Werk

Titel: Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen

Autor: Meyer, W. Fr.

Ort: Berlin

Jahr: 1923

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0016|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Darstellung und Zusammensetzung nichteuklidischer Raumbewegungen[1]).

Von

W. Fr. Meyer in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Die Bestimmung der elliptischen Bewegungen eines linearen Raumes $R_3(x, y, z)$ erweist sich als gleichwertig mit der Bestimmung der Euklidischen Bewegungen B eines linearen $R_4(x, y, z, q)$ um einen festgehaltenen Punkt O; man hat nur das Bündel O mit einem geeigneten R_3 $(q = 1)$ aufzufangen (Nr. **1**). Eine Bewegung B des R_4 denke man sich aus zwei einfacheren Fundamentalbewegungen W_0 und D_q zusammengesetzt; W_0 bedeutet eine Wendung um eine beliebig aber fest gewählte Achse d_0, mit den Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$, und D_q eine positive Drehung um die q-Achse durch einen Drehwinkel δ_0 (Nr. **3**). Die W_0 projiziert sich im R_3 als eine harmonische Perspektivität, die leicht darzustellen ist; die D_q wird in bekannter Weise durch die Komponenten A_0, B_0, C_0, D_0 einer Einheitsquaternion angegeben. Da die aus W_0 und D_q zusammengesetzte Substitution die Determinante -1 besitzt, hat man noch eine Spiegelung an O im R_3 $(q = 0)$ hinzuzufügen, um zu den B zu gelangen (Nr. **4**).

Bei der Ausführung der Rechnung zeigt sich, daß ständig vier gewisse, sowohl in den λ_0, μ_0, ν_0, wie in den A_0, B_0, C_0, D_0 lineare Klammerfaktoren $T, T_\lambda, T_\mu, T_\nu$ wiederkehren. Kombiniert man dieses Größenquadrupel mit dem andern der Produkte $A, A_\lambda, A_\mu, A_\nu$ von D_0, A_0, B_0, C_0 mit π_0, so gelangt man zu acht überzähligen Parametern, die durch zwei einfache Relationen verknüpft sind. Weiterhin erweist es sich als zweck-

[1]) In meinen Vorlesungen bediene ich mich des Beiwortes „übereuklidisch", das mir treffender zu sein scheint, da es erkennen läßt, daß auch das „Euklidische" mit darunter — als Ausartungsfall — enthalten ist. Auf die naheliegenden Beziehungen des Textes zur Relativitätstheorie der Lorentztransformationen gedenke ich an anderer Stelle näher einzugehen.

mäßig, lieber die Summen und Differenzen $A \pm T$, $A_\lambda \pm T_\lambda$, ... als die eigentlichen Bausteine S, S_λ, ...; D, D_λ, ... des Ganzen zugrunde zu legen, die zwei ganz gleich gebauten Relationen genügen (Nr. 7).

Die Koeffizienten a_{ik} von B erweisen sich dann als relativ einfache quadratische homogene Formen der acht Parameter (Nr. 8).

Umgekehrt lassen sich bei vorgegebenen a_{ik} die Parameter unter Adjunktion einer einzigen Quadratwurzel rational ausdrücken (Nr. 9).

Behufs weiterer Verwendung der B erscheint es notwendig, deren reelle Darstellung in eine komplexe Gestalt überzuführen, indem man statt der x, y, z, q die Verbindungen $\zeta = x + iy$, $\bar{\xi} = x - iy$, $\eta = p + iq$, $\bar{\eta} = p - iq$ nebst den entsprechenden transformierten einführt.

Damit lassen sich die vier Darstellungsformeln für x', y', z', q' der B auf nur zwei, für ζ' und η', von besonders einfacher Bauart zusammenziehen (Nr. 10).

Der Vorteil dieser komplexen Darstellung der B zeigt sich sofort, wenn man insbesondere die Bewegungen B des von O ausgehenden Minimalüberkegels K in sich untersucht (Nr. 11). Dann gelangt man zu zwei Paaren induzierter binärer unimodularer Substitutionen, die den quaternären Substitutionen der B eineindeutig zugeordnet sind.

Auf Grund dieses Reduktionsverfahrens wird es nunmehr leicht, die Zusammensetzung zweier B aus der Zusammensetzung der beiden Paare entsprechender binärer Substitutionen herzuleiten (Nr. 12).

Mit Hilfe einer Cliffordschen Biquaternion q läßt sich dann die Zusammensetzung von B und B' zu B'' in ein einziges symbolisches Multiplikationsgesetz $q'' = qq'$ zusammenpressen (Nr. 13).

Für weitergehende Anwendungen empfiehlt es sich jedoch, wiederum die obigen Summen und Differenzparameter S, S_λ ...; D, D_λ ... heranzuziehen.

Dann läßt sich eine elliptische R_3-Bewegung ersetzen durch die Superposition zweier unabhängiger Euklidischer R_3-Drehungen (Nr. 14). Andererseits erscheint eine B des R_4 direkt als die Zusammensetzung zweier unabhängiger Drehungen um zwei zueinander senkrechte Ebenen E, E', die zugleich die beiden einzigen reellen Fixebenen des R_4 sind (Nr. 15).

Diese Fixebenen E, E' oder auch die ihren korrespondierenden Fixgeraden e, e' eines Projektions-R_3 lassen sich nach außerordentlich einfachem Gesetze durch die bezüglichen Drehelemente darstellen, woraus sich von selbst eine elementare Konstruktion der Geraden e, e' anschließt.

Die hiermit skizzierte Methode zur Behandlung der elliptischen R_3-Bewegungen läßt sich auf den hyperbolischen Fall übertragen, wobei die Formeln freilich nicht unerheblich an Symmetrie einbüßen. Denn jetzt handelt es sich um die Superposition „hyperbolischer" Quaternionen,

deren Komponenten A, B, C, D je einer Relation von der Form $C^2+D^2-(A^2+B^2)=1$ genügen.

Um indessen die Symmetrie soviel wie möglich zu retten, empfiehlt es sich, auf die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ der Euklidischen R_3-Drehungen — oder auch der elliptischen Bewegungen der Ebene — zurückzugehen. Ersetzt man hier den mittleren Winkel ϑ durch den entsprechenden hyperbolischen θ, d. h. ersetzt man $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch die hyperbolischen Funktionen $S(\theta)$ und $C(\theta)$, so geht man damit auch von der gewöhnlichen Quaternion zur hyperbolischen über (Nr. **17**). Zum Schluß wird noch auf die Natur der elliptischen „Kugeln" des R_3 eingegangen (Nr. **18**).

1. Im linearen R_4 seien x, y, z, q rechtwinklige Punktkoordinaten mit O als Anfangspunkt. Dann ist die Gruppe der, O festlassenden Bewegungen B des R_4, dargestellt durch die orthogonalen Substitutionen mit der Determinante Eins:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}q, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

wo die Koeffizienten a_{ik} an die bekannten Orthogonalitätsbedingungen[2]) gebunden sind, die sich aus der Identität:

$$(1) \qquad x'^2+y'^2+z'^2+q'^2 \equiv x^2+y^2+z^2+q^2$$

ergeben. Oder auch: (I) ist die Gesamtheit der unimodularen Kollineationen des R_4, die den Minimalüberkegel K:

$$(2) \qquad K \equiv x^2+y^2+z^2+q^2=0$$

in sich überführen.

2. Man schneide das Bündel (O) mit einem R_3, etwa:

$$(3) \qquad q=1,$$

O_1 sei die Spur der q-Achse.

Dann induziert (I) im R_3 (3) die *elliptischen Raumbewegungen* B_1, d. i. die Gesamtheit der Kollineationen der Punkte $(x, y, z, 1)$, die die nullteilige Grund-Kugel K_1:

$$(2_1) \qquad K_1 \equiv x^2+y^2+z^2+1=0$$

invariant lassen. Macht man hier wieder mit einer Größe q homogen, so geht (2_1) formal rückwärts in (2) über. Normiert man überdies die homogenen x', y', z', q' des R_3 so, daß die Kollineationsdeterminante den

[2]) Aus diesen Bedingungen folgt, daß in (I) jedes Element a_{ik} gleich seinem Minor α_{ik} ist, und vice versa.

Wert Eins erhält, so gelangt man zu (I) zurück. In diesem Sinne läßt sich also sagen:

„Die Bestimmung der orthogonalen B (I) im R_4 ist gleichwertig mit der Bestimmung der elliptischen Bewegungen B_1 des R_3."

NB. Dies gilt mutatis mutandis auch für die hyperbolischen Bewegungen des R_3: man hat nur in (1) und (2) q'^2 mit $-q'^2$, q^2 mit $-q^2$ zu vertauschen. Die im folgenden für die elliptischen Bewegungen entwickelte Methode läßt sich ohne weiteres auf die hyperbolischen Bewegungen übertragen; es wird sich aber ein Mittel angeben lassen, um die bezüglichen unbequemen Rechnungen zu umgehen (s. Nr. **17**).

3. Die orthogonalen B (I) bilden ein einfach zusammenhängendes sechsfach ausgedehntes reelles Kontinuum; sie stellen die Gesamtheit der rechtwinkligen Vierkante im R_4 mit fester Spitze O dar.

Man setze jetzt irgendeine B (I) aus zwei einfacheren Fundamentalsubstitutionen zusammen, die mit W_0 und D bezeichnet seien. Hier bedeutet W_0 die Wendung (Umlegung) des R_4 um eine beliebig, aber fest gewählte Achse d_0 durch O, mit den Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$, wo $\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 + \pi_0^2 = 1$; andererseits D_q eine positive Drehung des R_4 um die q-Achse, durch einen Winkel δ_0. Jede dieser beiden Operationen führt drei Parameter mit sich; ihre Zusammensetzungen (W_0, D_q) erzeugen also, noch mit einer gewissen Spiegelung (s. u.) verbunden, eine Gesamtheit von B (I) mit sechs Parametern. Es wird sich von selbst zeigen, daß beide Gesamtheiten eineindeutig aufeinander beziehbar sind und damit zusammenfallen.

4. Zuerst werde W_0 dargestellt. Da jede auf d_0 in O senkrechte Gerade als Ganzes in sich übergeht, und alle diese Geraden in dem zu d_0 senkrechten Raume Δ_0:

$$\Delta_0 \equiv x\lambda_0 + y_0\mu_0 + z\nu_0 + q\pi_0 = 0 \tag{4}$$

liegen, so projiziert sich W_0 im R_3 (3) als eine harmonische Perspektivität, mit dem Zentrum $P_0(x_0\ y_0\ z_0\ 1)$, der Spur von d_0, und der Zentralebene Π_0:

$$\Pi_0 \equiv xx_0 + yy_0 + zz_0 + 1 = 0, \tag{4'}$$

der Spur von Δ_0; Π_0 ist zugleich die Polarebene von P_0 bezüglich der nullteiligen Kugel K_1 (2_1).

Somit lauten die Gleichungen für W_0 (in nichthomogener Form):

$$\text{(II) } W_0) \quad \begin{cases} x' - x_0 = -(x - x_0), \quad y' - y_0 = -(y - y_0), \quad z' - z_0 = -(z - z_0), \\ x'x_0 + y'y_0 + z'z_0 + 1 = xx_0 + yy_0 + zz_0 + 1. \end{cases}$$

Macht man diese Gleichungen mit q', q homogen, so lassen sie sich leicht nach den x', y', z', q' auflösen, indem man die drei ersten mit x_0, y_0, z_0 multipliziert und addiert, und dann den so gewonnenen Wert von q' in die drei ersten einsetzt. Andererseits mache man auch die x_0, y_0, z_0 mit q_0 homogen, und normiere die x_0, y_0, z_0, q_0, indem man sie direkt den ihnen proportionalen Richtungskosinus $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0$ von d_0 gleichsetzt. Damit wird der gemeinsame Nenner $\lambda_0^2 + \mu_0^2 + \nu_0^2 + \pi_0^2$ der Koeffizienten, die mit w_{ik} bezeichnet seien, gleich Eins, und man erhält für W_0 das symmetrische Schema:

$$(\mathrm{III})\, W_0) \qquad \begin{cases} x' = w_{11}x + w_{12}y + w_{13}z + w_{14}q, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

wo die w nur zwei verschiedene Typen aufweisen:

$$(5) \qquad \begin{cases} w_{\lambda\lambda} = \lambda_0^2 - \mu_0^2 - \nu_0^2 - \pi_0^2 = 2\lambda_0^2 - 1 \\ w_{\lambda\mu} = w_{\mu\lambda} = 2\lambda_0\mu_0 \end{cases} \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4).$$

Hier hat die Determinante $|w_{ik}|$ den Wert -1. Denn wegen des involutorischen Charakters von W_0 kann die Determinante nur einen der beiden Werte ± 1 annehmen; eine geeignete Spezialisierung z. B. $\lambda_0 = \mu_0 = \nu_0 = 0$, $\pi_0 = 1$ zeigt, daß -1 der richtige Wert ist.

5. Die Drehung D_q um die q-Achse, deren Koeffizienten mit b_{ik} bezeichnet seien, läßt sich ohne weiteres hinschreiben. Denn für $i, k = 1, 2, 3$ sind die b_{ik} die Koeffizienten einer orthogonalen Substitution des R_3, während die Randelemente, bis auf $b_{44} = 1$, alle verschwinden.

Für die b_{ik} wählen wir die bekannte Darstellung mittels der Komponenten A_0, B_0, C_0, D_0 einer Einheitsquaternion, so daß:

$$(6) \qquad A_0^2 + B_0^2 + C_0^2 + D_0^2 = 1.$$

Dann genügt es, für die b die Typen zu notieren:

$$(\mathrm{III})\, D_q) \qquad \begin{cases} b_{11} = (A_0^2 + D_0^2) - (B_0^2 + C_0^2), \\ b_{12} = 2(A_0B_0 - C_0D_0), \\ b_{21} = 2(A_0B_0 + C_0D_0) \end{cases} \text{(und zyklisch so weiter)},$$
$$b_{14} = b_{24} = b_{34} = b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0, \quad b_{44} = 1.$$

Da diese Substitution unimodular ist, so liefert ihre Zusammensetzung mit W_0 eine Substitution mit der Determinante -1. Um also zu (I) zu gelangen, hat man noch schließlich eine Spiegelung von O im R_3 hinzuzufügen von der Art:

$$(7) \qquad x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad q' = q.$$

6. Damit ergibt sich durch Zusammensetzung von W_0, D_q und (7) für die a_{ik} in (I) ein Schema der folgenden Struktur:

$$(8)\quad \begin{cases} -a_{11} = b_{11}(2\lambda_0^2 - 1) + 2b_{12}\lambda_0\mu_0 + 2b_{13}\lambda_0\nu_0, \\ -a_{12} = 2b_{11}\lambda_0\mu_0 + b_{12}(2\mu_0^2 - 1) + 2b_{13}\mu_0\nu_0, \\ -a_{13} = 2b_{11}\lambda_0\nu_0 + 2b_{12}\mu_0\nu_0 + b_{13}(2\nu_0^2 - 1), \\ -a_{14} = 2b_{11}\lambda_0\pi_0 + 2b_{12}\mu_0\pi_0 + 2b_{13}\nu_0\pi_0, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{41} = 2\lambda_0\pi_0, \quad a_{42} = 2\mu_0\pi_0, \quad a_{43} = 2\nu_0\pi_0, \quad a_{44} = 2\pi_0^2 - 1, \end{cases}$$

wo für die b ihre Werte aus (III) einzutragen sind.

7. Um zunächst die a_{ik} mit ungleichen Indizes zu berechnen, empfiehlt es sich, an deren Stelle vorab deren Summen s_{ik} und Differenzen d_{ik} in Angriff zu nehmen:

$$(9)\qquad s_{ik} = a_{ki} + a_{ik}, \quad d_{ik} = a_{ki} - a_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Bei der Ausführung dieser Bildungen beobachtet man, daß fortdauernd die nämlichen vier Klammerfaktoren auftreten, die gleich als neue selbständige Größen $T_\lambda, T_\mu, T_\nu, T$ eingeführt seien, und die, einmal nach den λ_0, μ_0, ν_0, andererseits nach den A_0, B_0, C_0, D_0 geordnet, die übersichtliche Struktur besitzen:

$$(10)\quad \begin{cases} T_\lambda = \lambda_0 D_0 - \mu_0 C_0 + \nu_0 B_0 = 0\cdot A_0 + \nu_0 B_0 - \mu_0 C_0 + \lambda_0 D_0, \\ T_\mu = \lambda_0 C_0 + \mu_0 D_0 - \nu_0 A_0 = -\nu_0 A_0 + 0\cdot B_0 + \lambda_0 C_0 + \mu_0 D_0, \\ T_\nu = -\lambda_0 B_0 + \mu_0 A_0 + \nu_0 D_0 = \mu_0 A_0 - \lambda_0 B_0 + 0\cdot C_0 + \nu_0 D_0, \\ -T = \lambda_0 A_0 + \mu_0 B_0 + \nu_0 C_0 = \lambda_0 A_0 + \mu_0 B_0 + \nu_0 C_0 + 0\cdot D_0. \end{cases}$$

Zugleich empfiehlt es sich im weiteren, an Stelle der A_0, B_0, C_0, D_0 lieber deren Produkte mit π_0 als ein zweites Quadrupel selbständiger Größen einzuführen, wie folgt:

$$(11)\qquad A_\lambda = A_0\pi_0, \quad A_\mu = B_0\pi_0, \quad A_\nu = C_0\pi_0, \quad A = D_0\pi_0.$$

Die Gleichungen (10) lassen sich sowohl nach den λ_0, μ_0, ν_0, wie nach den A_0, B_0, C_0, D_0 in einfacher und übersichtlicher Weise auflösen:

$$(10')\quad \begin{cases} A_0(1-\pi_0^2) = 0\cdot T_\lambda - \nu_0 T_\mu + \mu_0 T_\nu - \lambda_0 T, \\ B_0(1-\pi_0^2) = \nu_0 T_\lambda + 0\cdot T_\mu - \lambda_0 T_\nu - \mu_0 T, \\ C_0(1-\pi_0^2) = -\mu_0 T_\lambda + \lambda_0 T_\mu + 0\cdot T_\nu - \nu_0 T, \\ D_0(1-\pi_0^2) = \lambda_0 T_\lambda + \mu_0 T_\mu + \nu_0 T_\nu + 0\cdot T; \end{cases}$$

$$(10'')\quad \begin{cases} \lambda_0\pi_0 = (AT_\lambda - TA_\lambda) - (A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu), \\ \mu_0\pi_0 = (AT_\mu - TA_\mu) - (A_\nu T_\lambda - A_\lambda T_\nu), \\ \nu_0\pi_0 = (AT_\nu - TA_\nu) - (A_\lambda T_\mu - A_\mu T_\lambda). \end{cases}$$

Überdies ergeben sich für π_0 die beiden Darstellungen:

$$(12)\qquad \begin{cases} \pi_0^2 = A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2, \\ 1 - \pi_0^2 = T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2. \end{cases}$$

Der so dargestellten Quadratwurzel π_0 läßt sich ein beliebig, aber fest gewähltes Vorzeichen beilegen. Denn ein gleichzeitiger Zeichenwechsel der $\lambda_0, \mu_0, \nu_0, \pi_0; A_0, B_0, C_0, D_0,$ oder auch der $T, T_\lambda, T_\mu, T_\nu; A, A_\lambda, A_\mu, A_\nu,$ läßt die Werte der a_{ik} (s. u. Nr. 8) ungeändert. Oder, wie man sich auch ausdrückt, die beiden Parameterquadrupel der T und A bilden zusammen einen *Tensor*.

Aus (10) und (12) fließen die beiden wichtigen Beziehungen zwischen beiden Quadrupeln:

$$\begin{cases} (\mathrm{IV}_1) \qquad A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2 + T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2 = 1, \\ (\mathrm{IV}_2) \qquad A T + A_\lambda T_\lambda + A_\mu T_\mu + A_\nu T_\nu = 0. \end{cases}$$

Hierdurch reduzieren sich die überzähligen acht neuen Parameter auf sechs unabhängige, wie es sein muß.

Für das Folgende sei gleich bemerkt, daß die beiden Bedingungen (IV_1), (IV_2) eine noch übersichtlichere Gestalt annehmen, wenn man lieber die Summen und Differenzen je entsprechender A und T als die wahren Kerne des Ganzen einführt:

$$(13)\qquad \begin{cases} S = A + T, \quad S_\lambda = A_\lambda + T_\lambda, \quad S_\mu = A_\mu + T_\mu, \quad S_\nu = A_\nu + T_\nu, \\ D = A - T, \quad D_\lambda = A_\lambda - T_\lambda, \quad D_\mu = A_\mu - T_\mu, \quad D_\nu = A_\nu - T_\nu. \end{cases}$$

Denn damit gehen die beiden Bedingungen (IV_1), (IV_2) über in die beiden ihnen gleichwertigen, ganz gleich gebauten:

$$(\mathrm{IV})\qquad \begin{cases} S^2 + S_\lambda^2 + S_\mu^2 + S_\nu^2 = 1, \\ D^2 + D_\lambda^2 + D_\mu^2 + D_\nu^2 = 1. \end{cases}$$

Mit anderen Worten, die orthogonalen B (I) der R_4 lassen sich durch zwei beliebige, voneinander unabhängige Einheitsquaternionen beherrschen (s. u. Nr. **14**).

8. Mit Hilfe der acht neuen Größen A und T nehmen nunmehr die Verbindungen s_{ik} und d_{ik} in (9) die folgenden einfachen Werte an:

$$(14)\qquad \begin{cases} \begin{cases} \frac{1}{4} s_{\lambda\mu} = A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu, \\ \frac{1}{4} d_{\lambda\mu} = A A_\nu - T T_\nu; \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{1}{4} s_{\lambda 4} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu), \\ \frac{1}{4} d_{4\lambda} = A T_\lambda - A_\lambda T. \end{cases} \end{cases} \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ zyklisch} = 1, 2, 3).$$

Hieraus ergeben sich sofort durch jeweilige Addition und Subtraktion die entsprechenden a_{ik} $(i \neq k = 1, 2, 3, 4)$. Andererseits gelangt man zu den vier Diagonalelementen a_{ii} durch geeignete lineare Kombinierung der Quadrate der A und T, auf Grund von (10) und (11).

So entsteht das (reelle) Schema der a in (I). Man hat, nach Typen geordnet:

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} \begin{cases} a_{\lambda\lambda} = -(T^2 + T_\lambda^2) + (T_\mu^2 + T_\nu^2) \\ \qquad\quad + (A^2 + A_\lambda^2) - (A_\mu^2 + A_\nu^2), \\ a_{44} = -(T^2 + T_\lambda^2 + T_\mu^2 + T_\nu^2) \\ \qquad\quad + (A^2 + A_\lambda^2 + A_\mu^2 + A_\nu^2); \end{cases} & (\lambda = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3), \\ \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\lambda\mu} = (A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu) - (A A_\nu - T T_\nu), \\ \frac{1}{2} a_{\mu\lambda} = (A_\lambda A_\mu - T_\lambda T_\mu) + (A A_\nu - T T_\nu), \end{cases} & (\lambda, \mu, \nu \text{ zykl.} = 1, 2, 3); \\ \begin{cases} \frac{1}{2} a_{\lambda 4} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu) - (A T_\lambda - A_\lambda T), \\ \frac{1}{2} a_{4\lambda} = -(A_\mu T_\nu - A_\nu T_\mu) + (A T_\lambda - A_\lambda T). \end{cases} \end{cases}$$

Ersichtlich ist diese Darstellung eine Verallgemeinerung derjenigen für eine orthogonale B (III) des R_3; in der Tat entsteht die letztere aus (I') durch die Spezialisierung $T = T_\lambda = T_\mu = T_\nu = 0$, während die verbleibenden $A_\lambda, A_\mu, A_\nu, A$ die Komponenten der zugehörigen Quaternion werden.

Endlich bilde man noch die Summe σ der vier Diagonalkoeffizienten a_{ii}. Man erhält einfach:

$$\frac{1}{4}\sigma = A^2 - T^2. \tag{15}$$

In dem speziellen Falle $A = 1$, während alle übrigen sieben Parameter den Wert Null annehmen, reduziert sich (15) auf $\sigma = 4$. Das ist aber der Fall der identischen Substitution (I).

Das Schema (I') der a läßt sich noch übersichtlicher gestalten, wenn man an Stelle der $A, A_\lambda, \ldots; T, T_\lambda, \ldots$ die Größen $S, S_\lambda, \ldots; D, D_\lambda, \ldots$ aus (13) einführt. Man setze zur Abkürzung:

$$(15')\quad \begin{cases} \sigma = a_{\lambda\lambda} + a_{\mu\mu} + a_{\nu\nu} + a_{44}, \\ \sigma_\nu = -(a_{\lambda\lambda} + a_{\mu\mu}) + (a_{\nu\nu} + a_{44}) \end{cases} \quad (\nu = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3).$$

Dann ergeben sich für die s_{ik} und d_{ik} (14) die Werte:

$$(14')\quad \begin{cases} \frac{1}{2} s_{\lambda\mu} = S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda, \\ \frac{1}{2} s_{\nu 4} = S_\lambda D_\mu - S_\mu D_\lambda, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} d_{\lambda\mu} = S D_\nu + D S_\nu, \\ \frac{1}{2} d_{\nu 4} = -S D_\nu + D S_\nu. \end{cases}$$

Damit geht das Schema (I′) über in das folgende (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$ zu nehmen):

$$(\mathrm{I}'')\qquad \begin{cases} \begin{cases} a_{\lambda\lambda} = SD + S_\lambda D_\lambda - S_\mu D_\mu - S_\nu D_\nu, \\ a_{44} = SD + S_\lambda D_\lambda + S_\mu D_\mu + S_\nu D_\nu; \end{cases} \\ \begin{cases} a_{\lambda\mu} = (S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda) - (SD_\nu + DS_\nu), \\ a_{\mu\lambda} = (S_\lambda D_\mu + S_\mu D_\lambda) + (SD_\nu + DS_\nu); \end{cases} \\ \begin{cases} a_{\lambda 4} = (S_\mu D_\nu - S_\nu D_\mu) + (SD_\lambda - DS_\lambda), \\ a_{4\lambda} = (S_\mu D_\nu - S_\nu D_\mu) - (SD_\lambda - DS_\lambda). \end{cases} \end{cases}$$

9. Umgekehrt denke man sich jetzt die Koeffizienten a in (I), unter Berücksichtigung der zwischen ihnen bestehenden Orthogonalitätsrelationen vorgegeben; die acht neuen Parameter A und T, resp. S und D, sollen durch die a ausgedrückt werden. Auf Grund von (10) bestätigt man die Richtigkeit der folgenden Beziehungen:

$$(16\,\mathrm{a})\qquad \begin{cases} a_{11}A_\lambda + a_{12}A_\mu + a_{13}A_\nu + a_{14}T = A_\lambda, \\ a_{21}A_\lambda + a_{22}A_\mu + a_{23}A_\nu + a_{24}T = A_\mu, \\ a_{31}A_\lambda + a_{32}A_\mu + a_{33}A_\nu + a_{34}T = A_\nu, \\ a_{41}A_\lambda + a_{42}A_\mu + a_{43}A_\nu + a_{44}T = -T; \end{cases}$$

$$(16\,\mathrm{b})\qquad \begin{cases} a_{11}T_\lambda + a_{12}T_\mu + a_{13}T_\nu + a_{14}A = -T_\lambda, \\ a_{21}T_\lambda + a_{22}T_\mu + a_{23}T_\nu + a_{24}A = -T_\mu, \\ a_{31}T_\lambda + a_{32}T_\mu + a_{33}T_\nu + a_{34}A = -T_\nu, \\ a_{41}T_\lambda + a_{42}T_\mu + a_{43}T_\nu + a_{44}A = A. \end{cases}$$

Geometrisch bedeuten diese Relationen, daß vermöge (I) der Punkt $(x, y, z, q) = (A_\lambda, A_\mu, A_\nu, T)$ in den Punkt $(x', y', z', q') = (A_\lambda, A_\mu, A_\nu, -T)$ übergeht und entsprechend der Punkt $(x, y, z, q) = (T_\lambda, T_\mu, T_\nu, A)$ in den Punkt $(x', y', z', q') = (-T_\lambda, -T_\mu, -T_\nu, A)$.

Läßt man zunächst jeweils die vierte Relation in (16 a) und (16 b) fort, so ergibt sich durch Auflösung je der drei ersten, daß die A_λ, A_μ, A_ν, T resp. T_λ, T_μ, T_ν, A je den Determinanten einer Matrix proportional sind, oder, kurz geschrieben, für ϱ und σ als zwei Proportionalitätsfaktoren:

$$(17\,\mathrm{a})\qquad \varrho A_\lambda, \varrho A_\mu, \varrho A_\nu, \varrho T = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 & a_{34} \end{vmatrix},$$

$$(17\,\mathrm{b})\qquad \sigma T_\lambda, \sigma T_\mu, \sigma T_\nu, \sigma A = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Zieht man jetzt noch je die vierte Relation (16a), (16b) heran, so hat man für ϱ und σ die Werte:

$$\varrho = -8T, \quad \sigma = 8A. \tag{18}$$

Damit ergeben sich T und A als zwei Quadratwurzeln aus den Formeln:

$$-8T^2 = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-1 \end{vmatrix}, \tag{19a}$$

$$8A^2 = \begin{vmatrix} a_{11}+1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}+1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+1 \end{vmatrix}. \tag{19b}$$

Das Vorzeichen irgendeiner der beiden Quadratwurzeln für T und A läßt sich wiederum willkürlich festsetzen; dann ist aber das andere mit Rücksicht auf die Relation (IV_2) eindeutig bestimmt.

Zugleich erkennt man, daß für die Bewegungen B (I) ein reeller Fixpunkt im allgemeinen nicht existiert; für das Bestehen eines solchen ist notwendig und hinreichend, daß T verschwindet, was zu einer ausgezeichneten Untergruppe von (I) führt.

Wiederum gestaltet sich die Lösung der obigen Umkehrungsaufgabe erheblich einfacher bei Einführung der Größen $S, S_\lambda, \ldots; D, D_\lambda, \ldots$ (14). Aus den Darstellungen (14′) und (I″) der Nr. 8 gehen sofort die folgenden hervor (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} 4SD = \sigma, & 4S_\lambda D_\lambda = \sigma_\lambda, \ldots, \\ 4S_\lambda D_\mu = s_{\lambda\mu} + s_{\nu 4}, & 4S_\mu D_\lambda = s_{\lambda\mu} - s_{\nu 4}, \\ 4SD_\lambda = d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}, & 4DS_\lambda = d_{\mu\nu} + d_{\lambda 4}. \end{cases} \tag{14″}$$

Hieraus ergibt sich etwa S, indem man die Ausdrücke für $4SD$, $4SD_\lambda$, $4SD_\mu$, $4SD_\nu$ quadriert und addiert unter Benützung von (IV_2):

$$(4S)^2 = \sigma^2 + (d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4})^2 + (d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4})^2 + (d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4})^2. \tag{19′}$$

Das Vorzeichen der so hervorgehenden Quadratwurzel für $4S$, die einfach mit V bezeichnet werde, kann nach früherem beliebig, aber fest gewählt werden. Abgesehen von diesem irrationalen Faktor erscheinen dann die übrigen sieben Parameter als ganze resp. gebrochene *lineare* Ausdrücke in den a, wie folgt (λ, μ, ν zyklisch $= 1, 2, 3$):

$$\begin{cases} DV = \sigma, \quad D_\lambda \cdot V = d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}, \quad D_\mu \cdot V = d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4}, \quad D_\nu \cdot V = d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4}, \\ \dfrac{4S_\lambda}{V} = \dfrac{d_{\mu\nu} + d_{\lambda 4}}{\sigma} = \dfrac{\sigma_\lambda}{d_{\mu\nu} - d_{\lambda 4}} = \dfrac{s_{\lambda\mu} + s_{\nu 4}}{d_{\nu\lambda} - d_{\mu 4}} = \dfrac{s_{\nu\lambda} - s_{\mu 4}}{d_{\lambda\mu} - d_{\nu 4}}. \end{cases} \tag{17′}$$

10. Wie bei den Euklidischen B des R_3, erscheint die reelle Darstellung (I′) resp. (II″) der a noch nicht als die einfachste. Man wird vielmehr geeignete komplexe Verbindungen der x, y, z, q resp. x', y', z', q' als neue Veränderliche einführen. Wir setzen also etwa:

$$(20) \qquad \begin{cases} \zeta = x + iy, & \eta = p + iq, \\ \bar{\xi} = x - iy, & \bar{\eta} = p - iq, \end{cases}$$

und entsprechend für $\zeta', \bar{\xi}', \eta', \bar{\eta}'$.

Umgekehrt hat man dann:

$$(20') \qquad \begin{aligned} 2x &= \zeta + \bar{\xi}, & 2p &= \eta + \bar{\eta}, \\ 2y &= -i(\zeta - \bar{\xi}), & 2q &= -i(\eta - \bar{\eta}). \end{aligned}$$

Damit nimmt zunächst $2\zeta' = 2(x' + iy')$ in (I) die Gestalt an:

$$(21) \qquad \begin{aligned} 2\zeta' = {} & \zeta\{(a_{11} + ia_{21}) - i(a_{12} + ia_{22})\} \\ & + \bar{\xi}\{(a_{11} + ia_{21}) + i(a_{12} + ia_{22})\} \\ & + \eta\{(a_{13} + ia_{23}) - i(a_{14} + ia_{24})\} \\ & + \bar{\eta}\{(a_{13} + ia_{23}) + i(a_{14} + ia_{24})\}, \end{aligned}$$

wo rechts die Werte der a aus (I′) resp. (II″) einzutragen sind. Die Ausführung der Rechnung zeigt, daß sich alles durch nur vier komplexe Verbindungen der acht neuen Parameter A, T resp. S, D ausdrücken läßt, nämlich mit Rücksicht auf (13), wie folgt:

$$(22) \qquad \begin{cases} \sigma_{0\nu} = (A + T) + i(A_\nu + T_\nu) = S + i S_\nu \\ \delta_{0\nu} = (A - T) + i(A_\nu - T_\nu) = D + i D_\nu \\ \sigma_{\lambda\mu} = (A_\lambda + T_\lambda) + i(A_\mu + T_\mu) = S_\lambda + i S_\mu \\ \delta_{\lambda\mu} = (A_\lambda - T_\lambda) + i(A_\mu + T_\mu) = D_\lambda + i D_\mu. \end{cases}$$

Damit kommt an Stelle von (21) einfach:

$$(\mathrm{I}_\zeta) \qquad \zeta' = \zeta\,\sigma_{0\nu}\,\delta_{0\nu} + \bar{\xi}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\delta_{\lambda\mu} - i\eta\,\sigma_{\lambda\mu}\,\delta_{0\nu} - i\bar{\eta}\,\sigma_{0\nu}\,\delta_{\lambda\mu},$$

woraus die entsprechende Darstellung für die konjugiert-komplexe Veränderliche $\bar{\xi} = x' - iy'$ ohne weiteres abzulesen ist.

Analog ergibt sich für η':

$$(\mathrm{I}_\eta) \qquad \eta' = -i\zeta\,\sigma_{0\nu}\,\bar{\delta}_{\lambda\mu} + i\bar{\xi}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\bar{\delta}_{0\nu} + \eta\,\sigma_{0\nu}\,\bar{\delta}_{0\nu} - \bar{\eta}\,\sigma_{\lambda\mu}\,\bar{\delta}_{\lambda\mu}.$$

11. Nun waren die B (I) des R_4 definiert als die unimodularen Kollineationen, die den Minimalüberkegel K:

$$(2) \qquad K \equiv x^2 + y^2 + z^2 + q^2 = 0$$

in sich überführen. Indem man auch hier die neuen Veränderlichen (20) einführt, nimmt (2) die Gestalt an:

$$(2) \qquad K \equiv \zeta\bar{\xi} + \eta\bar{\eta} = 0.$$

Statt dieser impliziten Darstellung von K lege man lieber eine gleichwertige explizite zugrunde, mit Hilfe zweier homogener binärer Parameterpaare $\lambda_1, \lambda_2;\ \mu_1, \mu_2$:

$$(23) \qquad \begin{cases} \zeta = \lambda_1 \mu_1, & \eta = \lambda_1 \mu_2, \\ -\bar{\xi} = \lambda_2 \mu_2, & \bar{\eta} = \lambda_2 \mu_1, \end{cases}$$

nebst den transformierten Parametern $\lambda_1', \lambda_2';\ \mu_1', \mu_2'$.

Dann reduzieren sich *auf* dem Kegel K die Substitutionen $(I_\zeta), (I_\eta)$ auf:

$$(24) \qquad \begin{cases} \lambda_1 \mu_1' = (\ \lambda_1 \sigma_{0\nu} - i\lambda_2 \sigma_{\lambda\mu})(\ \mu_1 \delta_{0\nu} - i\mu_2 \delta_{\lambda\mu}), \\ -\lambda' \mu_2' = (-\lambda_1 \sigma_{0\nu} + i\lambda_2 \sigma_{\lambda\mu})(i\mu_1 \bar{\delta}_{\lambda\mu} - \ \mu_2 \bar{\delta}_{0\nu}), \end{cases}$$

und entsprechend die Darstellungen für $\bar{\xi}'$ und $\bar{\eta}'$ auf:

$$(\overline{24}) \qquad \begin{cases} -\lambda_2' \mu_2' = (\ \lambda_1 \bar{\sigma}_{\lambda\mu} + i\lambda_2 \bar{\sigma}_{\sigma\nu})(\mu_1 \bar{\delta}_{\lambda\mu} + i\mu_2 \bar{\delta}_{\sigma\nu}), \\ \lambda_2' \mu_1' = (-i\lambda_1 \bar{\sigma}_{\lambda\mu} + \ \lambda_2 \sigma_{0\nu})(\mu_1 \delta_{0\nu} - i\mu_2 \delta_{\lambda\mu}). \end{cases}$$

Somit induziert die Bewegung (I) des R_4 auf K zwei binäre Substitutionen der $\lambda_1, \lambda_2;\ \mu_1, \mu_2$, die bezeichnet seien mit:

$$(25) \qquad \begin{cases} \lambda_1' = \alpha_\lambda \lambda_1 + \beta_\lambda \lambda_2, \\ \lambda_2' = \gamma_\lambda \lambda_1 + \delta_\lambda \lambda_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu_1' = \alpha_\mu \mu_1 + \beta_\mu \mu_2, \\ \mu_2' = \gamma_\mu \mu_1 + \delta_\mu \mu_2. \end{cases}$$

Auf Grund von (24) erhalten, wenn ε und η zwei unbekannte Proportionalitätsfaktoren bedeuten, die Koeffizienten in (25) die Werte:

$$(26) \qquad \begin{cases} \begin{cases} \alpha_\lambda = \ \varepsilon \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\varepsilon \sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\lambda = -\eta \bar{\sigma}_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = -i\eta \bar{\sigma}_{0\nu}; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_\mu = \dfrac{1}{\varepsilon} \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -\dfrac{i}{\varepsilon} \delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = \dfrac{1}{\eta} \bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \ \dfrac{i}{\eta} \bar{\delta}_{0\nu}. \end{cases} \end{cases}$$

Die beiden Substitutionen (25) mögen dahin normiert werden, daß ihre Determinanten je den Wert Eins annehmen. Das liefert als gemeinsame Bedingung $\varepsilon\eta = i$. Nach Entfernung von η geht (26) über in:

$$(26') \qquad \begin{cases} \begin{cases} \alpha_\lambda = \ \varepsilon \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\varepsilon \sigma_{\lambda\mu} \\ \gamma_\lambda = -\dfrac{i}{\varepsilon} \bar{\sigma}_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = \ \dfrac{1}{\varepsilon} \sigma_{0\nu}; \end{cases} \\ \begin{cases} \alpha_\mu = \ \dfrac{1}{\varepsilon} \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -\dfrac{i}{\varepsilon} \delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = -i\varepsilon \bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \ \varepsilon \bar{\delta}_{0\nu}. \end{cases} \end{cases}$$

Nunmehr ziehe man auch die erste der Darstellungen $(\overline{24})$ heran. Bedeutet ϱ wieder einen unbekannten Proportionalitätsfaktor, so ergibt sich für $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\mu, \delta_\mu$ die zweite Reihe von Werten:

$$(27)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda = -\varrho\,\sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = \quad i\varrho\,\sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = \dfrac{i}{\varrho}\,\delta_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = -\dfrac{i}{\varrho}\,\delta_{0\nu}. \end{cases}$$

Die Vergleichung mit (26′) lehrt, daß ε und ϱ an die Bedingungen gebunden sind:

$$(28)\qquad \varepsilon = -\varrho, \quad \varrho^2 = 1, \quad \text{also:} \quad \varrho = \mp 1, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Indem man, wie es nach früherem erlaubt ist, den Wert von ε zu $+1$ normiert, und damit den von ϱ zu -1, erhalten die Koeffizienten der Substitutionen (25) die endgültigen Werte:

$$(\mathrm{V}_\lambda)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda = \quad \sigma_{0\nu}, & \beta_\lambda = -i\,\sigma_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\lambda = -i\,\sigma_{\lambda\mu}, & \delta_\lambda = \quad \bar{\sigma}_{0\nu}; \end{cases}$$

$$(\mathrm{V}_\mu)\qquad \begin{cases} \alpha_\mu = \quad \delta_{0\nu}, & \beta_\mu = -i\,\delta_{\lambda\mu}, \\ \gamma_\mu = -i\,\bar{\delta}_{\lambda\mu}, & \delta_\mu = \quad \bar{\delta}_{0\nu}, \end{cases}$$

wo nach (22):

$$(22)\qquad \sigma_{0\nu} = S + iS_\nu, \quad \delta_{0\nu} = D + iD_\nu, \quad \sigma_{\lambda\mu} = S_\lambda + iS_\mu, \quad \delta_{\lambda\mu} = D_\lambda + iD_\mu.$$

Man beachte, daß die rechten Seiten von (V_λ) in die von (V_μ) einfach dadurch übergeht, daß man den Buchstaben σ mit δ, d. i. die S, S_λ, S_μ, S_ν mit den D, D_λ, D_μ, D_ν vertauscht.

Vermöge der zweiten der Darstellungsformeln $(\overline{24})$ erhalten (V_λ) und (V_μ) ihre Bestätigung.

Es läßt sich daher der Satz aussprechen:

„Auf Grund von (V) ist für die Bewegungen B (I) des R_4 eine wesentliche Reduktion gewonnen, insofern jeder quaternären Substitution (I) ein Paar von binären Substitutionen (V) eindeutig zugeordnet wird.“

12. Damit ist das Problem der Zusammensetzung zweier Bewegungen B, B' (I) zu einer dritten B'' auf das sehr viel einfachere der gleichzeitigen Zusammensetzung zweier binärer Substitutionenpaare (V) zurückgeführt, insofern die letzteren lauten:

$$(29)\qquad \begin{cases} \alpha_\lambda'' = \alpha_\lambda\,\alpha_\lambda' + \gamma_\lambda\,\beta_\lambda', & \beta_\lambda'' = \beta_\lambda\,\alpha_\lambda' + \delta_\lambda\,\beta_\lambda', \\ \gamma_\lambda'' = \alpha_\lambda\,\gamma_\lambda' + \gamma_\lambda\,\delta_\lambda', & \delta_\lambda'' = \beta_\lambda\,\gamma_\lambda' + \delta_\lambda\,\delta_\lambda', \end{cases}$$

nebst den analogen für den Index μ, wo gemäß (V) die Werte der keinmal, ein- und zweimal akzentuierten Koeffizienten einzutragen sind.

Trennt man sodann jeweils Reelles vom Imaginären, so gelangt man direkt zu den gesuchten Zusammensetzungsformeln für die Bewegungen B (I).

Bedient man sich dabei noch, wenn A, B, A', B' irgend zwei Größenpaare bedeuten, der Abkürzungen:

$$(30)\qquad [AB] = AB' + BA', \quad (AB) = AB' - BA',$$

so lautet, wenn die Indizes λ, μ, ν zyklisch die Werte 1, 2, 3 durchlaufen, die Zusammensetzungstabelle:

$$(\mathrm{VI}) \qquad \begin{cases} \begin{cases} A'' = (AA' + TT') - \sum\limits_{\lambda} A_\lambda A'_\lambda - \sum T_\lambda T'_\lambda, \\ T'' = [AT] - \sum\limits_{\lambda} [A_\lambda T_\lambda], \end{cases} \\ \begin{cases} A''_\lambda = [AA_\lambda] + [TT_\lambda] - (A_\mu A_\nu) - (T_\mu T_\nu), \\ T''_\lambda = [AT_\lambda] + [TA_\lambda] - (A_\mu T_\nu) - (T_\mu A_\nu). \end{cases} \end{cases}$$

13. Die Formeln (VI) lassen sich aber auch, wie bekanntermaßen ihre Analoga im R_3, mittels gewöhnlicher Einheitsquaternionen, in ein einziges symbolisches Multiplikationsgesetz für Cliffordsche Biquaternionen zusammenziehen. Bedeuten $r, s, i_\lambda, k_\lambda$ $(\lambda = \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3)$ Grundeinheiten, so bilde man die Biquaternion:

$$(31) \qquad q = rA + sT + \sum_{\lambda} i_\lambda A_\lambda + \sum_{\lambda} k_\lambda T_\lambda.$$

Sind dann q', q'' zwei entsprechende Bildungen, und führt man die Multiplikation $q'' = qq'$ arithmetisch von links nach rechts aus, und legt den Satz zugrunde, daß zwei Biquaternionen dann und nur dann gleich sind, wenn ihre acht Komponenten je übereinstimmen, so decken sich die Formeln (VI) mit $q'' = qq'$, falls die Grundeinheiten den folgenden Multiplikationsregeln unterworfen werden:

$$(32) \qquad \begin{cases} r = rr = ss = -i_\lambda i_\lambda = -k_\lambda k_\lambda = \ldots, \\ s = rs = sr = -i_\lambda k_\lambda = -k_\lambda i_\lambda = \ldots, \\ i_\lambda = ri_\lambda = i_\lambda r = sk_\lambda = k_\lambda s = -i_\mu i_\nu = +i_\nu i_\mu = -k_\mu k_\nu = +k_\nu k_\mu, \\ k_\lambda = si_\lambda = i_\lambda s = rk_\lambda = k_\lambda r = -i_\mu k_\nu = +k_\nu i_\mu = -k_\mu i_\nu = +i_\nu k_\mu. \end{cases}$$

Hier spielen die r, s die Rolle reeller Einheiten, und die i_λ, k_λ die von verallgemeinerten Vektor-Grundeinheiten.

In diesem Sinne gilt der Satz:

„Die Zusammensetzung von zwei Bewegungen (I) des R_4, resp. von zwei elliptischen Bewegungen des R_3 (3) lassen sich durch das eine Gesetz:

$$(\mathrm{VI}') \qquad q'' = qq'$$

zusammenfassen."

14. Indessen ist das Gesetz (VI) resp. (VI′) noch nicht das zweckmäßigste für die Behandlung weiterer Teilaufgaben. Zu dem Behuf wird man vielmehr wieder auf die in (13) eingeführten Größen S, S_λ; T, T_λ $(\lambda = \lambda, \mu, \nu)$ zurückgehen, die den beiden gleichgebauten Bedingungen unterlagen:

$$(\mathrm{IV}) \qquad \begin{cases} S_\lambda^2 + S_\mu^2 + S_\nu^2 + S^2 = 1, \\ D_\lambda^2 + D_\mu^2 + D_\nu^2 + D^2 = 1. \end{cases}$$

Indem man sowohl die $S_\lambda, \ldots, S$, wie die $D_\lambda, \ldots, D$ als Komponenten je einer gewöhnlichen Einheitsquaternion q_s, q_d auffaßt, mache man an Stelle von (IV) den expliziten Doppelansatz:

$$\text{(VII)} \quad \begin{cases} S_\lambda = \lambda_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \; S_\mu = \mu_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \; S_\nu = \nu_\varepsilon \sin\frac{\varepsilon}{2}, \; S = \cos\frac{\varepsilon}{2} \left(\lambda_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 + \nu_\varepsilon^2 = 1\right) \\ D_\lambda = \lambda_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \; D_\mu = \mu_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \; D_\nu = \nu_\eta \sin\frac{\eta}{2}, \; D = \cos\frac{\eta}{2} \left(\lambda_\eta^2 + \mu_\eta^2 + \nu_\eta^2 = 1\right) \end{cases}.$$

Diese Darstellungen gestatten eine doppelte geometrische Deutung.

Einmal fasse man die $\lambda_\varepsilon, \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon$ $(\pi_\varepsilon = 0)$, $\lambda_\eta, \mu_\eta, \nu_\eta$ $(\pi_\eta = 0)$ als die Richtungskosinus zweier von O ausgehender, im R_3 $(q = 0)$ gelegener, oder auch zweier von O_1 ausgehender, im R_3 (3) $(q = 1)$ gelegener Geraden d, e auf. Dann denke man sich zwei mit R_3 identische Räume, so hat man vermöge (VII) in je einem derselben eine gewöhnliche Drehung um die Achse d resp. e, durch den Drehwinkel ε resp. η.

Die einfachste Übersicht über alle hier in Frage kommenden Abhängigkeiten bei der Zusammensetzung zweier Bewegungen B, B' im R_4 zu einer dritten B'' bietet sich bekanntlich dar mit Hilfe zweier sphärischer Dreiecke Δ_ε, Δ_η auf der Einheitskugel. Im Dreieck Δ_ε haben die Seiten die Werte $\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon'}{2}, \frac{\varepsilon''}{2}$, dagegen die Winkel die Werte $(d'd'')$, (dd''), $(2R - (dd'))$, und entsprechend in Δ_η. Überdies ist zu beachten, daß die Richtungen der Drehachsen d, d', d'' in diejenigen der Kanten des geeignet normierten Polardreikants von Δ_ε fallen, und entsprechend für Δ_η. Das Ergebnis werde in dem Satze ausgedrückt:

„Die Darstellungen (VII) lassen sich realisieren durch Superposition zweier gewöhnlicher Drehungen in einem R_3."

15. Andererseits operiere man zum Zwecke einer direkten Deutung von (VII) im R_4. Man wähle das ursprüngliche Koordinatensystem (x, y, z, q) speziell so, daß die Bedingungen

$$\text{(33)} \qquad S_\lambda = 0, \; S_\mu = 0; \qquad D_\lambda = 0, \; D_\mu = 0;$$

oder auch $\lambda_\varepsilon = 0$, $\mu_\varepsilon = 0$, $\nu_\varepsilon = 1$; $\lambda_\eta = 0$, $\mu_\eta = 0$, $\nu_\eta = 1$ erfüllt sind. Damit nimmt (I) auf Grund von (I′) resp. (I″) die kanonische Gestalt an:

$$\text{(34)} \quad \begin{cases} \begin{cases} x' = x\cos\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right) - y\sin\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right), \\ y' = x\sin\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right) + y\cos\left(\frac{\varepsilon+\eta}{2}\right); \end{cases} \\ \begin{cases} z' = z\cos\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right) - q\sin\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right), \\ q' = z\sin\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right) + q\cos\left(\frac{\varepsilon-\eta}{2}\right). \end{cases} \end{cases}$$

Setzt man daher:

$$(35)\qquad \begin{cases} \delta = \dfrac{\varepsilon+\eta}{2}, & \delta' = \dfrac{\varepsilon-\eta}{2}, \\ \varepsilon = \delta+\delta', & \eta = \delta-\delta', \end{cases}$$

so stellen die Gleichungen (34) zwei voneinander unabhängige positive Drehungen des R_4 um die (zueinander senkrechten) Ebenen $(x\,y)$ und $(z\,q)$ durch die Drehwinkel δ, δ' dar. Somit gilt der Satz:

„Auf Grund von (VII) ist eine Bewegung (I) des R_4 gleichwertig mit der gleichzeitigen Ausführung zweier voneinander unabhängiger Drehungen des R_4 um zwei zueinander senkrechte durch O gehende Ebenen E, E' durch zwei Drehwinkel δ, δ'."

Es bleibt nur die Aufgabe, bei vorgegebenen Koeffizienten a die Lage dieser beiden Drehebenen, die zugleich die einzigen reellen Fixebenen der Bewegung sind, zu bestimmen.

16. Um die beiden Fixebenen E, E' — die sich im R_3 (3) als zwei Gerade e, e', die in bezug auf die nullteilige Einheitskugel K_1 (2_1) reziproke Polaren sind, darstellen — zu ermitteln, bestimme man vorab die Fixelemente ω_λ, ω'_λ; ω_μ, ω'_μ der beiden, jetzt nichthomogen in l, l'; m, m' zu schreibenden Substitutionen (25), d. s. die Wurzeln der beiden quadratischen Gleichungen:

$$(36)\qquad \begin{cases} l^2\gamma_\lambda - l(\alpha_\lambda-\delta_\lambda)-\beta_\lambda = 0, & (\omega_\lambda, \omega'_\lambda), \\ m^2\gamma_\mu - m(\alpha_\mu-\delta_\mu)-\beta_\mu = 0, & (\omega_\mu, \omega'_\mu). \end{cases}$$

Trägt man hier die Werte der Koeffizienten $\alpha_\lambda, \ldots, \alpha_\mu, \ldots$ aus (V) ein und benützt sodann die explizite Darstellung (VII), so führt eine einfache Rechnung zu den Werten[2]):

$$(37)\qquad \begin{cases} \omega_\lambda = \dfrac{\lambda_\varepsilon + i\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon+1}, & \omega'_\lambda = \dfrac{\lambda_\varepsilon+i\mu_\varepsilon}{\nu_\varepsilon-1}; \\ \omega_\mu = \dfrac{\lambda_\eta+i\mu_\varepsilon}{\nu_\eta+1}, & \omega'_\mu = \dfrac{\lambda_\eta+i\mu_\eta}{\nu_\eta-1}. \end{cases}$$

Die nullteilige Einheitskugel K_1 (2_1) ist mit zwei konjugiert imaginären Scharen von Geraden l = konst., m = konst. überdeckt; jeder Punkt von K

[2]) Führt man in (25) die Doppelelemente (37) ein, so ergibt sich, ähnlich wie im R_3:

$$\frac{l'-\omega_\lambda}{l'-\omega'_\lambda} = e^{i\varepsilon}\,\frac{l-\omega_\lambda}{l-\omega'_\lambda}, \qquad \frac{m'-\omega_\mu}{m'-\omega'_\mu} = e^{i\eta}\,\frac{m-\omega_\mu}{m-\omega'_\mu}.$$

Schreibt man hier wieder homogen und unimodular, und führt wieder gemäß (23) die $\zeta, \eta, \zeta', \eta'$ nebst ihren konjugierten ein, so gelangt man unmittelbar zur allgemeinen invarianten Darstellung der Bewegungen (I), die für den kanonischen Fall in (34) vorliegt.

erscheint als ein Treffpunkt (l, m). Somit führt (37) zu den beiden Paaren konjugiert-imaginärer Fixpunkte:

$$(38)\qquad \begin{cases} (\omega_\lambda, \omega_\mu) & \text{und} \quad (\omega'_\lambda, \omega'_\mu), \\ (\omega_\lambda, \omega'_\mu) & \text{und} \quad (\omega'_\lambda, \omega_\mu), \end{cases}$$

deren Verbindungsgeraden reell sind, und mit O verbunden, für (I) die beiden Fixebenen E, E' des R_4 liefern. Es genügt, etwa die erstere zu untersuchen, wobei es bequemer erscheint, die Projektionsgerade e im R_3 (3) zugrunde zu legen; der Index ε werde jetzt der Kürze halber unterdrückt, der Index η durch einen Akzent ersetzt, und vorübergehend gesetzt

$$(39)\qquad \nu_1 = \nu + 1, \qquad \nu'_1 = \nu' + 1.$$

Wählt man dann statt der konjugiert-imaginären Grundpunkte des ersten Paares von (38) lieber deren reelle Komponentpunkte, so erscheint die erste Fixgerade e im R_3 (3) bestimmt durch das folgende Schema der Koordinaten der beiden reellen Punkte:

$$(40)\qquad \begin{cases} \overbrace{(\lambda\lambda' - \mu\mu')}^{x} - \nu_1\nu'_1, & \overbrace{\lambda\mu' + \lambda'\mu}^{y}, & \overbrace{\lambda'\nu_1 + \lambda\nu'_1}^{z}, & \overbrace{\mu\nu'_1 - \mu'\nu_1}^{q} \\ \lambda\mu' + \lambda'\mu, & -\{(\lambda\lambda' - \mu\mu') + \nu_1\nu'_1\}, & \mu\nu'_1 + \mu'\nu_1, & \lambda'\nu_1 - \lambda\nu'_1 \end{cases}.$$

Hieraus lassen sich sofort die homogenen Strahlenkoordinaten p, wo $p_{ik} = (xy)$, $p_{lm} = (zq)$, usf., berechnen. Läßt man den gemeinsamen Faktor $\nu_1\,\nu'_1$ fort, der sein Auftreten der Bevorzugung der z-Koordinate in (2′) verdankt, so gelangt man zu den einfachen Werten für die p_{ik}:

$$(41)\qquad \begin{cases} p_{ik} = \nu + \nu', & p_{il} = -(\mu + \mu'), & p_{im} = \lambda - \lambda', \\ p_{lm} = \nu - \nu', & p_{mk} = -(\mu - \mu'), & p_{kl} = \lambda + \lambda'. \end{cases}$$

Hiermit ergeben sich die komplementären Achsenkoordinaten $\pi_{ik} = p_{lm}$ usf. von selbst:

$$(41')\qquad \begin{cases} \pi_{ik} = \nu - \nu', & \pi_{il} = -(\mu - \mu'), & \pi_{im} = \lambda + \lambda', \\ \pi_{lm} = \nu + \nu', & \pi_{mk} = -(\mu + \mu'), & \pi_{kl} = \lambda - \lambda'. \end{cases}$$

Man beachte, wie die bekannte Relation zwischen den p_{ik} resp. π_{ik} ohne weiteres erfüllt ist:

$$(42)\qquad \begin{aligned} &p_{ik}p_{lm} + p_{il}p_{mk} + p_{im}p_{kl} \\ &\equiv (\lambda^2 - \lambda'^2) + (\mu^2 - \mu'^2) + (\nu^2 - \nu'^2) \equiv 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

und entsprechend die Bedingung für das Konjugiertsein der Geraden e, e' bezüglich K_1 (2_1): $\sum p_{ik}\,\pi_{ik} = 0$, deren linke Seite das Doppelte der linken Seite von (42) ausmacht. Aus der ersten Fixgeraden e geht die zweite, e', einfach dadurch hervor, daß man die p_{ik} mit den gleichbezeichneten π_{ik} vertauscht.

Die Gesetzmäßigkeit der Formeln (41) tritt noch deutlicher hervor, wenn man die rechtwinkligen homogenen Koordinaten der vier Schnittpunkte Q_i von e mit den Ebenen des Koordinatentetraeders T im R_3 (3) — dessen vierte Ebene die unendlich ferne ist — resp. der vier Verbindungsebenen E_i mit den Ecken von T je zu einem Schema vereinigt. Man hat dann:

$$(43)\quad (Q_i)\begin{cases} 0, & \nu+\nu', & -(\mu+\mu'), & \lambda-\lambda', \\ -(\nu+\nu'), & 0, & \lambda+\lambda', & \mu-\mu', \\ \mu+\mu', & -(\lambda+\lambda'), & 0, & \nu-\nu', \\ \lambda-\lambda', & \mu-\mu', & \nu-\nu', & 0; \end{cases}$$

$$(43')\quad (E_i)\begin{cases} 0, & \nu-\nu', & -(\mu-\mu'), & \lambda+\lambda', \\ -(\nu-\nu'), & 0, & \lambda-\lambda', & \mu+\mu', \\ \mu-\mu', & -(\lambda-\lambda'), & 0, & \nu+\nu', \\ \lambda+\lambda', & \mu+\mu' & \nu+\nu', & 0. \end{cases}$$

Trägt man von O aus auf den Geraden e, e' die Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}'$ auf und konstruiert deren Summen- und Differenzvektor, so gestatten die letzteren eine unmittelbare elementare Konstruktion von e und e', und vice versa, was dem Leser überlassen bleibe.

17. Die bisherigen Entwicklungen lassen sich im wesentlichen auch auf den Fall der hyperbolischen R_3-Bewegungen übertragen. Wieder gelangt man zur Superposition zweier Quaternionen, die aber jetzt von „hyperbolischem" Charakter sind, d. h. deren Komponenten A, B, C, D je einer Relation von der Art:

$$(6\,a)\qquad C^2+D^2-(A^2+B^2)=1$$

genügen.

Um bei der Durchführung die zunächst zum Teil verloren gegangene Symmetrie nach Möglichkeit wieder herzustellen, ist es zweckmäßig, auf die Eulerschen Winkel φ, ϑ, ψ der Euklidischen R_3-Drehungen zurückzugehen. Um diese formal einzuführen, gehe man von den beiden Relationen $a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2=1$, $a_{31}^2+a_{32}^2+a_{33}^2=1$ aus, und erfülle dieselben mittels dreier Winkel φ, ϑ, ψ, indem man setzt:

$$(44)\qquad a_{33}=\cos\vartheta,\quad \begin{cases} a_{13}=\sin\vartheta\sin\psi, & a_{23}=-\sin\vartheta\cos\psi, \\ a_{31}=\sin\vartheta\sin\varphi, & a_{32}=\sin\vartheta\cos\varphi. \end{cases}$$

Damit ergeben sich die vier noch übrigen Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} eindeutig auf Grund der Minorbeziehungen (vgl. Nr. **1**, Anm.):

$$(45)\qquad \alpha_{11}=a_{11},\quad \alpha_{12}=a_{12},\quad \alpha_{21}=a_{21},\quad \alpha_{22}=a_{22}.$$

Daß die so eingeführten Winkel φ, ϑ, ψ in der Tat die bekannte geometrische Bedeutung der Eulerschen Winkel besitzen, erkennt man leicht durch geeignete Spezialisierungen, indem man etwa einmal $\varphi = 0$, das andere Mal $\psi = 0$ annimmt.

Analog gehe man bei den hyperbolischen R_2-Bewegungen von den beiden Relationen $a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$, $a_{31}^2 + a_{32}^2 - a_{33}^2 = -1$ aus und erfülle dieselben mittels dreier Winkel φ, θ, ψ, indem man setzt:

$$(44') \qquad a_{33} = C(\theta), \quad \begin{cases} a_{13} = S(\theta)\sin\psi, & a_{23} = -S(\theta)\cos\psi, \\ a_{31} = S(\theta)\sin\varphi, & a_{32} = S(\theta)\cos\varphi, \end{cases}$$

wo S und C den hyperbolischen Sinus resp. Kosinus (mit $C^2 - S^2 = 1$) bedeuten. Da die Relationen (44) genau so auch für den hyperbolischen Fall gelten, so gehen die Ausdrücke für die a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} des elliptischen Falles sofort in die entsprechenden des hyperbolischen über, indem man überall $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ ersetzt durch $S(\theta)$ und $C(\theta)$. Mittels dieser neuen Winkel φ, θ, ψ lassen sich nunmehr leicht die Komponenten A, B, C, D der zugehörigen „hyperbolischen" Quaternion ausdrücken. Man erhält:

$$(46) \qquad \begin{cases} D = C\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\varphi+\psi}{2}, & A = S\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\frac{\varphi-\psi}{2}, \\ C = C\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\varphi+\psi}{2}, & B = S\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\frac{\varphi-\psi}{2}, \end{cases}$$

Auf die genauere Durchführung der erforderlichen Rechnungen gedenke ich an anderer Stelle einzugehen.

18. Zum Schlusse werde noch auf die Natur der Gebilde eingegangen, die im elliptischen R_3 an die Stelle der Kugeln des Euklidischen R_3 treten. Zu dem Behuf gehen wir erst einen Schritt rückwärts und betrachten die elliptischen Analoga zu den Kreisen der Euklidischen Ebene E.

Wie in Nr. **1** fange man das Bündel O des Euklidischen R_3 mit der Ebene $E(z=1)$ auf. Der Minimalkegel K: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ projiziert sich in den nullteiligen Grundkreis K[3]: $x^2 + y^2 + 1 = 0$, mit O_1 als Mittelpunkt. Die elliptischen Bewegungen B_1 in E sind dann dargestellt durch die unimodularen Kollineationen der homogen gemachten Koordinaten, die K in sich überführen. Andererseits sei ϱ die elliptische Entfernung zwischen einem festen Punkte $P_0(x_0, y_0)$ und einem variablen $P(x, y)$. Setzt man zur Abkürzung: $K_0 \equiv x_0^2 + y_0^2 + 1 = 1 + r_0^2$, $p_0 \equiv x x_0 + y y_0 + 1$, und bedeutet c eine willkürliche Konstante, so ist bekanntlich:

[3]) Der Einfachheit halber werde auch hier K an Stelle von K_1 geschrieben.

$$e^{\varrho c} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{KK_0}{p_0^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{KK_0}{p_0^2}}}, \tag{47}$$

oder kürzer:

$$P = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}}}{1-\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa}}}, \tag{47'}$$

für

$$P = e^{\varrho c}, \qquad \varkappa = \frac{p_0^2}{KK_0}. \tag{48}$$

Aus (47′) folgt sofort die Umkehrung:

$$K = \frac{4P}{(1+P)^2}. \tag{49}$$

Dann ergibt sich als Gleichung der elliptischen Kreise $\varrho = \text{konst.}$ mit dem Mittelpunkt P_0 ohne weiteres:

$$E \equiv p_0^2 - \varkappa K K_0 \equiv p_0^2 - \lambda K = 0. \tag{50}$$

Dies ist ein Büschel von Kegelschnitten mit der festen Hauptachse $(O_1 P_0)$ und dem variierenden Mittelpunkt M mit den Koordinaten h, k, wo

$$h = \frac{x_0}{\lambda - r_0^2}, \qquad k = \frac{y_0}{\lambda - r_0^2}, \tag{51}$$

während das Quadrat der numerischen Exzentrizität ε einfach umgekehrt proportional mit λ ausfällt:

$$\varepsilon^2 = \frac{r_0^2}{\lambda}. \tag{52}$$

Die Brennpunkte F_1, F_2 erfüllen eine Involution[4]) mit den Doppelelementen O_1 und P_0.

Im besondern ist der Verlauf der folgende. Für $\lambda = 0$ resultiert die doppeltzählende Gerade p_0 (als eine ausgeartete Parabel); wächst λ bis $\lambda = r_0^2$, so hat man Hyperbeln, die für $\lambda = r_0^2$ eine eigentliche Parabel als Grenze haben; wächst λ weiter bis $\lambda = 1 + r_0^2$, so entstehen Ellipsen, die sich schließlich für $\lambda = 1 + r_0^2$ auf den Punkt P_0 (oder auch auf das Paar der imaginären, von P_0 an K gehenden Tangenten) zusammenziehen, wo ε den Minimalwert $\frac{r_0}{\sqrt{1+r_0^2}}$ annimmt. Darüber hinaus, sowie für negative λ werden die Kegelschnitte nullteilig.

[4]) Analog bilden auch die Scheitelpunkte S_1, S_2 eine Involution, mit den Doppelelementen Q_0 und P_0. Für beide Involutionen gilt dasselbe auch im hyperbolischen Falle, nur daß sich die Involution der Brennpunkte natürlich auf diejenigen einteiligen Kegelschnitte des Büschels beschränkt, die die Gerade $(P_0 O_1)$ zur Hauptachse besitzen.

Andererseits bilde man die Gleichung der koaxialen Rotationskegel K_δ im R_3, mit der festen Drehachse d_0 als Achse, und dem variierenden Drehwinkel δ als Öffnungswinkel:

$$(50') \qquad K_\delta \equiv (x x_0 + y y_0 + z)^2 - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0,$$

die sich für $z = 1$, d. h. durch den Schnitt der Kegel mit der Ebene E, auf (50) reduziert.

Dabei besteht zwischen $c = \cos\delta$ und ε die einfache Beziehung[5]):

$$(53) \qquad \varepsilon c = \frac{r_0^2}{1 + r_0^2}.$$

Nach dem Dandelinschen Satze[6]) sind die Brennpunkte F_1, F_2 des einzelnen Schnittkegelschnitts (50′) die Berührungspunkte mit E der beiden Kugeln, die den Kegel K_δ überall berühren. Die Mittelpunkte dieser Berührkugeln liegen auf der Achse d_0 und bilden eine Involution mit den Doppelelementen O und P_0. Zusammenfassend haben wir:

„Die zur Euklidischen R_3-Drehung um O gehörigen Rotationskegel K_δ mit fester Drehachse d_0 als Achse und variierendem Drehwinkel δ als Öffnungswinkel werden von der elliptischen Ebene E in dem Büschel der elliptischen Kreise (50) mit festem Mittelpunkt P_0 geschnitten."

Umgekehrt gelangt man bei vorgegebener Ebene E zum Punkte O des R_3, indem man auf E die Normalebene N durch die Gerade $(P_0 O_1)$ legt, in ihr auf der Geraden in P_0 die Lotgerade errichtet und diese mit dem Kreise über dem Durchmesser $(P_0 O_1)$ schneidet. Von den beiden so sich ergebenden, symmetrisch zu E gelegenen Punkten O kann nach Belieben einer ausgewählt werden.

Geht man nunmehr von der elliptischen Ebene E über zum elliptischen $R_3\,(q = 1)$ der Nr. **1**, so entstehen die elliptischen Analoga zu den Euklidischen Kugeln aus den Kegelschnitten des Büschels (50′) einfach dadurch, daß diese um ihre Hauptachse rotieren.

Diese Rotationsflächen 2. Grades erscheinen dann wiederum als Schnitte des Raumes $R_3\,(q = 1)$ mit den koaxialen Überkegeln K_δ mit der Spitze O, einer festen Drehachse d_0 und einem variierenden Drehwinkel δ als Öffnungswinkel.

---

[5]) Für einen einzelnen festen Kegel K_δ war diese Relation bereits bekannt.

[6]) Der Dandelinsche Satz läßt sich in der Form aussprechen, daß, wenn man an eine Kugel von einem Punkte außerhalb den Berührungskegel legt, jede Gerade auf der Kugel (Minimalgerade) den Kegel berührt. Bei projektiver Verallgemeinerung wird der Satz fast selbstverständlich. Denn ist F_2 eine eigentliche einteilige Fläche 2. Grades, und c irgendein eigentlicher einteiliger Kegelschnitt auf F_2, so trifft jede Gerade auf der F_2 den Kegelschnitt c nur an *einer* Stelle, muß also den auf c stehenden Berührungskegel der F_2 berühren.

Ähnlich gestaltet sich die Sache im hyperbolischen Falle. An die Stelle von (50) und (50′) treten die Gleichungen:

(50 a) $$p_0^2 - \varkappa K K_0 \equiv p_0^2 - \lambda K = 0,$$

wo $K \equiv x^2 + y^2 - 1$, $K_0 \equiv x_0^2 + y_0^2 - 1$, $p_0 \equiv x x_0 + q q_0 - 1$, und

(50 a′) $$(x x_0 + y y_0 - z)^2 - \lambda (x^2 + y^2 - z^2) = 0.$$

Diese Kegel (50 a′) berühren den, O mit dem Grundkreise $K \equiv x^2 + y^2 - 1 = 0$ verbindenden Kegel doppelt, längs der beiden Kanten, die O mit den Berührungspunkten der von $P_0(x_0, y_0)$ an den Grundkreis laufenden Tangenten verbinden.

(Eingegangen am 14. April 1922.)