Werk

Titel: Bilineare Transformation quadratischer Formen

Autor: Brandt, H.,

Ort: Berlin

Jahr: 1923

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0017|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Bilineare Transformation quadratischer Formen.

Von

H. Brandt in Aachen.

1. Bei den quadratischen Formen mit 2, 4 und 8 Variablen (und nur bei diesen) ist es bekanntlich möglich, von drei beliebigen Formen (gleicher Variablenzahl), deren Determinanten nicht verschwinden, eine bilinear in das Produkt der beiden anderen zu transformieren[1]). Die bilinearen Substitutionen, die bei dieser Transformationsaufgabe auftreten, besitzen merkwürdige Eigenschaften, von denen ich im folgenden auf eine meines Wissens bisher noch nicht bemerkte hinweisen möchte, welche trotz ihres elementaren Charakters eine auffallende Eleganz zeigt. Wir dürfen dabei, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, die Determinanten der drei Formen als gleich annehmen, weil das andernfalls, sofern nur keine der Determinanten verschwindet, ohne Änderung der bilinearen Substitution durch Multiplikation der Formen mit geeigneten Faktoren erreicht werden kann[2]).

Wir bezeichnen durch $n = 2\nu$ eine der Zahlen 2, 4 oder 8 und werden die Beweise gemeinsam führen, ohne uns damit aufzuhalten, daß manche Aussagen für $n = 2$ trivial werden. Für quadratische Formen mit n Variablen, deren Determinanten stets den gleichen Wert D haben sollen, verwenden wir die Symbole $A((x))$, $B((y))$ usw.; dabei sind die Variablen von $A((x))$ $x_1, \ldots, x_n$, die von $B((y))$ $y_1, \ldots, y_n$ usw. Der Wurzelwert $d = \sqrt[\nu]{D}$ sei beliebig, aber fest gewählt. Die Adjungierte von $A((x))$ soll dann nach Division ihrer Koeffizienten durch $d^{\nu-1}$ mit $\mathfrak{A}((x))$ bezeichnet und *Reziproke* genannt werden. Offenbar hat $\mathfrak{A}$ ebenfalls die

[1]) Hurwitz, A.: Über die Komposition der quadratischen Formen mit beliebig vielen Variablen. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen 1898, S. 309–316.

[2]) Brandt, H.: Zur Komposition der quaternären quadratischen Formen. Journal für reine und angewandte Mathematik **143** (1913) (im folgenden nur durch Seitenangabe zitiert), S. 108, Note.

Determinante D und besitzt A zur Reziproken, so daß wir auch von *einander reziproken Formen* wie A und $\mathfrak{A}$ oder B und $\mathfrak{B}$ sprechen können[3]).

2. Sind $A((x))$, $B((y))$, $C((z))$ quadratische Formen mit n Variablen und der gleichen, nicht verschwindenden Determinante D, und ist

$$x_i = \sum_{jk} p_{ijk}\, y_j\, z_k \tag{I}$$

eine bilineare Substitution[4]) — wir bezeichnen sie durch P — für welche die Gleichung

$$A((x)) = B((y))\, C((z)) \tag{II}$$

identisch besteht, so wollen wir kurz sagen: P macht identisch $A = BC$. Dabei ist aber auf die Reihenfolge der Formen zu achten.

Aus P entstehen durch zyklische Vertauschung der drei Indexreihen die beiden neuen bilinearen Substitutionen

$$y_i = \sum_{jk} p_{kij}\, z_j\, x_k, \qquad z_i = \sum_{k} p_{jki}\, x_j\, y_k.$$

Wir bezeichnen sie durch P' und P'' und nennen sie die *erste* und *zweite Transponierte* von P. Dann sind unter Beachtung der Reihenfolge P'', P die Transponierten von P' und P, P' die Transponierten von P''. Nach elementaren Sätzen über die Transformation quadratischer Formen macht P' identisch $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$ und P'' identisch $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die beziehungsweise zu A, B, C reziproken Formen bezeichnen[5]).

Aus den bilinearen Substitutionen P, P', P'' lassen sich dreierlei Linearformen herleiten:

$$\sum_{j} p_{jik}\, x_j, \qquad \sum p_{kji}\, y_j, \qquad \sum_{i} p_{ikj}\, z_j.$$

Die aus ihnen gebildeten Matrizen, bei welchen sich der Index i auf die Zeilen, der Index k auf die Spalten bezieht, sollen *erstes, zweites und drittes Linearformsystem* von P genannt und durch $\pi(x)$, $\mathfrak{p}(y)$, $p(z)$ bezeichnet werden. Die Werte ihrer Determinanten sind

$$|\pi(x)| = \varepsilon_1 [\mathfrak{A}((x))]^{\nu}, \qquad |\mathfrak{p}(y)| = \varepsilon_2 [B((y))]^{\nu}, \qquad |\mathfrak{p}(z)| = \varepsilon_3 [C((z))]^{\nu},$$

wo ε_1, ε_2, ε_3 Vorzeichen bedeuten, und die $n-1$-reihigen Unterdeterminanten sind bzw. durch $[\mathfrak{A}((x))]^{\nu-1}$, $[B((y))]^{\nu-1}$, $[C((z))]^{\nu-1}$ teilbar[6]).

---

[3]) Bei der hier auch möglichen Annahme $d = \sqrt[\nu]{-D}$ würden die Sätze der Nummern 9 und 10 nicht mehr gelten.

[4]) Die Indizes laufen hier wie im folgenden, einerlei ob darüber summiert wird oder nicht, immer von 1 bis n.

[5]) S. 110.

[6]) S. 109—111.

3. Entfernt man diese Teiler, mit den Vorzeichen ε_1, ε_2, ε_3 genommen, aus den Systemen der Unterdeterminanten, so können die entstehenden Matrizen, welche die Variablen nur noch in der ersten Potenz enthalten, bzw. als erstes, zweites und drittes Linearformsystem von drei neuen bilinearen Substitutionen Q, R, S angesehen werden. Bezeichnet man sie daher durch

$$\| \sum q_{jik} x_j \| = \varkappa(x), \qquad \| \sum_j r_{kji} y_j \| = \mathfrak{r}(y), \qquad \| \sum s_{ikj} z_j \| = s(z),$$

so bestehen wegen der bekannten Eigenschaften der Unterdeterminanten die drei ersten der folgenden sechs Matrizengleichungen:

$$\text{(III)} \begin{cases} \pi(x)\,\dot{\varkappa}(x) = \mathfrak{A}((x)), & \mathfrak{p}(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y)), & p(z)\,\dot{s}(z) = C((z)) \\ \varrho(x)\,\dot{\sigma}(x) = A((x)), & \mathfrak{s}(y)\,\dot{\mathfrak{q}}(y) = \mathfrak{B}((y)), & q(z)\,\dot{r}(z) = \mathfrak{C}((z)), \end{cases}$$

während die drei letzten sogleich hergeleitet werden sollen. Dabei bezeichnet der Punkt die transponierte (gewöhnliche lineare) Substitution. Jede dieser Gleichungen kann auch noch auf drei andere Weisen geschrieben werden, z. B. gilt bei der ersten:

$$\pi(x)\,\dot{\varkappa}(x) = \dot{\varkappa}(x)\,\pi(x) = \dot{\pi}(x)\,\varkappa(x) = \varkappa(x)\,\dot{\pi}(x) = \mathfrak{A}((x)).$$

Mit Hilfe der bilinearen Substitutionen S und R nehmen die Auflösungen der Gleichungen (I) nach den y_i oder z_i die folgende Gestalt an:

$$\text{(IV)} \qquad C((z))\,y_i = \sum_{jk} s_{kij}\,z_j\,x_k, \qquad B((y))\,z_i = \sum_{jk} r_{jki}\,x_j\,y_k.$$

Führt man das zweite dieser Gleichungssysteme in das erste ein, so erhält man unter Beachtung der hierbei gültigen Identität (II) die Formeln:

$$\sum_j \sum_{\alpha\beta} r_{\alpha\mu j}\,s_{\beta\nu j}\,x_\alpha\,x_\beta = \begin{matrix} A((x)) \\ 0 \end{matrix} \text{ wenn } \begin{matrix} \mu = \nu \\ \mu \gtrless \nu \end{matrix},$$

d. h. die vierte der Gleichungen (III). Die beiden letzten entstehen auf ähnliche Weise, wenn man von P' mit der Identität $\mathfrak{B} = C\,\mathfrak{A}$ und P'' mit der Identität $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$ ausgeht. Damit ist das Gleichungssystem (III) vollständig hergeleitet.

4. Aus dem Bestehen der Identität (II) vermöge der Gleichungen (IV) schließt man, daß die bilinearen Substitutionen

$$y_i = \sum_{jk} s_{kij}\,z_j\,x_k, \qquad z_i = \sum_{jk} r_{jki}\,x_j\,y_k,$$

die nach dem obigen durch S' und R'' zu bezeichnen sind, die Gleichungen

$$B((y)) = C((z))\,A((x)), \qquad C((z)) = A((x))\,B((y))$$

identisch befriedigen. Wir nennen nach einer früheren Bezeichnung S' die

erste und R'' die *zweite Koordinierte* von P.[7]) Die beiden Gleichungen des Systems (III)

$$p(z)\,\dot{s}(z) = C((z)), \qquad \mathfrak{p}(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y))$$

können als Definition für die erste Koordinierte S' und die zweite Koordinierte R'' von P angesehen werden. Jedoch wird die früher nachgewiesene Symmetrie, welche zwischen den drei bilinearen Substitutionen P, S', R'' besteht, daraus nicht unmittelbar erkannt. Um sie zur Darstellung zu bringen, wollen wir die oben für die Linearformsysteme von P eingeführte Bezeichnung auf die transponierten bilinearen Substitutionen ausdehnen. Wir haben dann $\pi(x)$, $\mathfrak{p}(y)$, $p(z)$ in bezug auf P' als drittes, erstes und zweites, und in bezug auf P'' als zweites, drittes und erstes Linearformsystem anzusehen, was wir ausdrücken, wenn wir setzen:

$$\pi(x) = p'(x) = \mathfrak{p}''(x), \quad \mathfrak{p}(y) = \pi'(y) = p''(y), \quad p(z) = \mathfrak{p}'(z) = \pi''(z).$$

Entsprechendes gilt für die bilinearen Substitutionen Q, R, S. Darnach lassen sich die Definitionsgleichungen für die beiden Koordinierten von P zu den Substitutionen S' und R'' direkt in Beziehung setzen, indem man sie in die Gestalt

$$p(z)\,\dot{\mathfrak{s}}'(z) = C((z)), \qquad \mathfrak{p}(y)\,\dot{r}''(y) = B((y))$$

bringt. Weil nach der zweiten Gleichung auch $r''(y)\,\dot{\mathfrak{p}}(y) = B((y))$, so ist P die erste Koordinierte von R'', und weil nach (III) $\varrho(x)\,\dot{o}(x) = A((x))$, d. h. $s'(x)\,\dot{\mathfrak{r}}''(x) = A((x))$, so ist R'' die erste Koordinierte von S'. Wir erkennen also von neuem, daß P, S', R'' ein symmetrisches Tripel bilden, bei dem keine der bilinearen Substitutionen vor den anderen ausgezeichnet ist. In zyklischer Aufeinanderfolge ist jede der Substitutionen die erste Koordinierte der vorhergehenden und die zweite Koordinierte der nachfolgenden. Solcher Tripel gibt es noch drei weitere, wie die folgenden Gleichungen erkennen lassen:

$$\begin{aligned}
&s'(x)\,\dot{\mathfrak{r}}''(x) = A((x)), && r''(y)\,\dot{\mathfrak{p}}(y) = B((y)), && p(z)\,\dot{\mathfrak{s}}'(z) = C((z)),\\
&r'(x)\,\dot{\mathfrak{s}}''(x) = A((x)), && s''(y)\,\dot{\mathfrak{q}}(y) = \mathfrak{B}((y)), && q(z)\,\dot{\mathfrak{r}}'(z) = \mathfrak{C}((z)),\\
&q'(x)\,\dot{\mathfrak{p}}''(x) = \mathfrak{A}((x)), && p''(y)\,\dot{\mathfrak{r}}(y) = B((y)), && r(z)\,\dot{\mathfrak{q}}'(z) = \mathfrak{C}((z)),\\
&p'(x)\,\dot{\mathfrak{q}}''(x) = \mathfrak{A}((x)), && q''(y)\,\dot{\mathfrak{s}}(y) = \mathfrak{B}((y)), && s(z)\,\dot{\mathfrak{p}}'(z) = C((z)),
\end{aligned}$$

welche sämtlich wie die eben gefundenen der ersten Zeile aus den Gleichungen (III) durch veränderte Schreibweise hervorgehen.

Wir haben daher die folgenden *vier Tripel koordinierter bilinearer Substitutionen*: S', R'', P; R', S'', Q; Q', P'', R; P', Q'', S.

[7]) S. 114.

5. Übrigens können die letzten drei Tripel auch aus dem ersten hergeleitet werden. Weil nämlich einer zyklischen Vertauschung der Indexreihen von P eine zyklische Vertauschung von Q, R, S entspricht, wobei nur auch die Akzente entsprechend gesetzt werden müssen, so daß die Beziehungen von P zu Q, R, S analog sind wie die von P' zu R', S', Q' oder von P'' zu S'', Q'', R'', so bilden mit P, S', R'' auch P', Q'', S und P'', R, Q' ein Tripel koordinierter Substitutionen, und weil in jeder der Gleichungen (III) die Buchstaben vertauscht werden dürfen, d. h. die Beziehungen zwischen je zweien der vier bilinearen Substitutionen P, Q, R, S wechselseitig gleich sind, so ist, weil z. B. R'' die erste Koordinierte von S' ist, auch S'' die erste Koordinierte von R' usw., weshalb auch R', S'', Q ein Tripel koordinierter bilinearer Substitutionen bilden.

Wir wollen die zwölf bilinearen Substitutionen mit den durch sie vermittelten Identitäten noch einmal in einem Schema zusammenfassen.

*	P $A = BC$	S' $B = CA$	R'' $C = AB$
Q $A = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$	*	S'' $\mathfrak{C} = A\mathfrak{B}$	R' $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}A$
Q' $B = \mathfrak{C}\mathfrak{A}$	P'' $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}B$	*	R $\mathfrak{A} = B\mathfrak{C}$
Q'' $C = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$	P' $\mathfrak{B} = C\mathfrak{A}$	S $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}C$	*

Hier stehen in den Zeilen Tripel koordinierter und in den Spalten Tripel transponierter bilinearer Substitutionen. Die Reihenfolge ist dabei in den Zeilen und Spalten abwechselnd richtig und verkehrt.

6. Nach dem Vorhergehenden ist klar, daß die beiden Operationen: Bildung der ersten Transponierten und Bildung der ersten Koordinierten, von denen die erste durch ϑ und die zweite durch ω bezeichnet werden möge, in beliebiger Reihenfolge, abwechselnd oder wiederholt angewandt, von irgendeiner der zwölf bilinearen Substitutionen immer nur zu einer der übrigen oder auch der ursprünglichen führen. Zugleich ist ersichtlich, daß dadurch auch jede der übrigen, sogar auf unendlich viele verschiedene Weisen erhalten werden kann. Es steht aber nichts im Wege, die sämtlichen Verbindungen von ϑ und ω, welche dasselbe Resultat ergeben, als eine einzige Operation anzusehen, was den Bedingungen $\vartheta^3 = 1$, $\omega^3 = 1$, $\omega\vartheta^2 = \vartheta\omega^2 (= \varphi)$, $\omega^2\vartheta = \vartheta^2\omega (= \psi)$, $\vartheta\omega\vartheta = \vartheta^2\omega^2\vartheta^2$, d. h. $\varphi\psi = \psi\varphi$

gleichkommt. Die damit definierten zwölf Operationen, welche von einer willkürlichen zu den sämtlichen bilinearen Substitutionen führen, bilden dann offensichtlich eine Gruppe. Diese Gruppe enthält, wenn wir, um die Bezeichnung festzulegen, etwa von P ausgehen, die identische Operation $(P, P) = 1$, drei Operationen der Periode 2, nämlich $(P, Q) = \varphi\psi$, $(P, R) = \psi$, $(P, S) = \varphi$ und noch acht Operationen der Periode 3, welche durch Zusammensetzung der bisherigen mit ϑ oder ϑ^2 entstehen. Die ersten vier Operationen bilden für sich eine Gruppe, die Vierergruppe; wie man schon aus den Gleichungen (III) hätte unmittelbar entnehmen können, die ganze Gruppe ist aber, wie ihr Aufbau erkennen läßt, nichts anderes wie die alternierende Gruppe 4. Grades, welche mit der Gruppe der Drehungen des regulären Tetraeders identisch ist.

7. Daher ist auch das Tetraeder besonders geeignet, die Beziehungen zwischen den zwölf bilinearen Substitutionen zu veranschaulichen. Schreibt man nämlich an die Kanten einer Seite in einer willkürlichen Reihenfolge, die aber einmal gewählt, einen Umlaufsinn für das Tetraeder bestimmt, die Buchstaben A, B, C und an die Gegenkanten entsprechend $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so ist zunächst ersichtlich, daß die Formentripel aus den durch die zwölf bilinearen Substitutionen vermittelten Identitäten, wie sie in dem obigen Schema zusammengestellt sind, gerade auf den vier Tetraederseiten, und zwar in der durch den Umlaufsinn bestimmten richtigen Reihenfolge vorkommen. Man kann also die zwölf bilinearen Substitutionen so auf die zwölf Winkelfelder verteilen, daß jede Substitution die gegenüberstehende Form in das Produkt der benachbarten transformiert. Jetzt stehen die vier Tripel koordinierter Substitutionen auf den vier Seiten, wobei die Reihenfolge mit dem Umlaufsinn des Tetraeders übereinstimmt. Dagegen stehen die vier Tripel transponierter Substitutionen an den vier Ecken in einer Anordnung, die dem Umlaufsinn der Gegenseite entspricht, so daß also beim Anblick des Tetraeders eine Ecke den entgegengesetzten Drehsinn zeigt wie eine Seite. Das Tetraeder bringt die Beziehungen zwischen den zwölf bilinearen Substitutionen in der schönsten Weise zum Ausdruck und zeigt vor allem deutlich, daß keine der Substitutionen vor den andern ausgezeichnet ist.

Wegen der Beziehungen zur Tetraedergruppe wollen wir das System der zwölf bilinearen Substitutionen auch als *tetraedrales System* bezeichnen.

8. Bisweilen ist die Frage von Interesse, wie sich das tetraedrale System bei linearen Transformationen verhält. Wir wollen dabei die Betrachtung auf den besonders wichtigen Fall beschränken, daß die Determinanten der Substitutionen den gleichen nicht verschwindenden Wert haben. Werden die Variablenreihen der bilinearen Substitution (I) und damit auch die der drei Formen A, B, C der Reihe nach durch die linearen Substitutionen t, u, v

transformiert, so sagen wir kurz: P wird durch t, u, v transformiert. Ist dann $|t| = |u| = |v| = \Delta$ und bezeichnet $\delta = \sqrt[\nu]{\pm \Delta}$ einen bestimmten dieser Wurzelwerte, so sollen die zu t, u, v adjungierten Substitutionen nach Division durch $\delta^{\nu-1}$ mit $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ bezeichnet werden. Eine einfache Überlegung, die wir der Kürze wegen unterdrücken, zeigt dann folgendes: Wird P durch t, u, v transformiert, so transformiert sich Q durch t, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, R durch $\mathfrak{t}$, u, $\mathfrak{v}$ und S durch $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, v, ferner werden die Transformationen der koordinierten Substitutionen einfach durch zyklische Vertauschung der drei betreffenden linearen Substitutionen gefunden, so daß z. B. S' durch u, v, t und R'' durch v, t, u transformiert wird. Will man die linearen Substitutionen noch in dem Schema der Nr. 7 eintragen, so hat man nur die Substitutionen t, u, v, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ den Formen A, B, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entsprechend zuzuordnen. Die verschiedenen Bestimmungen von δ sind dabei paarweise den verschiedenen Bestimmungen der neuen reziproken Formen zugehörig.

9. Bei beliebigen linearen Transformationen mit gleichen Determinanten bleiben, wie man aus dem vorigen erkennt, die drei Vorzeichen, welche in den Determinanten der Linearformsysteme der einzelnen bilinearen Substitutionen auftreten (siehe für P die Formeln am Schlusse der Nr. 2), invariant. Durch solche Transformationen läßt sich aber erreichen, daß $A = B = C = E$ wird, wobei $E((x)) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$. In diesem Falle erkennt man leicht, daß das Produkt der drei Vorzeichen nur den Wert -1 haben kann[8]). Das gilt dann wegen der vorigen Bemerkung auch in jedem andern Falle. Daher ist durch das zweite und dritte Vorzeichen das erste schon mitbestimmt. Je nachdem bei der bilinearen Substitution (I) jene beiden Vorzeichen die Werte $++$, $--$, $+-$, $-+$ haben, schreiben wir der durch sie vermittelten bilinearen Transformation (II) positive, negative, positiv-negative oder negativ-positive *Signatur* zu. Der Kürze wegen sei es gestattet, auch von der Signatur von P selbst zu sprechen[9]).

10. Im tetraedralen System haben die bilinearen Substitutionen, die wir oben in derselben Weise akzentuiert haben, stets dieselbe Signatur. Das ergibt sich, wenn man die Formen A, B, C durch unimodulare Substitutionen[10]) auf die Gestalt fE transformiert, wo E die vorige Bedeutung hat. Durch die adjungierten unimodularen Substitutionen gehen nämlich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleichzeitig in $f'E$ über, wobei nach unsern Festsetzungen über reziproke Formen $f' = \varepsilon f$ und $\varepsilon^\nu = 1$ ist. Für das transformierte

---

[8]) S. 116.

[9]) Bei Beschränkung auf reelle Koeffizienten der Formen und Substitutionen ist die Signatur für $n = 4$ oder 8 durch P allein ohnehin schon bestimmt.

[10]) Das heißt solche mit der Determinante $+1$.

tetraedrale System ergeben dann die Gleichungen (III), daß $R = S = P$ und $Q = \varepsilon P$ wird, so daß P, Q, R, S gewiß dieselbe Signatur besitzen[11]). Weil nun durch unimodulare Substitutionen die Signatur nicht geändert werden kann, so gilt das auch in dem ursprünglichen tetraedralen System, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

11. Im tetraedralen System können alle zwölf bilinearen Substitutionen identisch werden, wobei dann offenbar die Signatur negativ sein muß. Ich gebe dafür den Fällen $n = 2, 4$ und 8 entsprechend drei Beispiele. Dabei ist zur Abkürzung gesetzt $\alpha\beta = y_\alpha z_\beta + y_\beta z_\alpha$, $(\alpha\beta) = y_\alpha z_\beta - y_\beta z_\alpha$.

1. $x_1 = \overline{12}, \qquad x_2 = y_1 z_1 - y_2 z_2.$

2. $x_1 = \overline{14} + (23), \quad x_2 = \overline{24} + (31), \quad x_3 = \overline{34} + (12),$
$x_4 = y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 - y_4 z_4.$

3. $x_1 = \overline{18} + (23) + (45) + (67), \quad x_2 = \overline{28} + (64) + (57) + (31),$
$x_3 = \overline{38} + (47) + (12) + (56), \quad x_4 = \overline{48} + (51) + (26) + (73),$
$x_5 = \overline{58} + (72) + (63) + (14), \quad x_6 = \overline{68} + (35) + (71) + (42),$
$x_7 = \overline{78} + (16) + (34) + (25), \quad x_8 = y_1 z_1 + \ldots + y_7 z_7 - y_8 z_8.$

12. Am einfachsten zu übersehen ist natürlich das tetraedrale System im Fall $n = 2$. Schreibt man die ganz beliebige[12]) bilineare Substitution P in der folgenden Weise:

$$x_1 \quad \alpha y_1 z_1 + \gamma' y_1 z_2 + \beta' y_2 z_1 + \delta y_2 z_2,$$
$$x_2 \quad \delta' y_1 z_2 + \beta y_1 z_2 + \gamma y_2 z_1 - \alpha' y_2 z_2,$$

und nimmt der größeren Symmetrie wegen $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1$, d. h. die Signatur negativ an, so zeigt sich, daß die sämtlichen Substitutionen des tetraedralen Systems einfach dadurch erhalten werden, daß man die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ für sich und jedesmal in derselben Weise die Koeffizienten $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ für sich permutiert. Dabei sind die in Betracht kommenden Permutationen die sämtlichen geraden Permutationen von vier Elementen, wodurch der Zusammenhang des tetraedralen Systems mit der alternierenden Gruppe 4. Grades in Evidenz gesetzt ist. Man findet nämlich $(P, P) = 1$, $(P, Q) = (\alpha\delta)(\beta\gamma)$, $(P, R) = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$, $(P, S) = (\alpha\gamma)(\beta\delta)$, $(P, P') = (\beta\gamma\delta)$, $(P, P'') = (\beta\delta\gamma)$, $(P, S') = (\alpha\gamma\beta)$, $(P, R'') = (\alpha\beta\gamma)$, $(P, R') = (\alpha\beta\delta)$, $(P, Q'') = (\alpha\delta\beta)$, $(P, Q') = (\alpha\delta\gamma)$, $(P, S'') = (\alpha\gamma\delta)$.

[11]) Wenn die Koeffizienten der Formen und Substitutionen reell und die Formen A, B, C positiv definit sind, so wird man auch die reziproken Formen positiv annehmen, so daß $\varepsilon = 1$ und dann auch $Q = P$ wird.

[12]) Die Voraussetzungen unserer Problemstellung (Nr. 2) erfordern nur die Bedingung, daß der Ausdruck $D \quad \alpha^2\alpha'^2 + \beta^2\beta'^2 + \gamma^2\gamma'^2 + \delta^2\delta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - 2\alpha\alpha'\gamma\gamma' - 2\alpha\alpha'\delta\delta' - 2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\beta\beta'\delta\delta' - 2\gamma\gamma'\delta\delta' - 4\alpha\beta\gamma\delta - 4\alpha'\beta'\gamma'\delta'$ nicht verschwinde.

(Eingegangen am 16. November 1922.)