Werk

Titel: Über die Laplacesche Reihe (II Teil)

Autor: Hilb, E.,

Ort: Berlin

Jahr: 1920

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0008|log12

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Laplacesche Reihe. (II. Teil.)

Von

Emil Hilb in Würzburg.

In dem unter dem gleichen Titel in dieser Zeitschrift erschienenen ersten Teil[1]) wurde unter Benützung einer neuen asymptotischen Darstellung der Kugelfunktionen in besonders einfacher Weise der grundlegende Hilfssatz abgeleitet, der zum Beweise der Konvergenz der arithmetischen Mittel erster Ordnung der Laplaceschen Reihe für eine absolut integrable Funktion dient. In diesem Teile soll nun der entsprechende Hilfssatz für die Summierung der Ordnung $k > \frac{1}{2}$ abgeleitet werden, wobei die Rechnung natürlich komplizierter wird als im ersten Teil, aber mir doch noch wesentlich elementarer und durchsichtiger erscheint, als bei der von Gronwall[2]) auf vollständig andere Weise gewonnenen Ableitung.

§ 1.

Erster Ansatz zum Beweise.

Wir zeigen, daß

$$(1) \qquad S_{\omega,k} = \int_0^{\pi} \Big| \sum_{\nu=0}^{n} (2\nu+1) P_\nu(\cos\Theta) \Big(1 - \frac{\nu}{\omega}\Big)^k \Big| \sin\Theta \, d\Theta \quad \text{mit} \quad n < \omega \leqq n+1$$

für alle Werte von ω unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wenn $1 > k > \frac{1}{2}$, dagegen für $k = \frac{1}{2}$ mit ω in das Unendliche wächst. Bekanntlich ist diese hier benützte Rieszsche Summationsmethode der von Cesàro vollständig äquivalent. Wir setzen nun in (1)

$$(2) \qquad \int_0^{\pi} = \int_0^{\frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}} + \int_{\pi-\frac{1}{n}}^{\pi}.$$

[1]) Math. Zeitschrift, 5 (1919), S. 17—25; im folgenden zitiert mit I.

[2]) Vgl. I, Anmerkung 4a).

Wegen I (23) bleibt das erste und vierte Integral der rechten Seite für alle Werte von n gewiß unterhalb einer endlichen Grenze. Entsprechend I (3) ist die Behandlung des dritten Integrals ziemlich analog der des zweiten, so daß wir uns im wesentlichen auf dieses letztere beschränken können. Nun ist[3])

$$(3)\quad (2\nu+1)P_\nu(\cos\Theta) = -\frac{1}{\sin\Theta}\left[\frac{dP_{\nu+1}}{d\Theta} - \frac{dP_{\nu-1}}{d\Theta}\right],\ \nu = 0, 1, 2, \ldots,\ \text{wobei}\ P_{-1} = 0,$$

also nach I (28)

$$(4)\quad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \sum_{\nu=0}^{n} (P_{\nu+1} - P_{\nu-1}) \left(1 - \frac{\nu}{\omega}\right)^k \right| d\Theta \leqq T_{\omega,k} + \bar{T}_{\omega,k},$$

wobei

$$(5)\quad T_{\omega,k} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(J_0\left(\left(\nu+\tfrac{3}{2}\right)\Theta\right) - J_0\left(\left(\nu-\tfrac{1}{2}\right)\Theta\right)\right)\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)^k \right] \right| d\Theta,$$

$$(6)\quad \bar{T}_{\omega,k} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin\Theta}} \sum_{\nu=0}^{n} \left(R_{\nu+1}((\nu+1)\Theta) - R_{\nu-1}((\nu-1)\Theta)\right)\left(1-\frac{\nu}{\omega}\right)^k \right] \right| d\Theta.$$

Nun bleibt bekanntlich $\bar{T}_{\omega,k}$ unterhalb einer festen Grenze, wenn dieses für $k = 0$ gilt. Es ist aber

$$(7)\quad \bar{T}_{\omega,0} = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{d}{d\Theta} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin\Theta}} \left(- R_{-1} - R_0 + R_n(n\Theta) + R_{n+1}((n+1)\Theta)\right) \right] \right| d\Theta.$$

Dabei sind R_{-1} und R_0 ebenfalls durch I (28) definiert, und es folgt, daß der absolute Betrag ihres Beitrages zu $\bar{T}_{\omega,0}$ unterhalb einer festen Grenze bleibt. Dasselbe folgt aus I (21) und (25) unmittelbar durch direktes Ausführen der Differentiation nach Θ für die beiden anderen Summanden, wenn man berücksichtigt, daß[4])

$$(8)\quad \frac{dJ_0(t)}{dt} = -J_1(t), \qquad \frac{dY_0(t)}{dt} = -Y_1(t),$$

[3]) E. Heine, Handbuch der Kugelfunktionen (1878), S. 93.

[4]) Vgl. etwa die Funktionentafeln von Jahnke und Emde, S. 165 und 156.

und daß für $J_1(t)$ und $Y_1(t)$ die I (24) entsprechenden Abschätzungen gelten.

Es ist also nur zu zeigen, daß $T_{\omega,k}$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt.

§ 2.

Summierung einer Reihe und Abschätzung von $U_{\omega,k}$.

Zur Berechnung von $T_{\omega,k}$ setzen wir nach I (40)

$$(9)\quad J_0\left(\left(\nu+\tfrac{3}{2}\right)\Theta\right)-J_0\left(\left(\nu-\tfrac{1}{2}\right)\Theta\right)=-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(\left(\nu+\tfrac{1}{2}\right)\Theta\sin\varphi\right)\sin(\Theta\sin\varphi)\,d\varphi,$$

$$(10)\qquad (\omega-\nu)^k=\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int\frac{e^{-(\omega-\nu)z}}{(-z)^{k+1}}dz,$$

wobei der Integrationsweg in der komplexen z-Ebene von $+\infty$ um den Nullpunkt im Uhrzeigersinn herum, dann nach $+\infty$ zurückzuführen ist. Durch Summierung der Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{n} r^\nu \sin((\nu+\alpha)u)$$

erhält man[5])

$$(11)\qquad T_{\omega,k}=(U_{\omega,k}+V_{\omega,k})\frac{2\,\Gamma(k+1)}{\pi^2},$$

wenn

$$(12)\qquad U_{\omega,k}=$$

$$=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta\left|\frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\cdot\frac{\sin(\Theta\sin\varphi)\sin(\tfrac{1}{2}\Theta\sin\varphi)(1+e^z)}{1-2e^z\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}}\right]\right|,$$

$$(13)\qquad V_{\omega,k}=\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta\left|\frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\sin(\Theta\sin\varphi)\frac{-e^{(n+1)z}\sin((n+\tfrac{3}{2})\Theta\sin\varphi)+e^{(n+2)z}\sin((n+\tfrac{1}{2})\Theta\sin\varphi)}{1-2e^z\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}}\right]\right|.$$

[5]) Bei der Berechnung des Integrals $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}}$ in (2) tritt statt e^z immer $-e^z$ auf, so daß $|1+2e^z\cos\Theta\sin\varphi+e^{2z}|$ immer oberhalb einer festen von 0 verschiedenen Zahl liegt.

Dabei kann für unseren Zweck die untere Grenze von φ durch eine mit wachsendem ω genügend klein werdende Größe ersetzt gedacht werden; der Integrationsweg in der z-Ebene soll so genommen werden, daß die Nullstellen des Nenners außer $z = 0$ außerhalb des Integrationsweges liegen.

Wir wenden uns jetzt zur Abschätzung von $U_{\omega,k}$. Dieses kann große Werte nur dadurch annehmen, daß der absolute Betrag des Nenners sehr klein wird. Es genügt also, wenn wir den Beitrag des Integrals in bezug auf z längs der Schleife von $+1$ um 0 noch $+1$ abschätzen. *Im folgenden schreiben wir dabei, wenn wir von endlich bleibenden Faktoren oder Summanden absehen, statt* $=$ *stets* $\equiv$. Nun ist

$$(14)\quad \frac{1}{1-2e^{z}\cos(\Theta\sin\varphi)+e^{2z}} = \frac{-i}{2e^{z}\sin(\Theta\sin\varphi)}\left[\frac{1}{1-e^{i\Theta\sin\varphi+z}} - \frac{1}{1-e^{-i\Theta\sin\varphi+z}}\right]$$

$$(15)\quad \frac{1}{1-e^{\pm i\Theta\sin\varphi+z}} \equiv \frac{1}{z\pm i\Theta\sin\varphi},$$

da die vernachlässigten Glieder $z \pm i\Theta\sin\varphi$ nur im Zähler enthalten.

Es ist also

$$(16)\quad U_{\omega,k} \equiv W_{\omega,k} + \overline{W}_{\omega,k},$$

wobei

$$(17)\quad W_{\omega,k} \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\, e^{-\omega z}}{\omega^{k}(-z)^{k+1}}\,\frac{\sin(\frac{1}{2}\Theta\sin\varphi)(1+e^{-z})}{z+i\Theta\sin\varphi}\right]\right|$$

und $\overline{W}_{\omega,k}$ genau so gebaut ist wie der erste Summand, aber im Nenner $z - i\Theta\sin\varphi$ enthält.

Dabei darf man den Schleifenweg wieder von $+\infty$ nach $+\infty$ nehmen, wodurch der Ausdruck nur um eine endliche Größe geändert wird.

Zur weiteren Abschätzung von $W_{\omega,k}$ entwickeln wir $\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}}\sin\left(\frac{1}{2}\Theta\sin\varphi\right)$ nach Potenzen von Θ. Bei denjenigen Gliedern, welche zum mindesten den Faktor $\Theta^{2}\sin\varphi$ enthalten, setzen wir

$$(18)\quad \omega z = u\Theta\sin\varphi;$$

dann erhält man, wenn $R(\Theta, \varphi)$ eine endliche, dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Grenze liegende Funktion bedeutet, für diesen Teil

$$(19)\quad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\, e^{-u\Theta\sin\varphi}\left(1+e^{-\frac{u}{\omega}\Theta\sin\varphi}\right)R(\Theta,\varphi)\,\Theta^{1-k}}{(-u)^{k+1}(\sin\varphi)^{k}\left(i+\frac{u}{\omega}\right)}\right]\right|.$$

Dieser Ausdruck bleibt, da $k<1$, bestimmt unterhalb einer endlichen Grenze, wie man sich durch direktes Ausdifferenzieren nach Θ überzeugt, wenn man berücksichtigt, daß $|u\,\Theta\sin\varphi\,e^{-u\Theta\sin\varphi}|$ für alle Werte von u, Θ, φ, die in Betracht kommen, unterhalb einer festen Grenze bleibt. Es bleibt also nur mehr

$$(20)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k+1}}\,\frac{\Theta\sin\varphi\,(1+e^{-z})}{z+i\,\Theta\sin\varphi}\right]\right|$$

zu untersuchen. Wir ersetzen im Zähler $\Theta\sin\varphi$ durch $-i(z+i\,\Theta\sin\varphi)+iz$, dann ist noch

$$(21)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \frac{d}{d\Theta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\,e^{-\omega z}}{\omega^k(-z)^{k}}\,\frac{(1+e^{-z})}{z+i\,\Theta\sin\varphi}\right]\right|$$

abzuschätzen, da für das andere Glied $z+i\,\Theta\sin\varphi$ im Nenner wegfällt. Wir setzen

$$(22)\qquad \omega\,\Theta=\tau,\quad \omega z=u\sin\varphi,$$

dann erhält man statt (21)

$$(23)\qquad \int_{\frac{\omega}{n}}^{\omega\frac{\pi}{2}} d\tau \left| \frac{d}{d\tau}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\,e^{-u\sin\varphi}\,(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}})}{(-u)^k(\sin\varphi)^k(u+i\tau)}\right]\right|.$$

Der Integrationsweg in der u-Ebene verläuft dabei etwa von ∞ bis $\frac{1}{2}$ längs der Achse des Reellen, beschreibt dann einen Kreis mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt und geht in das Unendliche zurück. Wir führen die Differentiation nach τ aus, dann erhält man in dem Nenner $(u+i\tau)^2$, so daß der absolute Betrag des Teiles von (23) für den $|u|<1$, sicher endlich ist. Ist $|u|>1$, so ist es reell und

$$(24)\qquad \frac{1}{|(u+i\tau)^2|}=\frac{1}{u^2+\tau^2}.$$

Führen wir für diesen Teil, was erlaubt ist, zunächst die Integration nach τ aus, so erhält man einen Ausdruck der Form

$$(25)\qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{du\, e^{-u\sin\varphi}\left(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}}\right)}{(\sin\varphi)^k u^{k+1}} \cdot \left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\tau}{u}\right]_{\frac{\omega}{n}}^{\frac{\omega\pi}{2}}$$

$$< \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^{\infty} \frac{du\, e^{-u\sin\varphi}\left(1+e^{-\frac{u\sin\varphi}{\omega}}\right)}{(\sin\varphi)^k u^{k+1}} < 1.$$

Es bleibt also $U_{\omega,k}$ stets unterhalb einer festen endlichen Größe[6]).

§ 3.

Ableitung eines Hilfssatzes. Ansatz zur Abschätzung von $V_{\omega,k}$.

Wir brauchen im folgenden Integrale der Form

$$(26)\quad J = \int_a^b \frac{\sin(\tau\sin\varphi)}{(\sin\varphi)^r} d\varphi, \quad \text{wenn} \quad 0 \leqq a < b \leqq \frac{\pi}{2},\ \tau > 0,\ r \leqq \frac{1}{2} \text{ ist.}$$

Wir wollen zeigen, daß, wenn M eine von τ unabhängige Konstante,

$$(27)\qquad J < \frac{M}{\sqrt{\tau}}.$$

Wir setzen

$$(28)\qquad \sin\varphi = z,$$

dann ist

$$(29)\qquad J = \int_c^d \frac{\sin\tau z\, dz}{z^r\sqrt{1-z^2}} = \int_c^d \frac{e^{i\tau z} - e^{-i\tau z}}{2\,i z^r\sqrt{1-z^2}} dz, \quad \text{wo} \quad 0 \leqq c < d \leqq 1.$$

Es genügt, wenn wir

$$(30)\qquad J_1 = \int_c^d \frac{e^{i\tau z}}{z^r\sqrt{1-z^2}} dz$$

allein untersuchen. Nach dem Cauchyschen Integralsatz ist

$$(31)\quad J_1 = \int_c^{c+\infty i} - \int_d^{d+\infty i} = e^{ci\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\xi} i\, d\xi}{(c+i\xi)^r\sqrt{1-c^2-2ci\xi+\xi^2}} - e^{di\tau} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau\xi} i\, d\xi}{(d+i\xi)^r\sqrt{1-d^2-2di\xi+\xi^2}}$$

$$= e^{ci\tau} i J_2 - e^{di\tau} i J_3.$$

---

[6]) Bei der Abschätzung des Integrals $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\frac{1}{n}}$ in (2) hat man in dem $U_{\omega,k}$ entsprechenden Ausdruck nur $\omega z = u$ zu setzen.

Setzt man $\tau\xi = \zeta$, so wird

$$J_2 = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \frac{e^{-\zeta}d\zeta}{\left(c+\frac{i\zeta}{\tau}\right)^r \sqrt{1-c^2-2c\frac{i\zeta}{\tau}+\frac{\zeta^2}{\tau^2}}}. \tag{32}$$

Ist $c = 0$, so verhält sich der erste Faktor im Nenner wie $\frac{\zeta^r}{\tau^r}$, in jedem anderen Falle ist sein absoluter Betrag größer, ist $c = 1$, so verhält sich der absolute Betrag des zweiten Faktors wie $\sqrt{\frac{\zeta}{\tau}}$, in jedem anderen Falle ist er größer. Da $r \leqq \frac{1}{2}$, so gilt also

$$|J_2| < \frac{M}{\sqrt{\tau}}. \tag{33}$$

Dasselbe gilt bei geeigneter Wahl von M für $|J_3|$ und damit für J_1, so daß, wenn M eine von Fall zu Fall wechselnde, in jedem Falle aber feste Größe bedeutet,

$$|J_1| < \frac{M}{\sqrt{\tau}}, \tag{34}$$

woraus unmittelbar (27) folgt.

Wir beginnen jetzt mit der Abschätzung von $V_{\omega,k}$ und betrachten den Teil der Schleife, für den $|z| > 1$, also z reell ist. Dann bleiben alle Teile der rechten Seite von (13) unterhalb einer endlichen Größe außer denen, die aus der Differentiation von $\sin((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)$ und $\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)$ nach Θ entstehen, da in diesem Falle der Faktor n im Zähler auftritt. Es genügt nach Division des Zählers und Nenners durch e^{2z}, wenn wir den von dem einen dieser Glieder herrührenden Teil abschätzen, also

$$K = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{dz\, e^{(-\omega+n)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{\sin(\Theta\sin\varphi)(n+\frac{1}{2})\sin\varphi\cos((n-\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1}\Big|. \tag{35}$$

Nun nimmt $\frac{1}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1}$ mit wachsendem Θ ab, also ist nach dem zweiten Mittelwertsatz und (27)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\Theta\sin\varphi)\sin\varphi\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi)}{e^{-2z}-2e^{-z}\cos(\Theta\sin\varphi)+1}\,d\varphi \tag{36}$$

$$= \frac{1}{2(1-e^{-z})^2}\int_0^h \sin\varphi\left[\sin((n+\tfrac{3}{2})\Theta\sin\varphi)-\sin((n-\tfrac{1}{2})\Theta\sin\varphi)\right]d\varphi < \frac{M}{\sqrt{n\Theta}}.$$

Ist also $k \geqq \frac{1}{2}$, so wird der Faktor $(n+\frac{1}{2})$ im Zähler von K durch den Faktor $\omega^k n^{\frac{1}{2}}$ im Nenner kompensiert; da ferner der Integrand für $\Theta = 0$ nur wie $\frac{1}{\sqrt{\Theta}}$ unendlich wird, so bleibt K unterhalb einer festen Grenze. Es bleibt also nur mehr derjenige Teil von $V_{\omega,k}$ zu untersuchen, der von dem zwischen $+1$ und $+1$ liegenden Teil des Schleifenintegrals herrührt. Um nun den von der Ableitung des Nenners nach Θ herrührenden Bestandteil abzuschätzen, gehen wir von (14) und (15) aus und betrachten

$$(37)\quad L = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{[\sin((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - e^{-z}\sin((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)]\sin\varphi}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2} \right|.$$

Wir setzen

$$(38)\qquad e^{-z} = 1 - z\frac{1-e^{-z}}{z};$$

$$(39)\quad L_1 = 2\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{\sin\left(\frac{\Theta}{2}\sin\varphi\right)\cos((n+1)\Theta\sin\varphi)}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2} \sin\varphi \right|,$$

$$L_2 = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{(n+1-\omega)z}}{\omega^k (-z)^k} \frac{\sin((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)\sin\varphi}{(z \pm i\Theta\sin\varphi)^2} \frac{1-e^{-z}}{z} \right|.$$

Also ist

$$(40)\qquad L_1 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int |dz| \frac{\Theta\sin^2\varphi}{\omega^k |z|^{k+1} |z \pm i\Theta\sin\varphi|^2};$$

$$L_2 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|dz|\sin\varphi}{\omega^k |z|^k |z \pm i\Theta\sin\varphi|^2}.$$

In beiden Ausdrücken kann man nun nachträglich wieder die Schleifenwege in das Unendliche erstrecken, da dadurch nur Ausdrücke hinzukommen, die unterhalb einer endlichen Grenze liegen.

Setzt man

$$(41)\qquad z = u\Theta\sin\varphi,$$

so wird

$$(42)\qquad L_1 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|du|}{\omega^k |u|^{k+1} \Theta^{k+1} (\sin\varphi)^k |u \pm i|^2},$$

$$L_2 < M\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{|du|}{\omega^k |u|^k \Theta^{k+1} (\sin\varphi)^k |u \pm i|^2}.$$

Dabei sind die Schleifenwege etwa aus den Achsen des Reellen zwischen $+\infty$ und $+\frac{1}{2}$ und dem Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt zusammenzusetzen. Da

$$(43)\qquad \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Theta}{\omega^k \Theta^{k+1}} \equiv \frac{n^k}{k\omega^k} \equiv 1$$

ist, wenn $0 < k$, so liegen L_1 und L_2 und damit L unterhalb endlichen Grenzen. Genau so behandelt man die Glieder, die durch Differentiation von $\sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \sin(\Theta \sin\varphi)$ entstehen[7]).

§ 4.

Fortsetzung der Abschätzung von $V_{\omega,k}$.

Wir haben also nur noch diejenigen Glieder von $V_{\omega,k}$ abzuschätzen, bei denen durch die Differentiation im Zähler der Faktor n auftritt, während der Schleifenweg von $+1$ nach $+1$ zu nehmen ist. Vermittelst der Partialbruchzerlegung (14) zerfällt in dem zu untersuchenden Ausdruck die zwischen den Absolutstrichen stehende Größe in die Summe von zwei konjugiert komplexen Ausdrücken, von denen also nur der eine zu untersuchen ist. Wir betrachten also

$$(44)\qquad N = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{\alpha z n \sin\varphi}}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - e^{-z}\cos((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)]}{(1 - e^{i\Theta\sin\varphi + z})} \right.$$

---

[7]) Bei der entsprechenden Abschätznng von $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{n}}$ in (2) hat man zunächst wörtlich so vorzugehen bis zu (36); für die andern bisher betrachteten Bestandteile folgt von selbst, daß sie endlich blieben.

Dabei ist $\alpha = n + 1 - \omega$. Die nicht angeschriebenen Glieder, die statt des Faktors n den Faktor $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{3}{2}$ haben, werden wie die entsprechenden Ausdrücke in § 3 behandelt. Wir setzen nun in (44)

$$e^{\alpha z} = e^{-\alpha i \Theta \sin\varphi}\left[1 - (1 - e^{\alpha(z + i\Theta\sin\varphi)})\right]. \tag{45}$$

Da nun

$$\frac{1 - e^{\alpha(z + i\Theta\sin\varphi)}}{1 - e^{i\Theta\sin\varphi + z}} = f(\Theta, z, \varphi) \tag{46}$$

für alle in Betracht kommenden Werte Θ, z und φ einen reellen und imaginären Teil besitzt, der in bezug auf φ von beschränkter Schwankung ist, so können wir auf den von $f(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Bestandteil den zweiten Mittelwertsatz und (27) anwenden, woraus folgt, daß sein absoluter Betrag für $k \geqq \frac{1}{2}$ unterhalb einer endlichen Grenze bleibt. Wir dürfen in N daher $e^{\alpha z}$ durch $e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}$ und ebenso e^{-z} durch $e^{+i\Theta\sin\varphi}$ ersetzen. Ebenso dürfen wir, wenn

$$\frac{1}{1 - e^{i\Theta\sin\varphi + z}} = \frac{-1}{i\Theta\sin\varphi + z} + g(\Theta, z, \varphi), \tag{47}$$

den von $g(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Bestandteil weglassen. Es ist also

$$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int dz \frac{e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}\, n \sin\varphi}{\omega^k (-z)^{k+1}} \frac{\left[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)\right]}{i\Theta\sin\varphi + z} \tag{48}$$

und nach (41)

$$N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\, e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}\, n}{\omega^k (-u)^{k+1}} \frac{\left[\cos((n+\frac{1}{2})\Theta\sin\varphi) - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos((n+\frac{3}{2})\Theta\sin\varphi)\right]}{\Theta^{k+1}(\sin\varphi)^k (u+i)} \tag{49}$$

Dabei wurde in (48) der Integrationsweg wieder von $+\infty$ nach $+\infty$ genommen, da genau wie in (36) folgt, daß sich N dadurch nur um eine endliche Größe ändert.

Nun ist

$$\begin{aligned} e^{i\Theta\sin\varphi} &= 1 + i\Theta\sin\varphi + \Theta^2\sin^2\varphi\, g_1(\Theta, \varphi), \\ \cos((n+\tfrac{1}{2})\Theta\sin\varphi) &- \cos((n+\tfrac{3}{2})\Theta\sin\varphi) \\ &= \sin((n+1)\Theta\sin\varphi)\left[\Theta\sin\varphi + \Theta^3\sin^3\varphi\, g_2(\Theta, \varphi)\right], \end{aligned} \tag{50}$$

$$i\Theta \sin\varphi \cos\left((n+\tfrac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)$$
$$= \cos\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)\left[i\Theta\sin\varphi + \Theta^3 (\sin\varphi)^3 g_3(\Theta,\varphi)\right]$$
$$+ \sin\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)\Theta^2\sin^2\varphi\, g_4(\Theta,\varphi).$$

Es ist also, wenn

$$(51)\qquad P = P_1 + P_2 = e^{-\alpha i\Theta\sin\varphi}\left[\cos\left((n+\tfrac{1}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)\right.$$
$$\left. - e^{i\Theta\sin\varphi}\cos\left((n+\tfrac{3}{2})\,\Theta\sin\varphi\right)\right]$$

ist,

$$(52)\qquad \begin{aligned} P_1 &= -i\Theta\sin\varphi\, e^{i(n+1)\Theta\sin\varphi} \\ P_2 &= \Theta^2\sin^2\varphi\left[\sin\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)h_1(\Theta,\varphi) + \cos\left((n+1)\,\Theta\sin\varphi\right)h_2(\Theta,\varphi)\right]. \end{aligned}$$

Dabei ist der reelle und imaginäre Teil der durch (50) und (52) definierten Funktionen g und h von beschränkter Schwankung. Der zweite Mittelwertsatz zeigt dann vermittelst (27), daß P_2 zu N nur einen endlichen Beitrag liefert. Es ist also

$$(53)\qquad N = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int \frac{du\, n\Theta\sin\varphi\, e^{i(n+1)\Theta\sin\varphi}}{\omega^k (-u)^{k+1} (\sin\varphi)^k \Theta^{k+1} (u+i)} \right|.$$

Nun ist entsprechend (33)

$$(54)\qquad \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\varphi)^{1-k} e^{i(n+1)\Theta\sin\varphi}\, d\varphi < \frac{M}{\sqrt{(n+1)\,\Theta}} \right|,$$

also

$$(55)\qquad N \equiv \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \frac{\sqrt{n}}{\omega^k \Theta^{k+\frac{1}{2}}} \equiv \frac{n^k}{\omega^k} \equiv 1, \text{ wenn } k > \tfrac{1}{2}.$$

Damit ist gezeigt[8]*, daß für jedes noch so große* ω $S_{\omega,k}$ *unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, wenn* $k > \frac{1}{2}$.

[8]) Die entsprechende Abschätzung für das Integral $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{1}{n}}$ in (2) folgt unmittelbar aus dem zweiten Mittelwertsatz und (27), wie oben bei dem von $f(\Theta, z, \varphi)$ herrührenden Teil, wobei $f(\Theta, z, \varphi)$ durch (46) definiert war.

Ist $k = \frac{1}{2}$, so bleiben alle Bestandteile endlich außer

$$P = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{2}} d\Theta \left| \sqrt{\frac{\Theta}{\sin\Theta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi R(\Theta, \varphi) \right|,$$

wobei $R(\Theta, \varphi)$ entsprechend den Bemerkungen von (14) der reelle Teil von

$$\int \frac{du\, n e^{i(n+1)\Theta \sin\varphi} (\sin\varphi)^{\frac{1}{2}}}{\omega^{\frac{1}{2}} (-u)^{\frac{3}{2}} \Theta^{\frac{1}{2}} (u+i)}$$

ist, und man sieht vermittelst der (34) entsprechenden Gleichung, daß P mit n wie $\ln n$ unendlich wird.

(Eingegangen am 17. November 1919.)