Werk

Titel: Besikowitsch. A., Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer A...

Ort: Berlin

Jahr: 1924

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0021|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über analytische Funktionen mit vorgeschriebenen Werten ihrer Ableitungen.

Von

A. Besikowitsch in Petrograd.

§ 1.

Es sei $a < 0$, $b > 1$ und $f_1(x)$, $\varphi(x)$, $f_2(x)$ analytische Funktionen in den Intervallen $(a, 0)$, $(0, 1)$, $(1, b)$.

Wir definieren die Funktion $\psi(x)$ in dem Intervall (a, b), das durch Verbindung der drei Intervalle erhalten wird, in dem wir setzen:

$$\psi(x) = f_1(x) \text{ im ersten Intervall,}$$
$$\psi(x) = \varphi(x) \text{ im zweiten Intervall,}$$
$$\psi(x) = f_2(x) \text{ im dritten Intervall.}$$

Sind $f_1(x)$, $\varphi(x)$, $f_2(x)$ verschiedene analytische Funktionen, so kann $\psi(x)$ in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ nicht analytisch sein.

G. D. Birkhoff stellt in seiner Abhandlung „The generalised Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations“[1]) die Behauptung auf — ohne einen Beweis dafür auszuführen —, daß es möglich sei, indem man die Funktion $\varphi(x)$ einer geringen Variation unterwirft, für $\psi(x)$ eine in allen Punkten außer $x = 0$ und $x = 1$ analytische Funktion zu erhalten, die in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ alle Ableitungen besitzt[2]).

Es ist klar, daß die Aufgabe, die Funktion $\psi(x)$ zu finden, folgendem Problem äquivalent ist:

Für das Intervall $(0, 1)$ *eine Funktion* $f(x)$ *so zu bestimmen, daß sie der analytischen Funktion* $\varphi(x)$ *genügend nahe sei, im Intervall ana-*

[1]) Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences **49**, Nr. 9 (Oktober 1913).

[2]) Auf diesen Punkt in der Arbeit von Birkhoff wurde meine Aufmerksamkeit durch Herrn Tamarkin gelenkt.

lytisch sei und an seinen Enden mit allen ihren Ableitungen vorgeschriebene Werte annehme.

Ich will hier eine Lösung dieses Problems geben, wobei ich von einfacheren Aufgaben ausgehe. Außerdem gestatten die von mir eingeführten Reihen eine andere Aufgabe über analytische Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die der behandelten Aufgabe ähnlich ist, zu lösen.

§ 2.

Aufgabe 1. *Eine Funktion $f(x)$ im Gebiet $x(0, +\infty)$ zu finden, die für $x > 0$ analytisch ist und für $x = 0$ mit allen ihren Ableitungen die vorgeschriebenen Werte annimmt:*

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots .$$

Wir betrachten zum Beweis die Reihe:

$$1)\quad F(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0+x)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2+t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_3 b_3 \int_0^x dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_3+t)^{\frac{1}{2}}} +$$

Hier sind $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots$ vorgegebene positive Zahlen nicht größer als 1; die Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ dürfen nur die Werte $-1, 0, +1$ annehmen; die Zahlen $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots$ sind positiv.

Die Reihe (1) konvergiert gleichmäßig in jedem endlichen Intervall: $0 \leqq x \leqq A$. Es ist nämlich, wenn wir $A > 1$ voraussetzen:

$$2)\quad \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{\frac{1}{2}}} < \int_0^A dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}} = \frac{A^{n-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)} < \frac{2A^n}{(n-$$

und die Reihe $\sum \frac{2A^n}{(n-1)!}$ konvergiert für jedes A.

Man kann sich leicht überzeugen, daß die Reihe, die durch k-malige gliedweise Differentiation der Reihe (1) erhalten wird, ebenfalls in jedem endlichen Intervall $(0, A)$ gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt, daß die Reihe (1) für $x \geqq 0$ eine stetige Funktion darstellt, die für dieselben Werte von x Ableitungen beliebiger Ordnung besitzt, welche durch gliedweise Differentiation der Reihe erhalten werden.

Die Reie (1) ist eine analytische Funktion für $x > 0$. Um das einzusehen, nehmen wir in der Ebene der komplexen Veränderlichen x den Kreis von Radius A und Zentrum im Anfangspunkt und betrachten die Reihe (1) für solche Werte von x, die im Halbkreise rechts der imaginären Achse liegen. Die Integrationswege der Variablen $t, t_1, t_2, \ldots$ sollen in Gebieten derselben Form liegen. Wie leicht ersichtlich, ist für

alle Werte von x in diesem Gebiet die Ungleichung (2) durch folgende ersetzbar:

$$(3) \qquad \left| \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_2} dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{\frac{1}{2}}} \right| < \frac{2A^n}{(n-1)!}.$$

Daraus ist auf Grund des Weierstraßschen Theorems zu schließen, daß im Halbkreise die Reihe (1) eine holomorphe Funktion darstellt, d. h. die Reihe (1), als Funktion der reellen Veränderlichen x, ist für $x > 0$ eine analytische Funktion.

Jetzt ist klar, wie bei gegebenen Werten $b_0, b_1, b_2, \ldots$ die Werte der Zahlen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ und $c_0, c_1, c_2, \ldots$ zu wählen sind, damit die Reihe $F(x)$ eine Lösung unserer Aufgabe darstelle, d. h. damit die Gleichheiten

$$F(0) = a_0, \quad F'(0) = a_1, \quad F''(0) = a_2, \ \ldots$$

bestehen.

Denn daraus folgt das Gleichungssystem:

$$\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} = a_0,$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{1}{2}} = a_1,$$

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{5}{2}} - \frac{1}{2}\varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{3}{2}} + \varepsilon_2 b_2 c_2^{-\frac{1}{2}} = a_2,$$

. . . . . .

oder

$$(4) \qquad \varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{1}{2}} = a_0,$$

$$(5) \qquad \varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{1}{2}} = a_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{3}{2}},$$

$$(6) \qquad \varepsilon_2 b_2 c_2^{-\frac{1}{2}} = a_2 - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\varepsilon_0 b_0 c_0^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon_1 b_1 c_1^{-\frac{3}{2}},$$

. . . . . .

Der Größe ε_0 schreiben wir die Werte $+1$, 0 oder -1 zu, entsprechend den drei Fällen: die rechte Seite von (4) ist > 0, $= 0$ oder < 0. Ist ε_0 bestimmt und $\neq 0$, so folgt aus (4) der Wert von c_0. Jetzt setzen wir ε_1 gleich $+1$, 0 oder -1, je nachdem die rechte Seite von (5) > 0, $= 0$ oder < 0 ist. Ist ε_1 bestimmt und $\neq 0$, so folgt aus (5) c_1. In analoger Weise bestimmen wir $\varepsilon_2, c_2, \varepsilon_3, c_3, \ldots$.

Aufgabe 1 ist damit gelöst.

Der Funktion $f(x)$ kann man auch die allgemeinere Form geben:

$$f(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0+x)^{h_0}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1+t)^{h_1}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2+t)^{h_2}} + \ldots.$$

Hier sind $h_0, h_1, h_2, \ldots$ beliebige vorgegebene Zahlen, die der Bedingung genügen

$$0 < h_i < h < 1, \quad \text{für } i = 0, 1, 2, \ldots .^{3})$$

Aufgabe 2. *Es ist eine Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$f(x)$ ist eine analytische Funktion für $0 < x < 1$;*
2. $f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots;$
3. $f(1) = f'(1) = f''(1) = \ldots = 0.$

Zum Beweise nehmen wir eine Funktion $F(x)$ zu Hilfe, die analytisch für $x > 0$ ist und mit allen ihren Ableitungen für $x = 0$ die vorgegebenen Werte

$$F(0) = \alpha_0, \quad F'(0) = \alpha_1, \quad F''(0) = \alpha_2, \ldots$$

annimmt, wobei die Größen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ so genommen werden, daß die Funktion

$$F(x)\, e^{-\frac{1}{(x-1)^2}} \tag{7}$$

und ihre Ableitungen im Punkte $x = 0$ die Werte haben:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots .$$

Im Punkte $x = 1$ ist die Funktion (7) mit allen ihren Ableitungen gleich Null. Im Intervall $(0, 1)$ stellt (7) eine analytische Funktion dar. Die Lösung der Aufgabe 2 wird also durch die Formel gegeben:

$$f(x) = F(x)\, e^{-\frac{1}{(x-1)^2}}.$$

Aufgabe 3. *Eine Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die den Bedingungen genügt:*

1. *$f(x)$ ist eine analytische Funktion für $0 < x < 1$;*
2. $f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots;$
3. $f(1) = A_0, \quad f'(1) = A_1, \quad f''(1) = A_2, \ldots .$

---

[3]) Nachdem Herr O. Perron unsere Arbeit kennen gelernt hatte, hatte er die Liebenswürdigkeit uns mitzuteilen, daß die Reihe (1) durch die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \varphi_n(z)$$

ersetzt werden kann, deren n-tes Glied derselben Ungleichung (2) genügt; z. B.

$$\varphi_n(z) = 2z^{n-1}\frac{\sqrt{c+z} - \sqrt{c}}{n!},$$

Diese Verallgemeinerung ist sehr naheliegend, denn die Lösung unseres Problems beruht eben auf der erwähnten Ungleichung.

Wir nehmen die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu Hilfe, die folgende Bedingungen erfüllen:

1. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind analytische Funktionen für $0 < x < 1$;
2. $f_1(0) = a_0, \quad f_1'(0) = a_1, \ldots; \quad f_1(1) = f_1'(1) = \ldots = 0;$
3. $f_2(1) = A_0, \quad f_2(1) = A_1, \ldots; \quad f_2(0) = f_2'(0) = \ldots = 0.$

Die Lösung der Aufgabe 3 ergibt sich in der Form

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

§ 3.

Die durch (1) gegebene Funktion $F(x)$ besitzt zwei wichtige Eigenschaften:

Eigenschaft 1. Gibt man den Größen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ genügend kleine Werte, so kann für die Reihe $F(x)$ beliebig rasche Konvergenz in einem beliebigen endlichen Intervall erzielt werden.

Eigenschaft 2. Für beliebig kleine positive Zahlen α und β, für eine beliebig große positive Zahl A und eine beliebig große ganze positive Zahl k kann immer durch Wahl genügend kleiner Werte für die Größen $b_0, b_1, b_2, \ldots$ erreicht werden, daß im Intervall (α, A) die Reihe $F(x)$ und ihre ersten k Ableitungen ihrem Modul nach die Größe β nicht übersteigen.

§ 4.

$\varphi(x)$ sei eine beliebige analytische Funktion und es sei

$$\varphi(0) = a_0', \quad \varphi'(0) = a_1', \quad \varphi''(0) = a_2', \ldots.$$

Wir bauen die Reihe $F(x)$ auf, wobei wir voraussetzen

$$F(0) = a_0 - a_0', \quad F'(0) = a_1 - a_1', \quad F''(0) = a_2 - a_2', \ldots;$$

außerdem nehmen wir an (s. § 3, Eigenschaft 2), daß im Intervall (α, A) die Funktion $F(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach nicht größer sind als β. Dann können wir folgende Aufgabe lösen:

Eine für $x > 0$ analytische Funktion $f(x)$ zu bestimmen, die mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgegebene Werte annimmt:

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots$$

und im Intervall (α, A) der gegebenen analytischen Funktion $\varphi(x)$ sich so anschmiegt, daß die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen in diesem Intervall dem Betrage nach die Größe β nicht übersteigen.

Die Lösung ist:

$$f(x) = \varphi(x) + F(x).$$

§ 5.

Es sei nun $\varphi(x)$ eine Funktion mit einer k-ten stetigen Ableitung im Intervall $(0, A)$. In diesem Fall kann ein Polynom $P(x)$ so gewählt werden[4]), daß die Differenz $P(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen in diesem Intervall ihrem Absolutwert nach kleiner als $\frac{1}{2}\beta$ bleiben.

Nach § 4 kann weiter eine Funktion $f(x)$ bestimmt werden, die analytisch ist für $x > 0$, im Punkte $x = 0$ mit allen ihren Ableitungen vorgegebene Werte annimmt

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = a_2, \ldots$$

und im Intervall (α, A) das Polynom $P(x)$ so approximiert, daß die Differenz $f(x) - P(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach unterhalb $\frac{1}{2}\beta$ bleiben.

Daraus folgt das Theorem:

Für eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ mit stetiger k-ter Ableitung läßt sich immer eine Funktion $f(x)$ konstruieren, die analytisch ist für $x > 0$, mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgegebene Werte annimmt und die Funktion in dem Sinne approximiert, daß die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre ersten k Ableitungen dem Betrage nach die Größe β nicht übertreffen.

§ 6.

α, β und k sollen die frühere Bedeutung haben; α' sei eine positive Zahl kleiner als 1, aber beliebig nahe an 1. Es ist nun leicht, folgenden Satz zu beweisen:

Für eine beliebige Funktion $\varphi(x)$ mit stetiger k-ter Ableitung kann immer eine Funktion $f(x)$ gefunden werden, die analytisch ist für $0 < x < 1$, in den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ mit allen ihren Ableitungen vorgegebene Werte annimmt und für die die Differenz $f(x) - \varphi(x)$ und ihre k ersten Ableitungen dem Betrage nach die Größe β nicht übertreffen.

Dieser Satz beweist die Richtigkeit der Behauptung von Birkhoff.

§ 7.

Wir betrachten nun die Reihe

$$(8) \quad F(x) = \frac{\varepsilon_0 b_0}{(c_0 + x)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_1 b_1 \int_0^x \frac{dt}{(c_1 + t)^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon_2 b_2 \int_0^x dt_1 \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_2 + t)^{\frac{1}{2}}} + \ldots$$

in der Ebene der komplexen Veränderlichen x.

[4]) De la Vallée Poussin, Cours d'Analyse infinitésimale, t. II (1912), pp. 126–129.

Um die Eindeutigkeit des allgemeinen Gliedes der Reihe (8)

$$\varepsilon_n b_n \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}}$$

festzulegen, wählen wir erstens irgendwelchen bestimmten Wert für den Ausdruck $(c_n + t)^{1/2}$ im Punkte $t = 0$ (z. B. den positiven) und setzen fest, daß, wenn x nicht auf dem negativen Teil der reellen Achse liegt, die Integrationswege nach allen Veränderlichen $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ keine Punkte mit dem negativen Teil der reellen Achse gemein haben. Dies ist gleichbedeutend mit der Annahme, daß alle Integrationswege geradlinig sind. Ist x ein Punkt der negativen reellen Achse, so setzen wir voraus, daß die Integrationswege aller Veränderlichen mit allen ihren Punkten (ausgenommen die Grenzpunkte) oberhalb der reellen Achse liegen.

Indem wir die erste Annahme machen, daß x nicht der negativen Halbachse angehört, wollen wir die Größe des allgemeinen Gliedes der Reihe abschätzen. Wir haben

$$\left| \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c+t)^{1/2}} \right| \leqq \int_0^{|t_1|} \frac{dt}{|t-c|^{1/2}},$$

wobei im letzten Integral die Integration längs der reellen Achse auszuführen ist.

Nun ist aber

$$\left| \int_0^{|t_1|} \frac{dt}{|t-c|^{1/2}} \right| = \begin{cases} 2c^{1/2} - 2(c-|t_1|)^{1/2}, & \text{für } |t_1| \leqq c, \\ 2c^{1/2} + 2(|t_1|-c)^{1/2}, & \text{für } |t_1| > c. \end{cases}$$

Nun haben wir für $|t_1| \leqq c$:

$$2c^{1/2} - 2(c-|t_1|)^{1/2} = \frac{2|t_1|}{c^{1/2} + (c-|t_1|)^{1/2}} < 2|t_1|^{1/2}$$

und für $|t_1| > c$:

$$2c^{1/2} + 2(|t_1|-c)^{1/2} < 4|t_1|^{1/2}.$$

Also ist für jedes t_1

$$\left| \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c+t)^{1/2}} \right| < 4|t_1|^{1/2}. \tag{9}$$

Daraus folgt für $|x| \leqq A$ $(A > 1)$:

$$\left| \int_0^x dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} dt_{n-2} \cdots \int_0^{t_1} \frac{dt}{(c_n+t)^{1/2}} \right| < \frac{4A^n}{(n-1)!} \tag{10}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß die Ungleichung (10) auch für ein x auf der negativen Halbachse richtig bleibt.

Die Reihe (8) konvergiert also gleichmäßig in einem beliebigen endlichen Gebiet und stellt eine in der ganzen Ebene außerhalb des Strahles $(0, -\infty)$ holomorphe Funktion dar, die einen Sprung hat für reelle negative Werte von x, im Punkte $x = 0$ stetig ist und mit allen ihren Ableitungen im Punkte $x = 0$ vorgeschriebene Werte annimmt.

Um sich nicht auf den Fall reeller Werte der Funktion $F(x)$ und ihrer Ableitungen im Punkte $x = 0$ zu beschränken, genügt es, in der Reihe (8) für $b_0, b_1, b_2, \ldots$; $c_0, c_1, c_2, \ldots$ positive Werte zu belassen und für $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ die Werte Null oder Werte von der Form $e^{\varphi i}$ anzunehmen.

So kommen wir zur Lösung einer Aufgabe in der Ebene, die analog ist dem Borelschen Problem für die Strecke[5]).

Wie leicht ersichtlich, kann eine Funktion $F(x)$ konstruiert werden, die im endlichen Gebiet A außerhalb des Strahles $(0, -\infty)$ Eigenschaften besitzt, die analog sind denen, die in § 3 angegeben waren. Auch läßt sich für das Gebiet A eine der Aufgaben von § 4 analoge Aufgabe lösen.

---

[5]) Die Lösung des Borelschen Problems für eine Strecke hat S. Bernstein gefunden (R. D'Adhémar, Leçons sur les principes d'Analyse 2 (1913), pp. 259—283). Jedoch kann man mehrere wichtige Eigenschaften angeben, die unsere Lösung, nicht aber die Bernsteinsche, besitzt. Außerdem kann man die Bernsteinsche Lösung nicht über die komplexe Ebene fortsetzen.

(Eingegangen am 19. Dezember 1923.)