahl von Schritt zu Schritt um 1 wachsen soll, wird *von unten* aufgebaut. Man muß also zeigen: Ist $\mathfrak{h}_{i-1}$ eine auflösbare Untergruppe von $\mathfrak{h}$, so kann man ein Element e finden, 1. so daß $(\mathfrak{h}_{i-1}, e) = \mathfrak{h}_i$ wiederum eine Gruppe ist und 2. für jedes Element h von $\mathfrak{h}_{i-1}$ das Produkt $[eh]$ wiederum zu $\mathfrak{h}_{i-1}$ gehört. Der Teil 1 folgt durch Anwendung des Lieschen Theorems auf die Gruppe der linearen Transformationen $dx = [hx]$, deren von x durchlaufenes Substrat der Vektorraum $\mathfrak{h} \bmod \mathfrak{h}_{i-1}$ ist. In der Tat gehen zwei $\bmod \mathfrak{h}_{i-1}$ kongruente Vektoren x durch diese dem willkürlichen Element h von $\mathfrak{h}_{i-1}$ korrespondierende Abbildung über in zwei gleichfalls $\bmod \mathfrak{h}_{i-1}$ kongruente Vektoren dx. Weil diese zu $\mathfrak{h}_{i-1}$ isomorphe Transformationsgruppe nach Voraussetzung auflösbar ist, existiert ein Element $e \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{h}_{i-1}}$, für welches

$$[h e] \equiv \gamma \cdot e \pmod{\mathfrak{h}_{i-1}},$$

γ eine Linearform der Parameter von h ist. $(\mathfrak{h}_{i-1}, e) = \mathfrak{h}_i$ ist dann in der Tat eine Gruppe. Das charakteristische Polynom von h innerhalb $\mathfrak{h}_i$ und darum auch innerhalb $\mathfrak{h}$, $f(\zeta; h)$, enthält den Faktor $(\zeta - \gamma)$. Benutzen wir jetzt die Voraussetzung $f(\zeta; h) = \zeta^n$, so folgt $\gamma = 0$, und damit ist die Richtigkeit von 2. erkannt.

(Eingegangen am 11. Februar 1925.)