Werk

Titel: Fekete, M., Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei geg...

Ort: Berlin

Jahr: 1925

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0022|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über Gebiete, in denen komplexe Polynome jeden Wert zwischen zwei gegebenen annehmen.

Von

M. Fekete in Budapest.

1. In meiner Note[1]) „Über Zwischenwerte bei komplexen Polynomen" habe ich den Fundamentalsatz über stetige Funktionen $f(x)$ der reellen Veränderlichen x — laut welchem diese jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ mindestens einmal annehmen — auf komplexe Polynome übertragen, indem ich bewies:

Ist $P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_n x^n$ $(n \geqq 2)$ *irgendein Polynom n-ten Grades mit beliebigen komplexen Koeffizienten, so nimmt es jeden Wert* γ, *der „zwischen* $P(a) = \alpha$ *und* $P(b) = \beta$ $(\alpha \neq \beta)$ *liegt", in einem Kreise* $K = K(a, b; n)$ *an, der um den Punkt* $x = \frac{a+b}{2}$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* $\frac{|b-a|}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2n}$ *geschlagen wird.* Hierbei bezeichnet die Ausdrucksweise „γ *liegt zwischen* α *und* β" den Umstand, daß γ ein Punkt der *geradlinigen* Strecke $\overline{\alpha\beta}$ ist.

Ich gewann dieses Ergebnis mit Hilfe eines Satzes von Herrn Grace[2]), aus dem geschlossen werden konnte, daß $P(x)$ die genannten Zwischenwerte in jedem Kreise mindestens einmal annimmt, welcher das Kreisbogenzweieck $\mathsf{K} = \mathsf{K}(a, b; n)$, gebildet durch die beiden Kreisbogen, aus deren Punkten die gemeinsame Sehne $\overline{ab}$ unter einem Winkel $= \frac{\pi}{n}$ zu sehen ist,

[1]) Acta litt. ac scient. reg. univ. hung. Franc.-Jos., Sectio scient. math. **1** (1923), p. 98–100.

[2]) J. H. Grace, The zeros of a polynomial, Proc. of the Cambridge Phil. Soc. **11** (1900–1902), p. 352–357. Vgl. auch Szegö, Bemerkungen zu einem Satz von J. H. Grace über die Wurzeln algebraischer Gleichungen, Math. Zeitschr. **13** (1922), S. 28–55; Egerváry, Egy a symmetrikus, multilinearis formára vonatkozó minimum feladat, Math. és phys. lapok **29** (1922), p. 21–43; Egerváry, On a maximum-minimum problem and its connexion with the roots of equations, Acta litt. ac scient. reg. univ. hung. Franc.-Jos., Sectio scient. math. **1** (1922), p. 39–45.

in sich enthält. Der oben definierte Kreis K hat offenbar den kleinsten Radius unter sämtlichen Kreisen, welche K enthalten; ich bewies: *er bildet zugleich das kleinste Kreisgebiet*[3]*, in welchem alle Polynome $P(x)$ n-ten Grades die Werte zwischen $P(a)$ und $P(b)$ erreichen.*

2. Der Hauptzweck der vorliegenden Note ist zu zeigen, daß bereits das Kreiszweieck K mindestens eine von den n γ-Stellen des Polynoms $P(x)$ enthält, sobald γ zwischen $P(a)=\alpha$ und $P(b)=\beta$ liegt. Ich gelange zu dieser Verschärfung meines früheren Resultates, ohne Zuhilfenahme des Graceschen Satzes, auf einem vollständig elementaren, höchst einfachen Wege.

Da mein Beweisverfahren auch zu einer Übertragung des Rolleschen Theorems auf komplexe Polynome geeignet ist, so will ich mir die Herleitung dieser Übertragung als zweites Ziel setzen.

Endlich benutze ich dasselbe Verfahren zur Bestimmung von Kreisgebieten, welche mindestens je eine Nullstelle sämtlicher Polynome aus gewissen Polynomscharen enthalten.

3. Das oben angedeutete Ergebnis über die Zwischenwerte von Polynomen kann in folgendem Satze formuliert werden:

I. *Ein Polynom $P(x)=p_0+p_1x+\ldots+p_nx^n$ $(n\geqq 2)$ von n-tem Grade nehme für $x=a$ und $x=b$ die nicht gleichen Werte α und β an. Dann nimmt es jeden, zwischen α und β liegenden Wert γ im Innern oder am Rande des Kreiszweiecks* K *an, aus dessen Randpunkten die Strecke $\overline{ab}$ unter einem Winkel $=\frac{\pi}{n}$ zu sehen ist.*

Um diesen Satz zu beweisen, beachte man zunächst, daß jedes zwischen $\alpha=P(a)$ und $\beta=P(b)$ liegende γ sich in der Form

$$\gamma=\lambda P(a)+\mu P(b) \tag{1}$$

darstellen läßt, wobei

$$0<\lambda<1, \quad 0<\mu<1, \quad \lambda+\mu=1 \tag{2}$$

ist. Nach (2) ist (1) gleichbedeutend mit

$$\lambda[P(a)-\gamma]+\mu[P(b)-\gamma]=0. \tag{3}$$

Dieser Relation zufolge befriedigen die Wurzeln $\xi_1, \ldots, \xi_n$ der Gleichung $P(x)=\gamma$ die Beziehung

$$\lambda(a-\xi_1)\ldots(a-\xi_n)+\mu(b-\xi_1)\ldots(b-\xi_n)=0, \tag{4}$$

daher muß mindestens eine von diesen Wurzeln in K fallen. Sonst wäre

[3]) Vgl. a. a. O. [1]). NB.! K ist das *kleinste* Kreisgebiet unter sämtlichen von der oben charakterisierten Art *in Bezug auf den Radius*, doch nicht in dem Sinne, daß es in jedem dieser Kreisgebiete enthalten wäre.

nämlich die Strecke $\overline{ab}$ aus jeder dieser Wurzeln unter einem Winkel $< \frac{\pi}{n}$ zu sehen, d. h. für jedes ξ_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ wäre

$$-\frac{\pi}{n} < \operatorname{Arg}\left(\frac{a-\xi_\nu}{b-\xi_\nu}\right) < \frac{\pi}{n};$$

dann könnte aber das Produkt

$$\frac{a-\xi_1}{b-\xi_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a-\xi_n}{b-\xi_n}$$

nicht negativ ausfallen, wie es nach (2) und (4) sein muß.

4. Nun will ich die folgende Ergänzung des eben bewiesenen Satzes herleiten:

II. *Sei $a \neq b$, sonst beliebig und $n \geqq 2$. Dann ist das oben erklärte Kreiszweieck* K *das „kleinste" unter allen einfach zusammenhängenden Gebieten, in welchen alle Polynome $P(x)$ n-ten Grades jeden Wert zwischen $P(a)$ und $P(b)$ mindestens je einmal annehmen: es ist in sämtlichen Gebieten von der charakterisierten Art enthalten.*

In der Tat, ist $c \neq a$, $\neq b$ irgendein bestimmter Randpunkt von K, so gibt es offenbar unter den der Bedingung (2) genügenden Wertepaaren λ, μ ein solches, für welches

$$\lambda (a-c)^n + \mu (b-c)^n = 0 \tag{5}$$

ist. Setzt man also $P(x) = (x-c)^n$, so liegt die Zahl 0 nach (5) zwischen $P(a)$ und $P(b)$ und wird von $P(x)$ an der einzigen Stelle $x = c$ angenommen. Daher muß der Rand von K (und also auch sein Inneres) in jedem einfach zusammenhängenden Gebiet mit den angegebenen Eigenschaften enthalten sein. W. z. b. w.[4])

5. Ich schließe meine Betrachtungen über die Zwischenwerte mit folgender Bemerkung:

Sei $\alpha \neq \beta$, sonst beliebig und γ irgendein Wert, der zwischen α und β liegt. Das Polynom $P(x)$ n-ten Grades nehme den Wert α bzw. β; γ an den Stellen $a_1, \ldots, a_n$ bzw. $b_1, \ldots, b_n$; $c_1, \ldots, c_n$ an. Hierbei seien die α- bzw. β-, γ-Stellen in irgendeiner Reihenfolge hingeschrieben, doch jede so oft, als ihre Multiplizität angibt. Konstruiert man die n Kreiszweiecke $\mathsf{K}(a_1, b_1; n), \ldots, \mathsf{K}(a_n, b_n; n)$, so enthält — nach I — jeder von ihnen mindestens eine der Stellen $c_1, \ldots, c_n$. Umgekehrt: *jede dieser Stellen fällt in eines der oben definierten Kreiszweiecke.*

---

[4]) Herr J. v. Neumann hat das von mir vermutete weitergehende Ergebnis bewiesen, daß auch kein mehrfach-zusammenhängendes Gebiet, welches aus K durch Hinweglassen irgendeines seiner inneren Punkte entsteht, die fragliche Eigenschaft des ursprünglichen Gebietes K aufweisen kann.

Denn ist c irgendeine γ-Stelle von $P(x)$, so genügt sie offenbar der Bedingung $\lambda[P(c)-\alpha]+\mu[P(c)-\beta]=0$, wobei λ und μ die Bedingungen (2) befriedigen. Doch kann

$$\frac{P(c)-\alpha}{P(c)-\beta}=\frac{c-a_1}{c-b_1}\cdot\ldots\cdot\frac{c-a_n}{c-b_n}$$

nicht negativ ausfallen, es sei denn, daß mindestens eines der genannten Zweiecke c enthält.

6. Nun will ich mein zweites Problem, nämlich die Frage nach der Lage der Nullstellen bei den Derivierten von Polynomen, welche an zwei vorgeschriebenen Stellen a, b gleiche Werte annehmen, mit Hilfe des oben angewendeten Beweisverfahrens auseinandersetzen. Diese Frage ist offenbar äquivalent mit der folgenden: Das Polynom $P(x)$ n-ten Grades befriedige die Bedingung

$$\int_a^b P(x)\,dx=0; \tag{6}$$

wie sind dann seine Nullstellen verteilt?

Man verdankt eine Lösung dieser Frage den Herren Grace und Heawood[5]). Sie lautet wie folgt:

Ist (6) *erfüllt, so verschwindet das Polynom* $P(x)$ *n-ten Grades innerhalb oder am Rande des Kreises, der um den Punkt* $x=\frac{a+b}{2}$ *als Mittelpunkt mit dem Radius* $\frac{|b-a|}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n+1}$ *geschlagen wird.*

Ich stelle dieser Lösung die folgende zur Seite:

III. *Ist* (6) *erfüllt, so verschwindet das nichtlineare*[6]) *Polynom* $P(x)$ *n-ten Grades im Innern oder am Rande des Kreiszweiecks* $\mathsf{K}=\mathsf{K}(a, b; n)$, *aus dessen Randpunkten die Strecke* $\overline{ab}$ *unter einem Winkel* $=\frac{\pi}{n}$ *zu sehen ist.*

Beim Beweise beschränke ich mich einfachheitshalber auf den Spezialfall, wo $b=-a=1$ ist. Dann hat (6) die Form

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx=0, \tag{7}$$

wobei ich als Integrationsweg die Strecke $\overline{-1, 1}$ wähle.

Nun kann aus dem Bestehen von (7) die Existenz einer Nullstelle von $P(x)$ im angegebenen Bereich etwa so gefolgert werden:

---

[5]) Vgl. Grace, a. a. O. [2]); P. J. Heawood, Geometrical relations between the roots of $f(x)=0$, $f'(x)=0$. Quart. Journal of Math. 38 (1907), p. 84—107. Vgl. auch Szegö, a. a. O. [2]), S. 39.

[6]) Ist $P(x)$ ein lineares Polynom, so verschwindet es im Punkte $x=\frac{a+b}{2}$.

Man betrachte die Annäherungssummen

$$(8)\quad \sigma_k = P(x_0)(x_1 - x_0) + P(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + P(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \qquad (k = 2, 3, \ldots)$$

des Integrals in (7), gebildet mit Hilfe der Punkte

$$(9)\quad x_\nu = -1 + \frac{2\nu}{k} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k-1),$$

welche das Intervall von $x_0 = -1$ bis $x_k = 1$ in k gleiche Strecken einteilen. Nach (7) konvergieren diese Summen mit unbegrenzt wachsendem k gegen 0. Ist also gezeigt, daß die Gleichung

$$(10)\quad P(x) = \frac{\sigma_k}{2}$$

für jedes $k \geqq 2$ mindestens eine Wurzel in dem abgeschlossenen Kreiszweiecke $\mathsf{K}(-1, 1; n)$ besitzt, so folgt daraus wegen Stetigkeitsgründen, daß daselbst auch die Gleichung $P(x) = 0$ eine Wurzel besitzt. Doch ist (8) nach (9) mit der Relation

$$\left[P(x_0) - \frac{\sigma_k}{2}\right] + \left[P(x_1) - \frac{\sigma_k}{2}\right] + \ldots + \left[P(x_{k-1}) - \frac{\sigma_k}{2}\right] = 0$$

äquivalent, diese aber, durch Einführung der Wurzeln $\xi_1, \ldots, \xi_n$ von (10) in die Form

$$(11)\quad (x_0 - \xi_1)\ldots(x_0 - \xi_n) + (x_1 - \xi_1)\ldots(x_1 - \xi_n) + \ldots + (x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_n) = 0$$

umgestaltet, ergibt sofort, daß mindestens eine Wurzel von (10) im Innern von $\mathsf{K}(-1, 1; n)$ liegt, wie auch $k \geqq 2$ gewählt ist.

Wäre nämlich die Strecke $\overline{-1, 1}$ aus jeder Wurzel ξ_ν unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{n}$ zu sehen, d. h. würde für jedes ξ_ν eine der beiden Beziehungen

$$(12)\quad 0 \leqq \operatorname{Arg}\left(\frac{\xi_\nu + 1}{\xi_\nu - 1}\right) \leqq \frac{\pi}{n},$$

$$(13)\quad 0 \leqq \operatorname{Arg}\left(\frac{\xi_\nu - 1}{\xi_\nu + 1}\right) \leqq \frac{\pi}{n}$$

bestehen, so würde die Summe

$$\frac{(x_0 - \xi_1)\ldots(x_0 - \xi_p)}{(x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_p)} + \frac{(x_1 - \xi_1)\ldots(x_1 - \xi_p)(x_1 - \xi_{p+1})\ldots(x_1 - \xi_n)}{(x_{k-1} - \xi_1)\ldots(x_{k-1} - \xi_p)(x_0 - \xi_{p+1})\ldots(x_0 - \xi_n)} + \ldots + \frac{(x_{k-1} - \xi_{p+1})\ldots(x_{k-1} - \xi_n)}{(x_0 - \xi_{p+1})\ldots(x_0 - \xi_n)}$$

— wobei $\xi_1, \ldots, \xi_p$ die der Bedingung (12), $\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n$ aber die der Bedingung (13) genügenden Wurzeln von (10) bezeichnen — offenbar aus lauter solchen Gliedern bestehen, deren Argumente zwischen 0 und π liegen. Deshalb wäre diese Summe von 0 verschieden, im Widerspruche zu (11).

Damit ist Satz III für den gewünschten speziellen Fall vollständig begründet; seine allgemeine Gültigkeit folgt daraus durch Koordinatentransformation.

7. Der eben bewiesene Satz, sowie das oben angeführte Resultat der Herren Grace und Heawood stellen fest, daß mit Hilfe zweier vorgeschriebener Nullstellen und des Grades eines Polynoms sich Gebiete angeben lassen, wo die Derivierte des Polynoms mindestens einmal verschwinden muß, wie auch die übrigen Nullstellen des ursprünglichen Polynoms ausfallen mögen. Als eine Verallgemeinerung dieser Tatsache will ich folgendes zeigen:

IV. *Es seien* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *voneinander verschiedene, sonst beliebige komplexe Größen,* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *aber irgendwelche positive*[7]) *Zahlen* $(n \geqq 2)$. *Dann verschwindet das Polynom n-ten Grades*

$$P(x) = \lambda_0(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \tag{14}$$
$$+ \lambda_1(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n) + \ldots + \lambda_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$
$$= (x-x_0)\ldots(x-x_n)\sum_0^n \frac{\lambda_\nu}{x-x_\nu}$$

mindestens einmal in einem um den Punkt $x = \frac{x_0+x_1}{2}$ *als Mittelpunkt geschlagenen Kreise* $K = K(x_0, x_1; n)$, *dessen Halbmesser nur von* $|x_0 - x_1|$ *und dem Grade von* $P(x)$ *abhängt.*

Beim Beweise stütze ich mich auf die folgenden beiden Hilfssätze:

A. Enthält ein Kreis die Punkte $x_0, x_1, \ldots, x_n$, so enthält er sämtliche Nullstellen von $P(x)$, wie auch in (14) die positiven Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ gewählt sind.

B. Enthält ein Kreis K vom Radius R die Punkte $x_0, \ldots, x_k$, wo $k \geqq 1$ und $< n$ ist, so enthält der konzentrische Kreis K' vom Radius $R' = R \operatorname{ctg} \frac{\pi}{8n}$ außer den Punkten von $x_0, \ldots, x_k$ entweder noch einen weiteren Punkt x_s $(s \geqq k+1)$ oder aber mindestens eine Nullstelle von $P(x)$, wie auch in (14) die positiven Zahlen $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ gewählt sind.

Die Richtigkeit des Hilfsatzes A folgt aus der bekannten Tatsache, daß, unter den für die λ_ν angegebenen Voraussetzungen, bereits das kleinste konvexe Polygon, welches die Punkte $x_0, \ldots, x_n$ enthält, sämtliche Nullstellen von $P(x)$ enthalten muß.

Den Hilfssatz B beweise ich folgendermaßen: Aus der Definitionsgleichung (14) folgt

$$P(x_0) = \lambda_0(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_k)(x_0-x_{k+1})\ldots(x_0-x_n), \ldots,$$
$$P(x_k) = \lambda_k(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n).$$

[7]) Satz IV bleibt auch dann richtig, wenn einige von den Zahlen λ verschwinden.

Daher ist

$$\lambda_0 \frac{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)}{P(x_0)} + \dots + \lambda_k \frac{(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}{P(x_k)}$$
$$= \frac{1}{(x_0-x_1)\dots(x_0-x_k)} + \dots + \frac{1}{(x_k-x_0)\dots(x_k-x_{k-1})}.$$

Doch ist die rechtsstehende Summe für voneinander verschiedene x_ν identisch gleich 0, also besteht die für unsere Zwecke grundlegende Relation

$$(15)\quad \lambda_0 \frac{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)}{(x_0-\xi_1)(x_0-\xi_2)\dots(x_0-\xi_n)} + \dots + \lambda_k \frac{(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}{(x_k-\xi_1)(x_k-\xi_2)\dots(x_k-\xi_n)} = 0,$$

wobei $\xi_1, \dots, \xi_n$ die Nullstellen von $P(x)$ bedeuten. Aus dieser Relation folgt durch ähnliche Schlüsse wie oben, daß $x_{k+1}, \dots, x_n$ und sämtliche ξ_ν nicht gleichzeitig außerhalb eines Kreises wie K' liegen können, aus dessen Randpunkten der die Punkte $x_0, \dots, x_k$ enthaltende Kreis K unter einem Winkel $\leqq \frac{\pi}{4n}$ zu sehen ist.

Sonst würden nämlich die Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{4n} < \operatorname{Arg}\left(\frac{x_s-x_i}{x_0-x_i}\right) < \frac{\pi}{4n}, \qquad -\frac{\pi}{4n} < \operatorname{Arg}\left(\frac{x_0-\xi_j}{x_s-\xi_j}\right) < \frac{\pi}{4n}$$
$$(s=1,\dots,k;\ i=k+1,\dots,n;\ j=1,\dots,n)$$

bestehen, also könnte die Summe

$$\sum_{s=1}^{k} \lambda_s \frac{(x_s-x_{k+1})\dots(x_s-x_n)}{(x_0-x_{k+1})\dots(x_0-x_n)} \cdot \frac{(x_0-\xi_1)\dots(x_0-\xi_n)}{(x_s-\xi_1)\dots(x_s-\xi_n)}$$

keinesfalls negativ sein, wie das nach (15) sein müßte. Damit ist B bewiesen.

Aus den beiden Hilfsätzen A und B folgt nun Satz IV auf folgende Weise: Sei $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}, K_{n-1}$ eine Folge konzentrischer Kreise, deren erster die Strecke $\overline{x_0 x_1}$ als Durchmesser besitzt und deren zweiter, dritter, ... aus dem Vorangehenden durch eine Vergrößerung des Halbmessers in dem Verhältnis $1 : \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8n}$ hervorgeht. Dann verschwindet das Polynom $P(x)$ in einem dieser Kreise.

Denn ist $P(x)$ innerhalb und am Rande des Kreises K_{n-2} und daher jedes vorangehenden von Null verschieden, so müssen die Kreise $K_1, K_2, \dots, K_{n-2}$ nach den Hilfssätzen A und B der Reihe nach genau $2, 3, \dots, n-1$ Punkte des Punktsystems $x_0, \dots, x_n$ enthalten, also muß der letzte Kreis K_{n-1}, je nachdem er den letzten Punkt dieses Systems einschließt oder ausschließt, laut A bzw. B sämtliche Nullstellen von $P(x)$ bzw. mindestens eine von ihnen enthalten. W. z. b. w.

Budapest, März 1923.

(Eingegangen am 28. März 1923.)