Werk

Titel: Beweis der Irreduzibilität der Diskriminante einer algebraischen Form von mehrere...

Autor: Ostrowski, A.,

Ort: Berlin

Jahr: 1919

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0004|log26

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beweis der Irreduzibilität der Diskriminante einer algebraischen Form von mehreren Variablen.

Von

Alexander Ostrowski in Göttingen.

1. Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ eine allgemeine Form n-ten Grades der m Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit unbestimmten Koeffizienten A_i. Die Koeffizienten von $x_1^n, x_2^n, \ldots, x_m^n$ mögen mit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bezeichnet werden. Bezeichnen wir die ersten partiellen Ableitungen von F nach den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, so versteht man unter der *Diskriminante* $\Delta(A_i)$ der Form F die Resultante der m Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$[1]. Ihr Verschwinden für irgendwelche spezielle Werte der A_i bedeutet, daß die entsprechenden Formen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ für ein System von nicht sämtlich verschwindenden Werten der x verschwinden. Ein solches Wertsystem der x ist dann ein *Doppelpunkt* oder eine *singuläre Stelle* des durch das Nullsetzen von $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ dargestellten algebraischen Gebildes.

Während nun für die beiden in der Eliminationstheorie vorkommenden Bildungen, für die *Resultante* von m allgemeinen Formen von m Variablen und für die *Diskriminante von* $m-1$ *Formen* von m Variablen, der Irreduzibilitätsbeweis längst erbracht worden ist[2]), ist die Irreduzibilität der Diskriminante *einer* allgemeinen Form von m Variablen meines Wissens

[1]) Eine Übersicht über die wenigen bisher bekannten Eigenschaften der Diskriminanten findet man bei Netto, Vorlesungen über Algebra, Bd. II, S. 158–165, Leipzig 1900. Vgl. auch G. Salmon, Lessons introductory to the modern higher Algebra, 4th edition, S. 98–107, S. 123, Dublin 1885.

[2]) Siehe z. B. J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen, 6. Kap., Leipzig 1903. Bereits Kronecker hat in seiner Festschrift (§ 10) im Jahre 1881 den Satz ausgesprochen, daß die Diskriminante eines Systems von $m-1$ Formen von m Variablen irreduzibel ist und den Beweis für eine spätere leider nie erschienene Abhandlung in Aussicht gestellt. Der erste Beweis dieses Satzes ist von König im Jahre 1903 veröffentlicht worden.

noch nicht bewiesen. Nur im Falle einer allgemeinen binären Form, wo die Diskriminante auf die Diskriminante der entsprechenden algebraischen Gleichung hinausläuft, sowie im Falle der allgemeinen quadratischen Form, wo die Diskriminante die allgemeine symmetrische Determinante ist, ist die Irreduzibilität bekannt[3]). Andererseits ist gerade die Irreduzibilität der Diskriminante einer allgemeinen Form für die Beurteilung mancher algebraisch-geometrischer Fragen von Bedeutung. Daher dürfte vielleicht der folgende einfache Irreduzibilitätsbeweis für die Diskriminante einer allgemeinen Form n-ten Grades $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von m Variabeln von Interesse sein. —

Die durch die Gleichung

$$\Delta(A_i) = 0$$

repräsentierte Mannigfaltigkeit im Raume der Variablen A_i ist die sogenannte *Diskriminantenfläche*, die zu der allgemeinen Form F gehört. Und in unserem Satz ist die Tatsache enthalten, daß *die Diskriminantenfläche von F nicht zerfällt.* —

2. Da wir die Diskriminante von F mit Hilfe des Resultantenbegriffes definiert haben, so möge zuerst an einige Eigenschaften der Resultanten in geeignet spezialisierter Fassung erinnert werden[4]).

Es seien $f, g, \ldots, h$ m allgemeine Formen $(n-1)$-ten Grades in m Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ mit unbestimmten Koeffizienten a_i in f, b_i in g, …, c_i in h. Wir zeichnen eine Variable, etwa x_1 aus und setzen sie gleich 1. Die Aggregate der Glieder höchster Dimension in den Formen $f(1, x_2, \ldots, x_m)$, $g(1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, h(1, x_2, \ldots, x_m)$ — sie sind offenbar gleich $f(0, x_2, \ldots, x_m)$, $g(0, x_2, \ldots, x_m), \ldots, h(0, x_2, \ldots, x_m)$ — mögen durch $f_1, g_1, \ldots, h_1$ bezeichnet werden. Die Formen $f_1, g_1, \ldots, h_1$ sind allgemeine Formen der $m-1$ Variablen $x_2, \ldots, x_m$. Wir nehmen nun an, daß wir für $m-1$ Formen in $m-1$ Variablen die Resultanten bereits bilden können, und bilden die Resultante von $g_1, \ldots, h_1$. Sie möge mit R_1 bezeichnet werden. Für $m = 2$ ist R_1 gleich dem Koeffizienten von x_2 in h zu setzen.

Betrachten wir nun das System von $m-1$ Gleichungen

$$(1) \qquad g(1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ldots, h(1, x_2, \ldots, x_m) = 0.$$

Es besitzt $(n-1)^{m-1}$ Lösungssysteme

$$\xi_2^{(k)}, \xi_3^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}, \qquad (k = 1, 2, \ldots, (n-1)^{m-1})$$

in denen die ξ algebraische Funktionen der unbestimmten Koeffizienten

---

[3]) Siehe z. B. M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, S. 193, Leipzig 1910, sowie etwa König, loc. cit. [2]).

[4]) Siehe z. B. König, loc. cit. [2]), S. 310ff.

$b_i, \ldots, c_i$ von $g, \ldots, h$ sind. Über diese algebraischen Funktionen kann noch mehr ausgesagt werden. Man bilde mit Hilfe der Unbestimmten $u_2, \ldots, u_m$ die Formen

$$U^{(k)} = u_2 \xi_2^{(k)} + \ldots + u_m \xi_m^{(k)}.$$

Alle diese Formen genügen einer Gleichung des Grades $\mu = (n-1)^{m-1}$:

$$R_1 z^\mu + \ldots \quad = 0,$$

wo die Koeffizienten der weiteren Potenzen von z Polynome in den $b_i, \ldots, c_i, u_i$ mit festen Zahlenkoeffizienten sind.

Für die Resultante R der Formen $f, g, \ldots, h$ gilt nun die Gleichung

$$R = \pm R^{n-1} \prod_{k=1}^{k=\mu} f(1, \xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}), \tag{2}$$

und diese Relation gilt, was für das folgende wesentlich ist, auch dann, wenn man die $a_i, b_i, \ldots, c_i$ irgendwie spezialisiert, doch so, daß R_1 von 0 verschieden bleibt, in R und R_1 die spezialisierten Werte einträgt und unter $\xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}$ die Lösungssysteme der spezialisierten Gleichungen (1) versteht.

Wir spezialisieren nun $f, g, \ldots, h$ so, daß sie gleich den partiellen Ableitungen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ von $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ werden. Dann entsteht aus R der Ausdruck Δ, aus R_1 die Diskriminante Δ_1 der Form $F(0, x_2, \ldots, x_m)$. Der Koeffizient α_1 von x_1^m kommt in $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ nicht vor. Daher hängen auch die spezialisierten $\xi_2^{(k)}, \ldots, \xi_m^{(k)}$, die Lösungssysteme der Gleichungen

$$\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m) = 0, \ \ldots, \ \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m) = 0,$$

von α_1 gar nicht ab. Daher folgt aus (2), daß in Δ der Koeffizient der höchsten — μ-ten — Potenz von α_1 gleich Δ_1^{n-1} ist, von einer von 0 verschiedenen Konstante abgesehen. Für $m = 2$ ist $\Delta_1 = n\alpha_2$ zu setzen[5]).

3. Nehmen wir nun an, daß für Δ die folgende Zerlegung in absolut irreduzible Faktoren besteht:

$$\Delta = P_1 P_2 \ldots P_e,$$

wo keines der Polynome $P_1, P_2, \ldots, P_e$ eine Konstante ist. *Dann kommt alles darauf an, zu zeigen, daß keiner der Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ zugleich in zwei Faktoren P vorkommen kann.* Denn angenommen, wir hätten dies bereits gezeigt, und es sei dann etwa P_1 der Faktor, in dem α_1 vorkommt. Dann sind nur zwei Fälle möglich:

[5]) Hieraus ergibt sich durch vollständige Induktion, daß die Diskriminante von F nicht identisch verschwindet.

1. In P_1 kommt wenigstens einer von den Koeffizienten $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vor. Da aber alle Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_m$ gleichberechtigt sind (schon z. B. weil Δ und daher jedes P_i eine Invariante ist und jede Vertauschung der x_i Vertauschung der entsprechenden α_i bewirkt), müssen in P_1 *alle* α vorkommen, daher kommen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ in $P_2, \ldots, P_e$ nicht vor. Nun hat nach dem obigen der Koeffizient von α_1^μ in Δ die Form $c\Delta_1^{n-1}$. Hieraus folgt sofort durch vollständige Induktion, daß in Δ ein Glied vorkommt von der Form $c_1 \alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$, wo $c_1 \neq 0$ ist. Daher muß auch in P_1 ein solches Glied vorkommen. Andererseits ist Δ homogen, folglich müßten $P_2, \ldots, P_e$ Konstanten sein. Daher können wir $\Delta = P_1$ setzen.

2. In P_1 kommt keiner von den Koeffizienten $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vor. Es komme α_2 etwa in P_2 vor. Dann kann in P_2 kein weiterer von den Koeffizienten α vorkommen. Wir können dann weiter annehmen, daß α_3 in $P_3, \ldots, \alpha_m$ in P_m vorkommen, und es ist allgemein P_i in Bezug auf α_i vom Grade μ. Aus der Tatsache, daß in Δ ein Glied von der Form $c_1 \alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$ vorkommt, folgt jetzt, daß

$$\Delta = P_1 P_2 \ldots P_m$$

ist. Daher muß in Δ der Koeffizient von $\alpha_1^\mu \alpha_2^\mu \ldots \alpha_m^\mu$ von der Form $c_2 P_{m-1} P_m$ sein, wo $c_2 \neq 0$ ist. Andererseits folgt durch vollständige Induktion, daß in Δ der Koeffizient von $\alpha_1^\mu \ldots \alpha_{m-2}^\mu$ eine Potenz der Diskriminante der allgemeinen *binären* Form $F(0, 0, \ldots, 0, x_{m-1}, x_m)$ multipliziert mit einem von 0 verschiedenen Zahlenfaktor ist. Und diese Diskriminante ist bekanntlich irreduzibel. Daher ist dieser Fall unmöglich.

4. Um nun zu beweisen, daß etwa α_1 nur in einem der Faktoren P_i vorkommt, genügt es, in der Diskriminante einer geeignet spezialisierten Form F einen solchen absolut irreduziblen Faktor nachzuweisen, der in bezug auf α_1 vom Grade $\mu = (n-1)^{m-1}$ ist. Wir wählen als F die Form

$$F = \frac{1}{n}\alpha_1 x_1^n + \frac{1}{n(n-1)}\{x_2^n + \ldots + x_m^n\} - \frac{1}{n-1} x_1^{n-1}\{\beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m\}.$$

Für ihre partiellen Ableitungen nach $x_1, x_2, \ldots, x_m$ erhalten wir:

$$\varphi_1 = \alpha_1 x_1^{n-1} - \beta_2 x_2 x_1^{n-2} - \ldots - \beta_m x_m x_1^{n-2} = x_1^{n-1}\{\alpha_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \ldots - \beta_m x_m\},$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{n-1}(x_2^{n-1} - \beta_2 x_1^{n-1}), \ldots, \varphi_m = \frac{1}{n-1}(x_m^{n-1} - \beta_m x_1^{n-1}).$$

Setzen wir $x_1 = 1$ in den φ, so sind die Aggregate der höchsten Glieder von $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$:

$$\frac{1}{n-1} x_2^{n-1}, \ldots, \frac{1}{n-1} x_m^{n-1}.$$

Ihre Resultante muß von 0 verschieden sein. Denn sonst würde das Gleichungssystem

$$\frac{1}{n-1} x_2^{n-1} = 0, \ldots, \frac{1}{n-1} x_m^{n-1} = 0$$

ein solches Lösungssystem besitzen, in dem entweder x_2, oder $x_3, \ldots$, oder x_m von 0 verschieden ist. Daher ist auf die Diskriminante von F die Darstellung (2) anwendbar. Ist ε eine primitive $(n-1)$-te Einheitswurzel, so sind die $\mu = (n-1)^{m-1}$ Lösungssysteme der Gleichungen

$$x_2^{n-1} - \beta_2 = 0, \ldots, x_m^{n-1} - \beta_m = 0$$

durch die Formeln gegeben

$$x_2 = \varepsilon^{p_2} \sqrt[n-1]{\beta_2}, \ldots, x_m = \varepsilon^{p_m} \sqrt[n-1]{\beta_m},$$

in denen $p_2, \ldots, p_m$ unabhängig voneinander alle Werte $0, 1, \ldots, n-1$ annehmen können. Die Diskriminante von F ist dann abgesehen von einem von 0 verschiedenem Zahlenfaktor gleich

$$\prod_{p_2, \ldots, p_m} \left(\alpha_1 - \varepsilon^{p_2} \beta_2^{\frac{n}{n-1}} - \varepsilon^{p_3} \beta_3^{\frac{n}{n-1}} - \ldots - \varepsilon^{p_m} \beta_m^{\frac{n}{n-1}}\right). \tag{3}$$

Da Δ für $n = 2$ in bezug auf jedes der α linear und unsere Behauptung daher trivial ist, können wir $n > 2$ annehmen. Unter dieser Annahme werden wir zeigen, daß der Ausdruck (3) durch kein von α_1 abhängiges Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ teilbar ist, dessen Grad in bezug auf α_1 kleiner wäre als $\mu = (n-1)^{m-1}$. In der Tat ist (3) ein Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$. Es sei $P(\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ ein von α_1 abhängiges absolut irreduzibles Polynom in $\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, welches in (3) als Teiler enthalten ist. Dann hat P als Polynom in α_1 für jedes Wertsystem von $\beta_2, \ldots, \beta_m$ wenigstens eine der Zahlen

$$\varepsilon^{p_2} \beta_2^{\frac{n}{n-1}} + \ldots + \varepsilon^{p_m} \beta_m^{\frac{n}{n-1}} \tag{4}$$

als Nullstelle. Ich setze nun in P

$$\beta_2 = \gamma_2^{n-1}, \ldots, \beta_m = \gamma_m^{n-1}$$

und behaupte, daß das Polynom $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ als Funktion von α_1 für *unbestimmte* $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ wenigstens einen der Ausdrücke

$$\varepsilon^{p_2} \gamma_2^n + \ldots + \varepsilon^{p_m} \gamma_m^n \tag{5}$$

zur Wurzel besitzt. Denn sonst würde das Produkt

$$\prod_{p_2, \ldots, p_m} P(\varepsilon^{p_2} \gamma_2^n + \ldots + \varepsilon^{p_m} \gamma_m^n, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$$

nicht identisch in den γ verschwinden, daher würde es für ein Wertsystem der γ von 0 verschieden sein, dann würde aber für die entsprechenden β das Polynom $P(\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_m)$ keine der Zahlen (4) zur Wurzel haben. Hat aber $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ einen Ausdruck (5) zur Wurzel, so bedenken wir, daß es unverändert bleibt, wenn man die γ mit beliebigen

$(n-1)$-ten Einheitswurzeln multipliziert. Dadurch können wir aber aus einem Ausdruck (5) alle μ Ausdrücke (5) erhalten, die also alle Wurzeln von $P(\alpha_1, \gamma_2^{n-1}, \ldots, \gamma_m^{n-1})$ sind. Daher muß P in bezug auf α_1 wenigstens vom Grade $\mu = (n-1)^{m-1}$ sein, w. z. b. w.

Man leitet aus der hiermit bewiesenen Irreduzibilität von $\Delta(A_i)$ ohne Schwierigkeit die folgende charakteristische Eigenschaft der Diskriminanten ab:

Man setze in $F(x_1, \ldots, x_m)$ für x_1 den Wert 1 ein. Dann sind die partiellen Ableitungen des entstehenden Polynoms nach $x_2, \ldots, x_m$ bzw. gleich $\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m)$, $\varphi_3(1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m)$. *Dann gilt für $\Delta(A_i)$ die Darstellung*

$$\Delta(A_i) = M_1(A_i, x_2, \ldots, x_m) F(1, x_2, \ldots, x_m) + M_2(A_i, x_2, \ldots, x_m)$$
$$\varphi_2(1, x_2, \ldots, x_m) + \ldots + M(A_i, x_2, \ldots, x_m) \varphi_m(1, x_2, \ldots, x_m),$$

in der $M_1, M_2, \ldots, M_m$ Polynome in $A_i, x_2, \ldots, x_m$ sind, und jedes irreduzible Polynom in den A_i, welches eine solche Darstellung zuläßt, unterscheidet sich von $\Delta(A_i)$ nur um eine multiplikative Konstante.

(Eingegangen am 22. März 1919.)