Werk

Titel: Urysohn. P., Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zu-sammen...

Ort: Berlin

Jahr: 1924

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0021|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Ein Beitrag zur Theorie der ebenen Gebiete unendlich hohen Zusammenhanges.

Von

Paul Urysohn in Moskau.

---

1. Der Einfachheit wegen betrachten wir nur *beschränkte* Gebiete, obschon unsere Betrachtungen ohne weiteres auf alle Gebiete mit beschränkter Grenze anwendbar sind.

Nach Hausdorff[1]) *nennt man ein zusammenhängendes Gebiet k-fach zusammenhängend, wenn seine Grenze* (oder sein Komplement[2])) *k Komponenten*[3]) *hat*; k ist entweder eine natürliche Zahl oder $\aleph_0$ oder $2^{\aleph_0}$.[4]) Der Vorteil der Hausdorffschen Definition gegenüber den früheren, die entweder von Polygonen, die in G liegen und Grenzpunkte von G umschließen[5]), oder von G nicht zerstückelnden Querschnitten ausgingen, besteht in der Unterscheidung der beiden Fälle $k = \aleph_0$ und $k = 2^{\aleph_0}$; sonst sind aber alle erwähnten Definitionen untereinander äquivalent.

Die Fälle unendlich hohen Zusammenhanges waren bis jetzt noch sehr wenig untersucht. Im zitierten Hausdorffschen Buche finden wir nur folgende Bemerkung[1]): „Ist k hingegen unendlich, so lassen sich beliebig viele sukzessive Querschnitte $W, W', W'', \ldots$ ziehen, ohne G zu zerstückeln; die verbleibenden Gebiete $G', G'', G''', \ldots$ sind immer noch k-fach zusammenhängend. Es wäre aber falsch, zu sagen, daß man unendlich viele Querschnitte ziehen kann, ohne G zu zerstückeln, denn die schließlich übrigbleibende Menge $\mathfrak{D}(G, G', G'', \ldots)$ braucht weder ein Gebiet noch zusammenhängend zu sein."

In der Tat kann man leicht Beispiele konstruieren, die eine der genannten (oder beide) Möglichkeiten realisieren. Daher ist die Haus-

---

[1]) Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 351.

[2]) Beide Bedingungen sind identisch: l. c. S. 345, XI.

[3]) l. c. S. 245.

[4]) l. c. S. 321.

[5]) Carathéodory, Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete, Math. Ann. 73 (1913), S. 325, Fußnote.

dorffsche Behauptung jedenfalls richtig, wenn man sie als Hinweis versteht, daß beim sukzessiven Ziehen von *irgendwelchen* nicht zerstückelnden Querschnitten man im allgemeinen von der Restmenge nichts behaupten kann; und daß die dieser Bemerkung vorhergehende Schlußweise keineswegs ausreicht, um behaupten zu können, daß „man unendlich viele Querschnitte ziehen kann, ohne G zu zerstückeln"; daß also letztere Behauptung, wenn auch richtig, jedenfalls eines speziellen Beweises bedarf. Ich will aber zeigen, daß die genannte Behauptung wirklich *richtig* ist, und daß man sogar abzählbar viele Querschnitte immer so wählen kann, daß die Restmenge in *ein einfach zusammenhängendes Gebiet* sich verwandelt.

2. Ich werde sogar den viel schärferen Satz beweisen, den man folgendermaßen formulieren kann:

Satz. *Zu jedem zusammenhängenden beschränkten ebenen Gebiete G kann man ein System von (endlich oder abzählbar vielen) geradlinigen, sich paarweise nicht schneidenden Querschnitten $J_1, J_2, \ldots$ derart finden, daß $G - \Sigma J_n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.*

Jedes J_n ist also, der üblichen Definition eines Querschnittes zufolge, eine *geradlinige* Strecke, deren innere Punkte in G, deren Endpunkte aber auf der Grenze von G liegen. J_n und J_m $(n \neq m)$ dürfen sich, unserer Voraussetzung gemäß, nicht schneiden; auch kann, da J_n und J_m Querschnitte sind, ein Endpunkt von J_n nicht mit einem inneren Punkte von J_m zusammenfallen; aber der Fall eines gemeinsamen Endpunktes wird nicht ausgeschlossen.

Wegen der Forderung der Geradlinigkeit ist unser Satz sogar für endlich-vielfach zusammenhängende Gebiete neu; was aber seine Tragweite im allgemeinen Falle betrifft, so sei nur bemerkt, daß

1. wir mit $\aleph_0$ Querschnitten auch dann auskommen, wenn $k = 2^{\aleph_0}$ ist;

2. bei einem Gebiete von unendlich hohem Zusammenhange auch solche Komponenten der Grenze vorkommen können, die keinen einzigen vom Gebiete aus erreichbaren Punkt enthalten; auf einer solchen Komponente kann also überhaupt kein (also erst recht kein geradliniger) Querschnitt endigen[6]).

---

[6]) Als Beispiel eines solchen Gebietes kann man die (offene) Kreisscheibe $x^2+y^2<4$, aus der man abzählbar viele Kurvenbögen $C_0, C_1, C_2, \ldots$ ausgeschnitten hat, wählen; dabei bedeutet C_0 die Strecke $-1 \leqq x \leqq 1$ der x-Achse, C_{2n-1} den Bogen $x \geqq -1$ der Ellipse $\dfrac{x^2}{1+\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2} = 1$ und C_{2n} den Bogen $x \leqq 1$ der Ellipse $\dfrac{x^2}{1+\left(\frac{1}{2n}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2n}\right)^2} = 1$: die Komponente C_0 der Grenze dieses Gebietes enthält, in der Tat, keinen einzigen erreichbaren Punkt.

Diese Bemerkungen weisen, glaube ich, deutlich genug darauf hin, daß die Kompliziertheit des folgenden Beweises durchaus in der Natur der Sache liegt.

3. Ein Hilfssatz über (A)-Systeme reeller Zahlen[7]).

Hilfssatz: Es sei

$$\varrho,\ \varrho_0,\ \varrho_1,\ \varrho_{00},\ \varrho_{01},\ \varrho_{10},\ \varrho_{11},\ \ldots,\ \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots \tag{1}$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots;\quad i_n = 0 \text{ oder } 1)$$

ein System reeller nicht-relativer Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß für jede Indizesfolge

$$i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots \tag{2}$$

die zugehörigen Zahlen

$$\varrho,\ \varrho_{i_1},\ \varrho_{i_1 i_2},\ \ldots,\ \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots$$

eine abnehmende

$$\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k} \geqq \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}} \tag{3}$$

gegen 0 konvergierende

$$\lim_{k \to \infty} \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k} = 0 \tag{4}$$

Folge bilden; dann konvergiert die ganze Folge (1) gegen 0.

Beweis. Wenn wir mit A die Menge aller Zahlen (1) bezeichnen, mit $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ aber die Menge derjenigen unter ihnen, deren Indizesfolge mit $i_1 i_2 \ldots i_k$ anfängt, so ist offenbar

$$A_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}) + A_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} + A_{i_1 i_2 \ldots i_k 1};$$

wenn wir daher mit α bzw. $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ den *Limes superior* der Zahlenfolge A bzw. $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ bezeichnen, so ist entweder

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}$$

oder

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}.$$

Wir können also die Indizes $i_1, i_2, \ldots$ sukzessive so wählen, daß, für die so entstandene Folge (2),

$$\alpha = \alpha_{i_1} = \alpha_{i_1 i_2} = \ldots = \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \ldots \tag{5}$$

---

[7]) Aus dem Wortlaute des Hilfssatzes kann man sofort ersehen, was wir hier unter einem (A)-Systeme verstehen. Im Falle eines allgemeinen (A)-Systems $\{Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}\}$ (die $Q_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ sind irgendwelche Dinge), nehmen die Indizes i_n nicht nur die Werte 0 und 1, sondern alle ganzen nicht negativen (bzw. positiven) Werte an. Die Kenntnis der Theorie der (A)-Systeme und (A)-Mengen ist jedoch für das folgende keineswegs erforderlich.

sei. Nun folgt aber aus (3), daß

$$\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \leqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k} \tag{6}$$

ist, was wegen (4) und (5), $\alpha = 0$, d. h. unsere Behauptung zur Folge hat.

4. Ein Hilfssatz über nichtzusammenhängende abgeschlossene Mengen.

Nach Hausdorff[8]) nennt man eine Menge M *σ-zusammenhängend*, falls $\varrho(A, B) \leqq \sigma$ bei *jeder* Zerspaltung $M = A + B$ ist; dabei bedeutet $\varrho(A, B)$ den *Abstand* zwischen A und B, d. h. die untere Schranke der Entfernungen zwischen einem Punkte x von A und einem Punkte y von B.[9])

Es sei nun F eine abgeschlossene und beschränkte, also in sich kompakte[10]) ebene Punktmenge; dann gilt der

Hilfssatz. Wenn F nicht zusammenhängend ist, so kann man eine Zahl $\varrho > 0$ und eine Zerspaltung $F = F_0 + F_1$ derart bestimmen, daß F_0 und F_1 ϱ-zusammenhängende abgeschlossene Mengen sind, deren Abstand $= \varrho$ ist:

$$\varrho(F_0, F_1) = \varrho. \tag{7}$$

Beweis. In unserem Falle gibt es eine *kleinste* Zahl ϱ derart, daß F noch ϱ-zusammenhängend ist[11]); außerdem gibt es nur *endlich viele* Zerspaltungen $F = A + B$, bei denen $\varrho(A, B) > \frac{\varrho}{2}$ ausfällt[11]). Daraus folgert man leicht, daß es Zerspaltungen mit $\varrho(A, B) = \varrho$ tatsächlich gibt, aber auch nur endlich viele. Unser Ziel ist, zu beweisen, daß es zwischen diesen „*ϱ-Zerspaltungen*“ solche gibt, bei denen die Mengen A und B ϱ-zusammenhängend sind: daß diese Mengen abgeschlossen sind, ist ja selbstverständlich.

Es sei nun

$$F = A_1 + B_1$$

irgendeine ϱ-Zerspaltung. Wenn A_1 und B_1 ϱ-zusammenhängend sind, ist unsere Behauptung bewiesen; wenn nicht, so läßt z. B. A_1 eine Zerlegung $A_1 = A_2 + A_2^*$ mit $\varrho(A_2, A_2^*) > \varrho$ zu. Dann ist

$$F = A_2 + (A_2^* + B_1) = A_2 + B_2$$

eine neue ϱ-Zerspaltung, in der $A_2 \subset A_1$ ist. Wenn A_2 noch nicht ϱ-zusammenhängend ist, können wir in derselben Weise eine dritte ϱ-Zerspaltung $F = A_3 + B_3$ mit $A_3 \subset A_2$ finden, usw. Dieses Verfahren muß

[8]) l. c. S. 298.

[9]) Hausdorff bezeichnet diese Zahl mit $\delta(A, B)$ und nennt sie „untere Entfernung“.

[10]) l. c. S. 329 u. 264.

[11]) l. c. S. 301.

aber nach endlich vielen Schritten ein Ende nehmen; dabei erhalten wir eine ϱ-Zerspaltung

$$F = A_n + B_n,$$

bei der wenigstens die erste Menge ϱ-zusammenhängend ist. Wenn dasselbe auch von B_n gilt, ist unsere Behauptung bewiesen; im entgegengesetzten Falle zerfällt B_n in endlich viele ϱ-*Komponenten*[12]) $C_1, C_2, \ldots, C_m$, d. h. in ϱ-zusammenhängende Mengen, deren gegenseitige Abstände $\varrho(C_i, C_k)$ sämtlich $> \varrho$ sind. Nun ist $\varrho(C_i, A_n)$ für jedes i gleich ϱ; denn sonst würde

$$F = C_i + (A_n + C_1 + \ldots + C_{i-1} + C_{i+1} + \ldots + C_m)$$

keine ϱ-zusammenhängende Menge sein. Da aber die Summe zweier ϱ-zusammenhängender Mengen, deren Abstand $= \varrho$ ist, offenbar auch eine ϱ-zusammenhängende Menge bildet, so erkennen wir schrittweise, daß jede der Meugen

$$A_n, \quad A_n + C_1, \quad A_n + C_1 + C_2, \quad \ldots, \quad A_n + C_1 + C_2 + \ldots + C_{m-1}$$

ϱ-zusammenhängend, also daß

$$F = (A_n + C_1 + \ldots + C_{m-1}) + C_m$$

eine Zerspaltung der gewünschten Art ist. W. z. b. w.

5. Entwicklung einer abgeschlossenen Menge in ein (A)-System[7]).

Es sei F wiederum eine abgeschlossene beschränkte Menge. Wenn sie zusammenhängend ist, setzen wir $F = F_0 = F_1$ und $\varrho = 0$; sonst soll aber

$$F = F_0 + F_1$$

die soeben gewonnene Zerspaltung sein, bei der also

$$\varrho(F_0, F_1) = \varrho \tag{7}$$

und F_0 und F_1 ϱ-zusammenhängende Mengen sind. Es ist zu bemerken, daß (7) auch im ersten Falle richtig ist, und daß F in beiden Fällen ϱ-zusammenhängend ist.

Mit F_0 und F_1 verfahren wir in derselben Weise; wir erhalten dabei zwei Zerlegungen

$$F_0 = F_{00} + F_{01} \quad \text{und} \quad F_1 = F_{10} + F_{11}$$

und zwei dazugehörige Zahlen, ϱ_0 und ϱ_1; dabei sind $F_{i_1 0}$ und $F_{i_1 1}$ ($i_1 = 0$ oder 1) entweder identisch oder elementenfremd, ferner

$$\varrho(F_{i_1 0}, F_{i_1 1}) = \varrho_{i_1}$$

---

[12]) l. c. S. 299.

und jede der drei Mengen F_{i_1}, $F_{i_1 0}$, $F_{i_1 1}$ ϱ_{i_1}-zusammenhängend. Außerdem ist ϱ_{i_1} die *kleinste* Zahl, bei der F_{i_1} ϱ_{i_1}-zusammenhängend ist, woraus folgt, daß $\varrho_{i_1} \leqq \varrho$ ist.

Mit den gewonnenen Mengen $F_{i_1 i_2}$ verfahren wir in derselben Weise, usw.; wir erhalten ein (A)-System von abgeschlossenen Mengen

$$F, F_0, F_1, F_{00}, F_{01}, F_{10}, F_{11}, \ldots, F_{i_1 i_2 \ldots i_k}, \ldots \tag{8}$$

und ein dazugehöriges (A)-System (1) reeller nicht-negativer Zahlen; dabei ist

$$F_{i_1 i_2 \ldots i_k} = F_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} + F_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}, \tag{9}$$

$$\varrho(F_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}, F_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}) = \varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}; \tag{10}$$

ferner ist $F_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ $\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}$-zusammenhängend, und $\varrho_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ die kleinste derartige Zahl, woraus folgt, daß die Relation (3) des § 3 erfüllt ist.

6. Ich will jetzt zeigen, daß dasselbe auch von der Relation (4), und zwar für jede Indizesfolge (2) gilt; d. h. daß der Hilfssatz des § 3 in unserem Falle anwendbar ist.

In der Tat, wenn (4) für irgendeine Indizesfolge nicht erfüllt wäre, so könnten wir mittels einer Umnumerierung erreichen, daß dies für die Folge

$$0, 0, \ldots, 0, \ldots$$

zutreffe. Dann wären alle Zahlen $\varrho_{00\ldots0}$ größer als eine gewisse positive Zahl α, d. h. es wäre

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho(F_0, F_1) > \alpha \\ \varrho(F_{00}, F_{01}) > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varrho(F_{00\ldots00}, F_{00\ldots01}) > \alpha \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right. \tag{11}$$

Nun ist aber $F_{01} \subset F_0$, $F_{001} \subset F_{00} \subset F_0$, usw.; anderseits folgt allgemein aus $B \subset C$, daß

$$\varrho(A, B) \geqq \varrho(A, C)$$

ist. Die Ungleichungen (11) hätten also zur Folge, daß die abzählbar vielen Mengen

$$F_1, F_{01}, F_{001}, \ldots, F_{00\ldots01}, \ldots$$

paarweise einen Abstand $> \alpha$ hätten, was wegen der Beschränktheit von F offenbar unmöglich ist. Damit ist unsere Behauptung bewiesen; die Folge (1) strebt also in unserem Falle gegen 0.

7. Es sei $F_{i_1 i_2 \dots i_k}$ eine Menge aus dem Systeme (8), die nicht zusammenhängend ist. Um die Schreibweise etwas abzukürzen, werde ich die Indizesfolge $i_1 i_2 \dots i_k$ [13]) durch einen $*$ ersetzen: F_{*0} soll also $F_{i_1 i_2 \dots i_k 0}$ bedeuten. Im gegenwärtigen Falle sind F_{*0} und F_{*1} elementenfremde in sich kompakte Mengen; man kann folglich [14]) einen Punkt p_{*0} aus F_{*0} und einen Punkt p_{*1} aus F_{*1} derart wählen, daß

$$\varrho(p_{*0}, p_{*1}) = \varrho(F_{*0}, F_{*1}) = \varrho_*, \tag{12}$$

d. h. daß die geradlinige (abgeschlossene) Strecke

$$\Delta_* = \overline{p_{*0} p_{*1}}$$

die kürzeste Verbindungslinie zwischen F_{*0} und F_{*1} sei. Die zugehörige *offene* Strecke

$$J_* = \Delta_* - (p_{*0} + p_{*1}) \tag{13}$$

ist also zu $F_{*0} + F_{*1} = F_*$ fremd; sie ist es aber auch zu $F - F_*$, denn letztere Menge genügt offenbar der Ungleichung

$$\varrho(F - F_*, F_*) \geqq \varrho_*, \text{ [15])}$$

während jeder Punkt der Strecke Δ_*, deren Länge $= \varrho_*$ ist, und deren beide Endpunkte auf F_* liegen, evidentermaßen nicht mehr als um $\frac{1}{2}\varrho_*$ von F_* entfernt sein kann. Es ist also

$$J_* \cdot F = 0, \quad \Delta_* \cdot F = p_{*0} + p_{*1}, \tag{14}$$

d. h. die Endpunkte der Strecke Δ_* liegen auf F, ihre inneren Punkte aber außerhalb F.

8. Wenn wir dieselbe Konstruktion für jede nicht zusammenhängende Menge F_* ausführen, bei zusammenhängendem F_* aber $\Delta_* = J_* = 0$ setzen, erhalten wir ein System von abgeschlossenen

$$\Delta, \Delta_0, \Delta_1, \Delta_{00}, \dots, \Delta_{i_1 i_2 \dots i_k}, \dots \tag{15}$$

---

[13]) Die leere Menge ist auch als eine (die Menge F definierende) Indizesfolge zu betrachten.

[14]) Hausdorff, l. c. S. 292.

[15]) Es ist sogar für jede Indizesfolge $i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}$

$$\varrho(F - F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}) \geqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

Wir können nämlich voraussetzen, daß $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_k} > 0$ ist; dann ist aber, wenn man allgemein unter j_n die Zahl $1 - i_n$ versteht,

$$F - F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}} = F_{j_1} + F_{i_1 j_2} + F_{i_1 i_2 j_3} + \dots + F_{i_1 i_2 \dots i_k j_{k+1}}$$

und, für jedes $n \leqq k$

$$\varrho(F_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1}}) \geqq \varrho(F_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1}}, F_{i_1 i_2 \dots i_n j_{n+1}})$$
$$= \varrho_{i_1 i_2 \dots i_n} \geqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_k}.$$

bzw. offenen

$$J,\ J_0,\ J_1,\ J_{00},\ \ldots,\ J_{i_1 i_2 \ldots i_k},\ \ldots \tag{16}$$

Strecken, deren Längen (1) gegen 0 konvergieren (§ 6).

Ich will jetzt zeigen, daß zwei verschiedene Strecken Δ_* höchstens einen gemeinsamen *Endpunkt* haben können. Daß ein Endpunkt der einen nicht mit einem inneren Punkte der anderen zusammenfallen kann, folgt schon aus dem letzten Ergebnisse des vorigen Paragraphen; es handelt sich also darum, zu zeigen, daß zwei Strecken Δ_* sich nicht *schneiden* können. Wir dürfen natürlich voraussetzen, daß keine der beiden Strecken leer ist.

Zwei Fälle sind zu unterscheiden:

1. Die Indizesfolge der zweiten Strecke beginnt mit der vollen Indizesfolge der ersten, etwa so:

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \quad \text{und} \quad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1} \ldots i_{k+l}} \qquad (k \geqq 0,\ l \geqq 1);$$

oder wenn wir, was der Symmetrie wegen erlaubt ist, $i_{k+1} = 0$ voraussetzen und eine der früheren analoge Schreibweise benutzen,

$$\Delta_* \quad \text{und} \quad \Delta_{*0*'}.$$

Die Strecke Δ_* hat eine Länge $= \varrho_*$; einer ihrer Endpunkte, p_{*0}, gehört zur Menge F_{*0}, der andere, p_{*1}, zu F_{*1}. Die Länge der Strecke $\Delta_{*0*'}$ ist $= \varrho_{*0*'}$; ihre Endpunkte $p_{*0*'0}$ und $p_{*0*'1}$ gehören bzw. zu den Mengen $F_{*0*'0}$ und $F_{*0*'1}$, also beide zur Menge F_{*0}. Nun ist aber

$$\varrho(p_{*1}, F_{*0}) \geqq \varrho(F_{*1}, F_{*0}) = \varrho_*,$$

woraus folgt, daß beide Endpunkte von $\Delta_{*0*'}$ wenigstens um ϱ_* von p_{*1} entfernt sind:

$$\varrho(p_{*0*'0}, p_{*1}) \geqq \varrho_*, \qquad \varrho(p_{*0*'1}, p_{*1}) \geqq \varrho_*. \tag{17}$$

Da andererseits die Mengen $F_{*0*'0}$ und $F_{*0*'1}$ zueinander fremd sind (sonst wäre ja $\Delta_{*0*'} = 0$), gehört der Punkt p_{*0} wenigstens einer dieser Mengen nicht an (obschon er außerhalb ihrer Summe liegen kann); wir können voraussetzen, daß z. B. p_{*0} außerhalb $F_{*0*'0}$ liegt, also zur Menge $F - F_{*0*'0}$ gehört. Wir haben aber gesehen[15]), daß

$$\varrho(F - F_{*0*'0}, F_{*0*'0}) \geqq \varrho_{*0*'};$$

folglich ist

$$\varrho(p_{*0}, p_{*0*'0}) \geqq \varrho_{*0*'}. \tag{18}$$

Wenn wir jetzt um p_{*1} einen Kreis mit dem Radius ϱ_* legen, so wird p_{*0} auf seiner Peripherie und $p_{*0*'0}$ und $p_{*0*'1}$ jedenfalls (zufolge (17)) nicht in seinem Inneren liegen. Wenn also Δ_* und $\Delta_{*0*'}$ einen Schnitt-

punkt q hätten, so wäre $\overline{q\,p_{*0}}$ die kürzeste Verbindungsstrecke von q mit der Kreisperipherie, woraus

$$\varrho(q, p_{*0}) \leqq \varrho(q, p_{*0*'1}),$$

als auch

$$(19)\begin{cases}\varrho(p_{*0*'0}, p_{*0}) \leqq \varrho(p_{*0*'0}, q) + \varrho(q, p_{*0}) \leqq \varrho(p_{*0*'0}, q) + \varrho(q, p_{*0*'1}) \\ = \varrho(p_{*0*'0}, p_{*0*'1}) = \varrho_{*0*'}\end{cases}$$

folgen würde. Wegen (18) müßten folglich in (19) überall die Gleichheitszeichen gelten, was aber nur dann möglich, wenn beide Strecken auf derselben Geraden liegen. Im letzteren Falle folgt aber sofort aus (17), daß beide Strecken höchstens einen gemeinsamen *Endpunkt* haben können. Damit ist unsere Behauptung im Falle 1 bewiesen.

2. Im entgegengesetzten Falle sind die Indizesfolgen der beiden Strecken bis zu einer k-ten ($k \geqq 0$) Stelle identisch, an der $(k+1)$-ten Stelle aber verschieden, etwa folgendermaßen:

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 0 i_{k+2} \ldots i_{k+l}} \quad \text{und} \quad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 1 i'_{k+2} \ldots i'_{k+m}} \quad (k \geqq 0,\ l \geqq 1,\ m \geqq 1)$$

oder

$$\Delta_{*0*'} \quad \text{und} \quad \Delta_{*1*''}.$$

Wir können voraussetzen, daß $\varrho_* > 0$ ist (denn sonst wären beide Strecken leer), und (aus Symmetriegründen) daß

$$(20) \qquad \varrho_{*1*''} \geqq \varrho_{*0*'}$$

ist. Es genügt jetzt im vorhergehenden Beweise

$$p_{*0},\ p_{*1},\ \varrho_*; \qquad p_{*0*'0},\ p_{*0*'1},\ \varrho_{*0*'}$$

bzw. durch

$$p_{*1*''0},\ p_{*1*''1},\ \varrho_{*1*''}; \qquad p_{*0*'0},\ p_{*0*'1}\ \varrho_{*0*'}$$

zu ersetzen, um ihn wörtlich auf den jetzigen Fall übertragen zu können; es folgen nämlich aus (20) und

$$\varrho(F_{*0*'},\ F_{*1*''}) \geqq \varrho(F_{*0},\ F_{*1}) = \varrho_* \geqq \varrho_{*1*''}$$

die den Ungleichungen (17) und (18) analogen Ungleichungen.

9. Wir betrachten jetzt die Menge

$$(21) \qquad K = F + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1 \ldots i_k} J_{i_1 i_2 \ldots i_k} = F + \Sigma\Sigma \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

die aus F durch Hinzufügung aller Strecken (16) bzw. (15) entsteht; wir werden zeigen, daß K ein *Kontinuum*, d. h. eine zusammenhängende abgeschlossene Menge ist.

Es sei, in der Tat, x irgendein Punkt, der zur Menge K fremd ist. Da F abgeschlossen ist, so ist der Abstand $\varrho(x, F)$ positiv; wir bezeichnen ihn durch 2λ:

$$\lambda = \frac{1}{2}\varrho(x, F) > 0. \tag{22}$$

Daraus folgt (§ 6), daß es nur eine endliche Anzahl von Strecken Δ_* gibt, deren Längen $\geqq \lambda$ sind; es seien

$$\Delta_{*_1}, \Delta_{*_2}, \ldots, \Delta_{*_s} \tag{23}$$

diese Strecken.

Für jede nicht zu (23) gehörende Strecke Δ_* gilt die Ungleichung

$$\varrho(x, \Delta_*) > \lambda; \tag{24}$$

denn die Länge von Δ_* ist $< \lambda$, während ihre Endpunkte zur Menge F, deren Abstand von x gleich 2λ ist, gehören. Die s Zahlen

$$\lambda_i = \varrho(x, \Delta_{*_i}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s) \tag{25}$$

sind aber positiv; wenn wir also die kleinste der $s+1$ Zahlen

$$\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$$

mit μ bezeichnen, so folgt aus (22), (24) und (25), daß

$$\varrho(x, K) \geqq \mu > 0$$

ist; x ist also kein Häufungspunkt von K. Wir sehen folglich, daß K *abgeschlossen* ist.

10. Wenn die abgeschlossene Menge K nicht zusammenhängend wäre, so könnte man sie in zwei abgeschlossene, nicht leere, zueinander fremde Teilmengen

$$K = A_0 + A_1$$

spalten. Ich will zeigen, daß die Annahme der Möglichkeit einer derartigen Zerlegung zu einem Widerspruche führt.

Wir werden sagen, daß eine Menge, die in K enthalten ist und sowohl mit A_0, wie auch mit A_1 gemeinschaftliche Punkte hat, die „Eigenschaft $\mathfrak{P}$" besitzt. Eine zusammenhängende Menge kann offenbar diese Eigenschaft nicht besitzen; das gilt, insbesondere für alle Strecken Δ_*. Wir beweisen jetzt:

1. F besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{P}$. Wenn nämlich $F \subset A_i$ wäre, so würde auch für jede Strecke Δ_* — deren Endpunkte ja zu F gehören — die Inklusion $\Delta_* \subset A_i$ gelten; folglich wäre $K \subset A_i$, also $K = A_i$ und A_{1-i} leer.

2. Wenn $F_{i_1 i_2 \dots i_k} = F_*$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzt, so gibt es ein i_{k+1} derart, daß auch $F_{*i_{k+1}}$ diese Eigenschaft besitzt. Im entgegengesetzten Falle wäre nämlich

$$F_{*0} \subset A_i, \qquad F_{*1} \subset A_{1-i},$$

also müßte Δ_*, die einen Endpunkt auf F_{*0}, den anderen aber auf F_{*1} hat, die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzen.

Daraus schließen wir auf die Existenz einer Indizesfolge

$$i_1, i_2, \dots, i_k, \dots,$$

die so beschaffen ist, daß sämtliche Mengen $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ die Eigenschaft $\mathfrak{P}$ besitzen. Da $F_{i_1 i_2 \dots i_n}$ $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_n}$-zusammenhängend ist, so folgt hieraus, daß

$$\varrho\,(A_0, A_1) \leqq \varrho_{i_1 i_2 \dots i_n},$$

was wegen $\varrho_{i_1 i_2 \dots i_n} \to 0$ zur Gleichung

$$\varrho\,(A_0, A_1) = 0$$

führt; letztere ist aber für zwei abgeschlossene elementenfremde Mengen unmöglich. Damit ist bewiesen, daß K zusammenhängend ist. W. z. b. w.

11. Wir haben also bewiesen, daß die Hinzufügung der Strecken (16) die Menge F in ein Kontinuum verwandelt. Wir wollen jetzt zeigen, daß das Streckensystem (16) in dieser Hinsicht *irreduzibel* ist, d. h. daß bei Fortlassung einer einzigen Strecke J_* aus der (ersten) Doppelsumme in (21) wir eine Menge $K - J_*$ erhalten werden, die (wohl noch abgeschlossen, aber) nicht mehr zusammenhängend ist.

Wir führen die Mengen

$$K_{i_1 i_2 \dots i_n} = F_{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_{n+1} \dots i_{n+k}} J_{i_1 i_2 \dots i_n i_{n+1} \dots i_{n+k}} \tag{26}$$

ein; K_* entsteht also aus F_* durch Hinzufügung aller Strecken, deren Indizesfolge mit $*$ beginnt. Die wörtliche Übertragung des vorhergehenden Beweises zeigt uns, daß auch jedes $K_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ein Kontinuum ist.

Nun folgt aber aus (21) und (26) die für jedes n gültige Mengengleichung

$$K = \sum_{i_1 \dots i_n} K_{i_1 i_2 \dots i_n} + \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i_1 \dots i_k} J_{i_1 i_2 \dots i_k}, \tag{27}$$

d. h. K darf als die Vereinigungsmenge der K_* mit n Indizes und der $J_{*'}$ mit $< n$ Indizes betrachtet werden.

Es ist übrigens unmittelbar ersichtlich, daß zwei Glieder K_* und $K_{*'}$ der ersten Summe entweder elementenfremd oder identisch sind. In der Tat, wenn die zugehörigen F_* und $F_{*'}$ elementenfremd sind, so sind es auch, wegen (26) und § 8, die Mengen K_* und $K_{*'}$; im entgegen-

gesetzten Falle sind aber F_* und $F_{*'}$ untereinander identisch und zusammenhängend, also jede Strecke, deren Indizesfolge mit $*$ bzw. $*'$ anfängt, ist leer, woraus

$$K_* = F_* = F_{*'} = K_{*'}$$

folgt. In diesem Falle gibt es eine aus $< n$ Indizes bestehende Indizesfolge $*''$ (der gemeinsame Anfang von $*$ und $*'$), der eine zusammenhängende Menge $F_{*''}$ entspricht. Eine solche Folge wollen wir *singulär* nennen.

Die Glieder der zweiten (Doppel-) Summe in (27) sind jedenfalls paarweise elementenfremd (§ 8); einige von ihnen können aber leer sein. Letzteres trifft wiederum dann und nur dann zu, wenn singuläre Indizesfolgen vorhanden sind.

Wenn also keine singulären Folgen vorkommen, besteht K aus 2^n voneinander verschiedenen Kontinua K_* und

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$$

nicht leeren Strecken.

Im allgemeinen Falle genügt es, die *primitiv-singulären* Indizesfolgen zu betrachten; darunter verstehen wir solche singuläre Indizesfolgen $i_1 i_2 \dots i_{k-1} i_k$ $(k \leqq n)$, für die $i_1 i_2 \dots i_{k-1}$ nicht mehr singulär ist[16]). Jede singuläre Folge enthält nämlich eine primitiv-singuläre.

Wenn es nur eine primitiv-singuläre Folge $i_1 i_2 \dots i_k$ gibt, so sind in (27) die 2^{n-k} Kontinua

$$K_{i_1 i_2 \dots i_k i'_{k+1} \dots i'_n} \qquad (i'_{k+1} \dots i'_n = 0 \text{ oder } 1)$$

untereinander identisch und die $2^{n-k} - 1$ Strecken

$$J_{i_1 i_2 \dots i_k i'_{k+1} \dots i'_{k+l}} \quad (0 \leqq l < n-k,\ i'_{k+1} \dots i'_{k+l} = 0 \text{ oder } 1)$$

leer; d. h. K besteht in diesem Falle aus $2^n - (2^{n-k} - 1)$ voneinander verschiedenen Kontinuen und $2^n - 1 - (2^{n-k} - 1)$ nicht leeren Strecken.

Wenn mehrere primitiv-singuläre Folgen vorhanden sind, so wirken sie, wie leicht ersichtlich, *unabhängig* voneinander. Wir kommen also zu folgendem Ergebnisse:

Wenn die erste Summe in (27) eine aus m Komponenten bestehende abgeschlossene Menge $K^{(n)}$ darstellt, so enthält die zweite Summe genau $m - 1$ nicht leere Strecken.

Wenn wir jetzt sukzessive je eine Strecke aus der zweiten Summe in die erste herüberführen, so wird, da die Strecken sowohl miteinander wie auch mit $K^{(n)}$ keine gemeinschaftliche innere Punkte haben, die Kom-

[16]) Die leere Indizesfolge soll, falls singulär, ebenfalls primitiv-singulär heißen.

ponentenzahl der betreffenden abgeschlossenen Menge jedes Mal höchstens um eine Einheit verringert. Es ist also unbedingt nötig, *alle* Glieder der zweiten Summe zu nehmen, um eine zusammenhängende Menge zu erhalten; d. h. K hört auf zusammenhängend zu sein, wenn man daraus eine mit weniger als n Indizes behaftete Strecke J_{*_0} fortläßt. Da n beliebig ist, ist die Irreduzibilität des Streckensystems (16) damit bewiesen.

12. Den bisher bewiesenen Satz können wir folgendermaßen formulieren:

Es sei F eine ebene [17]) abgeschlossene und beschränkte Menge, die kein Kontinuum ist. Es gibt alsdann ein System

$$\mathfrak{S} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n, \ldots\}$$ [18])

von (endlich oder abzählbar vielen) offenen Strecken J_n, das die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Die Länge ϱ_n von J_n strebt gegen Null.

2. Jede Strecke des Systems liegt außerhalb F, ihre beiden Endpunkte aber auf F.

2a. Die beiden Endpunkte von J_n gehören verschiedenen Komponenten der Menge F an.

3. Zwei verschiedene Strecken aus $\mathfrak{S}$ schneiden sich nicht.

4. $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$ ist ein Kontinuum.

5. Das System $\mathfrak{S}$ ist in bezug auf die letzte Eigenschaft *irreduzibel* (d. h. $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ ist für kein k ein Kontinuum).

Ein Vergleich mit dem Beweise in § 9 läßt übrigens leicht erkennen, daß die *Abgeschlossenheit* von $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$ schon aus den beiden Tatsachen 1. und 2. folgt. Daraus folgt insbesondere, daß auch die Menge $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ abgeschlossen ist. Die Eigenschaft 5. besteht also darin, daß diese Menge für kein k *zusammenhängend* ist.

Es sei noch bemerkt, daß die beiden Endpunkte p_k und q_k der Strecke J_k zu *verschiedenen* Komponenten der Menge $F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$ gehören [19]). In der Tat, wäre das nicht der Fall, so könnten wir

$$F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k = A_1 + A_2 \tag{28}$$

---

[17]) Der Satz ist übrigens auf eine in einem n-dimensionalen Euklidischen Raume gelegene Punktmenge unmittelbar anwendbar.

[18]) Das System $\mathfrak{S}$ besteht aus allen denjenigen Strecken $J_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, die nicht leer sind.

[19]) Das ist offenbar eine Verschärfung der Bedingung 2a.; letztere folgt also aus 5.

setzen, wo A_1 und A_2 zwei elementenfremde abgeschlossene nicht leere Mengen sind, von denen die erste beide Endpunkte p_k und q_k von J_k enthält. Nun hat aber zufolge 2. und 3. die *abgeschlossene* Strecke

$$\Delta_k = J_k + p_k + q_k$$

mit (28) nur ihre Endpunkte gemein; zu A_2 ist folglich Δ_k fremd. Die beiden abgeschlossenen Mengen A_2 und $A_1 + \Delta_k = A_1 + J_k$ könnten also in diesem Falle keine gemeinsamen Punkte besitzen. Letzteres ist aber unmöglich, da die Vereinigungsmenge

$$A_2 + (A_1 + J_k) = (A_1 + A_2) + J_k = (F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k) + J_k = F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n$$

zusammenhängend ist.

13. Es sei jetzt G ein beschränktes ebenes Gebiet, das zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist. Wir wenden auf seine Grenze F den Satz des vorigen Paragraphen an; wegen der Eigenschaften von G sind alle Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt.

In erster Linie beweisen wir, daß sämtliche J_n in G liegen. In der Tat ist jede Strecke J_n zu F fremd; sie gehört folglich zur Komplementärmenge $E - F$,[20]) also, da J_n zusammenhängend ist, zu einer Komponente von $E - F$. Nun ist $E - F$ ein Gebiet; dasselbe gilt folglich[21]) auch von seinen Komponenten; G selbst ist eine von diesen Komponenten[22]). Jede andere Komponente G_i von $E - F$ besitzt aber eine *zusammenhängende* Grenze F_i; um das einzusehen, genügt es nämlich[23]) zu beweisen, daß F_i in F enthalten ist. Letzteres ist aber unmittelbar einleuchtend, da ja ein Grenzpunkt von G_i weder zu G_i selbst, noch zu einer anderen Komponente von $E - F$ gehören kann[24]).

Wenn wir nun bemerken, daß beide Endpunkte von J_n (die wegen § 12, 2. nicht in $E - F$ liegen können) jedenfalls zur Grenze derjenigen Komponente von $E - F$ gehören, in der J_n selbst liegt, so folgt aus $F_i \subset F$ und der Bedingung 2a. des vorigen Paragraphen, daß J_n nur in G liegen kann.

Damit ist also (mit Rücksicht auf § 12, 2.) bewiesen, daß $\mathfrak{S}$ ein System von geradlinigen Querschnitten des Gebietes G ist.

---

[20]) Mit E bezeichnen wir die Ebene.

[21]) Hausdorff, l. c. S. 330, II.

[22]) l. c. S. 330, III.

[23]) Siehe a. a. O. S. 346, XII.

[24]) Eine Komponente kann nämlich keinen Häufungspunkt einer anderen Komponente enthalten (l. c. S. 246, V).

14. Wenn wir das letztere Ergebnis mit den Bedingungen des § 12 und dem Satze in § 2 vergleichen, so sehen wir, daß dieser Satz bewiesen sein wird, wenn wir gezeigt haben werden, daß

$$H = G - \Sigma J_n$$

ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

Daß H ein Gebiet ist, folgt schon daraus, daß es aus allen denjenigen Punkten des Gebietes G gebildet ist, die zur abgeschlossenen Menge

$$K = F + \Sigma J_n$$

fremd sind.

Es ist ebenfalls leicht einzusehen, daß K die Grenze von H ist. In der Tat ist

$$\overline{G} = G + F$$

eine abgeschlossene Menge; aus

$$\overline{G} = (G - \Sigma J_n) + (F + \Sigma J_n) = H + K$$

folgt also, daß die Grenze von H in K enthalten ist. Um anderseits zu zeigen, daß *jeder* Punkt von K Grenzpunkt von H ist, betrachten wir irgendeinen Punkt x von K und das Innere S einer beliebig kleinen Kreisscheibe um diesen Punkt. Da x entweder zur Grenze F von G oder zu einer J_n, also zu G selbst gehört, so können wir in S einen zu G gehörenden Punkt y wählen. Nun sind S und G Gebiete, während die J_n höchstens in abzählbarer Menge vorhanden sind. Wir können also eine in S und in G liegende Strecke $\overline{yz}$ derart wählen, daß ihre Richtung von den Richtungen aller J_n verschieden sei. $\overline{yz}$ hat folglich mit jeder J_n höchstens einen Punkt gemein, enthält also sicher einen Punkt w, der zu allen J_n fremd ist. w liegt also in $G - \Sigma J_n = H$ und in S; d. h. Punkte von H sind in jeder Umgebung des Punktes x vorhanden.

Wir haben also bewiesen, daß K die Grenze von H ist. Da K zusammenhängend ist (§ 15, 4.), folgt hieraus, daß H, falls zusammenhängend, auch *einfach* zusammenhängend sein wird. Um unsern Hauptsatz (§ 2) zu beweisen, haben wir also nur noch zu zeigen, daß das Gebiet H zusammenhängend ist.

15. Wir wollen zuerst irgendeinen Querschnitt J_k betrachten und beweisen, daß es nur eine an J_k grenzende Komponente des Gebietes H gibt; d. h. daß nur eine Komponente von H zu J_k gehörende Grenzpunkte besitzt.

Wir bezeichnen mit

$$H_1, H_2, \ldots, H_i, \ldots$$

diejenigen Komponenten von H, deren Grenzen zu J_k nicht fremd sind, und betrachten die Menge

$$\Gamma = J_k + \sum H_i. \tag{29}$$

Γ ist ein Gebiet. In der Tat, ein Punkt x von Γ gehört entweder zu einem H_i, — und dann ist er jedenfalls ein innerer Punkt von Γ; oder er gehört zu J_k. In diesem Falle liegt x im Gebiete G und außerhalb der abgeschlossenen (§ 12) Menge

$$K - J_k = F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k; \tag{30}$$

es gibt also eine den Punkt x einschließende offene Kreisscheibe S, die ebenfalls in G und außerhalb $K - J_k$ liegt. Die Strecke J_k zerschneidet S in zwei *zusammenhängende* Teile S_1 und S_2, die beide in G und außerhalb K, also in H liegen. Da sie außerdem beide an J_k grenzen, so kommt

$$S_1 \subset H_{i_1}, \qquad S_2 \subset H_{i_2}$$

(wo i_1 und i_2 zwei gleiche oder verschiedene Indizes sind), also

$$S \subset S_1 + S_2 + J_k \subset H_{i_1} + H_{i_2} + J_k \subset \Gamma;$$

x ist folglich auch jetzt ein innerer Punkt von Γ.

Das Gebiet Γ ist zusammenhängend. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit y_i irgendeinen auf J_k liegenden Grenzpunkt von H_i. Da H_i zusammenhängend ist, so ist es auch $H_i + y_i$,[25]) folglich auch

$$H_i + J_k = (H_i + y_i) + J_k:$$

die beiden zusammenhängenden Mengen $H_i + y_i$ und J_k haben nämlich einen gemeinsamen Punkt y_i.[26]) Wenn nun y irgendein Punkt von J_k ist, so haben die zusammenhängenden Mengen

$$H_i + J_k \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

einen gemeinsamen Punkt y; ihre Vereinigungsmenge

$$\sum_i (H_i + J_k) = J_k + \sum H_i = \Gamma$$

ist folglich[27]) ebenfalls zusammenhängend.

Wir betrachten jetzt die Grenze Φ des zusammenhängenden Gebietes Γ. Ich behaupte, daß sie in der Menge $K - J_k$ enthalten ist. In der Tat ist zufolge (29) jeder Grenzpunkt z von Γ entweder ein Häufungspunkt von ΣH_i, also von $H \supset \Sigma H_i$, oder ein Häufungspunkt von J_k; in beiden Fällen ist z in $H + K$ enthalten. Da nun J_k und die H_i aus *inneren*

[25]) l. c. S. 246, IV.
[26]) Siehe a. a. O. S. 245, II.
[27]) l. c. S. 245, III.

Punkten von Γ bestehen, während die anderen (an J_k nicht grenzenden) Komponenten von H keinen Häufungspunkt von Γ enthalten können[28]), so folgt hieraus tatsächlich, daß

$$\Phi \subset H + K - (J_k + H) = K - J_k.$$

Die beiden Endpunkte p_k und q_k der in Γ liegenden Strecke J_k gehören notwendigerweise zu Φ: sie können ja nicht innerhalb von Γ liegen, da sie sogar zum Gebiete

$$G = H + \sum J_n \supset \sum H_i + J_k = \Gamma$$

fremd sind. J_k ist folglich ein *Querschnitt* von Γ.

Nun gehören aber p_k und q_k zu *verschiedenen* Komponenten von Φ; denn sonst würde es eine p_k und q_k enthaltende zusammenhängende Menge L geben, die in Φ, also in $K - J_k$ enthalten ist; d. h. aus (30) würde folgen, daß p_k und q_k zu derselben Komponente von

$$F + \sum_{\mathfrak{S}} J_n - J_k$$

gehören, was aber mit dem letzten Ergebnisse des § 12 im Widerspruch steht.

Aus der soeben bewiesenen Tatsache folgt aber[29]), daß der Querschnitt J_k das Gebiet Γ nicht zerschneidet, also daß das Gebiet

$$\Gamma - J_k = \sum H_i$$

zusammenhängend ist. Die Summe ΣH_i besteht folglich nur aus einem Gliede H_1; H_1 ist die einzige an J_k grenzende Komponente von H. W. z. b. w.

16. Es seien jetzt a und b irgend zwei Punkte von H; sie gehören beide zum zusammenhängenden Gebiete G und können also durch einen innerhalb G liegenden einfachen Streckenzug Π verbunden werden. Nun gehört aber (§ 14) jedes J_k zur Grenze von $H = G - \Sigma J_n$; in jeder Umgebung eines zu einem J_k gehörenden Punktes x gibt es also Punkte von G, die zu keinem J_n gehören. Mittels einer kleinen Verschiebung der Eckpunkte von Π können wir also erzwingen, daß kein Eckpunkt von Π auf einem J_n liege. In diesem Falle hat Π mit jedem J_n nur endlich viele Punkte gemein.

Andererseits folgt aus den Bedingungen 1. und 2. (§ 12) — da ja der Abstand $\varrho(\Pi, F) > 0$ ist —, daß Π überhaupt nur von endlich vielen J_n getroffen wird. Π wird folglich durch $\sum_{\mathfrak{S}} J_n$ in *endlich viele* Stücke zer-

---

[28]) Jede solche Komponente ist ja zu Γ fremd; und ein Gebiet kann keinen Häufungspunkt eines zu ihm fremden Gebietes enthalten.

[29]) L. c. S. 350, XIII.

legt, von denen jedes in $G - \Sigma J_n = H$, also (da es zusammenhängend ist) in einer Komponente von H liegt. Zwei benachbarte Stücke stoßen aber in einem Punkte y zusammen, der zu einem J_k gehört; aus dem im vorigen Paragraphen bewiesenen Hilfssatze folgt also, daß zwei benachbarte Stücke von Π zu *derselben* Komponente von H gehören.

Daraus folgt ohne weiteres, daß a und b zu derselben Komponente von H gehören, und, da a und b beliebige Punkte von H waren, daß H zusammenhängend ist.

Damit ist unser Ziel vollständig erreicht.

Moskau, den 30. Dezember 1923.

(Eingegangen am 25. Februar 1924.)