Werk

Titel: Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung

Autor: Hausdorff. F.

Ort: Berlin

Jahr: 1919

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0005|log30

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung.

Von

Felix Hausdorff in Greifswald.

Für einige bekannte Sätze über stetige und halbstetige Funktionen gebe ich in § 1 neue und, wie mir scheint, besonders einfache Beweise sowie einen merkwürdigen logischen Zusammenhang. Den Mittelpunkt bildet der *Hahnsche*[1]) *Einschiebungssatz* II, seinerseits gestützt auf den Baireschen[2]) Satz I über halbstetige Funktionen als Grenzen monotoner Folgen von stetigen Funktionen; aus II folgere ich unmittelbar drei Sätze des Herrn H. Tietze[3]), wovon der wichtigste, der *Ergänzungssatz* III, auf etwas künstlichem Wege auch von Herrn H. Bohr[4]) bewiesen wurde. Für III gebe ich auch noch einen direkten Beweis, der, wie der Beweis von I, wohl die äußerste Vereinfachung in der von Herrn Tietze eingeschlagenen Richtung sein dürfte. — In § 2 übertrage ich die Hauptsätze auf allgemeinere Funktionensysteme, zu denen z. B. die Baireschen Funktionenklassen gehören; die hier entwickelte Theorie berührt sich vielfach mit einer Abhandlung von Herrn H. Lebesgue[5]), doch erforderte die (von Herrn W. H. Young[6]) begonnene) Berücksichtigung monotoner Folgen wesentliche Zusätze.

---

[1]) H. Hahn, Über halbstetige und unstetige Funktionen, Wiener Akad. Ber. **126** (1917), S. 91—110.

[2]) R. Baire, Leçons sur les fonctions discontinues (Paris 1905), S. 124.

[3]) H. Tietze, Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind, Journ. f. Math., **145** (1915), S. 9—14.

[4]) C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig und Berlin 1918), §§ 541—43 und S. VI. Einen Beweis für den Euklidischen Raum gibt auch L. E. J. Brouwer, Über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion, Math. Ann. **79** (1918), S. 209—211.

[5]) H. Lebesgue, Sur les fonctions représentables analytiquement, Journ. de Math., (6) **1** (1905), S. 139—216.

[6]) W. H. Young, On functions and their associated sets of points, Lond. Math. Soc. Proc., (2) **12** (1912), S. 260—287, und anderwärts.

Die im folgenden betrachteten Funktionen $f(x)$ sollen reell und endlich sein $(-\infty < f(x) < +\infty)$, aber nicht notwendig beschränkt: gerade dieser Standpunkt bedingt einige Erschwerungen, die bei beschränkten Funktionen oder bei Zulassung der Werte $\pm\infty$ wegfallen. Sie sollen ferner sämtlich in einem *metrischen Raume* R, d. h. in einer Menge definiert sein, deren Elemente (Punkte) dem Dreiecksaxiom genügende Entfernungen xy haben:

$$xx = 0, \quad xy = yx > 0 \quad \text{für} \quad x \neq y,$$
$$xy + yz \geqq xz;$$

R kann z. B. ein Euklidischer, ein Hilbertscher, ein Funktionenraum oder eine beliebige Teilmenge solcher Räume sein.

§ 1.

I. *Jede unterhalb stetige Funktion ist Limes einer aufsteigenden Folge stetiger Funktionen* (R. Baire).

Die Funktion $\varphi(x)$ sei unterhalb stetig, d. h. für jedes positive ε sei in einer hinlänglich kleinen Umgebung[7]) von x (für $xz < \varrho$)

$$\varphi(z) > \varphi(x) - \varepsilon$$

oder auch: es sei

$$\underline{\lim}\, \varphi(z) \geqq \varphi(x) \quad \text{für} \quad z \to x.$$

Nehmen wir zunächst $\varphi(x) \geqq \lambda$ nach unten beschränkt an und definieren $f(x)$, nach Wahl einer positiven Zahl k, als untere Grenze des Ausdrucks $\varphi(z) + k \cdot xz$ für alle Punkte z des Raumes, oder mit einer von Herrn M. Pasch empfohlenen Bezeichnung

$$f(x) = \inf_z [\varphi(z) + k \cdot xz].$$

Offenbar ist $f(x) \geqq \lambda$ und (wenn man speziell $z = x$ nimmt) $f(x) \leqq \varphi(x)$.

Die Stetigkeit von $f(x)$ ist leicht einzusehen. Sind x, y zwei Punkte mit $xy = \delta > 0$ und bestimmt man z so, daß

$$\varphi(z) + k \cdot xz < f(x) + \delta,$$

so ist

$$f(y) \leqq \varphi(z) + k \cdot yz < f(x) + \delta + k(yz - xz) \leqq f(x) + (k+1)\delta,$$

also (wegen der Vertauschbarkeit von x, y) $|f(y) - f(x)| < (k+1)\delta$.

Nunmehr setzen wir für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_n(x) = \inf [\varphi(z) + n \cdot xz],$$

---

[7]) In isolierten Punkten des Raumes, deren Existenz wir ja nicht ausschließen, ist jede Funktion (unterhalb und oberhalb) stetig.

also $f_n(x)$ stetig und $\lambda \leqq f_n(x) \leqq f_{n+1}(x) \leqq \varphi(x)$; es existiert $\lim f_n(x) = f(x) \leqq \varphi(x)$.

Bestimmen wir aber einen Punkt z_n mit

$$\varphi(z_n) + n \cdot xz_n < f_n(x) + \frac{1}{n},$$

so ist

$$xz_n < \frac{1}{n}(\varphi(x) + 1 - \lambda),$$

also $z_n \to x$, und man erhält

$$\varphi(x) \leqq \underline{\lim}\, \varphi(z_n) \leqq f(x),$$

also $\varphi(x) = f(x)$ ist Limes der aufsteigenden stetigen Funktionen $f_n(x)$.

Sodann sei $\Phi(x)$ unterhalb stetig, aber nicht nach unten beschränkt. Die Funktion

$$\varphi = \frac{\Phi}{1 + |\Phi|}$$

ist unterhalb stetig und beschränkt $(-1 < \varphi < 1)$, also Limes aufsteigender stetiger Funktionen φ_n mit $-1 \leqq \varphi_n \leqq \varphi < 1$. Um diese durch Funktionen zu ersetzen, die zwischen ± 1 mit *Ausschluß* beider Grenzen liegen, verfahren wir so. Es sei $\varepsilon_n > 0$, $\sum \varepsilon_n$ konvergent und $1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$. Bilden wir dann die Reihe

$$f_n = \varphi_n + \varepsilon_1(\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varepsilon_2(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots,$$

die wegen $0 \leqq \varphi_{\nu+1} - \varphi_\nu < 2$ gleichmäßig konvergiert und eine stetige Funktion f_n darstellt, so ist

$$\varphi_n \leqq f_n \leqq \varphi_n + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + (\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots = \varphi,$$
$$f_{n+1} = \varphi_n + (\varphi_{n+1} - \varphi_n) + \varepsilon_1(\varphi_{n+2} - \varphi_{n+1}) + \dots \geqq f_n,$$

f_n konvergiert aufsteigend nach φ. Endlich ist $f_n > -1$, nämlich entweder $\varphi_n = \varphi_{n+1} = \varphi_{n+2} = \dots$ und $f_n = \varphi > -1$, oder $f_n > \varphi_n \geqq -1$. Die stetigen Funktionen

$$F_n = \frac{f_n}{1 - |f_n|}$$

konvergieren nunmehr aufsteigend nach $\frac{\varphi}{1 - |\varphi|} = \Phi$.

Damit ist I bewiesen. Umgekehrt ist der Limes $g(x) = \lim g_n(x)$ einer aufsteigenden Folge stetiger oder unterhalb stetiger Funktionen $g_n(x)$ wieder unterhalb stetig. Denn wählt man erst n so, daß $g_n(x) > g(x) - \varepsilon$, dann eine Umgebung von x, in der $g_n(z) > g_n(x) - \varepsilon$, so ist in dieser Umgebung $g(z) > g(x) - 2\varepsilon$.

Jede oberhalb stetige Funktion ist Limes einer absteigenden Folge stetiger Funktionen; der Limes einer absteigenden Folge (oberhalb) stetiger Funktionen ist oberhalb stetig.

II. *Ist $g(x)$ unterhalb, $h(x)$ oberhalb stetig und überall $g(x) \geqq h(x)$, so gibt es eine stetige Funktion $f(x)$ mit $g(x) \geqq f(x) \geqq h(x)$* (H. Hahn).

Setzen wir zur Abkürzung für reelles t

$$\{t\} = \max[t, 0] = \tfrac{1}{2}|t| + \tfrac{1}{2}t \geqq 0,$$

es ist dies eine stetige, mit wachsendem t nicht abnehmende Funktion von t. Sei nun $g \geqq h$,

$$g = \lim g_n, \qquad g_1 \leqq g_2 \leqq \cdots$$
$$h = \lim h_n, \qquad h_1 \geqq h_2 \geqq \cdots$$

$g_n = g_n(x)$ und $h_n = h_n(x)$ stetige Funktionen. Es ist

$$(1) \qquad h_1 - g_1 \geqq h_1 - g_2 \geqq h_2 - g_2 \geqq h_2 - g_3 \geqq \cdots$$

Daher auch

$$\{h_1 - g_1\} \geqq \{h_1 - g_2\} \geqq \{h_2 - g_2\} \geqq \{h_2 - g_3\} \geqq \cdots$$

und diese Funktionen konvergieren nach $\{h - g\} = 0$. Die alternierende Reihe

$$f = g_1 + \{h_1 - g_1\} - \{h_1 - g_2\} + \{h_2 - g_2\} - \{h_2 - g_3\} + \cdots$$

konvergiert daher für jedes x, ihre Partialsummen sind stetige Funktionen und f ist als Limes der aufsteigenden (absteigenden) Partialsummen ungerader (gerader) Ordnung eine unterhalb (oberhalb) stetige, d. h. schlechthin stetige Funktion.

Endlich ist $g \geqq f \geqq h$. Denn für $g = h$ sind alle Glieder der Folge (1) $\geqq 0$, also

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + (h_2 - g_2) - (h_2 - g_3) + \cdots$$
$$= \lim g_n = \lim h_n = g = h.$$

Für $g > h$ achten wir auf das erste negative Glied in (1); ist es $h_n - g_n$, so ist

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + \cdots - (h_{n-1} - g_n) = g_n,$$
$$g \geqq g_n > h_n \geqq h;$$

ist es $h_n - g_{n+1}$, so ist

$$f = g_1 + (h_1 - g_1) - (h_1 - g_2) + \cdots + (h_n - g_n) = h_n,$$
$$g \geqq g_{n+1} > h_n \geqq h.$$

In den folgenden Sätzen bedeute A eine (im Raume R) abgeschlossene Menge, $B = R - A$ die komplementäre offene Menge. (Gebiet). Mit x, y, z bezeichnen wir Punkte von A, B, R. Es sei

$$\varrho(z) = \inf_x xz$$

der Abstand des Punktes z von A, also $\varrho(x) = 0$, $\varrho(y) > 0$. Bekanntlich ist

$$|\varrho(z) - \varrho(z_0)| \leqq z_0 z,$$

also $\varrho(z)$ stetige Funktion von z.

III. *Eine in der abgeschlossenen Menge A definierte, stetige Funktion $\varphi(x)$ läßt sich zu einer im ganzen Raume stetigen Funktion $f(z)$ ergänzen* (H. Tietze).

Sei zunächst $\varphi(x)$ beschränkt, $\lambda \leqq \varphi(x) \leqq \mu$. Die durch

$$g(x) = \varphi(x), \quad g(y) = \mu$$

definierte Funktion $g(z)$ ist unterhalb stetig, die durch

$$h(x) = \varphi(x), \quad h(y) = \lambda$$

definierte Funktion $h(z)$ oberhalb stetig und durchweg $g(z) \geqq h(z)$. Nach dem Hahnschen Einschiebungssatz II gibt es also eine stetige Funktion $f(z)$ mit $g(z) \geqq f(z) \geqq h(z)$, also $f(x) = \varphi(x)$. Übrigens ist auch $\lambda \leqq f(z) \leqq \mu$.

Sei sodann $\Phi(x)$ in A stetig, aber unbeschränkt;

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{1 + |\Phi(x)|}$$

ist stetig und $-1 < \varphi(x) < 1$. Es gibt also eine in A mit $\varphi(x)$ übereinstimmende stetige Funktion $f(z)$ mit $-1 \leqq f(z) \leqq 1$; indem wir aber $f(z)$ durch $\frac{f(z)}{1+\varrho(z)}$ ersetzen, erhalten wir eine ebensolche Funktion vom Betrage < 1. Nehmen wir daher $-1 < f(z) < 1$ an, so stimmt die stetige Funktion $F(z) = \frac{f(z)}{1 - |f(z)|}$ in A mit $\Phi(x)$ überein.

Um auch direkt eine Funktion $f(z)$ der verlangten Eigenschaft zu bilden (wieder im Falle eines beschränkten $\varphi(x)$, $\lambda \leqq \varphi(x) \leqq \mu$), definieren wir

$$f(x) = \varphi(x), \quad f(y) = \inf_x \left[\varphi(x) + \frac{xy}{\varrho(y)} - 1\right].$$

Wegen $xy \geqq \varrho = \varrho(y)$ ist $f(y) \geqq \lambda$, überdies für jedes x

$$f(y) \leqq \mu + \frac{xy}{\varrho} - 1,$$

und wenn man x eine Punktfolge mit $xy \to \varrho$ beschreiben läßt: $f(y) \leqq \mu$.

Es ist die Stetigkeit von $f(z)$ zu zeigen, d. h. wenn x_0, y_0 Punkte von A, B bedeuten, zu beweisen, daß

$$f(y) \to f(y_0) \quad \text{für} \quad y \to y_0,$$
$$f(y) \to \varphi(x_0) \quad \text{für} \quad y \to x_0.$$

Zu dem Zweck ist zu bemerken, daß wir uns bei der Bestimmung von $f(y)$ auf Punkte x beschränken können, für die

$$\varphi(x) + \frac{xy}{\varrho} - 1 < f(y) + 1,$$

also

$$\frac{xy}{\varrho} < \mu - \lambda + 2,$$

d. h. $xy < c\varrho$ (c eine Konstante).

Sei nun $yy_0 = \delta$ $(0 < \delta < 1)$ und bestimmen wir einen Punkt x mit

$$(2) \qquad \varphi(x) + \frac{xy}{\varrho} - 1 < f(y) + \delta, \quad xy < c\varrho.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} f(y_0) &\leqq \varphi(x) + \frac{xy_0}{\varrho_0} - 1 \\ &< f(y) + \delta + \frac{xy_0}{\varrho_0} - \frac{xy}{\varrho} \\ &= f(y) + \delta + \frac{xy_0 - xy}{\varrho_0} + xy\left(\frac{1}{\varrho_0} - \frac{1}{\varrho}\right) \\ &< f(y) + \delta + \frac{\delta}{\varrho_0} + c\varrho \cdot \frac{\delta}{\varrho\varrho_0}, \\ f(y_0) &< f(y) + \delta\left(1 + \frac{c+1}{\varrho_0}\right). \end{aligned}$$

Ebenso durch Vertauschung von y, y_0

$$f(y) < f(y_0) + \delta\left(1 + \frac{c+1}{\varrho}\right).$$

Für $y \to y_0$ $(\delta \to 0,\ \varrho \to \varrho_0)$ konvergiert also $f(y)$ nach $f(y_0)$.

Ferner sei $x_0 y = \delta < 1$; wir bestimmen wieder einen Punkt x gemäß (2) und einen Punkt ξ (ebenfalls in A) mit $\xi y < \varrho(1 + \delta)$, also

$$f(y) \leqq \varphi(\xi) + \frac{\xi y}{\varrho} - 1 < \varphi(\xi) + \delta,$$

so daß

$$\varphi(x) - \delta < f(y) < \varphi(\xi) + \delta$$

wird. Da nun wegen $\varrho \leqq \delta$ und auf Grund der Dreiecksungleichung mit y auch x und ξ nach x_0 konvergieren, so konvergiert $f(y)$ nach $\varphi(x_0)$.

IV. *Es sei $\varphi(z)$ nach unten beschränkt und in der abgeschlossenen Menge A stetig. Es gibt eine stetige Funktion $f(z) \leqq \varphi(z)$, die in A mit $\varphi(z)$ übereinstimmt* (H. Tietze).

Hier wird also die Gesamtfunktion $\varphi(z)$, in III nur die Teilfunktion $\varphi(x)$ in A stetig angenommen. — Es sei $\varphi(z) \geqq \lambda$. Man definiere $g(z)$ als untere Grenze von $\varphi(z)$ im Punkte z, d. h. $g(z_0) = \underline{\lim}\, \varphi(z)$ für $z \to z_0$ ($z = z_0$ nicht ausgeschlossen). Es ist also $g(z_0) \leqq \varphi(z_0)$, während es für beliebige positive δ, ε auch einen Punkt z mit $z_0 z < \delta$, $\varphi(z) < g(z_0) + \varepsilon$

gibt. Diese Funktion g ist bekanntlich unterhalb stetig, denn für $z_n \to z_0$ bestimme man einen Punkt ζ_n mit $z_n \zeta_n < \frac{1}{n}$, $\varphi(\zeta_n) < g(z_n) + \frac{1}{n}$, dann ist auch $\zeta_n \to z_0$ und

$$g(z_0) \leqq \underline{\lim}\, \varphi(\zeta_n) \leqq \underline{\lim}\, g(z_n).$$

Überdies ist $g(x) = \varphi(x)$ und $\varphi(y) \geqq g(y) \geqq \lambda$. Andererseits ist die durch

$$h(x) = \varphi(x), \qquad h(y) = \lambda$$

definierte Funktion oberhalb stetig und durchweg $g(z) \geqq h(z)$. Es gibt also eine stetige Funktion $f(z)$ mit $g(z) \geqq f(z) \geqq h(z)$, also

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad f(y) \leqq \varphi(y).$$

Direkt kann man eine solche Funktion, wenigstens für beschränktes $\varphi(z)$, durch

$$f(x) = \varphi(x), \qquad f(y) = \inf_z \left[\varphi(z) + \frac{yz}{\varrho(y)}\right]$$

definieren; der Beweis der Stetigkeit ist ähnlich wie bei III.

V. *Jede unterhalb stetige, in der abgeschlossenen Menge A stetige Funktion $\varphi(z)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge stetiger Funktionen, die in A mit $\varphi(z)$ übereinstimmen.* (H. Tietze.)

$\varphi(z)$ sei zunächst nach unten beschränkt, es gibt also nach IV eine stetige Funktion $f(z) \leqq \varphi(z)$ mit $f(x) = \varphi(x)$. Andererseits ist nach I $\varphi(z)$ Limes aufsteigender stetiger Funktionen $\varphi_n(z) \leqq \varphi(z)$. Die stetigen Funktionen

$$f_n(z) = \max[\varphi_n(z), f(z)]$$

konvergieren dann aufsteigend nach $\max[\varphi(z), f(z)] = \varphi(z)$, während $f_n(x) = \max[\varphi_n(x), f(x)] = \max[\varphi_n(x), \varphi(x)] = \varphi(x)$ ist.

Der Fall eines unbeschränkten $\varphi(z)$ ist genau wie in I zu behandeln.

§ 2.

Wir übertragen die wichtigsten der vorstehenden Sätze, indem wir an Stelle der stetigen Funktionen ein ziemlich allgemeines System von reellen Funktionen mit gemeinsamem Definitionsbereich R zugrunde legen; diese Menge R (die wir Raum und deren Elemente wir Punkte nennen) darf zunächst eine ganz beliebige Menge sein, zwischen deren Elementen keine (durch Umgebungen, Entfernungen o. dgl. vermittelte) Relationen vorausgesetzt werden. Erst bei der Anwendung auf die „analytisch darstellbaren", d. h. durch wiederholte Limesbildung aus den stetigen Funktionen hervorgehenden *Baireschen Funktionen* werden wir R als metrischen Raum annehmen. Wie zuvor sollen alle Funktionen endlich sein; wenn

wir also z. B. von der oberen Grenze $\sup f_n(x)$ einer Folge von Funktionen sprechen, so setzen wir voraus, daß die $f_n(x)$ für jedes x eine nach oben beschränkte Zahlenfolge bilden.

Eine gegebene Funktion $f = f(x)$ bestimmt die *Lebesgueschen Mengen*

$$[f > y], \qquad [f \geqq y]$$

der Punkte x, worin f größer oder nicht kleiner als die gegebene reelle Zahl y ist. Wenn die Mengen M, N gegebene Mengensysteme durchlaufen und die Menge $[f > y]$ für jedes y ein M, oder die Menge $[f \geqq y]$ für jedes y ein N ist, oder beides zugleich eintrifft, so sagen wir, daß die Funktion f von der Klasse $(M, *)$ oder $(*, N)$ oder (M, N) ist.

Durchläuft z. B. A die abgeschlossenen, B die offenen Mengen eines metrischen Raumes R, so sind die oberhalb stetigen Funktionen mit denen der Klasse $(*, A)$, die unterhalb stetigen mit denen der Klasse $(B, *)$, die stetigen mit denen der Klasse (B, A) identisch. Denn ist $f(x)$ unterhalb stetig, also für jedes $\varepsilon > 0$ in einer hinlänglich kleinen Umgebung von x_0 $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, so enthält die Menge $[f > y]$ von jedem ihrer Punkte auch eine gewisse Umgebung, ist also eine offene Menge, und umgekehrt.

Es ist zu unterscheiden, ob wir von Mengen M, N gegebener Systeme ausgehend alle Funktionen f der Klasse (M, N) oder umgekehrt von Funktionen f eines gegebenen Systems ausgehend alle Mengen $M = [f > y]$, $N = [f \geqq y]$ bilden (für alle f und y). Deuten wir diese Bestimmungen für den Augenblick durch die Bezeichnung $(M, N) \to f$, $f \to (M, N)$ an und üben sie wiederholt aus, so werden bei

$$(M, N) \to f \to (M_1, N_1)$$

die M_1 im allgemeinen nur einen Teil der M, die N_1 nur einen Teil der N bilden, bei

$$f \to (M, N) \to f_1$$

umgekehrt die f nur einen Teil der f_1, und die Behauptung, daß, etwa im zweiten Fall, jede Funktion f_1 der Klasse (M, N) wieder ein f ist, wird eines Beweises bedürfen.

Es durchlaufe nun f ein Funktionensystem mit folgenden Eigenschaften:

(α) *Jede Konstante ist ein f.*

(β) *Das Maximum und Minimum zweier f ist wieder ein f.*

(γ) *Summe, Differenz, Produkt und Quotient* (mit durchweg nichtverschwindendem Nenner) *zweier f ist wieder ein f.*

Hiernach ist auch der Betrag eines f

$$|f| = \max[f, 0] - \min[f, 0]$$

wieder ein f.

Es bedeute nun g den Limes einer aufsteigenden, h den Limes einer absteigenden Folge von Funktionen f; k eine Funktion, die zugleich ein g und ein h ist; endlich f^* den Limes einer konvergenten Folge von Funktionen f. Wir bemerken sofort, daß $-g$ ein h ist und umgekehrt; von den auf Limites monotoner Folgen bezüglichen Sätzen genügt es also, die auf g bezüglichen auszusprechen. Jedes f ist ein k, jedes k ein g und h, jedes g und h ein f^*.

Statt $g = \lim f_n$ $(f_1 \leqq f_2 \leqq \ldots)$ können wir auch $g = \sup f_n$ schreiben; umgekehrt ist die obere Grenze einer Folge von f ein g, denn

$$\sup f_n = \lim \max [f_1, f_2, \ldots, f_n],$$

und sogar die obere Grenze einer Folge von g wieder ein g, denn ist $g_n = \sup\limits_p f_{np}$, so ist

$$\sup g_n = \sup [f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{13}, f_{22}, f_{31}, \ldots].$$

I. *Maximum, Minimum und Summe zweier g ist wieder ein g.*

Denn wenn f_n aufsteigend nach g, f_n' aufsteigend nach g' konvergiert, so konvergieren

$$\max [f_n, f_n'], \quad \min [f_n, f_n'], \quad f_n + f_n'$$

aufsteigend nach

$$\max [g, g'], \quad \min [g, g'], \quad g + g'.$$

II. *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f ist ein k.*

Sei gleichmäßig $f^* = \lim f_n$; ist $\varepsilon = \Sigma \varepsilon_n$ eine konvergente Reihe positiver Zahlen, so können wir aus den f_n Funktionen $f_\alpha, f_\beta, f_\gamma, \ldots$ mit wachsenden Indizes herausgreifen, die sich von allen folgenden um weniger als $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ unterscheiden. Schreiben wir dann

$$\begin{aligned} f^* &= f_\alpha + (f_\beta - f_\alpha) + (f_\gamma - f_\beta) + \ldots \\ &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots, \end{aligned}$$

wo die φ_n wieder Funktionen f und, von φ_0 abgesehen, vom Betrage $< \varepsilon_n$ sind. Demnach ist

$$\begin{aligned} f^* &= (\varphi_0 - \varepsilon) + (\varphi_1 + \varepsilon_1) + (\varphi_2 + \varepsilon_2) + \ldots \\ &= (\varphi_0 + \varepsilon) + (\varphi_1 - \varepsilon_1) + (\varphi_2 - \varepsilon_2) + \ldots \end{aligned}$$

zugleich ein g und ein h.

III. *Maximum und Minimum, Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier f^* ist wieder ein f^*.*

Beweis wie von I; nur der Quotient bedarf einer Bemerkung, wobei es genügt zu zeigen, daß, für $f^* \neq 0$, $\frac{1}{f^*}$ wieder ein f^* ist. Ist $f^* = \lim f_n$ überall positiv, so kann man auch $f_n > 0$ annehmen (indem man es durch $\max\left[f_n, \frac{1}{n}\right]$ ersetzt, welches nach $\max[f^*, 0] = f^*$ konvergiert), und dann ist $\frac{1}{f^*} = \lim \frac{1}{f_n}$. Ist $f^* \neq 0$, so ist $f^* \cdot \frac{1}{f^{*2}} = \frac{1}{f^*}$ wieder ein f^*.

IV. *Der Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f^* ist wieder ein f^*.*

Ist gleichmäßig $F = \lim f_n^*$, so kann man wie bei II

$$F = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

setzen, wo die φ_n Funktionen f^* und für $n > 0$ vom Betrage $< \varepsilon_n$ sind. Für eine Funktion $f^* = \lim f_p$ vom Betrage $< \varepsilon$ kann man $|f_p| \leqq \varepsilon$ voraussetzen, indem man f_p durch $f_p' = \max[f_p, -\varepsilon]$ und sodann durch $f_p'' = \min[f_p', \varepsilon]$ ersetzt. Sei demnach

$$\varphi_0 = \lim_p f_{0p}, \qquad \varphi_n = \lim_p f_{np}, \qquad |f_{np}| \leqq \varepsilon_n.$$

Die Funktion

$$f_p = f_{0p} + f_{1p} + \cdots + f_{pp},$$

die ein f ist, konvergiert aber nach F, welches also ein f^* ist. Denn man wähle, bei gegebenem $\delta > 0$ und Argument x, n so groß, daß $\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2} + \cdots < \delta$, und $p_0 \geqq n$ so groß, daß, für $p \geqq p_0$, $f_{0p} + \cdots + f_{np}$ sich von $\varphi_0 + \cdots + \varphi_n$ um weniger als δ unterscheidet. Dann unterscheidet sich F von $\varphi_0 + \cdots + \varphi_n$, dieses von $f_{0p} + \cdots + f_{np}$, dieses von $f_{0p} + \cdots + f_{np} + \cdots + f_{pp}$ um weniger als δ, also $|F - f_p| < 3\delta$ für $p \geqq p_0$.

Man bemerke noch, daß wegen

$$\overline{\lim}\, f_n = \lim g_n, \qquad g_n = \sup[f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \cdots]$$

der obere Limes einer Folge von Funktionen f zugleich Limes (oder untere Grenze) einer absteigenden Folge von Funktionen g ist, kurz

$$\overline{\lim}\, f_n = \inf g_n, \qquad \underline{\lim}\, f_n = \sup h_n;$$

die Funktionen f^* sind beider Darstellungen fähig.

Wir führen nun die Lebesgueschen Mengen unserer Funktionen ein; die Mengen

$$[f > y], \quad [f \geqq y], \quad [g > y], \quad [h \geqq y], \quad [f^* > y], \quad [f^* \geqq y]$$

mögen mit

$$M, \qquad N, \qquad P, \qquad Q, \qquad M^*, \qquad N^*$$

bezeichnet werden (wobei f usw. alle bezeichneten Funktionen und y alle reellen Zahlen zu durchlaufen hat; offenbar kann man aber y fest lassen, z. B. $y = 0$ setzen, da $f - y$ wieder ein f ist usw.). Es wird sich erstens um die Bestimmung der P, Q, M^*, N^* aus den gegebenen M, N und zweitens um die Umkehrung der Tatsache handeln, daß die Funktionen g, h, k, f^* von den Klassen $(P, *)$, $(*, Q)$, (P, Q), (M^*, N^*) sind; wobei nicht vorausgesetzt wird, daß jede Funktion der Klasse (M, N) umgekehrt ein f sei (vgl. Satz VIII).

Die Summen und Durchschnitte aus Folgen von Mengen M bezeichnen wir generell mit

$$M_\sigma = M_1 \dot{+} M_2 \dot{+} M_3 \dot{+} \ldots,$$
$$M_\delta = M_1 M_2 M_3 \ldots;$$

ebenso bedeute $M_{\sigma\delta}$ den Durchschnitt einer Folge von Mengen M_σ, $M_{\delta\sigma}$ die Summe einer Folge von Mengen M_δ usw. Man bemerkt ohne weiteres, daß die M und N Komplemente voneinander sind, ebenso die P und Q, ebenso die M^* und N^* (denn $-f$ ist ein f, $-g$ ein h usw.); ferner ist Summe und Durchschnitt zweier M wieder ein M, und dasselbe gilt für die übrigen Mengengattungen, denn ist $M_1 = [f_1 > 0]$, $M_2 = [f_2 > 0]$, so ist $M_1 \dot{+} M_2$ die Menge, wo $\max[f_1, f_2] > 0$, und $M_1 M_2$ die Menge, wo $\min[f_1, f_2] > 0$.

Es gilt nun, auch wenn die M und N ganz beliebige Mengensysteme durchlaufen:

V. *Jede Funktion der Klasse* $(M, *)$ *ist von der Klasse* $(*, M_\delta)$, *jede Funktion der Klasse* $(*, N)$ *ist von der Klasse* $(N_\sigma, *)$.

Denn $[f \geqq y]$ ist Durchschnitt der Mengen $\left[f > y - \frac{1}{n}\right]$, $[f > y]$ Summe der Mengen $\left[f \geqq y + \frac{1}{n}\right]$ für $n = 1, 2, \ldots$

VI. *Die obere Grenze einer Folge von Funktionen* $(M, *)$ *ist von der Klasse* $(M_\sigma, *)$, *die untere Grenze einer Folge von Funktionen* $(*, N)$ *ist von der Klasse* $(*, N_\delta)$.

Denn für $g = \sup f_n$ ist $[g > y]$ Summe der Mengen $[f_n > y]$; für $h = \inf f_n$ ist $[h \geqq y]$ Durchschnitt der Mengen $[f_n \geqq y]$.

Hiernach gilt zur Bestimmung unserer Mengen aus den M, N der Satz

VII. *Die P sind mit den M_σ, die Q mit den N_δ, die M^* mit den Q_σ, die N^* mit den P_δ identisch.*

Jede dieser vier Behauptungen besteht aus zwei Hälften, z. B. besagt die erste: jedes P ist ein M_σ und jedes M_σ ist ein P. Die erste Hälfte (jedes P ist ein M_σ usw.) ist nach V, VI unmittelbar evident. f ist ein (M, N), also $g = \sup f_n$ ein $(M_\sigma, *)$, $h = \inf f_n$ ein $(*, N_\delta)$; das heißt

eben: *jedes P ist ein M_σ, jedes Q ein N_δ.* Ferner ist g ein $(P, *)$ oder $(*, P_\delta)$, $\overline{\lim} f_n = \inf g_n$ ein $(*, P_{\delta\delta}) = (*, P_\delta)$, ebenso $\underline{\lim} f_n$ ein $(Q_\sigma, *)$, f^* ein (Q_σ, P_δ); also *jedes M^* ist ein Q_σ, jedes N^* ein P_δ.*

Um auch die zweite Hälfte (jedes M_σ ist ein P usw.) zu beweisen, benutzen wir die einfachen Hilfssätze, die auch nachher noch Verwendung finden:

(1) Zu jeder Menge M gibt es eine Funktion f, die in M positiv ist und sonst verschwindet.

Denn es gibt eine Funktion f mit $M = [f > 0]$, und man kann sie $\geqq 0$, übrigens auch $\leqq \varepsilon$ annehmen, indem man sie durch $f' = \max[f, 0]$ und $f'' = \min[f', \varepsilon]$ ersetzt.

(2) Zu jeder Menge M_σ gibt es eine Funktion F, die Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen f, in M positiv ist und sonst verschwindet.

Ist $M_\sigma = M_1 \dotplus M_2 \dotplus \ldots$, so bestimmen wir zu M_n gemäß (1) eine Funktion f_n mit $0 \leqq f_n \leqq \varepsilon_n$, die in M_n positiv ist und sonst verschwindet; ist $\Sigma \varepsilon_n$ konvergent, so erfüllt

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$$

die gestellten Forderungen.

(3) Zu jeder Menge M gibt es eine Funktion g, die in M gleich 1 ist und sonst verschwindet.

Wir bestimmen f gemäß (1); die Funktion $(n = 1, 2, \ldots)$

$$g = \lim \frac{nf}{1 + nf}$$

ist Limes aufsteigender f, in M gleich 1 und sonst gleich 0.

(4) Zu jeder Menge M_σ gibt es eine Funktion g, die in M_σ gleich 1 ist und sonst verschwindet.

Ist $M_\sigma = M_1 \dotplus M_2 \dotplus \ldots$, so bestimmen wir gemäß (3) eine Funktion g_n, die in M_n gleich 1 ist und sonst verschwindet; die Funktion

$$g = \sup g_n$$

erfüllt unsere Forderungen.

Aus (4) ergibt sich nun, daß $M_\sigma = [g > 0]$ ein P ist: *jedes M_σ ist ein P, jedes N_δ ein Q.* Andererseits ist $M_\sigma = [g \geqq \frac{1}{2}]$ auch ein N^*, da g jedenfalls ein f^* ist, also: *jedes P ist ein N^*, jedes Q ein M^*.* Wendet man sodann (2) nicht auf die Funktionen f, sondern auf die (wegen III denselben Axiomen $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ genügenden) Funktionen f^* an, wobei F wegen IV wieder ein f^* ist, so ist $M_\sigma^* = [F > 0]$ ein M^*, also: *jedes M_σ^* ist ein M^*, jedes N_δ^* ein N^*.* Endlich folgt dann, daß jedes Q_σ ein

M_σ^* und daher ein M^* ist: *jedes* Q_σ *ist ein* M^*, *jedes* P_δ *ein* N^*. Damit ist VII vollständig bewiesen.

Nunmehr gehen wir zu den *Umkehrungssätzen* über:

VIII. *Wenn der Limes jeder gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen* f *wieder ein* f *ist, so ist jede Funktion der Klasse* (M, N) *ein* f.

Sei φ von der Klasse (M, N). Wenn $y_1 < y_2$ ist, so gibt es eine Funktion f folgenden Verhaltens:

$$\begin{array}{llll} \text{für} & \varphi \leqq y_1, & y_1 < \varphi < y_2, & \varphi \geqq y_2 \\ \text{ist} & f = 0, & 0 < f < 1, & f = 1. \end{array}$$

Denn zu der Menge $[\varphi > y_1]$, die ein M ist, gibt es nach (1) eine Funktion f_1, die in dieser Menge positiv und sonst 0 ist; ebenso zur Menge $[\varphi < y_2]$, die ein $R - N = M$ ist, eine entsprechende Funktion f_2. Dann ist überall $f_1 + f_2 > 0$ und $f = \frac{f_1}{f_1 + f_2}$ erfüllt die obige Forderung.

Sei nun φ zunächst beschränkt, etwa $0 \leqq \varphi \leqq 1$; wir wählen eine natürliche Zahl n und bestimmen (mit neuer Bedeutung von f_1, f_2) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ eine Funktion f_ν so, daß für

$$\begin{array}{llll} \varphi \leqq \frac{\nu-1}{n}, & \frac{\nu-1}{n} < \varphi < \frac{\nu}{n}, & \varphi \geqq \frac{\nu}{n} \\ f_\nu = 0, & 0 < f_\nu < 1, & f_\nu = 1. \end{array}$$

Die Funktion

$$f = \frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)$$

ist wieder ein f. Ist, in einem Punkt x, $\frac{\nu-1}{n} \leqq \varphi \leqq \frac{\nu}{n}$, so ist $f_1 = \ldots = f_{\nu-1} = 1$, $f_{\nu+1} = \ldots = f_n = 0$,

$$f = \frac{\nu-1}{n} + \frac{f_\nu}{n}, \quad \frac{\nu-1}{n} \leqq f \leqq \frac{\nu}{n},$$

also $|\varphi - f| \leqq \frac{1}{n}$ überall. Läßt man n unbegrenzt wachsen, so konvergiert f gleichmäßig nach φ, welches also nach Voraussetzung wieder ein f ist.

Ist Φ unbeschränkt und von der Klasse (M, N), so ist $\varphi = \frac{\Phi}{1 + |\Phi|}$ beschränkt und von derselben Klasse; denn die Menge $[\varphi > y]$ ist für $|y| < 1$ mit der Menge $[\Phi > Y]$, $Y = \frac{y}{1 - |y|}$ identisch, während sie für $y \geqq 1$ die Nullmenge und für $y \leqq -1$ der ganze Raum ist; 0 und R gehören nach dem Axiom (α) zu den Mengen M. Dasselbe gilt für $[\varphi \geqq y]$ und für den umgekehrten Schluß von φ auf Φ. Hiernach ist φ ein f, und da $|\varphi| < 1$ ebenfalls ein f ist, so auch $\Phi = \frac{\varphi}{1 - |\varphi|}$.

Die Voraussetzung von VIII bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz trifft nach IV jedenfalls für die Funktionen f^* zu, daher

IX. *Jede Funktion der Klasse* (M^*, N^*) *ist ein* f^*.

Sodann gilt:

X. *Jede nach unten beschränkte Funktion der Klasse* $(P, *)$ *ist ein* g.

Sei φ von der Klasse $(P, *)$ und etwa $\varphi > 0$. Wir wählen $\delta > 0$ und bestimmen für $n = 1, 2, 3, \ldots$ nach Hilfssatz (4) zu der Menge $[\varphi > n\delta]$ eine Funktion g_n (ein g), die in dieser Menge $= 1$ ist und sonst verschwindet. Die Reihe

$$g = \delta(g_1 + g_2 + g_3 + \cdots)$$

konvergiert für jedes x, da schließlich g_n verschwindet, und g ist als Limes aufsteigender g wieder ein g. Ist in einem Punkt $(n-1)\delta < \varphi \leqq n\delta$, so ist $g_1 = \ldots = g_{n-1} = 1$, $g_n = g_{n+1} = \ldots = 0$, also $g = (n-1)\delta$ und daher überall $0 < \varphi - g \leqq \delta$. Läßt man δ eine Folge von Zahlen $\to 0$ beschreiben, so konvergiert g nach φ und zwar aufsteigend bei passender Wahl der δ (z. B. $\delta = 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$); φ ist also ebenfalls ein g.

Die Einschränkung in X läßt sich dahin mildern, daß es nur eine Funktion $f \leqq \varphi$ zu geben braucht. Der folgende Satz ist gänzlich frei von ihr:

XI. *Jede Funktion der Klasse* $(P, *)$ *ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen der Klasse* (P, Q).

Für eine nach unten beschränkte Funktion behauptet XI weniger als X, da jedes f auch von der Klasse (P, Q) ist. Sei also Φ von der Klasse $(P, *)$ und nicht beschränkt; die Funktion $\varphi = \frac{\Phi}{1 + |\Phi|}$ ist von derselben Klasse und beschränkt, also ein g und daher Limes aufsteigender Funktionen f_n, die man von vornherein (indem man f_n durch $\max[f_n, -1]$ ersetzt) der Bedingung $-1 \leqq f_n \leqq \varphi < 1$ entsprechend annehmen kann. Verfahren wir nun wie beim Beweise von § 1, I, so erhalten wir Funktionen

$$k_n = f_n + \varepsilon_1(f_{n+1} - f_n) + \varepsilon_2(f_{n+2} - f_{n+1}) + \cdots,$$

die mit $-1 < k_n < 1$ aufsteigend nach φ konvergieren; dabei ist k_n als gleichmäßiger Limes von Funktionen f ein k, nach Satz II, also jedenfalls von der Klasse (P, Q). Von derselben Klasse sind die Funktionen $K_n = \frac{k_n}{1 - |k_n|}$, die aufsteigend nach Φ konvergieren.

Die zu X, XI entsprechenden Sätze gelten für Funktionen der Klasse $(*, Q)$. Jede beschränkte Funktion der Klasse (P, Q) ist ein k.

X und XI sind die Verallgemeinerungen des Baireschen Satzes über unterhalb stetige Funktionen. Der Hahnsche Einschiebungssatz überträgt sich, mit demselben Beweis wie § 1, II, in folgender Form:

XII. *Ist überall* $g \geqq h$, *so gibt es eine Funktion* k *mit* $g \geqq k \geqq h$.

Um den Ergänzungssatz zu übertragen, verstehen wir unter X irgendeine Teilmenge von R, und unter der Aussage, eine in X definierte Funktion $\varphi(x)$ sei von der Klasse (M, N), daß jede Menge $[\varphi > t]$ der Durchschnitt MX eines M mit X, jede Menge $[\varphi \geqq t]$ der Durchschnitt NX eines N mit X sei.

Sei nun Q_0 eine Menge Q, $P_0 = R - Q_0$ ihr Komplement, also ein P. Dann gilt:

XIII. *Eine in Q_0 definierte Funktion von der Klasse (P, Q) läßt sich zu einer im ganzen Raum definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen.*

Es mögen x, y, z Punkte von Q_0, P_0, R bedeuten. Es sei $\varphi(x)$ von der Klasse (P, Q) und zunächst beschränkt, $\lambda \leqq \varphi(x) \leqq \mu$. Die durch

$$h(x) = \varphi(x), \quad h(y) = \lambda$$

definierte Funktion $h(z)$ ist ein h, nämlich beschränkt und von der Klasse $(*, Q)$, da die Menge $[h \geqq t]$ für $t > \lambda$ ein $Q\,Q_0$, also ein Q, und für $t \leqq \lambda$ der ganze Raum ist. Analog schließt man, daß die vermöge

$$g(x) = \varphi(x), \quad g(y) = \mu$$

definierte Funktion $g(z)$ ein g ist. Wegen $g(z) \geqq h(z)$ gibt es zwischen ihnen eine Funktion $k(z)$, also mit $k(x) = \varphi(x)$, die ein k und also von der Klasse (P, Q) ist. Überdies ist auch $\lambda \leqq k(z) \leqq \mu$.

Ist sodann $\Phi(x)$ unbeschränkt und von der Klasse (P, Q), so ist $\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{1 + |\Phi(x)|}$ beschränkt und von derselben Klasse; es gibt demnach eine Funktion $k_1(z)$, ein k, mit $-1 \leqq k_1(z) \leqq 1$ und $k_1(x) = \varphi(x)$. Nach Hilfssatz (2) gibt es aber eine Funktion $k_0(z)$, die in P_0 positiv ist, in Q_0 verschwindet und gleichmäßiger Limes von Funktionen f, also ebenfalls ein k ist. (Für stetige Funktionen f und abgeschlossenes Q_0 leistete dies die Funktion $\varrho(z) =$ Abstand des Punktes z von Q_0.) Die Funktion $k_1 - t k_0$ ist für reelles t wieder ein k, woraus folgt, daß die Funktion $k = \frac{k_1}{1 + k_0}$ von der Klasse (P, Q) und, weil beschränkt, wieder ein k ist; denn die Menge $\left[\frac{k_1}{1 + k_0} > t\right] = [k_1 - t k_0 > t]$ ist ein P usw. Wir haben nun eine Funktion k vom Betrage < 1 mit $k(x) = \varphi(x)$; die Funktion $K = \frac{k}{1 - |k|}$ ist dann jedenfalls von der Klasse (P, Q) und $K(x) = \Phi(x)$.

Eine leichte Ausdehnung des Ergänzungssatzes liefert:

XIV. *Sind $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ endlich viele Mengen Q, paarweise ohne gemeinsame Punkte, und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ in ihnen definierte Funktionen von der Klasse (P, Q), so ist die in $Q_0 = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n$ definierte*

Funktion φ, die in Q_1 mit φ_1, in Q_2 mit $\varphi_2, \ldots$, in Q_n mit φ_n übereinstimmt, ebenfalls von der Klasse (P, Q) und läßt sich also zu einer im ganzen Raum definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen.

In der Tat ist Q_0 ein Q; ferner ist $[\varphi \geqq t]$ Summe der Mengen $[\varphi_\nu \geqq t]$ und diese, als Durchschnitte zweier Q, sind wieder Mengen Q, also ist $[\varphi \geqq t]$ ein in Q_0 enthaltenes Q oder QQ_0; ebenso ist $[\varphi \leqq t]$ ein QQ_0, $[\varphi > t]$ ein $Q_0 - QQ_0 = (R - Q)Q_0 = PQ_0$, also φ in Q_0 von der Klasse (P, Q).

Als Gegenstück, das aber den Ergänzungssatz nicht zuläßt, möge noch der folgende Satz bemerkt werden:

XV. *Sind $P_1, P_2, \ldots$ endlich oder abzählbar viele Mengen P, paarweise ohne gemeinsame Punkte, und $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ in ihnen definierte Funktionen von der Klasse (P, Q), so ist die in $P_0 = P_1 + P_2 + \ldots$ definierte Funktion φ, die in P_1 mit φ_1, in P_2 mit $\varphi_2, \ldots$ übereinstimmt, ebenfalls von der Klasse (P, Q).*

Denn P_0 ist ein P_σ, also, da die P mit den M_σ übereinstimmen, wieder ein P, und ähnlich wie zuvor erkennt man, daß die Menge $[\varphi > t]$ ein PP_0, die Menge $[\varphi \geqq t]$ ein QP_0 ist.

Schließen wir hiermit die allgemein mengentheoretische Untersuchung. Mit Hilfe ihrer Ergebnisse, die wir nur wiederholt anzuwenden haben, beherrschen wir alle Funktionen, die aus einem gegebenen Funktionensystem durch wiederholte Limesbildung hervorgehen; wir deuten dies speziell für die *Baireschen Funktionen* an, indem wir jetzt R als metrischen Raum voraussetzen. Es durchlaufe

$$\alpha = 0, 1, 2, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots$$

die Cantorschen Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse.

Durch „transfinite Induktion" definieren wir die f^0 als die stetigen Funktionen und für $\alpha > 0$ die $g^\alpha, h^\alpha, f^\alpha$ als die Limites aufsteigender, absteigender, konvergenter Folgen von bereits definierten Funktionen f^ξ $(\xi < \alpha)$, die k^α als solche Funktionen, die gleichzeitig g^α und h^α sind. Die Menge der Funktionen f^α heiße die Klasse α, wobei jede Klasse die früheren enthält und in den späteren enthalten ist. Die zugehörigen Lebesgueschen Mengen

$$[f^\alpha > y], \quad [f^\alpha \geqq y], \quad [g^\alpha > y], \quad [h^\alpha \geqq y]$$

oder

$$M^\alpha, \qquad N^\alpha, \qquad P^\alpha, \qquad Q^\alpha$$

heißen die *Borelschen* (falls R ein euklidischer Raum ist: im Borelschen Sinne meßbaren) *Mengen* des Raumes R.

Wir haben dann die zuvor entwickelte Theorie in der Weise anzu-

wenden, daß wir unter den f die Funktionen f^ξ aller Klassen $< \alpha$ verstehen und die g, h, k, f^* also mit den $g^\alpha, h^\alpha, k^\alpha, f^\alpha$ identifizieren; eine erste Anwendung sichert induktiv, vermöge III, die Gültigkeit der Axiome $(\alpha)(\beta)(\gamma)$ für die Funktionen jeder Klasse α oder aller Klassen $< \alpha$. Zur Bestimmung der Borelschen Mengen liefert VII für $\alpha > 0$:

Die P^α sind die Summen aus Folgen von Mengen M^ξ, die Q^α die Durchschnitte aus Folgen von Mengen N^ξ von Klassen $\xi < \alpha$; die M^α sind die Q^α_σ, die N^α die P^α_δ.

Die Ausdrucksweise „die U sind die V" ist so zu verstehen, daß jedes U ein V und jedes V ein U ist; wir schreiben das kurz $U = V$. Die M^0 sind die offenen Mengen B, die N^0 die abgeschlossenen Mengen A. Denn einerseits ist jedes M^0 ein B, andererseits jedes B ein M^0 als Menge $[\varrho > 0]$ der stetigen Funktion $\varrho(x) =$ Abstand des Punktes x von der abgeschlossenen Menge $A = R - B$ (übrigens ist hier die einzige Stelle, wo die Annahme eines *metrischen* Raumes zur Verwendung kommt; sonst würde auch ein topologischer Raum mit geeigneten Umgebungen genügen). Hiernach entstehen die Borelschen Mengen aus offenen oder abgeschlossenen Mengen durch wiederholte Summen- und Durchschnittsbildung über Mengenfolgen. Ferner ist $P^{\alpha+1} = M^\alpha_\sigma = M^\alpha$, $Q^{\alpha+1} = N^\alpha_\delta = N^\alpha$ (auch für $\alpha = 0$), so daß nur für Limeszahlen α die P^α, Q^α als Zwischenstufe zwischen den M^ξ, N^ξ und M^α, N^α eine eigene Rolle spielen; es ist auch $M^{\alpha+1} = N^\alpha_\sigma$, $N^{\alpha+1} = M^\alpha_\delta$. Für die ersten Ordnungszahlen hat man

$$\begin{array}{l|l}
M^0 = P^1 = B & N^0 = Q^1 = A \\
M^1 = P^2 = A_\sigma & N^1 = Q^2 = B_\delta \\
M^2 = P^3 = B_{\delta\sigma} & N^2 = Q^3 = A_{\sigma\delta} \\
\quad \cdots & \quad \cdots \\
\qquad P^\omega = M^0 + M^1 + M^2 + \cdots & \qquad Q^\omega = N^0 N^1 N^2 \cdots \\
M^\omega = P^{\omega+1} = Q^\omega_\sigma & N^\omega = Q^{\omega+1} = P^\omega_\delta \\
M^{\omega+1} = P^{\omega+2} = N^\omega_\sigma & N^{\omega+1} = Q^{\omega+2} = M^\omega_\delta \\
\quad \cdots & \quad \cdots
\end{array}$$

Die Umkehrungssätze lauten (vgl. VIII — XI):

Jede Funktion der Klasse (M^α, N^α) ist ein f^α. (Auch für $\alpha = 0$.)

Jede nach unten beschränkte Funktion der Klasse $(P^\alpha, *)$ ist ein g^α.

Jede Funktion der Klasse $(P^\alpha, *)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen der Klasse (P^α, Q^α). Hieraus durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Jede Funktion der Klasse $(M^\alpha, *)$ ist Limes einer aufsteigenden Folge von Funktionen f^α. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Baire.)

Die Funktionen $k^{\alpha+1}$ sind mit den f^α identisch, denn jedes $k^{\alpha+1}$ ist von der Klasse $(P^{\alpha+1}, Q^{\alpha+1}) = (M^\alpha, N^\alpha)$, also ein f^α. Nur für Limeszahlen α bilden die k^α eine Zwischenstufe zwischen den $f^\xi (\xi < \alpha)$ und den f^α.

Der Einschiebungssatz lautet:

Ist $g^\alpha \geqq h^\alpha$, so gibt es zwischen beiden eine Funktion k^α,
und durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Ist g von der Klasse $(M^\alpha, *)$, h von der Klasse $(*, N^\alpha)$ und $g \geqq h$, so gibt es zwischen beiden eine Funktion f^α. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Hahn.)

Endlich der Ergänzungssatz:

Eine in Q (einem Q^α) definierte Funktion von der Klasse (P^α, Q^α) läßt sich zu einer im ganzen Raume definierten Funktion von dieser Klasse ergänzen,
und durch Vertauschung von α mit $\alpha + 1$:

Eine in N (einem N^α) definierte Funktion f^α läßt sich zu einer im ganzen Raume definierten Funktion f^α ergänzen. (Auch für $\alpha = 0$: Satz von Tietze).

XIV und XV werden, auf Bairesche Funktionen angewandt, mit Sätzen von Lebesgue im wesentlichen identisch.

(Eingegangen am 7. Juli 1919.)