Werk

Titel: Lineare funktionale Differentialgleichung (I. Mitteilung)

Autor: Hoheisel, G.

Ort: Berlin

Jahr: 1922

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0014|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Lineare funktionale Differentialgleichungen.

I. Mitteilung[1]).

Von

Guido Hoheisel in Breslau.

Einleitung.

In Band 70 der Mathematischen Annalen hat Erhard Schmidt folgenden Typus von linearen funktionalen Differentialgleichungen behandelt:

Es sei das Operationssymbol $L(y)$ definiert durch die Gleichung

$$L(y) = c_0 y^{(n)}(x) + c_1 y^{(n-1)}(x - h_1) + \ldots + c_n y(x - h_n),$$

wobei die h_ν reelle, die c_ν beliebige Konstante bezeichnen. Man stelle sich die Aufgabe, die Differentialgleichung

$$L(y) = g(x) \tag{I}$$

bei gegebener Funktion $g(x)$ durch Bestimmung der gesuchten Funktion y für alle reellen Werte von x zu befriedigen; $g(x)$ ist dabei eine stetige Funktion, die in Bachmannscher Schreibweise der Bedingung genügt:

$$g(x) = O(|x|^{\mathfrak{a}}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ irgendeine endliche Zahl bedeutet. Unter einer eigentlichen Lösung der inhomogenen Gleichung (I) ist eine solche Lösung $y(x)$ zu verstehen, die nebst ihren $(n-1)$ ersten Ableitungen stetig ist und zugleich mit diesen Ableitungen nicht stärker unendlich wird als irgendeine, wenn auch noch so hohe Potenz von $|x|$, genauer gesagt der Bedingung genügt

$$y = O(|x|^{\mathfrak{b}}), \quad y'(x) = O(|x|^{\mathfrak{b}}), \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x) = O(|x|^{\mathfrak{b}}),$$

wobei $\mathfrak{b}$ nicht vorgegeben ist.

[1]) Diese erste Mitteilung hat — von einer sachlichen Änderung abgesehen — als Dissertation im S. S. 1920 der philosophischen Fakultät in Berlin vorgelegen.

Der Lösbarkeitscharakter der Gleichung (I) hängt wesentlich von den Nullstellen einer ganzen transzendenten Funktion $l(z)$ ab, die durch die Gleichung

$$L(e^{zx}) = e^{zx} l(z)$$

definiert ist. Also

$$l(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} e^{-h_1 z} + \ldots + c_n e^{-h_n z}.$$

Es gelten dann folgende Sätze:

T_I: I. *Hat $l(z) = 0$ keine rein imaginären Wurzeln, so hat die Gleichung* (I) *eine und nur eine eigentliche Lösung. Diese Lösung genügt sogar der Bedingung*

$$y = O(|x|^a), \ldots, y^{(n-1)}(x) = O(|x|^a).$$

Daraus ergibt sich für die homogene Gleichung

$$L(y) = 0$$

die folgende Aussage

T_{II}: II. *Hat $l(z) = 0$ keine rein imaginären Wurzeln, so hat die homogene Gleichung außer der identisch verschwindenden keine eigentliche Lösung.*

Hat dagegen $l(z) = 0$ rein imaginäre Wurzeln, so hat die homogene Gleichung eigentliche Lösungen. Auch die inhomogene Gleichung (I) *besitzt eine Lösung $y(x)$, die aber im allgemeinen nur der Bedingung genügt*

$$y = O(|x|^{a+m}), \quad y'(x) = O(|x|^{a+m}), \ldots, \quad y^{(n-1)}(x) = O(|x|^{a+m}),$$

unter m eine gewisse positive Zahl verstanden.

Diese eigentliche Lösung ist natürlich nicht mehr eindeutig bestimmt[2]).

Die Sätze gelten auch für den allgemeinen Fall

$$L(y) = y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} c_{\nu,\varrho}\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}).$$

In der vorliegenden Arbeit, zu deren Lektüre die Kenntnis der Schmidtschen Arbeit nicht erforderlich ist, treten an die Stelle der Konstanten c_ν Polynome in x. Es handelt sich also um die für alle reellen x zu befriedigende Gleichung

$$\Lambda(y) = g(x), \tag{II}$$

wobei das Operationssymbol $\Lambda(y)$ definiert ist durch die Gleichung

$$\Lambda(y) = P_0(x) y^{(n)}(x) + P_1(x) y^{(n-1)}(x - h_1) + \ldots + P_n(x) y(x - h_n).$$

[2]) E. Schmidt, a. a. O. S. 501, 502.

Dabei wird vorausgesetzt, daß der Grad von $P_0(x)$ vom Grade keines der übrigen Polynome $P_\nu(x)$ übertroffen wird. Da die Veränderliche x reell ist, werden die Koeffizienten der Polynome im Interesse der Darstellung meist reell angenommen. Die Entwickelungen übertragen sich aber ohne weiteres auf den Fall komplexer Koeffizienten. Reelle Doppelwurzeln von $P_0(x)$ bleiben ausgeschlossen. Ist m der Grad von $P_0(x)$, so läßt sich $\Lambda(y)$ in die Gestalt setzen

$$\Lambda(y) = x^m L_m(y) + x^{m-1} L_{m-1}(y) + \ldots + x^0 L_0(y).$$

Dabei sind die $L_\nu(y)$ Differentialausdrücke vom Schmidtschen Typus.

Von $g(x)$ wird vorausgesetzt, daß es wenigstens zwei, soweit notwendig aber auch mehr stetige Ableitungen besitzt und die Bedingung erfüllt

$$g^{(\nu)}(x) = O(|x|^a) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die folgenden Aussagen gelten dann immer unter der Voraussetzung, daß die durch die Gleichung

$$L_m(e^{zx}) = e^{zx} l_m(z)$$

definierte Funktion $l_m(z)$ keine rein imaginären Wurzeln hat.

Ein wichtiger Unterschied zeigt sich in den Resultaten, je nachdem die Gleichung

$$P_0(x) = 0$$

reelle Wurzeln hat oder nicht. Offenbar wirkt eine solche reelle Wurzel im allgemeinen störend auf die Lösbarkeit der Gleichung (II). Diese erste Mitteilung beschränkt sich auf den Fall, daß die Koeffizienten linear oder quadratisch in x sind. Des besseren Verständnisses halber erfolgen die Entwicklungen an zwei Beispielen. Der Fall linearer Koeffizienten wird an den folgenden Beispielen dargelegt:

E_1: $$\Lambda(y) = xy'(x) + (ax + b)y(x + 1),$$

E_2: $$\Lambda(y) = (x + i\eta)y'(x) + (ax + b)y(x + 1)$$
$$(a, b \text{ und } \eta \neq 0 \text{ reell}).$$

Immer ist jetzt vorausgesetzt, daß

$$l_1(z) = z + ae^z$$

keine rein imaginären Nullstellen hat. Wir zeigen:

Im Falle E_1, wo $P_0(x) = x$ eine reelle Nullstelle hat, ist die Gleichung (II) *nur bis auf eine additive Konstante lösbar, d. h. die Gleichung*

(III) $$\Lambda(y) = g(x) + c_g$$

hat eine eigentliche Lösung. Dabei ist die Konstante c_g in eindeutiger

Weise durch die Funktion $g(x)$ bestimmt und ist im allgemeinen von Null verschieden. Dieser Mangel ist nicht behebbar. Das ergibt sich daraus, daß die Gleichung

$$\Lambda(y) = 1$$

keine eigentliche Lösung besitzt. Die Lösung der Gleichung (III) ist eindeutig bestimmt und erfüllt die Bedingung

$$y = O(|x|^{\bar{a}-1}), \quad y'(x) = O(|x|^{\bar{a}-1}),$$

wenn

$$\bar{g}(x) = g(x) + c_g = O(|x|^{\bar{a}})$$

ist. *Die homogene Gleichung*

$$\Lambda(y) = 0$$

hat abgesehen von der identisch verschwindenden keine eigentliche Lösung.

Im Falle E_2, wo $P_0(x) = x + i\eta$ *keine reellen Nullstellen besitzt, hat die Gleichung* (II) *eine und nur eine eigentliche Lösung, die sogar die Bedingung erfüllt*

$$y = O(|x|^{a-1}), \quad y'(x) = O(|x|^{a-1}).$$

Die homogene Gleichung hat keine nicht identisch verschwindende eigentliche Lösung.

Diese Sätze bleiben gültig für den allgemeinen Fall

$$E_2: \qquad \Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

wobei die $p_{\nu,\varrho}(x)$ linear in x sind.

Auch im allgemeinen Falle

$$E_1: \qquad \Lambda(y) = x y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu}{}' p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

bleiben die obigen Sätze gültig, wenn nur die Größen $h_{n-1,\varrho}$ alle von Null verschieden sind. Hat dagegen $\Lambda(y)$ die Gestalt

$$\Lambda(y) = x y^{(n)}(x) + (ax + b)\, y^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1}{}' \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

so bleiben die Sätze nur gültig für $b > -1$.

Für $b < -1$ ändern sich die Aussagen. Das liegt in der Hauptsache daran, daß man jetzt aus der Stetigkeit der $(n-1)$ ersten Ableitungen von $y(x)$, die ja durch die Definition der eigentlichen Lösung gefordert wird, nicht mehr die Stetigkeit von $y^{(n)}(x)$ für alle x erschließen kann. Für $b < -1$ ergibt sich folgender Tatbestand:

Die Gleichung (II) ist immer lösbar. Die Lösung ist mit ihren n ersten Ableitungen stetig und genügt der Bedingung

$$y^{(\nu)}(x) = O(|x|^{a-1}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Die homogene Gleichung hat eine eigentliche Lösung, deren n-te Ableitung stetig ist für alle x. Es ist die einzige Lösung dieser Art,

Fast alle größeren Schwierigkeien des allgemeinen Falles, wo $P_0(x)$ vom Grade m ist, enthält der Fall quadratischer Koeffizienten, der an folgendem Beispiel erläutert wird:

$$A(y) = (x^2 + a_0)\,y'(x) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0)\,y(x+1),$$

$a_0 \neq 0$ und b_2, b_1, b_0 reell, $l_2(z) = z + b_2 e^z$ soll keine rein imaginären Nullstellen haben.

Ist zunächst $a_0 > 0$, hat also der Koeffizient der höchsten Ableitung keine reelle Nullstelle, so gilt: *Die Gleichung* (II) *ist im allgemeinen lösbar. Es gibt eine und nur eine eigentliche Lösung und sie erfüllt die Bedingung*

$$y = O(|x|^{a-2}), \qquad y' = O(|x|^{a-2}).$$

Die homogene Gleichung hat also in diesem Falle keine eigentliche Lösung.

Jedoch kann ein Ausnahmefall eintreten.

Die inhomogene Gleichung ist dann nur bis auf einen linearen Ausdruck lösbar; genauer

$$A(y) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II})$$

ist lösbar. Die durch $g(x)$ bestimmte Konstante c_g ist dabei im allgemeinen von Null verschieden. Die absoluten Konstanten A_{II} und B_{II} können nicht gleichzeitig beide verschwinden. Es fragt sich also, ob die Gleichung

$$A(y) = c_1 x + c_2$$

für beliebige c_1 und c_2 lösbar ist. Wir zeigen, daß vom Proportionalitätsfaktor abgesehen nur eine einzige Gleichung

$$A(y) = A_I x + B_I$$

eine eigentliche Lösung besitzt. Der Vektor (A_I, B_I) ist niemals Null und auch nie proportional zum Vektor (A_{II}, B_{II}). Also hat die inhomogene Gleichung (II) im allgemeinen keine eigentliche Lösung. Dagegen ist die Gleichung

$$A(y) = \bar{g}(x) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II}) + \lambda(A_I x + B_I)$$

lösbar; λ bedeutet einen willkürlichen Parameter. Diese Lösung erfüllt die Bedingung

$$y = O(|x|^{\bar{a}-2}), \quad y' = O(|x|^{\bar{a}-2}),$$

wenn

$$\bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{a}})$$

ist.

Die homogene Gleichung besitzt in diesem Falle eine und nur eine eigentliche Lösung, die sogar die Bedingung erfüllt

$$y(x) = O(e^{-\gamma_0|x|}),$$

wo γ_0 eine bestimmte positive Konstante ist.

Ist $a_0 < 0$, hat also der Koeffizient von $y'(x)$ reelle Wurzeln, so ist die inhomogene Gleichung nur bis auf einen additiven linearen Ausdruck lösbar, der nicht identisch zu verschwinden braucht. Da andererseits jetzt die Gleichung

$$\Lambda(y) = c_1 x + c_2$$

niemals lösbar ist, so läßt sich dieser Mangel nicht beseitigen. Die homogene Gleichung ist auch nicht lösbar.

Im allgemeinen Falle

$$\Lambda(y) = (x^2 + a_0)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

($p_{\nu,\varrho}(x)$ quadratisch in x)

tritt nur für $a_0 < 0$ eine Änderung ein, wenn ein $h_{n-1,\varrho} = 0$ ist. Die Änderungen sind ähnlich wie beim linearen Fall. Der ausführende Teil enthält darüber nähere Mitteilungen.

Die zweite Mitteilung, die sich mit dem allgemeinsten Falle beschäftigt, kommt zu ähnlichen Resultaten. Auch hier ist, wenn $P_0(x)$ keine reellen Nullstellen hat, die inhomogene Gleichung im allgemeinen lösbar. Die homogene Gleichung hat keine eigentliche Lösung. Jedoch sind Ausnahmen möglich. Die homogene Gleichung besitzt dann eigentliche Lösungen, jedoch nie mehr als $\frac{m+1}{2}$ linear unabhängige; m bedeutet den Grad von $P_0(x)$. Die inhomogene Gleichung ist in diesen Ausnahmefällen in ähnlich beschränkter Weise lösbar wie im Falle quadratischer Koeffizienten. Nur treten an die Stelle der linearen Zusatzglieder Polynome $(m-1)$-ten Grades. Bei reeller Nullstelle von $P_0(x)$ ist die inhomogene Gleichung nur bis auf ein additives Polynom $(m-1)$-ten Grades lösbar, während die homogene Gleichung im allgemeinen keine eigentliche Lösung besitzt. Auch ist die Gleichung

$$\Lambda(y) = Q_{m-1}(x)$$

für kein Polynom $(m-1)$-ten Grades lösbar. Jedoch können auch hier Ausnahmen der obigen Art eintreten. Näheres wird in der zweiten Mitteilung gesagt werden. Sind die $h_{\nu,\varrho}=0$, so liegen gewöhuliche Differentialgleichungen vor. Auch für diesen Fall sind die Resultate neu.

Ausführung.

Vor Beginn der eigentlichen Untersuchungen wollen wir noch auf ein Prinzip hinweisen, das im folgenden sehr häufig benutzt wird. Es sei in der z-Ebene $|\Re(z)| \leqq \gamma_0$ ein Parallelstreifen um die imaginäre Achse. Die Funktion $f(z)$ genüge den folgenden Bedingungen:

1. $f(z)$ ist im Streifen regulär und eindeutig,

2. zu jeder positiven Zahl ε gibt es eine positive Zahl u_0, so daß für alle z des Streifens, für die $\Im(z) > u_0$ ist, d. h. für alle z oberhalb eines festen Querbalkens im Streifen

$$|f(z)| < \varepsilon$$

ist.

Hat dann noch für jede Vertikale $z = \gamma + iu$ des Streifens das geradlinige Integral

$$\varphi_\gamma(z) = \int_{\gamma+i\infty}^{z} f(z)\,dz = i\int_{\infty}^{u} f(\gamma+iu)\,du$$

einen Sinn, so läßt sich $\varphi_\gamma(z)$ durch analytische Fortsetzung als eine im ganzen Streifen eindeutige reguläre Funktion gewinnen. Das Prinzip besagt alsdann: Diese Funktion ist unabhängig von γ:

$$\varphi_\gamma(z) = \varphi_0(z).$$

Es ist also gleichgültig, auf welcher Vertikalen man ins Unendliche integriert.

Das folgt unmittelbar aus dem Cauchyschen Integralsatz. Der Leser möge sich bei jeder Anwendung dieses Satzes überzeugen, daß insbesondere die zweite Bedingung erfüllt ist.

§ 1.

Lineare Koeffizienten.

Der allgemeine Ausdruck

$$(\alpha x+\beta)y'(x)+(\gamma x+\delta)y(x+h)$$

mit reellen Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und reellem h läßt sich durch lineare reelle Transformationen in die Gestalt setzen

$$(1)\quad \begin{aligned} A(y) &= x\,y'(x)+(ax+b)y_{(x+1)} = x(y'(x)+a\,y_{(x+1)})+b\,y_{(x+1)} \\ &= x\,L_1(y)+L_0(y); \end{aligned}$$

$$L_1(y) = y'(x) + a y_{(x+1)}; \quad L_0(y) = b y_{(x+1)};$$
$$L_1(e^{zx}) = e^{zx} l_1(z); \quad L_0(e^{zx}) = e^{zx} l_0(z);$$
$$l_1(z) = z + a e^z; \quad l_0(z) = b e^z.$$

Setzt man

$$y = \int_C e^{zx} v(z) dz,$$

wobei C einen noch zu bestimmenden Integrationsweg bedeutet, so ist — partiell integriert —

$$x L_1(y) = \int_C x e^{zx} l_1(z) v(z) dz = [e^{zx} l_1(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} \frac{d}{dz}(l_1(z) v(z)) dz,$$

daher

$$A(y) = [e^{zx} l_1(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} A(v(z)) dz$$

oder

$$A(y) = [e^{zx} l(z) v(z)]_C - \int_C e^{zx} A(v(z)) dz, \tag{2}$$

wobei das Operationssymbol

$$A_z(w_{(z)}) = l_1(z) w'(z) + w(z)(l_1'(z) - l_0(z)) \tag{3}$$

gesetzt ist.

Jede Lösung $v(z)$ von

$$A_z(v) = 0$$

heißt Laplacesche Transformierte und liefert bei passend gewähltem Integrationsweg eine Lösung y der homogenen Gleichung

$$A(y) = 0.$$

Von einem willkürlichen Faktor abgesehen ist

$$v(z) = e^{\int^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} \cdot l_1^{-1}(z)$$

eindeutig bestimmt und bis auf die Nullstellen von $l_1(z)$ regulär. In jedem Vertikalstreifen, der in endlicher Breite beiderseits um die imaginäre Achse gelegt ist, gibt es nur endlich viele Nullstellen von $l_1(z)$. In der Tat ist für $|\Re(z)| < c$:

$$|l_1(z)| > |z| \left|1 - \frac{|a| e^c}{|z|}\right|.$$

Die Nullstellen sind ferner isoliert. Rein imaginäre Wurzeln sind nur möglich für $a = 0$ und für

$$a = (-1)^{k+1}\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (k \text{ ganzzahlig}).$$

Schließen wir diese Werte von a aus, so gibt es einen Streifen

$|\Re(z)| \leqq \gamma_0$, in dem keine Wurzeln von $l_1(z)$ liegen. Er wird weiterhin kurz „der Streifen" genannt.

Die Anwendung der Laplaceschen Transformation auf die inhomogene Gleichung

$$A(y) = g(x); \quad [g^{\nu}(x) = O(|x|^{\alpha}); \ \nu = 0, 1, 2, 3] \tag{4}$$

führt rein formal, d. h. von Konvergenz abgesehen auf Grund der Fourierschen Identität

$$2\pi i\, g(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt\, dz$$

gemäß (2) auf die Gleichung

$$A_z(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zt} g(t)\, dt$$

oder, da t nur Parameter ist, auf die Gleichung

$$A_z(w) = e^{-zt}.$$

Der Ausdruck

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} \int_{-\infty}^{+\infty} w(z, t)\, dt\, dz$$

wäre dann eine formale Lösung von (4).

Um jedoch dieser Methode analytischen Sinn zu geben, suchen wir eine Lösung von

$$A_z(w) = e^{-zt}(z+s)^{-3}. \tag{5}$$

s ist dabei eine reelle positive Konstante: $s > \gamma_0 > 0$. Den störenden Einfluß des konvergenzerzeugenden Faktors $(z+s)^{-3}$ auf die Lösung von (4) werden wir später beseitigen.

$$\overset{1}{w}(z, t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} (\zeta+s)^{-3} d\zeta$$

$$\overset{2}{w}(z, t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} \int_{+i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} d\sigma} (\zeta+s)^{-3} d\zeta$$

sind zwei Lösungen von (5).

z läuft dabei auf der imaginären Achse. Die Integrationen erstrecken sich geradlinig. Die Integrale sind absolut konvergent, weil

$$\int_0^{i\infty} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} ds \quad \text{und} \quad \int_0^{-i\infty} \frac{l_0(\sigma)}{l_1(\sigma)} ds$$

einen bestimmten Sinn haben, wie man durch partielle Integration erkennt. Wir definieren nun

$$\overset{1}{U}(x,t)=\int_{-i\infty}^{0}e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz,\qquad \overset{2}{U}(x,t)=\int_{0}^{i\infty}e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz.$$

Da für große z

$$|l_1^{-1}|<\frac{C_1}{|z|};\quad \left|e^{\int_0^z\frac{l_0}{l_1}d\sigma}\right|<C_2;\quad \left|e^{-\int_0^z\frac{l_0}{l_1}d\sigma}\right|<C_3$$

ist, wobei C_1, C_2, C_3 absolute Konstante sind, so ist auf der imaginären Achse $z=iu$

$$|\overset{1}{w}(z,t)|<C|u|^{-1}\int_{-\infty}^{u}(u^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}\,du$$

und

$$|\overset{2}{w}(z,t)|<C|u|^{-1}\int_{u}^{\infty}(u^2+s^2)^{-\frac{3}{2}}\,du.$$

$\overset{1}{U}$ und $\overset{2}{U}$ sind daher absolut und in x gleichmäßig konvergent und können einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden.

$A(\overset{1}{U}(x))$ und $A(\overset{2}{U}(x))$ haben einen Sinn und es ist gemäß (2) und (5)

$$A(\overset{1}{U}(x))=\left[e^{zx}e^{\int_0^z\frac{l_0}{l_1}d\sigma}\int_{-i\infty}^{z}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta\frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta\right]_{-i\infty}^{0}-\int_{-i\infty}^{0}e^{zx}A_z(\overset{1}{w})\,dz$$

$$=\int_{-i\infty}^{0}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta\frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{-i\infty}^{0}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz.$$

Entsprechend ist

$$A(\overset{2}{U}(x))=\int_{0}^{i\infty}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta\frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{0}^{i\infty}e^{z(x-t)}(\zeta+s)^{-3}\,dz.$$

Wird nun $U(x,t)$ durch die Summe definiert

$$U(x,t)=\overset{1}{U}(x,t)+\overset{2}{U}(x,t),$$

so ist

$$A(U)=\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta\frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta-\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz$$

$$=\psi(t)-\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz.$$

Nun ist

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)}(z+s)^{-3}\,dz = \pi i\, e^{s(x-t)}(x-t)^2 \quad \text{für } x-t \geqq 0,$$
$$= 0 \quad \text{für } x-t \leqq 0.$$

Also schließlich

$$(6) \qquad \Delta(U(x)) = \psi(t) - \varepsilon\pi i\, e^{-s(x-t)}(x-t)^2; \quad \varepsilon = \begin{matrix} 1 \text{ für } x-t \geqq 0, \\ 0 \text{ für } x-t \leqq 0. \end{matrix}$$

Es bedeute $\Delta_{3,*}$ diejenige lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten, für welche die Identität besteht:

$$\Delta_{3,x}(e^{zx}) = e^{zx}(z+s)^3,$$

d. h.

$$\Delta_{3,*}(g) = g''' + 3sg'' + 3s^2g' + s^3g.$$

Wird nun

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g(t))\, U(x,t)\,dt$$

gesetzt, so behaupten wir

$$(7) \qquad \Delta\left(-\tfrac{1}{2\pi i} W(x)\right) = g(x) + c_g,$$

wo c_g eine Konstante ist.

$W(x)$ ist also bis auf eine additive Konstante eine Lösung von (4) und, wie sich noch zeigen wird, auch eine eigentliche Lösung. c_g ist im allgemeinen von Null verschieden. Unsere Aufgabe, eine eigentliche Lösung von (4) zu finden, ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$\Delta(y) = 1$$

eine eigentliche Lösung hat. Wir werden später noch zeigen, daß das nicht der Fall ist. Die vorgelegte Gleichung (4) ist also nur bis auf eine Konstante lösbar. Dieser Mangel hat seinen Grund in der Tatsache, daß $x = 0$ eine singuläre Stelle für $\Delta(y)$ ist. Bereits für die entsprechende gewöhnliche Differentialgleichung

$$M(y) = xy'(x) + (ax+b)\,y(x) = g(x)$$

läßt sich, wie man leicht sieht, im allgemeinen keine eigentliche Lösung finden, die zugleich stetig für $x = 0$ wäre. Dies wird auch für $b = 0$ bei unserer funktionalen Differentialgleichung offenbar.

Um nun die Behauptung (7) zu beweisen, werde zunächst als schon bewiesen angesehen, daß $W(x)$ absolut und in x gleichmäßig konvergiert und einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann. Dann ist wegen (6)

$$(8)\qquad \Delta(W)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_{3,t}(g(t))\,\Delta(U)\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta_{3,t}(g(t))\,\psi(t)\,dt$$
$$-\int_{-\infty}^{x}\pi i e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,\Delta_{3,t}(g(t))\,dt$$
$$=-2\pi i c_g-\pi i\int_{-\infty}^{x}e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,\Delta_{3,t}(g(t))\,dt.$$

Die Konvergenz nach t wird später bewiesen.

Das letzte Integral ist nun gleich $g(x)$. Das ergibt sich mit Hilfe des folgenden Satzes:

Satz I. *Ist*

$$\varphi_2(x)=\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^2\,dt$$

ein absolut konvergentes Integral, so ist

$$\Delta_{3,x}(\varphi_2(x))=2\chi(x)$$

und allgemein

$$\Delta_{k,x}(\varphi_{k-1}(x))=(k-1)!\,\chi(x),$$

wobei Δ_k definiert ist durch

$$\Delta_{k,x}(e^{zx})=e^{zx}(z+s)^k$$

und analog

$$\varphi_{k-1}(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}\chi(t)\,dt.$$

Beweis. Der Satz ist für $k=1$ richtig:

$$\Delta_1(\varphi_0)=\varphi_0'+s\varphi_0$$
$$=\chi(x)e^{-s\cdot 0}-s\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}\,dt+s\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}\,dt=\chi(x).$$

Der Satz sei für $k-1$ richtig:

$$\Delta_{k-1}(\varphi_{k-2})=(k-2)!\,\chi(x).$$

Dann ist

$$\Delta_k(\varphi_{k-1})=\Delta_{k-1}(\Delta_1(\varphi_{k-1}))=\Delta_{k-1}(\varphi_{k-1}'+s\varphi_{k-1})$$
$$=\Delta_{k-1}\{0-s\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}dt+(k-1)\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-2}dt$$
$$+s\int_{-\infty}^{x}\chi(t)\,e^{-s(x-t)}(x-t)^{k-1}dt\}=(k-1)\,\Delta_{k-1}(\varphi_{k-2})=(k-1)!\,\chi(x),$$

w. z. b. w. Es ist daher

$$\Delta_{3,x}\left[\Delta\left(-\frac{1}{\pi i}W\right)-2c_g\right]=2\Delta_{3,x}(g(x))$$

oder

$$\Delta_{3,x}\left\{\Delta\left(-\frac{1}{2\pi i}W\right)-c_g-g(x)\right\}=0.$$

$\Delta_{3,x}(y) = 0$ hat aber nur Lösungen von der Form

$$y = e^{-sx}(\alpha x^2 + \beta x + \gamma).$$

Es ist also nur dann

$$\lim_{x=-\infty} e^{sx} y = 0,$$

wenn y identisch verschwindet. Können wir nun diese Eigenschaft an der Funktion

$$y = \Lambda\left(-\frac{1}{2\pi i} W\right) - c_g - g(x)$$

nachweisen, so ist damit Gleichung (7) bewiesen.

Für große negative x ist aber nach (8)

$$|\Lambda(W) e^{sx}| \leqq e^{sx} 2\pi |c_g| + \pi \left|\int_{-\infty}^{x} e^{st} \Delta_{3,t}(g(t)) (x-t)^2 dt\right|$$

$$\leqq C e^{sx} + \pi \int_{-\infty}^{x} e^{st} |\Delta_{3,t}(g)| 4 |t|^2 dt \leqq C e^{sx} + C \int_{-\infty}^{x} e^{(s-\eta)t} dt < C_1 e^{(s-\eta)x},$$

also

$$\lim_{x=-\infty} \Lambda(W) e^{sx} = 0.$$

Ferner ist

$$\lim_{x=-\infty} e^{sx} g(x) = 0.$$

Also folgt

$$\Lambda\left(-\frac{1}{2\pi i} W\right) = g(x) + c_g.$$

Wir wollen nun die Konvergenz der auftretenden Integrale beweisen.

Da $\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma$, wenn z und der Integrationsweg innerhalb des Streifens bleiben, eine reguläre für den ganzen Streifen beschränkte analytische Funktion von z darstellt, so ist — die Integrationswege innerhalb des Streifens verstanden —

$$\overset{1}{w}(z) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-3} d\zeta$$

eine im ganzen Streifen reguläre analytische Funktion von z.

Der Integrationsweg für ζ läßt sich auch auf eine im Streifen verlaufende Vertikale $z = \gamma + iu$ $(\gamma_0 > |\gamma| > 0)$ verschieben. Man kann also schreiben:

$$\overset{1}{w}(z) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{\gamma-i\infty}^{z} \ldots d\zeta.$$

Auf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ ergibt sich daher die Abschätzung

$$(8) \qquad |\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t}|z|^{-1}\int_{-\infty}^{u}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-\frac{3}{2}}du.$$

Ebenso ergibt sich die Regularität von $\overset{2}{w}(z,t)$ und die Ungleichung

$$(9) \qquad |\overset{2}{w}(z,t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t}|z|^{-1}\int_{u}^{\infty}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-\frac{3}{2}}du.$$

(10) Die Konstante ist dabei von γ unabhängig wählbar.

Die Integrale

$$\overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma-i0} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz, \qquad \overset{2}{U}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma+i0}^{\gamma+i\infty} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz$$

haben also einen Sinn und sind einmal unter dem Integralzeichen nach x differenzierbar.

Wegen (8), (9), (10) gilt nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$\overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) - \int_{\gamma}^{0} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz,$$

$$\overset{2}{U}_\gamma(x,t) = \overset{2}{U}(x,t) - \int_{\gamma}^{0} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz,$$

$$(11) \qquad U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \int_{0}^{\gamma} e^{zx}(\overset{2}{w}(z,t) - \overset{1}{w}(z,t))\,dz.$$

Nun gilt mit Rücksicht auf (8)

$$(12) \qquad |\overset{1}{U}_\gamma(x,t)| < \text{konst. } e^{\gamma(x-t)};$$

$$|\overset{2}{U}_\gamma(x,t)| < \text{konst. } e^{\gamma(x-t)} \qquad \text{(konst. von } \gamma \text{ unabhängig).}$$

Ferner ist

$$(13) \quad \left|\int_0^\gamma e^{zx}(\overset{2}{w}-\overset{1}{w})\,dz\right| = \left|\int_0^\gamma e^{zx}l_1^{-1}(z)\,e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}dz\cdot\int_{-i\infty}^{+i\infty}e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta\right|$$

$$= \left|\int_0^\gamma e^{zx}l_1^{-1}(z)e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1}d\sigma}dz\right|\cdot|\psi(t)| < |\psi(t)|\cdot\text{konst.}\,(e^{\gamma x}+e^{0\cdot x})$$

$$= \text{konst.}\,|\psi(t)|\,(e^{\gamma x}+1).$$

Es ist aber auch — ganz wie früher —

$$\psi(t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{-\zeta t}e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1}d\sigma}(\zeta+s)^{-3}\,d\zeta$$

und mithin

$$|\psi(t)| < \text{konst. } e^{-\gamma t}. \tag{14}$$

Da γ positiv und negativ gewählt werden kann, so folgt, indem man γ immer das Vorzeichen von t gibt,

$$|\psi(t)| < \text{konst. } e^{-|\gamma t|}. \tag{15}$$

Es folgt aus (13), (14), (15)

$$\left|\int_0^{\gamma} e^{zx}\left(\overset{2}{w} - \overset{1}{w}\right) dz\right| < \text{konst. } e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}$$

und, da man in (13) γ auch immer das Vorzeichen von $-(x-t)$ geben kann,

$$U(x,t)| < \text{konst.}\,(e^{-|\gamma||x-t|} + e^{-|\gamma||t|}). \tag{16}$$

Dieselbe Ungleichung ergibt sich für $\frac{d}{dx}(U)$. Die absolute und gleichmäßige Konvergenz von $W(x)$, sowie die einmalige Differenzierbarkeit unter dem Integralzeichen ergibt sich daraus unmittelbar. Aus (15) folgt auch die Konvergenz von

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g(t))\,\psi(t)\,dt.$$

Es bleibt noch zu zeigen übrig, daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist. Es ist

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{3,t}(g)\,U(x,t)\,dt.$$

Aus (16) folgt

$$|W(x)| < \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{3,t}(g)|\,e^{-|\gamma||x-t|}\,dt + \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{3,t}(g(t))|\,e^{-|\gamma||t|}\,dt.$$

Der erste Summand der rechten Seite ist von der Form

$$S(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\,e^{-|\gamma||x-t|}\,dt,$$

wobei $\chi(t) = O(|t|^{a})$ ist. Gemäß einem von E. Schmidt[3]) bewiesenen *Hilfssatze* folgt daraus

$$S(x) = O(|x|^{a}).$$

Der zweite Summand ist $O(|x|^{0})$. Also ergibt sich jedenfalls

$$W(x) = O(|x|^{b}),$$

wo $b \geqq a$ ist. Aus

$$\Lambda(W) = -2\pi i\, g(x)$$

[3]) A. a. O. S. 522.

folgt

$$L_1(W) = \frac{-2\pi i g(x) - L_0(W)}{x} = O(|x|^{b-1}).$$

Da $l_1(z)$ keine rein imaginäre Nullstelle hat, so folgt nach dem in der Einleitung erwähnten Satze T_I von E. Schmidt

$$W(x) = O(|x|^{b-1}), \qquad W'(x) = O(|x|^{b-1}).$$

Dieser Schluß läßt sich fortsetzen, bis schließlich

$$W(x) = O(|x|^{a-1}), \qquad W'(x) = O(|x|^{a-1})$$

sich ergibt.

Den Beweis für die Behauptung, daß

$$A(y) = 1$$

keine eigentliche Lösung hat, werden wir etwas später beim Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung erbringen. Wir behandeln vorher den einfacheren Fall, daß der Koeffizient der höchsten Ableitung keine reelle Nullstelle hat, also unser Beispiel so aussieht:

$$A(y) = (x + i\eta)\, y'(x) + (ax + b)\, y(x+1) = g(x),$$

wobei etwa $\eta > 0$ und a, b irgendwelche nicht notwendig reelle Zahlen sind, dagegen $l_1(z)$ wieder keine rein imaginären Nullstellen haben soll. Hier ist

$$l_1(z) = z + ae^z; \qquad l_0(z) = i\eta z + be^z.$$

Es ist ferner

$$e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} = e^{i\eta z}\, e^{\int_0^z \frac{(b - i\eta a) e^\sigma}{\sigma + ae^\sigma} d\sigma} = e^{i\eta z}\, e^{\int_0^z \frac{\bar{l}_0}{l_1} d\sigma}. \tag{17}$$

Dabei ist der zweite Faktor im ganzen Streifen regulär und beschränkt. Die Funktion

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-2}\, d\zeta$$

ist daher im ganzen Streifen definiert und regulär und stellt dort eine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$A(w) = e^{-zt}(z+s)^{-2}$$

dar. Da wieder die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie in dem Integral über $d\zeta$ erfüllt sind, so ist wieder

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{\gamma - i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\zeta} (\zeta + s)^{-2}\, d\zeta.$$

Auf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ gilt die Abschätzung ($\zeta = \gamma + i\varrho$)

$$|w(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} e^{-\eta u} \int_{-\infty}^{u} e^{\eta\varrho} (\varrho^2 + (\gamma+s)^2)^{-1}\, d\varrho.$$

Die Funktion $e^{\frac{\eta}{2}\varrho}(\varrho^2+(\gamma+s)^2)^{-1}$ hat bei genügend groß gewähltem s eine immer positive Ableitung. Daher ist

$$\int_{-\infty}^{u} e^{\frac{\eta}{2}\varrho}(\varrho^2+(\gamma+s)^2)^{-1} e^{\frac{\eta}{2}\varrho}\, d\varrho < e^{\frac{\eta}{2}u}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-1} \int_{-\infty}^{u} e^{\frac{\eta}{2}\varrho}\, d\varrho$$

und also

(18) $|w(z,t) < \text{konst.}\, e^{-\gamma t}(u^2+(\gamma+s)^2)^{-1}\ z^{-1}$ (konst. von γ unabhängig).

Das Integral

(18a) $$U_\gamma(x,t) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} w(z,t)\, dz$$

hat also einen Sinn und es gilt die Ungleichung

$$|U_\gamma(x,t)| < \text{konst.}\, e^{\gamma(x-t)}.$$

Für $\gamma = 0$ zeigt uns die Ungleichung (18), daß

$$U(x,t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} w(z,t)\, dz$$

einen Sinn hat und einmal unter dem Integralzeichen nach x differenzierbar ist. Da ferner wegen (18) die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinien erfüllt sind, so ist

$$U(x,t) = U_\gamma(x,t).$$

Aus (18a) folgt also, da man γ immer das $(x-t)$ entgegengesetzte Zeichen geben kann,

$$|U(x,t)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma|\,|x-t|}.$$

Ebenso gilt auch

$$\left|\frac{d}{dx}(U(x,t))\right| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma|\,|x-t|}.$$

Das Integral

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

hat also einen Sinn und ist absolut und in x gleichmäßig konvergent und darf unter dem Integralzeichen nach x einmal differenziert werden. Wir behaupten, daß W eine Lösung der Gleichung

$$\Delta\left(-\frac{1}{\pi i} W\right) = g(x)$$

ist. Es ist nämlich

$$\Lambda(W) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \Lambda(U(x,t))\, dt = -\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g(t))\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt.$$

Ganz wie früher können wir jetzt unter Anwendung des Satzes I, S. 46 schließen

$$\Lambda\left(-\frac{1}{\pi i} W\right) = g(x).$$

W ist auch eine eigentliche Lösung. Aus

$$|W(x)| < \text{konst.} \int_{-\infty}^{+\infty} |\Delta_{2,t}(g(t))|\, e^{-|\gamma||x-t|}\, dt$$

folgt nach dem Hilfssatz von E. Schmidt, S. 49

$$W = O(|x|^{a})$$

und also auch

$$W' = O(|x|^{a}),$$

woraus sich in bekannter Weise auf

$$W = O(|x|^{a-1}), \qquad W' = O(|x|^{a-1})$$

schließen läßt.

§ 2.

Eindeutigkeit der Lösungen.

Es fragt sich, ob es noch andere eigentliche Lösungen y der Gleichung $\Lambda(y) = g(x)(+c_q)$ gibt, d. h. solche stetige Lösungen, die der Bedingung $y = O(|x|^{b})$ (b irgendeine Zahl) genügen. Wir werden zeigen:

Hat $l_1(z)$ keine reine imaginäre Nullstelle, so gibt es eine und nur eine eigentliche Lösung dieser Gleichung.

Diese Behauptung ist offenbar identisch mit dem folgenden Satz über die homogene Gleichung $\Lambda(y) = 0$:

Hat $l_1(z)$ keine rein imaginäre Nullstelle, so gibt es außer der identisch verschwindenden keine eigentliche Lösung der homogenen Gleichung.

Das Operationszeichen Λ kann dabei beide Bedeutungen

$$E_1 = xy' + (ax+b)\, y(x+1),$$
$$E_2 = (x + i\eta)\, y' + (ax+b)\, y(x+1)$$

haben. Auch jetzt werden sich Unterschiede zeigen. Der zweite Fall erledigt sich wieder rascher.

Zunächst folgt aus der Stetigkeit einer Lösung von $\Lambda(y) = 0$ für alle x in diesem Falle ohne weiteres auch die von $y'(x)$ für alle x. Im ersten Falle ist die Stelle $x = 0$ fraglich, doch folgt auch hierfür die Stetigkeit von $y'(x)$.

In der Tat muß zunächst

$$\lim_{x=0} xy'(x) = 0$$

sein. Wäre nämlich

$$\lim_{x=0} xy'(x) = -by(1) \neq 0,$$

so sei geschrieben

$$xy'(x) = -by(1) + \delta(x),$$

wobei

$$\lim_{x=0} \delta(x) = 0.$$

Es sei nun a_0 positiv so gewählt, daß $|\delta(x)|$ im Intervall $(0, a_0)$ unterhalb $\left|\frac{by(1)}{2}\right|$ bleibt. ε sei nahe an Null. Dann ist

$$\left|\int_{a_0}^{\varepsilon} y'(x)\,dx\right| = |y(\varepsilon) - y(a_0)| = \left|by(1)\int_{a_0}^{\varepsilon}\frac{dx}{x} + \int_{a_0}^{\varepsilon}\frac{\delta(x)}{x}dx\right|$$

$$= |by(1)(\log\varepsilon - \log a_0) + \delta(x_m)(\log\varepsilon - \log a_0)| > \frac{|by(1)|}{2}|\log\varepsilon - \log a_0|,$$

wobei $0 \leqq x_m \leqq a_0$; y würde also für $x = 0$ unendlich groß werden. Daher ist

$$by(1) = 0.$$

Aus

$$y'(x) = -ay(x+1) - b\frac{y(x+1) - y(1)}{x}$$

folgt dann

$$\lim_{x=0} y'(x) = -ay(1) - by'(1).$$

Die Ableitung ist also auch für $x = 0$ stetig; denn es ist bekanntlich immer

$$y'(0) = \lim_{x=0} y'(x),$$

wenn dieser Grenzwert existiert. Also ist auch die Ableitung jeder eigentlichen Lösung überall stetig. Aus $y = O(|x|^b)$ folgt wegen $A(y) = 0$ natürlich auch $y' = O(|x|^b)$.

Hilfssatz 1. *Jede eigentliche Lösung muß im Unendlichen stärker verschwinden als jede noch so hohe negative Potenz von x:*

$$y = O(|x|^{-\infty}), \qquad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Beweis.

$$L_1(y) = -\frac{L_0(y)}{x} = O(|x|^{b-1}).$$

Die rechts stehende Funktion ist für alle x stetig, weil es die links stehende Funktion ist. Nach dem schon erwähnten Satz T_I von E. Schmidt folgt

$$y = O(|x|^{b-1}), \qquad y' = O(|x|^{b-1}).$$

Diese Schlußweise fortgesetzt liefert die Behauptung.

Hilfssatz 2. *Ist y irgendeine stetige Funktion derart, daß für sie die Fouriersche Integraldarstellung gilt, und ist*

$$\varphi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iut} y(t)\, dt = 0$$

für alle reellen u, so ist

$$y \equiv 0.$$

Die Behauptung ist sofort aus der Fourierschen Integraldarstellung

$$2\pi i y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iux} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iut} y(t)\, dt\, du.$$

abzulesen. Gäbe es nun eine eigentliche Lösung y der homogenen Gleichung, so ist nach Hilfssatz 1

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx$$

nebst sämtlichen Ableitungen für rein imaginäre α definiert. Wir behaupten

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = l_1(\alpha)\varphi'(\alpha) + (l_1'(\alpha) - l_0(\alpha))\varphi(\alpha) = 0. \tag{19}$$

Es ist nämlich

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} A(y)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} L_1(y)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} L_0(y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} y'(x)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\alpha x} a y(x+1)\, dx + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} b y(x+1)\, dx$$

$$= [y x e^{-\alpha x}]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} y(x)(e^{-\alpha x} - \alpha x e^{-\alpha x})\, dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} (x-1) e^{-\alpha x} e^{\alpha} y(x)\, dx$$

$$+ b e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx = -\{l_1(\alpha)\varphi'(\alpha) + (l_1'(\alpha) - l_0(\alpha))\varphi(\alpha)\}.$$

Bei dieser Herleitung hatte $A(y)$ die Bedeutung E_1. Offenbar ändert sich nichts, wenn $A(y)$ die Bedeutung E_2 hat. In diesem Falle können wir aus (19) jetzt schon schließen

$$y \equiv 0.$$

In der Tat lehrt uns (17), daß dann das Integral $v(\alpha)$ der Differentialgleichung

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0$$

auf der imaginären Achse nach einer Richtung hin unendlich groß wird. Dagegen bleibt

$$|\varphi(\alpha)| \leqq \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\, dx$$

für alle rein imaginären α beschränkt. Daher ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

also nach Hilfssatz 2

$$y \equiv 0.$$

Im Falle E_1 bedarf es einer eingehenden Betrachtung. Wir haben gesehen, daß aus der Stetigkeit von $y(x)$ diejenige von $y'(x)$ auch für $x = 0$ folgte. Es folgt ebenso diejenige aller anderen Ableitungen, insbesondere der zweiten. Zunächst muß wieder

$$\lim_{x=0} x\, y''(x) = -\, y'(0) - b\, y'(1) + a\, y(1) = 0$$

sein. Der Beweis ist wie oben bei $x\, y'(x)$.

Aus der Gleichung

$$y'(x) = -\,\frac{(a x + b)\, y(x+1)}{x}$$

ergibt sich, daß für $x \neq 0$ $y(x)$ mit sämtlichen Ableitungen stetig ist. Daher ist die Funktion

$$h(x) = -\,(a x + b)\, y'(x+1) + a\, y(x+1)$$

in $x = 0$ und einer Umgebung mit ihren sämtlichen Ableitungen stetig. Nun gilt die Beziehung

$$x\, y''(x) + y'(x) = h(x).$$

Diese inhomogene Differentialgleichung für $y'(x)$ hat die einzige stetige Lösung

$$y'(x) = \frac{\int_0^x h(t)\, dt}{x}.$$

Für diese Lösung ist

$$y''(x) = \frac{h(x)}{x} - \frac{\int_0^x h(t)\, dt}{x^2} = \frac{h(x) - h(0)}{x} - \frac{\int_0^x h(t)\, dt - x\, h(0)}{x^2}$$

$$= h'(\vartheta_1 x) - \frac{\frac{h'(0)}{2} x^2 + \int_0^x h''(\vartheta t)\, \frac{t^2}{2!}\, dt}{x^2} = h'(\vartheta_1 x) - \frac{h'(0)}{2} + \frac{\int_0^x t^2\, h''(\vartheta t)\, dt}{2\, x^2}.$$

Nun ist

$$\left| \int_0^x h''(\vartheta t)\, t^2\, dt \right| \leqq M \int_0^x t^2\, dt = M\, \frac{|x|^3}{3},$$

wo M das Maximum der stetigen Funktion $h''(x)$ etwa im Intervall $(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2})$ bedeutet. Also ist

$$\lim_{x=0} y''(x) = \frac{h'(0)}{2}.$$

Auch die zweite Ableitung ist also stetig in $x = 0$. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |y''(x)|\,dx$ existiert also, zumal natürlich auch

$$y''(x) = O(|x|^{-\infty})$$

sein muß. Es ist aber

$$\alpha^2 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \alpha^2 y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\,dx.$$

Also muß

$$|\alpha^2 \varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y''|\,dx$$

sein. Andererseits wird, wenn $v(\alpha)$ das Integral der Differentialgleichung

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0$$

bedeutet, im vorliegenden Falle E_1

$$|\alpha^2 v(\alpha)|$$

bei rein imaginärem α unendlich groß. Daher ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

also auch

$$y \equiv 0.$$

Wir wollen nun den Beweis nachholen für die Behauptung, daß

$$A(y) = x\,y'(x) + (ax + b)\,y(x+1) = 1$$

keine eigentliche Lösung hat. Zunächst können wir aus der Stetigkeit von $y(x)$ genau wie im Falle der homogenen Gleichung auf die Stetigkeit von $y', y'', \ldots$ auch für $x = 0$ schließen. Wäre nun etwa

$$y = O(|x|^{\mathfrak{b}}),$$

so folgt zunächst für $\mathfrak{b} \geqq -1$

$$y' = O(|x|^{\mathfrak{b}}).$$

Der Satz T_I von E. Schmidt gestattet uns ferner die Zahl $\mathfrak{b}$ herabzudrücken bis auf -1. Es ist also sicher

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Wir können noch mehr schließen. Durch Differentiation von

$$A(y) = 1$$

ergibt sich

$$x\,L_1(y') + L_1(y) + L_0(y') = 0.$$

Aus

$$L_1(y') = \frac{-L_1(y) - L_0(y')}{x} = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

folgt

$$y' = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Durch nochmalige Differentiation von $\Lambda(y)$ schließt man

$$y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Die durch die Gleichung

$$\alpha^2 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx$$

definierte Funktion $\varphi(\alpha)$ ist für alle rein imaginären $\alpha \neq 0$ bestimmt und läßt sich differenzieren. Es ist nämlich

$$2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha) = -\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y''(x)\, dx.$$

Aus

$$\frac{d^2}{dx^2}(\Lambda(y)) = x L_1(y'') + 2 L_1(y') + L_0(y'') = 0$$

folgt für $\alpha \neq 0$

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^2}{dx^2}(\Lambda(y))\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y'''(x)\, dx + a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x\, y''(x+1)\, dx$$
$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx + 2a \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'(x+1)\, dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x+1)\, dx.$$

Die Integrale sind hierbei absolut konvergent. Die gleichen Umformungen wie früher führen zur Gleichung

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''(x)\, dx + \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x y''\, dx + a e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} x y''\, dx - a e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx$$
$$+ 2\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx + \frac{2 a e^{\alpha}}{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx + b e^{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y''\, dx,$$

d. h.

$$0 = -\alpha^2 \varphi(\alpha) - \alpha(2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha)) - a e^{\alpha}(2\alpha\varphi(\alpha) + \alpha^2 \varphi'(\alpha))$$
$$- a e^{\alpha} \alpha^2 \varphi(\alpha) + 2\alpha^2 \varphi(\alpha) + 2\alpha a e^{\alpha} \varphi(\alpha) + \alpha^2 b e^{\alpha} \varphi(\alpha).$$

Oder durch $\alpha^2 \neq 0$ dividiert

$$\varphi'(\alpha)(\alpha + a e^{\alpha}) + (1 + a e^{\alpha} - b e^{\alpha})\varphi(\alpha) = 0,$$

also für $\alpha \neq 0$

$$\varphi(\alpha) = c\, l_1^{-1}(\alpha)\, e^{\int^{\alpha} \frac{l_0}{l_1} d\sigma}.$$

Nun wird aber

$$\left| \alpha^2 l_1^{-1}(\alpha)\, e^{\int^{\alpha} \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \right|$$

bei rein imaginärem α mit α unendlich groß. Dagegen bleibt

$$|\alpha^2 \varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y''|\, dx.$$

beschränkt. Also ist $\varphi(\alpha)$ sowohl ~~für positive wie~~ negative $i\alpha$ identisch Null. Daraus folgt, da y'' den Bedingungen für die ~~Darstellung durch~~ ein Fouriersches Integral genügt,

$$y''(x) \equiv 0$$

und wegen

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$y \equiv 0,$$

was der Gleichung

$$\Lambda(y) = 1$$

widerspricht.

Sämtliche Betrachtungen und Sätze bleiben bestehen für den allgemeinen Fall E_2:

$$\Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + (\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1}) y^{(n-1)}(x - h_{n-1}) + \dots + (\alpha_0 x + \beta_0)\, y(x - h_0)$$

oder noch allgemeiner

$$\Lambda(y) = (x + i\eta)\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

wo die $p_{\nu,\varrho}(x)$ lineare Ausdrücke in x sind. Für den Fall E_1

$$\Lambda(y) = x y^{(n)}(x) + (\alpha_{n-1} x + \beta_{n-1}) y^{(n-1)}(x - h_{n-1}) + \dots + (\alpha_0 x + \beta_0)\, y(x - h_0)$$

oder allgemeiner

$$\Lambda(y) = x\, y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho})$$

behalten ebenfalls alle Sätze und Beweise ihre Gültigkeit, wenn h_{n-1} bzw. die Größen $h_{n-1,\varrho}$ sämtlich von Null verschieden sind. Im anderen Falle, wenn also $\Lambda(y)$ die Gestalt hat

$$\Lambda(y) = x y^{(n)}(x) + (ax + b)\, y^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x - h_{\nu,\varrho}),$$

bedarf es einiger Aufmerksamkeit.

Für $b > 1$ bleiben alle Sätze richtig. Insbesondere läßt sich die Stetigkeit von $y^{(n)}(x)$ aus der Stetigkeit der $(n-1)$ ersten Ableitungen erschließen. Das ist für $b < -1$ nicht mehr der Fall. In diesem Falle verlieren unsere Behauptungen ihre Gültigkeit. Schon die Entwicklungen, die zur Lösung der inhomogenen Gleichung erforderlich sind, ändern sich hier. Wir definieren jetzt

$$w(z,t) = l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} \int_{-i\infty}^{z} e^{-\zeta t}\, e^{-\int_0^\zeta \frac{l_0}{l_1} d\sigma} (\zeta + s)^{-[-b]-2} d\zeta$$

als eine Lösung der Differentialgleichung

$$A_z(w) = e^{-zt}(z+s)^{-[-b]-2}.$$

Das Integral

$$U(x,t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}\, w(z,t)\, dz$$

hat einen Sinn und ist einmal nach x differenzierbar. Für die Funktion

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{[-b]+2,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

ergibt sich ganz ähnlich wie früher

$$\Delta(W) = g(x).$$

Die inhomogene Gleichung ist also hier immer völlig lösbar.

Die singuläre Stelle $x = 0$ stört nicht. Wir werden das auch noch an anderer Stelle erkennen. Die homogene Gleichung

$$\Delta(y) = 0$$

hat die eigentliche Lösung

$$y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}\, l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma} dz.$$

Für diese Lösung ist auch $y^{(n)}(x)$ stetig. Wir behaupten: Es ist die einzige eigentliche Lösung dieser Art, wenn man von dem willkürlichen Faktor absieht. Wäre etwa

$$\Delta(Y) = 0$$

und $Y^{(n)}(x)$ auch in $x = 0$ stetig, so ergäbe sich ganz wie früher

$$v(\alpha) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\alpha x}\, Y(x)\, dx.$$

Andererseis ist auch

$$v(\alpha) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\alpha x}\, y(x)\, dx.$$

Durch Subtraktion folgt daraus die Behauptung. Die inhomogene Gleichung

$$A(y) = 1$$

muß in diesem Falle auch eine eigentliche Lösung besitzen. Sie lautet:

$$\int_0^\infty e^{zx} l_1^{-1}(z)\, e^{\int_0^z \frac{l_0}{l_1} d\sigma}\, dz.$$

Damit sind für den linearen Fall alle Behauptungen bewiesen.

§ 3.

Quadratische Koeffizienten.

Definition. *Von einer Funktion $\varphi(x)$ der reellen Variablen x sagen wir, sie habe für $x = +\infty$ die charakteristische Zahl ϱ, oder auch kurz, sie gehöre zu ϱ,* wenn

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \varrho$$

ist.

Bemerkung 1. *Hat eine Funktion $\varphi(x)$ für $x = +\infty$ eine charakteristische Zahl, etwa ϱ, so ist von einem gewissen x_0 an*

$$\varphi(x) \neq 0.$$

(Dies kann aus der Existenz des $\lim \frac{\varphi'}{\varphi}$ nicht unmittelbar geschlossen werden, da diese den Fall des gleichzeitigen Verschwindens von φ und φ' noch offen läßt.)

Beweis. Sei zunächst $\varphi(x)$ eine reelle Funktion und $\varrho \neq 0$. Würde $\varphi(x)$ oberhalb jeder Grenze Null werden, so hätte sie auch oberhalb jeder Grenze von Null verschiedene Maxima oder Minima. An diesen Stellen verschwindet die Ableitung, es könnte also ϱ nicht verschieden von Null sein. Ist nun $\varrho = 0$, so hat $\varphi_1 = e^x \varphi$ die charakteristische Zahl 1, ist also von einem gewissen x an von Null verschieden. Das gilt dann aber auch von φ. Für komplexe Funktionen genügt es, auf die Identität hinzuweisen

$$\frac{(|\varphi|^2)'}{|\varphi|^2} = \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right) \to \frac{1}{2}\Re(\varrho),$$

also ist von einem gewissen x an

$$|\varphi(x)| \neq 0.$$

Bemerkung 2. *Gehören für $x = +\infty$ die Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ zu den Zahlen ϱ_1 und ϱ_2 und ist $\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2)$, so ist*

$$\lim_{x=+\infty} \frac{\varphi_2(x)}{\varphi_1(x)} = 0.$$

Beweis. Es ergeben sich zunächst für große x leicht die Ungleichungen

$$e^{(\Re(\varrho_1)-\varepsilon)x} < |\varphi_1| < e^{(\Re(\varrho_1)+\varepsilon)x},$$

$$e^{(\Re(\varrho_2)-\varepsilon)x} < |\varphi_2| < e^{(\Re(\varrho_2)+\varepsilon)x},$$

woraus die Behauptung folgt, da nach Bemerkung 1 $\varphi_1 \neq 0$ ist.

Bemerkung 3: *Unter denselben Voraussetzungen für φ_1 und φ_2 gilt: Für jeden Wert der Konstanten c gehört $\varphi_1 + c\varphi_2$ zur Zahl ϱ_1.*

Beweis.

$$\varphi_1 + c\varphi_2 = \varphi_1\left(1 + c \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right) = \varphi_1 \cdot \varphi_3,$$

$$\varphi_3' = c\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_1} - \frac{\varphi_1'\varphi_2}{\varphi_1^2}\right) = c\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\left(\frac{\varphi_2'}{\varphi_2} - \frac{\varphi_1'}{\varphi_1}\right) \to 0,$$

also

$$\frac{\varphi_3'}{\varphi_3} \to 0, \qquad \frac{(\varphi_1\varphi_3)'}{\varphi_1\varphi_3} = \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \frac{\varphi_3'}{\varphi_3} \to \varrho_1.$$

Gehören φ_1 und φ_2 zu ϱ_1 und ϱ_2 für $x = -\infty$, so gelten dieselben Behauptungen, wenn $\Re(\varrho_1) < \Re(\varrho_2)$ ist.

Im folgenden wird oft von einem Satze Gebrauch gemacht, den Herr Perron in Bd. 142 von Crelles Journal bewiesen hat und der so lautet:

Es seien in der Differentialgleichung

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n y(x) = 0$$

die a_ν für $x > x_0$ stetige Funktionen der reellen Variablen x, die für $x = +\infty$ den Grenzwerten $\bar{a}_\nu$ zustreben mögen. Hat dann die charakteristische Gleichung

$$\chi(\varrho) = \varrho^n + \bar{a}_1 \varrho^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0$$

lauter Wurzeln mit voneinander verschiedenen Realteilen, so gibt es für $x > x_0$ ein Fundamentalsystem $y_1, \ldots, y_n$ von Lösungen, das den Gleichungen genügt

$$\lim_{x=+\infty} \frac{y_\nu'(x)}{y_\nu(x)} = \varrho_\nu; \qquad \lim_{x=+\infty} \frac{y_\nu^{(\varkappa)}(x)}{y_\nu} = \varrho_\nu^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Die a_ν und also auch die y_ν können dabei komplexe Funktionen sein.

Der Satz gilt auch unter entsprechenden Voraussetzungen für jeden ins Unendliche gehenden Strahlenweg $x = a_0 + re^{i\vartheta_0}$. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Differentialgleichung auf die Veränderliche r zu transformieren. Haben die a_ν auf dem Strahlenwege wieder dieselben Grenzwerte $\bar{a}_\nu$, so ergibt sich $\varphi(\varrho e^{i\vartheta_0})$ als charakteristische Gleichung, also ist

$$\frac{dy_\nu}{dr} : y_\nu \to \varrho_\nu e^{i\vartheta_0}$$

oder

$$\frac{dy_\nu}{dx} : y_\nu \rightarrow \varrho_\nu ,$$

wie vorher. Mit Hilfe des Perronschen Satzes läßt sich nun ein Satz über inhomogene Differentialgleichungen beweisen, der es gestattet, das Verhalten der Lösungen dieser Gleichung für große Werte der Veränderlichen mit aller nur wünschenswerten Genauigkeit zu erkennen.

Satz. *Ist*

$$v^{(n)}(x) + \varphi_1 v^{(n-1)}(x) + \ldots + \varphi_n v(x) = D(v)$$

ein Differentialausdruck, in dem die φ_ν für alle reellen x stetige und differenzierbare Funktionen sind, welche den Gleichungen

$$\lim_{|x|=\infty} \varphi_\nu = a_\nu , \qquad \lim_{|x|=\infty} \varphi_\nu' = 0 \tag{19a}$$

genügen, und hat die charakteristische Gleichung

$$\psi(\varrho) = \varrho^{(n)} + a_1 \varrho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

lauter Wurzeln mit verschiedenen Realteilen

$$\Re(\varrho_1) > \ldots > \Re(\varrho_n),$$

so hat die inhomogene Gleichung

$$D(w) = G(x),$$

wo $G(x)$ eine für alle x stetige differenzierbare Funktion mit der charakteristischen Zahl σ für $|x| = \infty$ ist ($\Re(\sigma) \neq \Re(\varrho_\nu)$), wenigstens eine mit ihren $(n+1)$ ersten Ableitungen für alle x stetige Lösung w_1, für welche

$$\lim_{x=+\infty} \frac{w_1^{(k)}}{w_1} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1),$$

ebenso eine mit ihren $n+1$ ersten Ableitungen für alle x stetige Lösung w_2, für welche

$$\lim_{x=-\infty} \frac{w_2^{(k)}}{w_2} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Der Beweis wird für $n = 2$ geführt, da seine Allgemeingültigkeit ohne weiteres erkennbar ist. Es ist

$$G(x) = e^{\sigma x} g(x) \cdot \frac{G'}{G} = \frac{g'}{g} + \sigma ,$$

also

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{g'}{g} = 0 \qquad (g \neq 0 \text{ für große } x).$$

Ferner hat man

$$D(v) = v'' + \varphi_1 v' + \varphi_2 v = e^{\sigma x} g , \qquad E(v) = \frac{D(v)}{g} = e^{\sigma x},$$

d. h.

$$\frac{d}{dx}(E(v)) - \sigma E(v) = \frac{v'''}{g} + v''\left(\frac{\varphi_1}{g} - \frac{g'}{g^2} - \frac{\sigma}{g}\right) + v'\left(\frac{\varphi_2}{g} + \frac{\varphi_1'}{g} - \frac{\varphi_1 g'}{g^2} - \sigma\frac{\varphi_1}{g}\right)$$
$$+ v\left(\frac{\varphi_2'}{g} - \varphi_2\frac{g'}{g^2} - \sigma\frac{\varphi_2}{g}\right) = 0$$

oder

$$F(v) = v''' + v''\left(\varphi_1 - \sigma - \frac{g'}{g}\right) + v'\left(\varphi_2 - \sigma\varphi_1 + \varphi_1' - \varphi_1\frac{g'}{g}\right)$$
$$+ v\left(\varphi_2' - \sigma\varphi_2 - \varphi_2\frac{g'}{g}\right) = 0.$$

Die charakteristische Gleichung ist wegen (19a)

$$\varrho^3 + \varrho^2(a_1 - \sigma) + \varrho(a_2 - \sigma a_1) - \sigma a_2 = (\varrho - \sigma)(\varrho^2 + a_1\varrho + a_2) = 0.$$

Wegen $\Re(\sigma) \neq \Re(\varrho_\nu)$ gibt es nach Perron ein Integral w_1, das für $x = +\infty$ die charakteristische Zahl σ hat:

$$\lim_{x=+\infty} \frac{w_1^{(\varkappa)}}{w_1} = \sigma^\varkappa \qquad (\varkappa = 1, 2, 3).$$

Dann kann aber wegen $\Re(\sigma) \neq \Re(\varrho_\nu)$ nicht $D(w_1) = 0$ sein. Daher ist wegen

$$F(w_1) = g\left(\frac{d}{dx}(E) - \sigma E\right) = 0$$

bei Festlegung der willkürlichen Konstanten in w_1

$$E(w_1) = e^{\sigma x}.$$

Mithin

$$D(w_1) = e^{\sigma x} g = G.$$

Das Verhalten von w_1 für große positive x ist nun leicht zu ersehen. Es ist

$$(20) \qquad w_1\left(\frac{w_1''}{w} + \varphi_1\frac{w_1'}{w_1} + \varphi_2\right) = G; \qquad w_1 = \frac{G(x)}{\psi(\sigma) + \delta(x)},$$

wobei $\lim_{x=+\infty} \delta(x) = 0$ ist. Entsprechendes gilt bei $x = -\infty$ für eine Lösung w_2.

Es ist späterhin von Wichtigkeit, das Verhalten der Integrale bei Annäherung in beiden Richtungen zu kennen. Gemäß Elementarsätzen über lineare Differentialgleichungen sind ja die Integrale für alle x stetig. Sei zunächst

$$\Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2) > \Re(\sigma).$$

Jedes Integral läßt sich in der Form darstellen

$$w = w_2 + c_1 v_1 + c_2 v_2.$$

Dabei bedeuten v_1 und v_2 solche Fundamentalintegrale der homogenen Gleichung, die nach dem Perronschen Satze für $x = -\infty$ zu ϱ_1 und ϱ_2 gehören. Nach Bemerkung 3 folgt dann, daß jedes Integral w für $x = -\infty$ die charakteristische Zahl σ hat, insbesondere auch w_1. Andererseits ist w_1 das einzige Integral, das für $x = +\infty$ zu σ gehört. Für beide Annäherungen gehört also w_1 zur Zahl σ und es ist das einzige Integral dieser Art. Im Falle

$$\Re(\sigma) > \Re(\varrho_1) > \Re(\varrho_2)$$

gilt Entsprechendes für w_2.

Das Integral w_2 ist jetzt das einzige mit der Eigenschaft

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{w_2'}{w_2} = \sigma.$$

Ist dagegen $\Re(\varrho_2) < \Re(\sigma) < \Re(\varrho_1)$, so können verschiedene Fälle eintreten. Aus dem Perronschen Satz und der Bemerkung 3 folgt leicht, daß es bis auf einen konstanten Faktor nur ein einziges Integral v_2 der homogenen Gleichung gibt, das für $x = +\infty$ zu ϱ_2 gehört, alle übrigen gehören für $x = +\infty$ zu ϱ_1. Ebenso gibt es nur ein einziges Integral v_1, das für $x = -\infty$ zu ϱ_1 gehört, alle anderen gehören zu ϱ_2. Wir schließen nun zunächst den Fall aus, daß v_1 und v_2 sich nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Dann bilden also v_1 und v_2 ein Fundamentalsystem und es gehört v_1 sowohl bei positivem wie negativem wachsenden x zu ϱ_1, v_2 zu ϱ_2.

Ist nun w_1 dasjenige Integral der inhomogenen Gleichung, das für $x = +\infty$ zu σ gehört, dann erhält man wegen

$$\Re(\varrho_2) < \Re(\sigma) < \Re(\varrho_1)$$

alle Integrale dieser Eigenschaft durch die Formel

$$\bar{w}_1 = w_1 + d_2 v_2.$$

Ist w_2 dasjenige Integral, das für $x = -\infty$ zu σ gehört, so erhält man alle Integrale dieser Eigenschaft durch die Formel

$$\bar{w}_2 = w_2 + d_1 v_1.$$

Ist nun etwa

$$w_1 - w_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2,$$

so braucht man nur

$$d_1 = c_1 \quad \text{und} \quad d_2 = -c_2$$

zu wählen, um $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$ zu erzielen. Für diese Lösung w gilt alsdann

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{w^{(k)}}{w} = \sigma^k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Offenbar ist sie die einzige dieser Art. Tritt dagegen der Ausnahmefall ein, daß sich die oben definierten Integrale v_1 und v_2 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, so gibt es kein Integral w, das bei beiden Annäherungen zu σ gehört.

Bemerkung 4. *Ist bei reellen x*

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = a \qquad (\Re(a) \neq 0, \text{ etwa } > 0),$$

so gilt auch

$$\lim_{|x|=\infty} \frac{\varphi(x)}{\int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a.$$

Beweis. Die Differentialgleichung

$$y'' - \frac{\varphi'}{\varphi} y' = 0$$

hat die beiden Integrale $y_1 = 1$ und $y_2 = \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx$. Also gibt es nach Perron ein Integral

$$y = c_1 + c_2 \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx,$$

für das

$$\lim_{x=-\infty} \frac{y'}{y} = \lim_{x=-\infty} \frac{c_2 \varphi}{c_1 + c_2 \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a \qquad (c_2 \neq 0).$$

Offenbar muß $c_1 = 0$ sein. Ebenso gibt es ein zweites Integral, für das

$$\lim_{x=+\infty} \frac{c_2' \varphi}{c_1' + c_2' \int_{-\infty}^{x} \varphi\, dx} = a \qquad (c_2' \neq 0).$$

Dann gilt diese Beziehung aber für jedes c_1', also auch für $c_1' = 0$.

Die Form

$$(x^2 + a_1' x + a_0') y'(x) + (b_2' x^2 + b_1' x + b_0') y(x + h)$$

(a_ν', b_ν', h reell) läßt sich durch lineare reelle Transformationen in die Gestalt setzen

$$\begin{aligned} \Lambda(y) &= (x^2 + a_0) y'(x) + (b_2 x^2 + b_1 x + b_0) y(x+1) \\ &= x^2 (y'(x) + b_2 y(x+1)) + x b_1 y(x+1) + a_0 y'(x) + b_0 y(x+1) \\ &= x^2 L_2(y) + x L_1(y) + L_0(y). \end{aligned}$$

Wie früher werde gesetzt

$$L_\nu(e^{zx}) = e^{zx} l_\nu(z) \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

$$l_2(z) = z + b_2 e^z; \quad l_1(z) = b_1 e^z; \quad l_0(z) = a_0 z + b_0 e^z.$$

Ist wieder wie früher

$$y = \int_C e^{zx}\, v(z)\, dz$$

(C ein noch zu bestimmender Integrationsweg), dann ergibt sich

$$x^2 L_2(y) = \int_C x^2 e^{zx} l_2\, v\, dz = [x e^{zx} l_2 v]_C - [e^{zx}(l_2 v)']_C + \int_C e^{zx}(l_2 v)''\, dz,$$

$$x L_1(y) = \int_C x e^{zx} l_1\, v\, dz = [e^{zx} l_1 v]_C - \int_C e^{zx}(l_1 v)'\, dz.$$

Mithin ist

$$(21) \qquad A(y) = [x e^{zx} l_2 v]_C - [e^{zx}(l_2 v)']_C + [e^{zx} l_1 v)_C + \int_C e^{zx}[l_2 v'' + (2 l_2' - l_1) v' + (l_2'' - l_1' + l_0) v]\, dz.$$

Jede Lösung v der Differentialgleichung

$$A_z(v) = l_2(z) v''(z) + (2 l_2'(z) - l_1(z)) v'(z) + (l_2''(z) - l_1'(z) + l_0(z)) v(z) = 0$$

heißt eine Laplacesche Transformierte. Singuläre Stellen können für diese Lösungen nur die Nullstellen von $l_2(z)$ sein. Über ihre Lage gilt das schon früher Gesagte. Rein imaginäre Nullstellen sollen nicht vorhanden sein. Der Streifen $-\gamma_0 \leqq \Re(z) \leqq +\gamma_0$ sei nullstellenfrei. Sind $z = \gamma + iu$ und $z = -\gamma + iu$ zwei Gerade im Streifen, dann gibt es für $a_0 > 0$ auf jeder Geraden ein Fundamentalsystem $\overset{1}{v}_\gamma$, $\overset{2}{v}_\gamma$ bzw. $\overset{1}{v}_{-\gamma}$, $\overset{2}{v}_{-\gamma}$, für das

$$\lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{v}_{\pm\gamma})}{\overset{1}{v}_{\pm\gamma}} = \varrho_1; \qquad \lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{2}{v}_{\pm\gamma})}{\overset{2}{v}_{\pm\gamma}} = \varrho_2$$

gilt, ϱ_1 und ϱ_2 sind dabei die Wurzeln der im Streifen zu $A_z(v)$ gehörigen charakteristischen Gleichung $(\varrho^2 + a_0) = (\varrho - \varrho_1)(\varrho - \varrho_2) = 0$. Der Perronsche Satz liefert aber keine Aussage über den Zusammenhang der Fundamentalsysteme von verschiedenen Geraden, insbesondere entscheidet er nicht die Frage, ob es ein Fundamentalsystem $\overset{1}{v}$, $\overset{2}{v}$ gibt, das für $u = +\infty$ auf jeder Geraden des Streifens zu ϱ_1 bzw. zu ϱ_2 gehört. Auch sind die Bedingungen für den Perronschen Satz nicht erfüllt für $a_0 \leqq 0$. Zur Beseitigung dieser Mängel stellen wir eine Untersuchung an, die uns gestattet, für eine gewisse Teilumgebung des Punktes $z = \infty$ ein Fundamentalsystem aufzustellen und sein Verhalten genau zu studieren. Diese Methode erscheint eng an die spezielle Gestalt unseres Beispiels gebunden, trägt jedoch einen viel allgemeineren Charakter. Immerhin sei schon jetzt darauf verwiesen, daß wir allgemeinsten Falle und bei beliebigem Grade der Koeffizienten in $A(y)$ auf einem anderen immer gangbaren Wege zu völlig hinreichenden Resultaten gelangen. Es ist

$$z^{-1} A_z(v) = v'' + 2 z^{-1} v' + a_0 v + z^{-1} e^z [b_2 v'' + (2 b_2 - b_1) v' + (b_2 - b_1 + b_0) v].$$

Ist ϱ eine der Wurzeln von $\varrho^2 + a_0 = 0$, so geht dieser Ausdruck durch die Transformation

$$v = z^{-1} e^{\varrho z} \bar{v}$$

in den folgenden über:

$$z^{-1} e^{\varrho z} [\bar{v}'' + 2\varrho \bar{v}' + z^{-1} e^z \{b_2 \bar{v}'' + \bar{v}'(c_0 + c_1 z^{-1}) + \bar{v}(d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2})\}],$$

wobei die Konstanten c und d folgendermaßen bestimmt sind:

$$c_0 = 2b_2 - b_1 + 2b_2\varrho; \quad c_1 = -2b_2; \quad d_0 = \varrho^2 b_2 + \varrho(2b_2 - b_1) + b_2 - b_1 + b_0;$$
$$d_1 = -c_0; \quad d_2 = -c_1.$$

Es ist also

$$z^{-1} A_z(v) = z^{-1} e^{\varrho z}(E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E_2(\bar{v})).$$

E_1 und E_2 sind dabei die folgenden Differentialausdrücke:

$$(22) \quad \begin{cases} E_1(\bar{v}) = \bar{v}''(z) + 2\varrho \bar{v}'(z), \\ E_2(\bar{v}) = b_2 \bar{v}''(z) + (c_0 + c_1 z^{-1}) \bar{v}'(z) + (d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}) \bar{v}(z). \end{cases}$$

Um also eine Lösung von $A(v) = 0$ zu finden, kann man auch eine solche von

$$E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E_2(\bar{v})$$

suchen. Wir setzen nun formal an

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z),$$

wobei die χ_n dem System von Rekursionsdifferentialgleichungen

$$E_1(\chi_n - z^{-1} e^z E_2(\chi_{n-1}) = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

genügen und $\chi_0 = 1$ gesetzt ist. Dann ist offenbar, wenn zunächst die Konvergenz und gliedweise Differenzierbarkeit der Reihe vorausgesetzt wird, $\bar{v}$ eine Lösung unserer Gleichung. χ_n bestimme sich aus χ_{n-1} durch die Formel

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} e^{-2\varrho\lambda} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{2\varrho\zeta} \zeta^{-1} e^{\zeta} E_2(\chi_{n-1}(\zeta)) \, d\zeta \, d\lambda.$$

Das rechts stehende Symbol hat zunächst noch keinen Sinn. Die Variable z beschränke sich im folgenden auf ein Gebiet G, das durch die Ungleichungen bestimmt ist

$$\Re(z) \leqq \gamma_0; \qquad |z| > |b_2|^{-1} e^{\gamma_0}; \qquad |z| > r,$$

wobei r so groß gewählt sein soll, daß für alle z von G, die im Streifen $0 \leqq \Re(z) \leqq \gamma_0$ liegen, $|J(z)| > 1$ ist.

Das Nichtverschwinden von b_2 ist in der Voraussetzung enthalten, daß $l_2(z) = z + b_2 e^z$ keine rein imaginären Nullstellen haben soll. Durch die zweite und erste Bedingung ist in G die Ungleichung gesichert

$$|z^{-1} e^z| < |b_2|.$$

Die von den Nullstellen von $l_2(z)$ ausgehenden, nach dem Unendlichen führenden Verzweigungsschnitte sollen nicht durch G ins Unendliche führen, eine wohlerlaubte Annahme.

Wir behaupten nun:

Stellt das Integral $\chi_{n-1}(z)$ eine in G reguläre analytische Funktion, die dort den Ungleichungen

$$(23)\quad \begin{cases} |\chi_{n-1}(z)| \leqq K|z^{-1}e^z|^{n-1}; & |\chi'_{n-1}(z)| \leqq (n-1)K|z^{-1}e^z|^{n-1}; \\ & |\chi''_{n-1}(z)| \leqq (n-1)^2 K|z^{-1}e^z|^{n-1} \end{cases}$$

genügt, so stellt auch χ_n eine in G reguläre analytische Funktion dar, die dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < c'K|z^{-1}e^z|^n; \quad |\chi'_n(z)| < nc'K|z^{-1}e^z|^n; \quad |\chi''_n(z)| < n^2 c'K|z^{-1}e^z|^n$$

genügt, wobei c' eine von n unabhängige numerische Konstante bedeutet.

Beweis. Zunächst folgt

$$|E_2(\chi_{n-1})| \leqq (n-1)^2 cK|z^{-1}e^z|^{n-1};$$

wobei $\frac{c}{3}$ als das Maximum von $|b_2|$, $|c_0 - c_1 z^{-1}|$, $|d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2}|$ im Gebiete G definiert ist. Also auch

$$(24)\qquad |E_2(\chi_{n-1})| < n^2 cK|z^{-1}e^z|^{n-1}.$$

Die Herleitung dieser Ungleichung gilt zunächst nur für $n > 1$, jedoch ist die letzte Ungleichung auch für $n = 1$ richtig, da $\chi_0 = 1$ ist. Wir setzen nun

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} e^{2\varrho\zeta}\, \zeta^{-1} e^{\zeta} E_2(\chi_{n-1}(\zeta))\, d\zeta,$$

wobei der Integrationsweg von λ aus möglichst bequem innerhalb G zur reellen Achse und auf dieser ins Unendliche führen soll. Durch diese Andeutung des Weges ist $\varphi(\lambda)$ eindeutig bestimmt. Denn der Integrand ist eine in G reguläre analytische Funktion und das Integral ist wegen (24) absolut konvergent, da zunächst $a_0 > 0$, d. h. ϱ rein imaginär angenommen wird. Wegen (24) kann die Integration statt auf der reellen Achse auch auf irgendeinem Horizontalstrahl erfolgen, insbesondere auch auf dem von $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ ausgehenden. Es ist also auch

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty+i\lambda''}^{\lambda'+i\lambda''} e^{2\varrho\zeta}\, \zeta^{-1} e^{\zeta} E_2(\chi_{n-1})\, d\zeta,$$

oder für $\zeta = \zeta' + i\lambda''$

$$\varphi(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{2\varrho i\lambda''} e^{2\varrho\zeta'} \zeta^{-1} e^{\zeta} E_2(\chi_{n-1}(\zeta))\, d\zeta'.$$

Wegen (24) ist daher, da ϱ rein imaginär sein soll,

$$|\varphi(\lambda)| \leqq n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} \int_{-\infty}^{\lambda'} (\zeta'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}} e^{n\zeta'} d\zeta'.$$

Ist zunächst $\Re(z) \leqq 0$, so folgt daraus

$$|\varphi(\lambda)| \leqq n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} (\lambda'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{n\zeta'} d\zeta = n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} |\lambda|^{-n} \frac{e^{n\lambda'}}{n}.$$

Daher ist

$$(25) \qquad |\chi_n'(\lambda)| = |e^{-2\varrho\lambda} \varphi(\lambda)| < n c K |\lambda^{-1} e^{\lambda}|^n.$$

Ist für

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty}^{z} \chi_n'(\lambda) d\lambda$$

der Integrationsweg ebenso wie bei $\varphi(\lambda)$ definiert, so läßt sich wegen (25) und der Regularität von $\chi_n'(\lambda)$ entlang irgendeiner Horizontalen integrieren, also auch auf der durch $z = z' + iz''$ gehenden:

$$\chi_n(z) = \int_{-\infty + iz''}^{z' + iz''} \chi_n'(\lambda) d\lambda < \int_{-\infty}^{z'} n c K (\lambda'^2 + z''^2)^{-\frac{n}{2}} e^{n\lambda'} d\lambda'.$$

Für $\Re(z) \leqq 0$ ist also

$$|\chi_n(z)| < n c K (z'^2 - z''^2)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{z'} e^{n\lambda'} d\lambda' = c K |z^{-1} e^z|^n.$$

Aus (22), (24), (25) folgt

$$|\chi_n''(z)| < 2|\varrho| |\chi_n'(z)| + |z^{-1} e^z E_2(\chi_{n-1}(z))| < 2|\varrho| n c K |z^{-1} e^z|^n + n^2 c K |z^{-1} e^z|^n = n^2 \left(1 + \frac{2|\varrho|}{n}\right) c K |z^{-1} e^z|^n.$$

Setzen wir $c' = c(1 + 2|\varrho|)$, so ist unsere Behauptung für das Teilgebiet $\Re(z) \leqq 0$ von G bewiesen. Für $\Re(z) > 0$ machen wir von der Voraussetzung Gebrauch, daß dann in G $|\Im(z)| > 1$ ist. Dann hat

$$f(\zeta') = e^{\frac{n}{2}\zeta'} (\zeta'^2 + \lambda''^2)^{-\frac{n}{2}}$$

eine stets positive Ableitung und es ist daher

$$|\varphi(\lambda)| < n^2 c K e^{2\varrho i\lambda''} |\lambda|^{-n} e^{\frac{n}{2}\lambda'} \int_{-\infty}^{\lambda'} e^{\frac{n}{2}\zeta'} d\zeta'.$$

Wie man sieht, ergeben sich dieselben Ungleichungen für $\chi_n(z)$, $\chi_n'(z)$, $\chi_n''(z)$, nur daß $c' = 4c(1 + 2|\varrho|)$ gesetzt werden muß. Unsere Behauptung ist damit bewiesen. Da $\chi_0 \equiv 1$ einen Sinn hat, in G regulär ist und den Ungleichungen (23) mit $K = 1$ genügt, so haben alle $\chi_n(z)$ einen Sinn, sind in G regulär und genügen dort den Ungleichungen

$$|\chi_n(z)| < c'^n |z^{-1} e^z|^n; \quad |\chi_n'(z)| < n c'^n |z^{-1} e^z|^n; \quad |\chi_n''(z)| < n^2 c'^n |z^{-1} e^z|^n.$$

Ist G' das Teilgebiet von G, in welchem

$$|z| > e^{\gamma_0} c'$$

ist und also die Ungleichung $|z^{-1} e^z| < \frac{1}{c'}$ gesichert ist, so ist

$$\bar{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z)$$

in G' absolut und gleichmäßig konvergent und stellt in dieser Teilumgebung des Punktes $z = \infty$ eine Lösung von

$$E_1(\bar{v}) - z^{-1} e^z E_2(\bar{v}) = 0$$

dar. Der Beweis gilt zunächst nur für rein imaginäres ϱ, nämlich $a_0 > 0$. Ist nun $a_0 < 0$, also ϱ reell, so ändert sich bei positivem ϱ nichts Wesentliches an dem Beweise. Auch für $\varrho < 0$ ließe sich Näheres über die Reihe aussagen. Doch wollen wir diese langwierigen Betrachtungen fortlassen, weil wir sie nicht benötigen. Wir können also sagen:

Ist $a_0 < 0$, so gibt es ein Integral v_1 der Differentialgleichung $A(v) = 0$, nämlich

$$v_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z} \bar{v}_1 = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z), \tag{26}$$

das in G' der Ungleichung

$$|v_1(z)| < C |z|^{-1}$$

genügt. Für $a_0 > 0$ gibt es in G' ein Fundamentalsystem von $A(v) = 0$, nämlich

$$\begin{cases} v_1(z) = z^{-1} e^{\varrho_1 z}\, \bar{v}_1(z) = z^{-1} e^{\varrho_1 z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z, \varrho_1), \\ v_2(z) = z^{-1} e^{\varrho_2 z}\, \bar{v}_2(z) = z^{-1} e^{\varrho_2 z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z, \varrho_2). \end{cases} \tag{27}$$

Es gilt für jeden Weg in G'

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{v_1'}{v_1} = \varrho_1; \quad \lim_{|z|=\infty} \frac{v_2'}{v_2} = \varrho_2,$$

$$\varrho_1 = i\sqrt{a_0}; \quad \varrho_2 = -i\sqrt{a_0}.$$

Wir behandeln zunächst diesen letzten Fall: $a_0 > 0$. Die Variable z verbleibe jetzt in dem singularitätenfreien Streifen $-\gamma_0 \leqq \Re(z) \leqq +\gamma_0$. Lassen wir nun $v_1(z)$ und $v_2(z)$ auf der imaginären Achse von $+i\infty$ nach $-i\infty$ wandern, oder anders gesprochen, setzen wir $v_1(z)$ und $v_2(z)$ innerhalb des Streifens von $+i\infty$ her analytisch fort — daß das möglich

ist, wissen wir —, so wird dieses Fundamentalsystem in ein anderes übergehen. Es wird für große negative Werte des Streifens sein

$$\overset{*}{v}_1(z) = c_{1,1}\, v_1(z) + c_{1,2}\, v_2(z); \qquad \overset{*}{v}_2(z) = c_{2,1}\, v_1(z) + c_{2,2}\, v_2(z),$$

wobei der Stern die Erinnerung an die analytische Fortsetzung wachhalten soll, während $v_1(z)$ und $v_2(z)$ rechts die in G' definierten Funktionen bedeuten. Ist nun $c_{1,1} \neq 0$, so wird das für große positive Werte $\Im(z)$ im Streifen durch die Gleichung

$$v_{II}(z) = n_1 v_1(z) + n_2 v_2(z)$$

definierte Integral in

$$(n_1 c_{1,1} + n_2 c_{2,1})\, v_1(z) + (n_1 c_{1,2} + n_2 c_{2,2})\, v_2(z)$$

übergehen und $n_2 \neq 0$ und n_1 sind so wählbar, daß

$$n_1 c_{11} + n_2 c_{2,1} = 0$$

wird. $v_{II}(z)$ ist dabei innerhalb des Streifens eindeutig und regulär und es gilt bei beiderseitigem Übergang ins Unendliche innerhalb des Streifens

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_{II}(z))}{v_{II}(z)} = \varrho_2.$$

Wird nun $v_I(z)$ für große positive Werte $\Im(z)$ im Streifen durch die Gleichung

$$v_I(z) = v_1(z)$$

definiert, so gilt wegen $c_{1,1} \neq 0$ dann von selbst innerhalb des Streifens

$$\lim_{|z|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_1.$$

Ist dagegen $c_{1,1} = 0$, so tritt ein *Ausnahmefall* ein. Ein Fundamentalsystem $v_I(z)$, $v_{II}(z)$ dieser Art existiert nicht. Vielmehr gilt im Streifen

$$\lim_{J(z)=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_1, \quad \lim_{J(z)=-\infty} \frac{\frac{d}{dz}(v_I(z))}{v_I(z)} = \varrho_2. \tag{28}$$

$v_I(z)$ verschwindet beiderseits im Unendlichen sehr stark. Diesen Ausnahmefall wollen wir zunächst ausschließen. Dann gilt für alle $z = z' + iu$ des Streifens

$$|v_I(z)| < e^{-u\sqrt{a_0}}\, |z + s|^{-1} \cdot \text{konst.},$$
$$|v_{II}(z)| < e^{u\sqrt{a_0}}\, |z + s|^{-1} \cdot \text{konst.}$$

Die Konstanten sind dabei unabhängig von z' wählbar, $s > \gamma_0 > 0$.

Die Lösung unserer Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

führt auf ein eingehenderes Studium der inhomogenen Differentialgleichung

$$A_z(w_{(z)}) = e^{-zt}(z+s)^{-2}.$$

t bedeutet wie früher einen reellen Parameter. z laufe auf der Vertikalen $\gamma + iu$ $(0 < \gamma < \gamma_0)$.

Die Bedingungen für unseren Satz über inhomogene Differentialgleichungen sind erfüllt. Da außerdem der Ausnahmefall, daß $v_I(z)$ beiderseits im Unendlichen stark verschwindet, zunächst ausgeschlossen bleibt, so können wir sagen:

Es gibt eine und nur eine Lösung $w_\gamma(z)$, so daß für $z = \gamma + iu$ gilt

$$\lim_{|u|=\infty} \frac{\frac{d}{dz}(w_\gamma(z))}{w_\gamma(z)} = -t.$$

Das Verhalten von $w_\gamma(z)$ für große $|z|$ läßt sich nach (20) sofort angeben:

$$(29) \qquad w_\gamma(z,t) = \frac{e^{-zt}(z+s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 + a_0 + \delta(z,t)}, \quad \text{wobei} \quad \lim_{|u|=\infty} \delta(z,t) = 0.$$

Entsprechend gibt es auf der Vertikalen $z = -\gamma + iu$ eine und nur eine Lösung $w_{-\gamma}(z)$, für die eine ganz entsprechende Abschätzung gilt. Das Integral

$$U_{\pm\gamma}(x,t) = \int_{\pm\gamma - i\infty}^{\pm\gamma + i\infty} e^{zx} w_{\pm\gamma}(z,t)\,dz$$

hat daher einen Sinn und kann einmal unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden. $A(U_\gamma(x))$ hat also auch einen Sinn. Nach (21) ist

$$A(U_\gamma(x)) = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{zx} A_z(w_\gamma(z))\,dz = \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{z(x-t)} (z+s)^{-2}\,dz$$

$$= \varepsilon\, 2\pi i\, e^{-s(x-t)}(x-t); \qquad \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \geqq 0, \\ \varepsilon = 0 \text{ für } x - t < 0. \end{array}$$

Definieren wir

$$W(x) = \int_{-\infty}^{0} U_{-\gamma}(x,t)\, A_{2,t}(g(t))\,dt + \int_{0}^{\infty} U_\gamma(x,t)\, A_{2,t}(g(t))\,dt$$

und nehmen wir als bewiesen an, daß alle Integrale nach t konvergent sind und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann, so ist

$$A(W) = \int_{-\infty}^{0} A(U_{-\gamma}(x,t))\, A_{2,t}(g(t))\,dt + \int_{0}^{\infty} A(U_\gamma(x,t))\, A_{2,t}(g(t))\,dt$$

$$= 2\pi i \int_{-\infty}^{x} A_{2,t}(g(t))\, e^{-s(x-t)}(x-t)\,dt.$$

Daraus folgt gemäß Satz I, S. 46 ganz wie früher

$$\Lambda\left(\frac{1}{2\pi i}W\right) = g(x). \tag{30}$$

Um die Konvergenz der Integrale über dt nachzuweisen, müssen wir noch das Verhalten von $w_{\pm\gamma}(z,t)$ für große t untersuchen. Dazu schreiben wir die Funktion explizit hin. Wir behaupten

$$z,t) = v_I(z)\int_{\gamma-i\infty}^{z} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'(\sigma)-l_1(\sigma)}{l_2(\sigma)}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda)\cdot e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'(\sigma)-l_1(\sigma)}{l_2(\sigma)}d\sigma}\cdot e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2}l_2^{-1}(\lambda)\,d\lambda$$

Um die Vorstellungen zu fixieren, seien $\pm\gamma + iu$ so aus der kontinuierlichen Menge wählbarer Geraden gesucht, daß auf ihnen keine der höchstens abzählbaren (in Wahrheit nur endlich vielen) Nullstellen von $v_I(z)$ liegen. Daß die rechte Seite — falls die Integrale konvergieren — eine Lösung der inhomogenen Gleichung darstellt, ist bekannt. Die Konvergenz der Integrale und die Identität mit w_γ ergibt sich aus Bemerkung 4: Unter Benutzung der Identität

$$\frac{(\varphi\psi)'}{\varphi\psi} = \frac{\varphi'}{\varphi} + \frac{\psi'}{\psi}$$

sieht man, daß die Funktion

$$f_1(\lambda) = v_I(\lambda)\,e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\,e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2}l_2^{-1}(\lambda) \tag{31}$$

auf der Vertikalen $\lambda = \gamma + i\lambda''$ für $\lambda'' = \pm\infty$ zur Zahl $i\sqrt{a_0} - t$ gehört. Also hat nach Bemerkung 4

$$f_2(\zeta) = \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} f_1(\lambda)\,d\lambda$$

auf der Geraden $\zeta = \gamma + i\zeta''$ für $\zeta'' = \pm\infty$ dieselbe charakteristische Zahl. Die Funktion

$$f_3(\zeta) = e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\,v_I^{-2}(\zeta)\,f_2(\zeta)$$

gehört daher für $\zeta'' = \pm\infty$ zur Zahl $-i\sqrt{a_0} - t$. Daher gehört die rechte Seite

$$v_I(z)\int_{\gamma-i\infty}^{z} f_3(\zeta)\,d\zeta$$

für $u = \pm\infty$ zur Zahl $-t$ und ist also wegen der eindeutigen Bestimmtheit einer solchen Lösung mit w_γ identisch. Nun können wir w_γ auch für große t untersuchen. Aus der Darstellung (27) wissen wir, daß

$$v_I(\gamma+iu) = e^{-u\sqrt{a_0}}\,|\gamma+iu|^{-1}\cdot\varphi(u), \tag{32}$$

wobei

$$\lim_{|u|=\infty} \varphi(u) = 1.$$

Da ferner auf $z = \gamma + iu$ die Funktion $v_I(z)$ keine Nullstellen hat, so ist

$$(33) \qquad v_I^{-1}(\gamma + iu) = e^{u\sqrt{a_0}} |\gamma + iu| \frac{1}{\varphi(u)} < C_\gamma e^{u\sqrt{a_0}} |\gamma + iu|.$$

Also ist auf $z = \gamma + iu$

$$|w_\gamma(z,t)| < C_\gamma \cdot e^{-\gamma t} e^{-u\sqrt{a_0}} |z|^{-1} \int_{-\infty}^{u} e^{2\zeta''\sqrt{a_0}} \int_{+\infty}^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1} d\lambda'' d\zeta''.$$

Bei genügend großem s hat

$$\varphi_1(\lambda'') = e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} (\lambda''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1}$$

eine stets negative Ableitung. Also ist

$$\varphi_2(\zeta'') = \int_{\infty}^{\zeta''} \varphi_1(\lambda'') e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} d\lambda'' \leqq \varphi_1(\zeta'') \int_{\infty}^{\zeta''} e^{-\frac{\lambda''}{2}\sqrt{a_0}} d\lambda''.$$

Ebenso hat

$$e^{\frac{\zeta''}{2}\sqrt{a_0}} (\zeta''^2 + (\gamma+s)^2)^{-1}$$

eine stets positive Ableitung. Ganz ebenso ergibt sich daher schließlich für $z = \gamma + iu$

$$(33a) \qquad |w_\gamma(z,t)| < C_\gamma \cdot e^{-\gamma t} (u^2 + (\gamma+s)^2)^{-\frac{3}{2}}$$

und entsprechend für $w_{-\gamma}(z,t)$. Daraus folgt gemäß Definition

$$(34) \qquad |U_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}$$

und auch

$$\left|\frac{d}{dx} U_\gamma(x,t)\right| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}.$$

Die Funktion $W(x)$ hat also einen Sinn und kann unter dem Integralzeichen einmal nach x differenziert werden. Die zur Gleichung (30) führenden Operationen sind damit gerechtfertigt. Es bleibt noch zu zeigen, daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist. Behauptet wird

$$W(x) = O(|x|^{a-2}); \qquad W'(x) = O(|x|^{a-2}).$$

Dazu ist es nötig, die Identität der beiden Lösungen $w_\gamma(z,t)$ und $w_{-\gamma}(z,t)$ nachzuweisen, die ja als reguläre analytische Funktionen im Streifen eindeutig definiert sind. Zunächst kann man in

$$f_2(\zeta) = \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} f_1(\lambda)\, d\lambda$$

die Integration auch auf der Vertikalen $-\gamma + i\lambda''$ ins Unendliche erstrecken. Die Funktion $f_1(\lambda)$ ist ja im Streifen regulär. Wegen (31)

und (27) sind auch die weiteren Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie erfüllt. Es ist ferner

$$|f_2(\zeta)| = \Big|\int_{i\infty}^{0} f_1(\lambda)\,d\lambda + \int_{0}^{\zeta} f_1(\lambda)\,d\lambda\Big| < \text{konst.} + |\zeta|\cdot|f_1(\zeta)|.$$

Es folgt weiter aus der Darstellung (27), daß für große $|\zeta| = |\zeta' + i\zeta''|$ des Streifens

$$|v_I^{-1}(\zeta)| < \text{konst.}\, e^{\zeta''\sqrt{a_0}}|\zeta|, \tag{35}$$

wobei die Konstante *von* ζ' *unabhängig* ist. Daher läßt sich auch in

$$\int_{\gamma-i\infty}^{z} f_3(\zeta)\,d\zeta$$

die Verschiebung der Integrationslinien vornehmen, wenn man noch zeigt, daß in den im Streifen möglicherweise vorhandenen, aber wegen (27) nur endlich vielen Nullstellen von $v_I(z)$ das Residuum von $f_3(\zeta)$ Null sein muß. Nun ist aber gemäß Elementarsätzen über lineare Differentialgleichungen $w_\gamma(z)$ eine im ganzen Streifen reguläre analytische Funktion.

Wäre an einer Nullstelle von $v_I(z)$ das Residuum von $f_3(\zeta)$ von Null verschieden, so wäre diese Stelle für $w_\gamma(z)$ singulär. Die Verschiebung der Integrationslinie läßt sich also vornehmen. Es folgt

$$w_\gamma(z,t) = w_{-\gamma}(z,t)\,(= w(z,t)).$$

Um daraus auf die Gleichung

$$U_\gamma(x,t) = U_{-\gamma}(x,t) \tag{36}$$

schließen zu können, müssen wir uns noch überlegen, daß in der Abschätzung (33a) die Konstante unabhängig von γ wählbar ist. Nun ist zwar in der Abschätzung (33) die Konstante wegen der möglichen Nullstellen der Funktion $v_I(z)$ abhängig von γ, doch läßt sich, wofern die Abschätzung nur für große $|z|$ gelten soll, die Konstante unabhängig von γ bestimmen, wie wir ja auch aus (35) wissen. Für große negative $\Im(z)$ gilt daher die Abschätzung (33a) mit von γ *unabhängigem* C. Gehen wir von der ja auch möglichen Darstellung

$$w_\gamma(z,t) = v_{II}(z)\int_{\gamma+i\infty}^{z} v_{II}^{-2}(\zeta)\,e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\int_{\gamma-i\infty}^{\zeta} v_{II}(\lambda)\,e^{\int_0^{\lambda}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma}\,e^{-\lambda t}(\lambda+s)^{-2}l_2^{-1}(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta$$

aus, so ist in der Abschätzung (33a) für große positive $\Im(z)$ die Unabhängigkeit der Konstanten bezüglich γ gesichert. Wir können also schließen

$$U_\gamma(x,t) = U_{-\gamma}(x,t) = U(x,t).$$

Daher ist

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, U(x,t)\, dt + \int_{x}^{\infty} \Delta_{2,t}(g)\, U(x,t)\, dt.$$

Aus (34) und (36) folgt aber

$$|U(x,t)| < C \cdot e^{-\gamma|x-t|}.$$

Aus

$$\Delta_{2,t}(g(t)) = O(|t|^{\alpha})$$

folgt dann gemäß dem Hilfssatz auf S. 49

$$W(x) = O(|x|^{\alpha}),$$

also auch wegen (30)

$$W'(x) = O(|x|^{\alpha}).$$

Aus

$$L_2(W) = \frac{2\pi i g(x) - L_0(W) - x L_1(W)}{x^2}$$

können wir ähnlich wie früher nach dem Satz T_I von E. Schmidt (s. Einleitung) schließen

$$W(x) = O(|x|^{\alpha-2}), \qquad W'(x) = O(|x|^{\alpha-2}).$$

Es trete nunmehr der Ausnahmefall ein. Wir wissen, daß dann die Differentialgleichung

$$\Delta_z(v(z)) = 0$$

eine im Streifen eindeutige reguläre Lösung $v_1(z)$ hat, für welche die Gleichungen (28) gelten, die also beiderseits im Unendlichen stark verschwindet. Unser Satz über inhomogene Differentialgleichungen läßt jetzt nur folgende Aussage zu:

Es gibt auf der imaginären Achse $z = iu$ eine Lösung $\overset{1}{w}(z,t)$ der inhomogenen Differentialgleichung

$$\Delta_z(w) = e^{-zt}(z+s)^{-2},$$

für welche

$$\lim_{u=+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{w}(z))}{\overset{1}{w}(z)} = -t.$$

Ebenso gibt es eine Lösung $\overset{2}{w}(z,t)$, für welche

$$\lim_{u=-\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{2}{w}(z))}{\overset{2}{w}(z)} = -t.$$

Es ist gemäß Abschätzung (20)

$$(37)\qquad \begin{cases} \overset{1}{w}(z) = \dfrac{e^{-zt}(z-s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 - a_0 - \delta_1(z,t)}, \\ \overset{2}{w}(z) = \dfrac{e^{-zt}(z-s)^{-2} l_2^{-1}(z)}{t^2 + a_0 + \delta_2(z,t)}, \end{cases}$$

$$\lim_{u=+\infty} \delta_1(z,t) = 0, \qquad \lim_{u=-\infty} \delta_2(z,t) = 0.$$

Jedoch sind diese Lösungen nicht eindeutig bestimmt. Vielmehr haben alle Lösungen

$$\overset{1}{w}(z) + c v_I(z), \qquad \overset{2}{w}(z) + c v_I(z)$$

dieselbe Eigenschaft. Wir beheben diese Vieldeutigkeit, indem wir die Lösungen explizit aufschreiben

$$\overset{1}{w}(z,t) = v_I(z) \int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} e^{-\lambda t} (\lambda + s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta.$$

Die Integrationen erstrecken sich geradlinig. Doch soll über $d\zeta$ nicht durch die Nullstellen hindurch, sondern an ihnen vorbei integriert werden. Da das Residuum an diesen Stellen Null ist, braucht Näheres darüber nicht gesagt zu werden. Ist $v_I(0) = 0$, so soll in dem äußeren Integral die untere Grenze etwa $i\alpha$ sein, wobei $v_I(i\alpha) \neq 0$ ist. Diese Änderung ist völlig belanglos. Der Leser möge das selbst für die kommenden Schritte nachprüfen. Nach Bemerkung 4 hat das innere Integral

$$f_1(\zeta) = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda$$

auf der imaginären Achse $\zeta + i\zeta''$ für $\zeta'' = +\infty$ die charakteristische Zahl $i\sqrt{a_0} - t$. Die unter dem äußeren Integralzeichen stehende Funktion

$$f_2(\zeta) = e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2} f_1(\zeta)(\zeta)$$

hat also für $\zeta'' = +\infty$ die charakteristische Zahl $-i\sqrt{a_0} - t$.

Da $v_I(z)$ nur endlich viele Nullstellen im Streifen hat, so läßt sich das äußere Integral von einem gewissen ζ'' geradlinig auffassen. Der Beweis von Bemerkung 4 lehrt uns, daß dann das Integral

$$\int_0^z f_2(\zeta)\, d\zeta$$

zur selben Zahl gehört. Die Funktion $\overset{1}{w}(z)$ gehört also auf der imaginären Achse $z = iu$ für $u = +\infty$ zur Zahl $-t$:

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{\frac{d}{dz}(\overset{1}{w}(z))}{\overset{1}{w}(z)} = -t.$$

Es zeigt sich entsprechend, daß

$$\overset{2}{w}(z,t) = v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\sigma \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{-i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} (\lambda+s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

für $u = -\infty$ zur Zahl $-t$ gehört. Es gelten also auch wieder die Abschätzungen (37). Die Integrale

$$\overset{1}{U}(x,t) = \int_0^{i\infty} e^{zx}\overset{1}{w}(z,t)\,dz \quad \text{und} \quad \overset{2}{U}(x,t) = \int_{-i\infty}^{0} e^{zx}\overset{2}{w}(z,t)\,dz$$

konvergieren also absolut und in x gleichmäßig und können einmal unter dem Integralzeichen differenziert werden. Daher hat $A(\overset{1}{U}(x) + \overset{2}{U}(x))$ einen Sinn und es ist nach (21)

$$\begin{aligned} A(\overset{1}{U}(x) + \overset{2}{U}(x)) &= \{x e^{zx} l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} + \{e^{zx} l_1(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} \\ &\quad - \left\{e^{zx}\frac{d}{dz}(l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z)))\right\}_{z=0} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)}(z+s)^{-2}\,dz. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z) &= v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\sigma \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta \cdot \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda \\ &= v_I(z)\int_0^z e^{-\int_0^\sigma \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta \cdot \psi(t) = \psi(t)\cdot v_{II}(z). \end{aligned}$$

$v_{II}(z)$ ist dabei eine Lösung der homogenen Gleichung $A_z(v) = 0$.

Es ist also schließlich für

$$U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t)$$

$$\begin{aligned} (38)\quad A(U(x)) &= x l_2(0) v_{II}(0)\psi(t) - \psi(t) l_2'(0) v_{II}(0) - \psi(t) l_2(0) v_{II}'(0) \\ &\quad + l_1(0) v_{II}(0)\psi(t) + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}(z+s)^{-2}\,dz \\ &= A_{II}\, x\,\psi(t) + B_{II}\psi(t) + \varepsilon\, 2\pi i e^{-s(x-t)}(x-t) \\ &\quad (\varepsilon = 0 \text{ für } x - t \geqq 0, \quad \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \leqq 0). \end{aligned}$$

Wir definieren weiter

$$T(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx}\, v_I(z)\, dz.$$

Nach (21) ist

$$\Lambda(T(x)) = 0.$$

Es sei ferner

$$\psi_{1,\gamma}(t) = \int_{\gamma}^{0} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta \qquad (\gamma_0 > \gamma > 0),$$

(38a) $$R_\gamma(x,t) = U(x,t) - \psi_{1,\gamma}(t) \cdot T(x).$$

Wir wollen zunächst als schon bewiesen annehmen, daß alle im folgenden auftretenden Integrale über dt absolut und in x gleichmäßig konvergent sind und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann. Wir definieren

$$W(x) = \int_{-\infty}^{0} \Delta_{2,t}(g(t))\, R_{-\gamma}(x,t)\, dt + \int_{0}^{\infty} \Delta_{2,t}(g)\, R_\gamma(x,t)\, dt.$$

Da offenbar

$$\Lambda(R(x)) = \Lambda(U(x))$$

ist, so ergibt sich

$$\Lambda(W(x)) = A_{II} x \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt + B_{II} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt + 2\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt,$$

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i c_g A_{II} x - 2\pi i c_g B_{II} = 2\pi i \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)\, dt.$$

Dabei ist

$$2\pi i c_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{2,t}(g)\, \psi(t)\, dt.$$

Ganz ähnlich wie früher folgt daraus gemäß Satz I

$$\Lambda\left(\frac{1}{2\pi i} W\right) = g(x) + c_g (A_{II} x + B_{II}).$$

Die inhomogene Gleichung ist also bis auf einen linearen Ausdruck gelöst. Dieser kann nur dann verschwinden, wenn c_g Null wird. $l_2(0)$ ist nämlich von Null verschieden, weil rein imaginäre Wurzeln ausgeschlossen sind. Aus

$$A_{II} = 0$$

folgt also

$$v_{II}(0) = 0$$

und daraus

$$B_{II} = -\, l_2(0) v_{II}'(0).$$

Nach dem Eindeutigkeitstheorem über lineare Differentialgleichungen kann aber $v'_{II}(z)$ nicht zugleich mit $v_{II}(z)$ verschwinden. Also ist

$$B_{II} \neq 0.$$

Die Lösung der inhomogenen Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$A(y) = A_{II}x + B_{II}$$

eine eigentliche Lösung hat. Definieren wir

$$\chi(x) = \int_0^{i\infty} e^{zx} v_I(z)\, dz.$$

Es ist nach (21)

$$\begin{aligned} A(\chi(x)) &= -x l_2(0) v_I(0) + l'_2(0) v_I(0) + l_2(0) v'_I(0) - l_1(0) v_I(0) \\ &= A_I(x) + B_I. \end{aligned}$$

Die Funktion $\chi(x)$, für die $|\chi(x)| < \int_0^{i\infty} |v_I(z)|\, dz$, ist eine eigentliche Lösung dieser Gleichung. Jedoch ist niemals

$$A_I : B_I = A_{II} : B_{II}.$$

Es ist nämlich immer der absolute Betrag der Determinante

$$\begin{vmatrix} A_I & A_{II} \\ B_I & B_{II} \end{vmatrix}$$

gleich $l_2^2(0)$, also verschieden von Null. Ist nämlich

$$v_I(0) \neq 0,$$

so folgt

$$v_{II}(0) = 0, \qquad v'_{II}(0) = v_I^{-1}(0).$$

Für

$$v_I(0) = 0$$

folgt aus der Reihenentwickelung

$$v'_I(0) = -v_{II}^{-1}(0).$$

Daraus ergibt sich die Behauptung.

Wir werden später zeigen, daß

$$A_I x + B_I,$$

vom Proportionalitätsfaktor abgesehen, der einzige lineare Ausdruck ist, der eine eigentliche Lösung zuläßt. Dann folgt also: die Gleichung

$$A(y) = g(x)$$

ist nur dann lösbar, wenn

$$c_g = 0$$

ist. Sonst läßt nur

$$A(y) = g(x) + (c_g A_{II} + \lambda A_I)x + (c_g B_{II} + \lambda B_I)$$

eine eigentliche Lösung zu, wobei λ ein willkürlicher Parameter ist.

Wir haben noch die vorgenommenen Operationen zu rechtfertigen. Zunächst ist

$$\psi(t) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} v_I(\lambda) e^{\int_0^{\lambda} \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} (\lambda + s)^{-2} l_2^{-1}(\lambda) d\lambda = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

$$= \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda$$

für jede Vertikale im Streifen. Wegen (27) (28) sind die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie erfüllt. Gibt man γ immer das Vorzeichen von t, so folgt

$$|\psi(t)| < e^{-|\gamma t|} \cdot \text{konst.}, \tag{39}$$

wobei die Konstante von γ unabhängig ist.

Wir müssen noch das Verhalten von $U(x, t)$ für große t kennen. Wir definieren:

$$\overset{1}{w}_\gamma(z, t) = v_I(z) \int_\gamma^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma + i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta.$$

Durchläuft z die Vertikale $\gamma + iu$, so gehört dieses Integral der inhomogenen Gleichung für $u = +\infty$ zur Zahl $-t$ und es gilt bei dieser Annäherung die (37) entsprechende Abschätzung. Das Integral

$$\overset{1}{U}_\gamma(x, t) = \int_\gamma^{\gamma + i\infty} e^{zx}\, \overset{1}{w}_\gamma(z, t)\, dz$$

hat also einen Sinn. Nun ist bei Verschiebung der Integrationslinie

$$\overset{1}{w}_\gamma(z, t) = v_I(z) \int_\gamma^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{+i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$= v_I(z) \int_0^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2' - l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$+ v_I(z) \int_\gamma^0 e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$= \overset{1}{w}(z, t) + v_I(z) \cdot \psi_1(t).$$

Also ist

$$(40) \quad \overset{1}{V}_\gamma(x, t) = \int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} \overset{1}{w}(z, t)\, dz = \overset{1}{U}_\gamma(x, t) + \psi_1(t) \int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\, dz$$

Wird $\overset{2}{w}_\gamma(z, t)$ entsprechend definiert, so ist

$$\overset{2}{w}_\gamma(z, t) = \overset{2}{w}_\gamma(z, t) + v_I(z)\, \psi_2(t)$$

$$\psi_2(t) = \int_\gamma^0 e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_1} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{-i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta.$$

Also ist

$$(41) \quad \overset{2}{V}_\gamma(x, t) = \int_{\gamma-i\infty}^\gamma e^{zx} \overset{2}{w}(z, t)\, dz = \overset{2}{U}_\gamma(x, t) - \psi_2(t) \int_{\gamma-i\infty}^\gamma e^{zx} v_I(z)\, dz.$$

Es sei ferner

$$V_\gamma(x, t) = \int_\gamma^0 e^{zx} (\overset{2}{w}(z, t) - \overset{1}{w}(z, t))\, dz = \psi(t) \int_\gamma^0 e^{zx} v_{II}(z)\, dz.$$

Alsdann ist nach dem Cauchyschen Integralsatz

$$(42) \quad U(x, t) = \overset{1}{U}(x, t) + \overset{2}{U}(x, t) = \overset{1}{V}_\gamma(x, t) + \overset{2}{V}_\gamma(x, t) + V_\gamma(x, t),$$

falls die Bedingungen für die Verschiebung der Integrationslinie erfüllt sind. Um das zu beweisen, müssen wir $\overset{1}{w}(z, t)$ für große positive $\Im(z)$ des Streifens abschätzen und ebenso $\overset{2}{w}(z, t)$ für große negative $\Im(z)$. Wir werden das gleich für die Funktionen $\overset{1}{w}_\gamma$ und $\overset{2}{w}_\gamma$ tun. Wir wissen, daß $v_I(z)$ nur endlich viele Nullstellen hat. Sie mögen also etwa unterhalb des Querbalkens $\Im(z) = u_0$ liegen. Es ist

$$(43) \quad \overset{1}{w}_\gamma(z, t) = v_I(z) \int_\gamma^{\gamma+iu_0} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

$$+ v_I(z) \int_{\gamma+iu_0}^z e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^\zeta e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta = d_\gamma v_I(z) + \overset{1}{\bar{w}}(z, t),$$

γ und z mögen im folgenden innerhalb eines schmalen Teilstreifens bleiben, in dem höchstens rein imaginäre Nullstellen von $v_I(z)$ liegen.

Die Größe

$$d_\gamma = \int_\gamma^{\gamma+iu_0} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2}d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

bleibt dann bei festem t für alle reellen γ in dem schmalen Teilstreifen ihrem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grenze, falls $v_I(0) \neq 0$. Ist $v_I(0) = 0$, so ist c_γ auch beschränkt, wenn man als untere Grenze des Integrals über $d\zeta$ $\gamma + i\alpha$ wählt, wobei $v_I(i\alpha) \neq 0$ ist. Es handelt sich also nur darum, den zweiten Summanden in (43) abzuschätzen. Es gelten für $v_I(z)$ die Abschätzungen

$$|v_I(z)| < e^{-|u|\sqrt{\alpha_0}} |z+s|^{-1} \cdot \text{konst.}$$

und für genügend große z im Streifen

$$|v_I^{-1}(z)| < e^{|u|\sqrt{\alpha_0}} |z+s| \cdot \text{konst.}$$

Die erste Abschätzung gilt für alle $z = z' + iu$ des Streifens. Die Konstante ist in beiden Abschätzungen unabhängig von z'. Daher ist

$$|\overset{1}{w}_\gamma(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} e^{-u\sqrt{\alpha_0}} |z+s|^{-1} \int_{u_0}^{u} e^{2\zeta''\sqrt{\alpha_0}} \int_\infty^{\zeta''} e^{\lambda''\sqrt{\alpha_0}} (\lambda''^2 + 4s^2)^{-1} d\lambda''\, d\zeta'';$$

es ist ferner

$$\int_\infty^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{\alpha_0}} (\lambda''^2 + 4s^2)^{-1} d\lambda'' < (\zeta''^2 + 4s^2)^{-1} \int_\infty^{\zeta''} e^{-\lambda''\sqrt{\alpha_0}} d\lambda'',$$

$$\int_{u_0}^{u} e^{\zeta''\sqrt{\alpha_0}} (\zeta''^2 + 4s^2)^{-1} d\zeta'' < e^{\frac{u}{2}} (u^2 + 4s^2)^{-1} \int_{u_0}^{u} e^{\frac{\zeta''}{2}\sqrt{\alpha_0}} d\zeta'',$$

also

$$|\overset{1}{w}_\gamma(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} |z+s|^{-1} (u^2 + 4s^2)^{-1}$$

$$+ \text{konst.}\, e^{-\gamma t} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{\alpha_0}} |z+s|^{-1} (u^2 + 4s^2)^{-1}$$

(konst. ist dabei unabhängig von γ).

Damit ist die Verschiebung der Integrationslinie in (42) gerechtfertigt. Lasse ich in der voranstehenden Abschätzung die untere Grenze 0 statt u_0, so ergibt sich ganz ebenso für $\nu \neq 0$

$$|\overset{1}{w}_\nu(z,t)| < C_\gamma e^{-\gamma t} |z+s|^{-1} (u^2+s^2)^{-1} + C_\gamma' e^{-\gamma t} e^{-\frac{u}{2}\sqrt{\alpha_0}} (u^2+s^2)^{-1} |z+s|^{-1}.$$

Also ist

$$|\overset{1}{U}_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)}. \tag{44}$$

Entsprechendes gilt, wenn der Index 1 durch 2 ersetzt wird. Nach (40), (41), (42) ist nun

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \psi_1(t)\int_\gamma^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz \\ &\quad + \psi_2(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz + \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz \\ &= \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t) + \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz \\ &\quad + \psi_1(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dx + (\psi_2(t)-\psi_1(t))\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz. \end{aligned}$$

Also

$$R_\gamma(x,t) = U(x,t) - \psi_1(t)\cdot T(x) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) + \overset{2}{U}_\gamma(x,t)$$

$$+ \psi(t)\int_\gamma^{0} e^{zx} v_{II}(z)\,dz + \psi(t)\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} e^{zx} v_I(z)\,dz \int_\gamma^{0} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\,d\zeta.$$

Mit Rücksicht auf (44), (39) folgt daher

$$\begin{aligned} |R_\gamma(x,t)| &< C_\gamma e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}(e^{\gamma x}+1) \\ &\quad + \text{konst. } e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Funktion $W(x)$ einen Sinn hat und die auf sie ausgeübten Operationen erlaubt sind. Wir behaupten ferner, $W(x)$ ist eine eigentliche Lösung. Da nämlich offenbar immer

$$e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|} < e^{\gamma(x-t)}$$

ist, so folgt

$$|R_\gamma(x,t)| < C_\gamma e^{\gamma(x-t)} + \text{konst. } e^{-|\gamma t|}. \tag{45}$$

Ferner ist nach (38a)

$$R_\gamma(x,t) - R_{-\gamma}(x,t) = T(x)\int_\gamma^{-\gamma} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta.$$

Es ist aber

$$e^{-|\gamma t|}\left|\int_\gamma^{-\gamma} e^{-\int_0^{\zeta}\frac{2l_2'-l_1}{l_2}\,d\sigma} v_I^{-2}(\zeta)\int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\,d\lambda\,d\zeta\right| < \text{konst.},$$

daher

$$|R_\gamma(x,t) - R_{-\gamma}(x,t)| < |T(x)|\, e^{|\gamma t|}\,\text{konst.}$$

Es ist aber

$$T(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v_I(z) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz,$$

woraus

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{\gamma x}$$

folgt. Da man γ das x entgegengesetzte Vorzeichen geben kann, so folgt

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma x|}$$

ja sogar

$$|T(x)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma_0 x|}. \quad (\gamma_0 \text{ Randpunkt des Streifens.}) \tag{46}$$

Setzen wir

$$\overline{W}(x) = \int_{-\infty}^{x} \Delta_{2,t}(g)\, R_{-\gamma}(x,t)\, dt + \int_{x}^{\infty} \Delta_{2,t}(g)\, R_{\gamma}(x,t)\, dt,$$

so folgt aus (45) unter Benutzung des Hilfssatzes von E. Schmidt (Seite 49)

$$\overline{W}(x) = O(|x|^{a}) + O(1).$$

Es ist

$$W(x) = \overline{W}(x) + \int_{0}^{x} (R_{\gamma}(x,t) - R_{-\gamma}(x,t))\, dt$$

und

$$\left|\int_{0}^{x} (R_{\gamma} - R_{-\gamma})\, dt\right| < T(x) \int_{0}^{|x|} e^{|\gamma t|}\, dt \cdot \text{konst.}$$
$$< \text{konst.}\, e^{-\gamma_0 |x|} \cdot e^{\gamma |x|} \cdot |x| < \text{konst.}$$

Also ist $W(x)$ eine eigentliche Lösung.

$$W(x) = O(|x|^{b}), \quad W'(x) = O(|x|^{b}) \quad b = a \text{ oder } b = 0.$$

In bekannter Weise läßt sich dann nach dem in der Einleitung erwähnten T_I von E. Schmidt schließen

$$W(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}), \quad W'(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}),$$

wobei

$$\bar{g}(x) = g(x) + c_g(A_{II}x + B_{II})$$

gesetzt ist und $\bar{a}$ durch

$$\bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{a}})$$

definiert ist.

Nunmehr behandeln wir den Fall, daß a_0 negativ, also die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2 + a_0 = 0$$

reell sind. Wir können dann über die Differentialgleichung

$$A_z(v) = 0$$

nur folgendes aussagen:

Es gibt ein Integral $v_I(z)$ dieser Differentialgleichung, das in G' die Darstellung zuläßt

$$v_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z}\, \bar{v}_1(z) = z^{-1} e^{\sqrt{-a_0}\, z} \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(z), \tag{47}$$

das also in G' der Ungleichung

$$|v_1(z)| < \text{konst.} |z+s|^{-1} \tag{48}$$

genügt.

$v_I(z)$ sei nun jenes im Streifen reguläre und eindeutige Integral, das sich aus $v_1(z)$ durch analytische Fortsetzung von $+i\infty$ her ergibt. $v_{II}(z)$ sei das entsprechende Integral, das sich bei analytischer Fortsetzung von $v_1(z)$ innerhalb des Streifens von $-i\infty$ her ergibt. Offenbar genügt $v_I(z)$ für positive $J(z)$ des Streifens der Abschätzung (48), $v_{II}(z)$ für negative $J(z)$.

Wir definieren

$$\overset{1}{w}(z,t) = v_I(z) \int_{i\infty}^{z} e^{-\int_0^\zeta \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) \int_{i\infty}^{\zeta} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} e^{-\lambda t} (\lambda+s)^{-4} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta,$$

$$\overset{2}{w}(z,t) = v_{II}(z) \int_{-i\infty}^{z} e^{-\int_0^z \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} v_{II}^{-2}(\zeta) \int_{-i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} v_{II}(\lambda)\, e^{\int_0^\lambda \frac{2l_2'-l_1}{l_2} d\sigma} (\lambda+s)^{-4} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda\, d\zeta$$

Auf der imaginären Achse $z = iu$, $\zeta = i\zeta''$, $\lambda = i\lambda''$ ergibt sich für große positive u

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.} |z+s|^{-1} \int_\infty^u \int_\infty^{\zeta''} (\lambda''^2 + s^2)^{-2}\, d\lambda''\, d\zeta'',$$

da nämlich für große positive u wegen (47) $v_I(z) \neq 0$ und daher

$$|v_I^{-1}(z)| < \text{konst.} |z+s| \tag{49}$$

ist. Es folgt

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.} |z+s|^{-1} \int_\infty^u (\zeta''^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}\, d\zeta'' < \text{konst.}\ |z+s|^{-3}.$$

Entsprechend ist für große negative u

$$|\overset{2}{w}(z,t)| < \text{konst.} |z+s|^{-3}.$$

Daher haben die Integrale

$$\overset{1}{U}(x,t) = \int_0^{i\infty} e^{zx}\, \overset{1}{w}(z,t)\, dz, \qquad \overset{2}{U}(x,t) = \int_{-i\infty}^{0} e^{zx}\, \overset{2}{w}(z,t)\, dz$$

einen Sinn, konvergieren absolut und in x gleichmäßig und können unter dem Integralzeichen nach x einmal differenziert werden. Ist

$$U(x,t) = \overset{1}{U}(x,t) + \overset{2}{U}(x,t),$$

so wird nach (21)

$$(50)\quad \Lambda(U(x)) = \{xe^{zx} l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0} + \{e^{zx} l_1(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z))\}_{z=0}$$
$$- \left\{ e^{zx} \frac{d}{dz} \left(l_2(z)(\overset{2}{w}(z) - \overset{1}{w}(z)) \right) \right\}_{z=0} + \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{z(x-t)} (z+s)^{-4} dz$$
$$= C(t)x + D(t) + \varepsilon 2\pi i e^{-s(x-t)} \frac{(x-t)}{3!} \begin{pmatrix} \varepsilon = 0 \text{ für } x - t \geqq 0 \\ \varepsilon = 1 \text{ für } x - t \leqq 0 \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir als schon bewiesen an, daß alle im folgenden vorkommenden Integrale über dt konvergieren und unter dem Integralzeichen nach x differenziert werden kann, so wird

$$W(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{4,t}(g(t))\, U(x,t)\, dt$$

abgesehen von einem linearen Ausdruck eine Lösung der inhomogenen Gleichung. In der Tat ist

$$\Lambda(W(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta_{4,t}(g(t)\, \Lambda(U(x,t))\, dt = x \int_{-\infty}^{+\infty} C(t)\, \Delta_{4,t}(g(t)\, dt$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} D(t) \cdot \Delta_{4,t}(g(t)\, dt + \frac{2\pi i}{3!} \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)} (x-t)^3\, \Delta_{4;t}(g(t))\, dt,$$

oder

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i C_0 \cdot x - D_0 \cdot 2\pi i = \frac{2\pi i}{3!} \int_{-\infty}^{x} e^{-s(x-t)} \cdot (x-t)^3 \Delta_{4,t}(g(t))\, dt.$$

Daraus läßt sich ganz wie früher gemäß unserem Satze I S. 46 schließen

$$\Lambda(W(x)) - 2\pi i C_0 x - 2\pi i D_0 = 2\pi i\, g(x)$$
$$\Lambda\left(\frac{1}{2\pi i} W\right) = C_0 x + D_0 + g(x) = \bar{g}(x) = O(|x|^{\bar{\alpha}}).$$

Die Frage der Lösung der inhomogenen Gleichung ist also zurückgeführt auf die Frage, ob die Gleichung

$$\Lambda(y) = ax + b$$

eine Lösung hat. Wir werden später zeigen, daß diese Gleichung niemals eine eigentliche Lösung hat. Sind also nicht zufällig C_0 und D_0 beide gleich Null, so ist die inhomogene Gleichung nur bis auf einen linearen Ausdruck lösbar.

Wir haben noch zu zeigen, daß $W(x)$ und die auf sie ausgeübten Operationen einen Sinn haben und daß $W(x)$ eine eigentliche Lösung ist.

Die Funktion $v_I(z)$ hat wegen (47) nur endlich viele Nullstellen im

Streifen oberhalb der reellen Achse. Also gilt für genügend große $|z|$ des Streifens

$$|v_I^{-1}(z)| = |v_I^{-1}(z' + iz'')| < \text{konst.}\,|z+s|;$$

z'' ist dabei positiv, die Konstante von z' unabhängig.

Also läßt sich nicht nur in dem Integral

$$f_1(\zeta) = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} v_I(\lambda)\, e^{\int_0^{\lambda} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} (\lambda+s)^{-4} l_2^{-1}(\lambda)\, d\lambda = \int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda$$

die Integrationslinie auf eine andere Vertikale verschieben, sondern auch in dem Integral

$$\int_{i\infty}^{\zeta} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} v_I^{-2}(\zeta) f_1(\zeta)\, d\zeta.$$

Daher ist auch

$$\overset{1}{w}(z,t) = v_I(z) \int_{\gamma+i\infty}^{\zeta} e^{-\int_0^{\zeta} \frac{2l_2' - l_1}{l_2}\, d\sigma} v_I^{-1}(\zeta) \int_{\gamma+i\infty}^{\lambda} e^{-\lambda t} f(\lambda)\, d\lambda.$$

Wie vorhin ergibt sich daraus auf der Vertikalen $z = \gamma + iu$ bei positivem u die Abschätzung

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-\gamma t} |z+s|^{-3}.$$

Die Konstante ist dabei unabhängig von γ wählbar. Da man γ immer das Vorzeichen von t geben kann, so folgt

$$|\overset{1}{w}(z,t)| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma t|} |z+s|^{-3}.$$

Da die Konstante von γ unabhängig ist, so läßt sich in $\overset{1}{U}(x,t)$ die Integrationsgrenze verschieben:

$$\overset{1}{U}(x,t) = \overset{1}{U}_\gamma(x,t) - \int_\gamma^0 e^{zx}\, \overset{1}{w}(z,t)\, dz, \qquad \overset{1}{U}_\gamma(x,t) = \int_{\gamma+i0}^{\gamma+i\infty} e^{zx}\, \overset{1}{w}(z,t)\, dz,$$

d. h.

$$|\overset{1}{U}_\gamma(x,t)| < \text{konst.}\, e^{\gamma x} \cdot e^{-|\gamma t|},$$

$$\left|\int_\gamma^0 e^{zx}\, \overset{1}{w}(z,t)\, dz\right| < \text{konst.}\, e^{-|\gamma t|}(e^{\gamma x} + 1).$$

Da Entsprechendes für den Zeiger 2 gilt, so ist bewiesen, daß die Funktion $W(x)$ einen Sinn hat und die ausgeführten Operationen erlaubt sind. Da ferner wegen

$$e^{\gamma x} e^{-|\gamma t|} < e^{\gamma(x-t)}$$

folgt, daß

$$|U(x,t)| < \text{konst.}\,(e^{\gamma(x-t)} + e^{-|\gamma t|})$$

ist, so gilt auch, indem man γ das $(x-t)$ entgegengesetzte Zeichen gibt

$$|U(x,t)| < \text{konst.}\,(e^{-|\gamma|\,|x-t|} + e^{-|\gamma t|}).$$

Daraus folgt wieder unter Benützung des Hilfssatzes von E. Schmidt (S. 49)

$$W(x) = O(|x|^{\bar{a}}) + O(1); \quad \text{ebenso für } W'(x).$$

In bekannter Weise folgt daraus nach Satz T_I von E. Schmidt (s. Einleitung)

$$W(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}); \qquad W'(x) = O(|x|^{\bar{a}-2}).$$

§ 4.

Eindeutigkeit der Lösungen.

Wir fragen uns, ob es noch andere eigentliche Lösungen der inhomogenen Gleichung gibt. Anders gesprochen: Gibt es eigentliche Lösungen der homogenen Gleichung

$$A(y) = 0?$$

Es sei zunächst $a_0 > 0$. Aus der Stetigkeit von $y(x)$ folgt dann auch die Stetigkeit von $y'(x)$ für alle x. Ist dann $y(x)$ eine solche eigentliche Lösung, so läßt sich ganz wie früher aus

$$L_2(y) = \frac{-L_0(y) - xL_1(y)}{x^2}$$

schließen

$$y = O(|x|^{-\infty}); \qquad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Setzen wir

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\,dx,$$

so hat für rein imaginäre α dieses Integral einen Sinn und läßt sich beliebig oft unter dem Integralzeichen nach α differenzieren. Aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} A(y)\,dx = 0$$

folgt ganz wie früher

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0.$$

Tritt der Ausnahmefall nicht ein, so gibt es kein Integral $v(\alpha)$ von

$$A_\alpha(v(\alpha)) = 0,$$

das beiderseits im Unendlichen auf der imaginären Achse beschränkt bleibt. Andererseits ist

$$|\varphi(\alpha)| < \int_{-\infty}^{+\infty} |y(x)|\,dx.$$

also ist

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

woraus nach dem 2. Hilfssatz (Seite 54)

$$y(x) \equiv 0$$

folgt. Tritt dagegen der Ausnahmefall ein, so verschwindet das Integral $v_I(z)$ beiderseits im Unendlichen sehr stark. Vom willkürlichen Faktor abgesehen ist es das einzige Integral dieser Art. Aus

$$\varphi(\alpha) = v_I(\alpha)$$

folgt aber, da $y(x)$ die Fouriersche Integraldarstellung zuläßt,

$$y(x) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v_I(z)\,dz = T(x) = O(e^{-|\gamma_0 x|})$$

nach (46). Die homogene Gleichung läßt also im Ausnahmefalle eine eigentliche Lösung zu. Sie ist bis auf den willkürlichen Faktor eindeutig bestimmt.

Sei nun $a_0 < 0$. Aus der Stetigkeit von $y(x)$ für alle x folgt jetzt nicht ohne weiteres die Stetigkeit von $y'(x)$ für alle x. Vielmehr sind die Stellen $x = \pm\sqrt{-a_0}$ fraglich. Doch läßt sich auch hierfür die Stetigkeit von $y'(x)$ erschließen. Wir zeigen das für die Stelle $x = +\sqrt{-a_0}$. Zunächst muß sein

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} (x - \sqrt{-a_0})\,y'(x) = 0,$$

da sonst $y(x)$ für $x = \sqrt{-a_0}$ wie $\log(x - \sqrt{-a_0})$ unendlich groß werden würde. Der Limes muß nämlich existieren, weil

$$(x - \sqrt{-a_0})\,y'(x) + \psi(x)\,y(x+1) = 0$$

ist, wobei $\psi(x)$ für $x = \sqrt{-a_0}$ und für eine Umgebung dieses Punktes stetig ist. Es ist also

$$\psi(\sqrt{-a_0})\,y(\sqrt{-a_0}+1) = 0$$

und daher

$$y'(x) = -\frac{\psi(x)\,y(x+1) - \psi(\sqrt{-a_0})\,y(\sqrt{-a_0}+1)}{x - \sqrt{-a_0}},$$

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} y'(x) = (\psi(x)\,y(x+1))'_{x=\sqrt{-a_0}}.$$

Die Ableitung rechts existiert aber, also existiert der Grenzwert der

linken Seite. $y'(x)$ ist also auch für alle x stetig. Daher kann man auch jetzt wieder aus

$$L_2(y) = \frac{-xL_1(y) - L_0(y)}{x^2}$$

und

$$y = O(|x|^b) \qquad (b \text{ irgendeine Zahl})$$

schließen

$$y = O(|x|^{-\infty}) \quad \text{und} \quad y' = O(|x|^{-\infty}).$$

Das Integral

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx$$

hat also bei rein imaginärem α einen Sinn. Wie vorher läßt sich aus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} A(y)\, dx = 0$$

schließen, daß

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0$$

ist. Wir kennen aber im Falle $a_0 < 0$ nicht das Verhalten des allgemeinen Integrals auf der imaginären Achse. Der folgende Satz ist ausreichend für unsere Schlüsse:

Sei

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1}(t) \dots \varphi_{1,n}(t) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varphi_{n,1}(t) \dots \varphi_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

eine Matrix. Sei ferner bei reellem t

$$\lim_{t=+\infty} \varphi_{\nu,\mu}(t) = a_{\nu,\mu}$$

und

$$|t(\varphi_{\nu,\mu}(t) - a_{\nu,\mu})| < C \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \dots, n),$$

wobei C eine Konstante ist. Die Gleichung

$$E\varrho - A = 0,$$

wobei $A = (a_{\nu,\mu})$ und E die Einheitsmatrix bezeichnet, habe nur rein imaginäre und voneinander verschiedene Wurzeln $i\varrho_1, \dots, i\varrho_n$. Die Größen

$$Y = (y_1(t), \dots, y_n(t)); \quad Y'(t) = (y_1'(t), \dots, y_n'(t))$$

sollen ferner als Vektoren im n-dimensionalen Raume aufgefaßt werden.

Zu jeder Lösung Y des Systems simultaner Differentialgleichungen

$$Y' = \Phi(Y)$$

gibt es dann zwei Zahlen σ_1 und σ_2, so daß für genügend große t

$$|Y| < \text{konst.}\, t^{\sigma_1},$$
$$Y| > \text{konst.}\, t^{\sigma_2}.$$

Beweis. Da die Wurzeln von $E_\varrho - A = 0$ voneinander verschieden sind, gibt es eine Matrix B, so daß

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} i\varrho_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i\varrho_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & i\varrho_n \end{pmatrix}$$

ist. Sei

$$U = B^{-1}(Y),$$

also

$$U' = B^{-1}(Y').$$

Es ist

$$U' = B^{-1}\Phi B(U) = \Psi(U),$$

wobei die Matrix Ψ die Gestalt hat

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} i\varrho_1 + \psi_{11}(t), & \psi_{1,2}(t), & \dots & \psi_{1,n}(t) \\ \psi_{2,1}(t), & \ddots & & \\ \vdots & , & i\varrho_\nu + \psi_{\nu,\nu}(t), & \\ \vdots & & \ddots & \\ \psi_{n,1}(t), & \dots\dots\dots, & & i\varrho_n + \psi_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

und

$$|\psi_{\nu,\mu}(t)| < \frac{C}{t}.$$

Daher ist der Realteil des inneren Produktes von U' und $\overline{U}$

$$\Re(U', \overline{U}) < \frac{C}{2t}(|u_1|^2 + \dots + |u_n|^2) = \frac{C}{2t}|U|^2,$$

d. h.

$$\frac{d}{dt}(|U|^2) < \frac{C}{t}|U|^2.$$

Daraus folgt leicht die Behauptung für $|U|$, also auch für $|Y|$.

Wir wenden den Satz an für $n = 2$, benötigen aber nur die Existenz der Zahl σ_2. Im Falle $a_0 < 0$ läßt sich nämlich

$$A_z(v) = 0$$

bei rein imaginärem $z = iu$ als ein simultanes Differentialsystem der obigen Art auffassen, wenn man auf die reelle Veränderliche u transformiert. Also folgt für jedes Integral $v(z)$, daß

$$|V(z)| > C \cdot |z|^{\sigma_2},$$

wobei der Vektor V definiert ist durch

$$V = (v(z), v'(z)).$$

Diese Ungleichung gilt sowohl für positive wie negative u.

Wir behaupten: Auch die höheren Ableitungen der eigentlichen Lösung $y(x)$ müssen an den Stellen $x = \pm\sqrt{-a_0}$ stetig sein. Es ist

$$(x - \sqrt{-a_0})\, y''(x) + y'(x) + \psi(x)\, y'(x+1) + \psi'(x)\, y(x+1) = 0.$$

Es existiert also

$$\lim_{x=\sqrt{-a_0}} (x - \sqrt{-a_0})\, y''(x)$$

und muß Null sein, weil sonst $y'(x)$ an der Stelle $x = \sqrt{-a_0}$ wie $\log(x - \sqrt{-a_0})$ unendlich groß werden würde. Also genügt die Funktion

$$q(x) = y'(x)$$

der Differentialgleichung

$$(x - \sqrt{-a_0})\, q'(x) + q(x) = P(x),$$

wobei $P(x)$ nebst ihren Ableitungen stetig ist für $x = \sqrt{-a_0}$ und eine Umgebung dieses Punktes. Schon beim linearen Fall hatten wir gesehen, daß diese Differentialgleichung nur eine stetige Lösung $q(x)$ hat und daß die Ableitung $q'(x)$ auch für $x = \sqrt{-a_0}$ stetig ist. Daraus folgt aber, daß $y''(x)$ auch stetig ist im Punkte $x = \sqrt{-a_0}$.

Die Funktion $q(x) = y^{(m)}(x)$ genügt einer Differentialgleichung

$$(x - \sqrt{-a_0})\, q'(x) + m\, q(x) = P(x),$$

wo $P(x)$ dieselben Eigenschaften hat wie oben. Es gibt wieder nur eine in $x = \sqrt{-a_0}$ stetige Lösung $q(x)$ und $q'(x)$ ist auch für diesen Wert stetig. Also sind alle Ableitungen von $y(x)$ für alle x stetig. Natürlich ist auch

$$y^{(m)}(x) = O(|x|^{-\infty}).$$

Der Ausdruck

$$\alpha^m \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x}\, y^{(m)}(x)\, dx$$

hat daher einen Sinn. Desgleichen

$$\alpha^m \varphi'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x}\, \frac{d^m}{dx^m}(y(x) \cdot x)\, dx.$$

Es ist also

$$|\alpha^m \varphi(\alpha)| < C_m, \qquad |\alpha^m \varphi'(\alpha)| < C_m.$$

Dann kann aber wegen

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0$$

nur $\varphi(\alpha) \equiv 0$ sein. Sonst ergäbe sich nämlich auf Grund des Hilfssatzes über das simultane Differentialsystem ein Widerspruch, falls nur

$$m > -\sigma_2$$

gewählt wird. Aus

$$\varphi(\alpha) \equiv 0$$

folgt wieder

$$y \equiv 0 .$$

Die homogene Gleichung hat also keine eigentliche Lösung.

Wir wollen anschließend gleich beweisen, daß für $\alpha_0 < 0$ auch die Gleichung

$$\Lambda(y) = c_1 x + c_2$$

keine eigentliche Lösung zuläßt. Andernfalls ließe sich zunächst ganz wie eben bei der homogenen Gleichung die Stetigkeit von $y'(x)$ und der höheren Ableitungen für alle x erschließen. Aus $y = O(|x|^b)$ können wir dann in bekannter Weise schließen

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus

$$\frac{d}{dx}(\Lambda(y)) = c_1$$

oder

$$L_2(y') = \frac{-L_0(y') - x L_1(y') - L_1(y) - 2x L_2(y) - c_1}{x^2}$$

schließt man ganz ebenso

$$y' = O\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Durch fortgesetztes Differenzieren kann man weiter schließen

$$y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad y''' = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$$

und so fort. Wir definieren

$$\alpha^3 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'''(x)\, dx .$$

Die Funktion $\varphi(\alpha)$ ist für rein imaginäre α und $\alpha \neq 0$ bestimmt und besitzt zwei Ableitungen, wie man durch Differenzieren der letzten Gleichung erkennt. Wir behaupten:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0 .$$

Daraus kann man dann ganz wie zuletzt schließen

$$\varphi(\alpha) \equiv 0 ,$$

also

$$y'''(x) \equiv 0 ,$$

woraus wegen $y = O\left(\frac{1}{x}\right)$

$$y \equiv 0$$

folgt, was der Gleichung

$$\Lambda(y) = c_1 x + c_2$$

widerspricht. Wir haben also nur zu zeigen

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0\,.$$

Nun ist

$$0 = \frac{d^4}{dx^4}(\Lambda(y)) = x^2 L_2(y^{\mathrm{IV}}) + 8x L_2(y''') + x L_1(y^{\mathrm{IV}}) + L_1(y''') + L_0(y^{\mathrm{IV}})\,.$$

Aus

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{d^4}{dx^4}(\Lambda(y))\,dx$$

führen die bekannten Umformungen in glatter Rechnung zu der Behauptung:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0 \qquad (\alpha \neq 0)\,.$$

Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, daß für $a_0 > 0$ im Ausnahmefall vom Proportionalitätsfaktor abgesehen nur die lineare Gleichung

$$\Lambda(y) = A_I x + B_I$$

eine eigentliche Lösung besitzt. Hätte

$$\Lambda(y) = cx + d$$

eine eigentliche Lösung, so wäre sie mit allen Ableitungen für sämtliche stetig. Ganz wie vorhin können wir schließen:

$$y = O\left(\frac{1}{x}\right), \qquad y' = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \qquad y'' = O\left(\frac{1}{x^3}\right), \qquad y''' = O\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad \text{usw.}$$

Definieren wir wieder

$$\alpha^3 \varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y'''\,dx\,,$$

so ist $\varphi(\alpha)$ bei rein imaginärem α und $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt. Wir können auf dieselbe Weise schließen:

$$A_\alpha(\varphi(\alpha)) = 0 \qquad (\alpha \neq 0)\,.$$

Da andererseits für große $|\alpha|$ $\varphi(\alpha)$ beschränkt ist, so kann — vom konstanten Faktor weiterhin abgesehen — nur $\varphi(\alpha) \equiv 0$ oder $\varphi(\alpha) = v_I(\alpha)$ sein. Es können nun folgende Fälle eintreten:

1. es ist sowohl für positive wie negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0\,.$$

Dann ist auch

$$y \equiv 0;$$

2. es ist sowohl für positive wie negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_I(\alpha).$$

Dann folgt gemäß der Fourierschen Integraldarstellung

$$y''' = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} z^3 v_I(z)\, dz,$$

also

$$y(x) = T(x);$$

ebenfalls ein hier uninteressanter Fall;

3. es ist etwa für positive $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0,$$

dagegen für negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_I(\alpha).$$

Dann folgt

$$y''' = \int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} z^3 \varphi(z)\, dz = \int_0^{i\infty} e^{zx} z^3 v_I(z)\, dz, \qquad y = \int_0^{i\infty} e^{zx} v_I(z)\, dz,$$

woraus

$$A(y) = A_I \cdot x + B_I$$

folgt.

Der vierte Fall, daß für positive $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) = v_I(\alpha),$$

dagegen für negative $i\alpha$

$$\varphi(\alpha) \equiv 0$$

ist, führt auch auf

$$A(y) = A_I \cdot x + B_I.$$

Unsere Behauptung ist damit bewiesen.

Behalten alle diese Sätze und Entwicklungen Gültigkeit für den allgemeinen Fall

$$A(y) = (x^2 + a_0) y^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x)\, y^{(\nu)}(x + h_{\nu,\varrho}),$$

wo die $p_{\nu,\varrho}(x)$ quadratisch in x sind?

Für $a_0 > 0$ bleiben alle Sätze gültig. Freilich ändert sich in einem Punkte die Entwicklung. Die Darstellung (27) der Integrale von

$$A_2(v) = 0$$

ist im allgemeinen nicht möglich. Doch werden alle aus jener Darstellung abgeleiteten, notwendigen Folgerungen auf anderem Wege erhalten, worüber in der zweiten Mitteilung Näheres gesagt wird.

Für $a_0 < 0$ ist wieder der Fall zu beachten, daß die $h_{n-1,\varrho}$ nicht alle von Null verschieden. Sind zunächst diese Größen alle verschieden von Null, so behalten alle Sätze ihre Gültigkeit. Die Entwicklungen ändern sich nur, soweit die Darstellung (26) in Betracht kommt, die durch gleichwertige Aussagen ersetzt wird. Hat dagegen $\Lambda(y)$ die Gestalt

$$\Lambda(y) = (x^2 + a_0) y^{(n)}(x) + (ax^2 + bx + c) y^{(n-1)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{\varrho=0}^{\varrho_\nu} p_{\nu,\varrho}(x) y^{(\nu)}(x + h_{\nu,\varrho}),$$

wo die $h_{n-1,\varrho} \neq 0$ sind, so bleiben zunächst für $b > -1$ die Sätze alle gültig. Die Entwicklungen ändern sich nur in geringfügiger Weise, ähnlich wie beim linearen Fall. Für $b < -1$ treten dagegen Änderungen ein. Wir können nicht mehr aus der Stetigkeit der $n-1$ ersten Ableitungen auf die der n-ten schließen. Es kann jetzt vorkommen, muß aber nicht der Fall sein, daß die homogene Gleichung eine, ja sogar zwei verschiedene eigentliche Lösungen hat. Diese Lösungen ergeben sich in der Form

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v(z)\, dz,$$

wo $v(z)$ eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung

$$A_z(v(z)) = 0$$

ist. Es ist für sie auch immer $y^{(n)}(x)$ stetig. Wir behaupten: es kann eigentliche Lösungen mit stetiger n-ter Ableitung nur solche geben, die sich in die Form

$$\int_{-i\infty}^{+i\infty} e^{zx} v(z)\, dz$$

setzen lassen. Insbesondere kann es also nie mehr als zwei linear unabhängige Lösungen solcher Art geben. Das ergibt sich ganz wie früher. Ist nämlich $y^{(n)}(x)$ stetig, so läßt sich aus $y^{(\nu)} = O(|x|^b)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in bekannter Weise schließen

$$y^{(\nu)}(x) = O(|x|^{-\infty}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Die Funktion

$$\varphi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x} y(x)\, dx$$

muß dann wieder eine Lösung der Laplaceschen Differentialgleichung sein, woraus die Behauptung folgt. Wie sich entscheiden läßt, ob es eine eigentliche Lösung der homogenen Gleichung gibt, darüber Näheres zu sagen wird in der zweiten Mitteilung Gelegenheit sein. Daß natürlich auch eine Gleichung

$$\Lambda(y) = cx + d \quad \text{und also auch} \quad \Lambda(y) = g(x)$$

unter Umständen lösbar ist, wenn die homogene Gleichung lösbar ist, dürfte klar sein.

Die Untersuchung der funktionalen Differentialgleichung für den Fall, daß die Koeffizienten Polynome vom Grade m sind, hat das Hauptziel, die Integrale der Differentialgleichung m-ter Ordnung

$$A_z(v(z)) = 0$$

für große $|z|$ im Streifen zu studieren. Das erleichtern wir uns zunächst dadurch, daß wir den Perronschen Satz auf komplexe Variable ausdehnen. Freilich genügt das nicht. Vielmehr brauchen wir noch ein eingehenderes Studium der Integrale.

(Eingegangen am 12. Februar 1921.)