Werk

Titel: Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnu...

Autor: L., BIEBERBACH.

Jahr: 1919

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0003|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über eine Vertiefung des Picardschen Satzes bei ganzen Funktionen endlicher Ordnung.

Von

Ludwig Bieberbach in Frankfurt a. M.

1. Die Ergebnisse, welche ich kürzlich[1]) über schlichte Abbildungen von Winkelräumen durch ganze Funktionen endlicher Ordnung erhalten habe, legten mir die Frage nahe, ob nicht im Gebiete des Picardschen Satzes Ähnliches gelten möchte. Zunächst war ja die Beobachtung, daß es ganze rationale Funktionen eines jeden Grades gibt, deren sämtliche Null- und Einsstellen der negativen reellen Achse angehören, etwas entmutigend. Aber bei weiterem Zusehen erkannte ich doch, daß ähnlich wie bei der Frage der schlichten Abbildung von der Ordnung $\frac{1}{2}$ an die ganzen Funktionen endlicher Ordnung schon in gewissen von der Vollebene verschiedenen Winkelräumen alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft annehmen. Für Ordnungen ϱ zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 hat sich die Maximalöffnung eines von Null- und Einswerten freien Winkelraumes zu $\frac{1}{\varrho}\pi$ ergeben, während jede Funktion einer Ordnung $\varrho > 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)\pi$ übersteigt, höchstens einen Wert auslassen kann. Die hier angegebenen Schranken für die Öffnungen der Winkelräume erwiesen sich zudem als die genauen. Es gibt also ganze Funktionen, die gerade in den angegebenen Winkelräumen zwei Werte auslassen.

2. Herr P. Lévy[2]) hat folgende scharfe Fassung eines bekannten Schottkyschen Satzes gefunden:

Wenn $f(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \ldots$ für $|\zeta| < 1$ regulär ist und in diesem Kreise die Werte Null und Eins ausläßt, so gilt

$$|\log f(\zeta)| < \frac{\varkappa(a_0)}{1-|\zeta|},$$

[1]) L. Bieberbach, Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 158—170.

[2]) P. Lévy, Remarques sur le théorème de M. Picard, Bull. de la soc. math. de France, Bd. 40 (1912), S. 25—39, insb. S. 30.

wo $\varkappa(a_0)$ eine gewisse nur von a_0 abhängige, also für alle diese $f(\zeta)$ und alle ζ gleiche Zahl bedeutet[3]).

Ganz analog wie in meiner in der Fußnote[1]) genannten Arbeit (vgl. § 2, S. 162—165) über die schlichte Abbildung von Winkelräumen durch ganze Funktionen schließt man hieraus:

Wenn $f(z)$ in einem Winkelraum $|\arg z| < \alpha\frac{\pi}{2}$ der Öffnung $\alpha\pi$ regulär ist und in ihm die Werte Null und Eins ausläßt, so gilt in jedem Teilwinkelraum $|\arg z| \leqq \vartheta\frac{\pi}{2} < \alpha\frac{\pi}{2}$ für alle genügend großen $|z|$

$$|\log f(z)| < \varkappa_1 |z|^{1/\alpha},$$

wobei $\varkappa_1 = \varkappa_1(\vartheta)$ eine von der Öffnung des Teilwinkelraumes und von der Funktion $f(z)$ in hier nicht näher zu erörternder Weise abhängige Zahl bedeutet.

Daraus ergibt sich, daß unter den gleichen Bedingungen

$$(1) \qquad |f(z)| < e^{\varkappa_1 |z|^{1/\alpha}}$$

gilt. Diese Ungleichheit gilt also für große $|z|$ in jedem Teilraum eines Winkels der Öffnung $\alpha\pi$, in welchem die daselbst reguläre Funktion die Werte Null und Eins ausläßt.

Man darf nun aber hieraus nicht schließen, daß *nur* bei ganzen Funktionen, deren Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ nicht übersteigt, ein Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ von Null- und Einsstellen frei sein kann. Vielmehr ist erst noch zu untersuchen, inwieweit eine Beschränkung des Wachstums einer ganzen Funktion in einem Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ ihre Ordnung zu beeinflussen vermag. Ich will hier diese vielleicht auch an sich interessante Frage nur insoweit erörtern, als es für meine auf die Vertiefung des Picardschen Satzes zielenden Zwecke erforderlich ist.

3. Es sei also $f(z)$ eine ganze Funktion der Ordnung $\varrho > \frac{1}{\alpha}$. Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt also von einem gewissen $|z|$ an

$$|f(z)| < e^{|z|^{\varrho+\varepsilon}}.$$

Ferner sei für $0 < \arg z < \vartheta\frac{\pi}{2}$ und für $2\pi - \vartheta\frac{\pi}{2} < \arg z < 2\pi$ $(\vartheta < \alpha)$ die Ungleichung (1) erfüllt. Wird dann $z = re^{i\varphi}$ und $(-z)^{1/\alpha} = r^{1/\alpha} e^{i\frac{\varphi-\pi}{\alpha}}$ gesetzt für $0 < \varphi < 2\pi$, so gilt nach (1) für große $|z|$ auf den Geraden

[3]) Herr Schottky hat in seiner berühmten Originalarbeit, Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen, Sitzungsber. der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1904, S. 1244—1262 (S. 1256) statt der ersten Potenz von $\frac{1}{1-|\zeta|}$ nur die vierte erhalten, ein Ergebnis, das für meine Zwecke noch zu schwach ist.

$$\varphi = \eta \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \varphi = 2\pi - \eta \frac{\pi}{2} \qquad (0 < \eta < \vartheta)$$

$$(2) \qquad |f(z)| < e^{\cos \frac{\varkappa_1}{\frac{2-\eta}{\alpha}\frac{\pi}{2}} (-z)^{1/\alpha}},$$

wenn, was zulässig ist, η so gewählt wird, daß $\cos\left(\frac{2-\eta}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$ ist. Ich betrachte nun für $\eta \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ die Hilfsfunktion

$$F(z) = \frac{f(z)}{e^{\beta(-z)^{1/\alpha}}} \qquad \left(\beta = \frac{\varkappa_1}{\cos\left(\frac{2-\eta}{\alpha}\frac{\pi}{2}\right)}\right).$$

Auf den Geraden $\varphi = \eta \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ ist sie jedenfalls beschränkt. Denn auf diesen Geraden ist wegen (2)

$$|F(z)| < 1.$$

Im Winkelraum $\eta \frac{\pi}{2} < \varphi < 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ dagegen ist jedenfalls

$$\left|e^{\beta(-z)^{1/\alpha}}\right| \geqq e^{-|z|^{1/\alpha+\varepsilon}}$$

für jedes positive ε von einem gewissen $|z|$ an. Denn es ist

$$\left|e^{\beta(-z)^{1/\alpha}} e^{|z|^{1/\alpha+\varepsilon}}\right| = e^{|z|^{1/\alpha}\left\{|z|^{\varepsilon} + \beta \cos\frac{\varphi-\pi}{\alpha}\right\}},$$

und hier strebt wegen $\varepsilon > 0$ die rechte Seite mit $|z|$ gegen unendlich. Daher wird

$$|F(z)| < e^{|z|^{\varrho+\varepsilon} + |z|^{1/\alpha+\varepsilon}}.$$

Die Funktion $F(z)$ hat also wegen $\varrho > \frac{1}{\alpha}$ in $\eta \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq 2\pi - \eta \frac{\pi}{2}$ höchstens die Ordnung ϱ. Da sie aber, wie wir sahen, am Rande dieses Winkelraumes beschränkt ist, so ist sie nach einem Satze von Phragmén und Lindelöf[4]) auch im Inneren des Winkelraumes beschränkt, sobald $(2-\eta)\varrho < 1$ ist. Denn aus $|F(z)| < 1$ folgt $|f(z)| < e^{|\beta||z|^{1/\alpha}}$. Für $\eta \to \alpha$ folgt hieraus, daß $f(z)$ durchweg von einer Ordnung wäre, die $\frac{1}{\alpha}$ nicht übertrifft. Daher muß $(2-\alpha)\varrho \geqq 1$ sein. So haben wir den

---

[4]) E. Phragmén et E. Lindelöf, Sur une extension d'un principe classique de l'analyse, Acta mathematica, Bd. 31 (1908), S. 381—408 (S. 385). Der Satz lautet: Wenn eine Funktion $f(z)$ in einem Winkelraum der Öffnung $\gamma\pi$ regulär und an seinem Rande beschränkt ist, wenn außerdem im Inneren des Winkelraumes $|e^{-|z|^{\varrho}} f(z)|$ beschränkt ist, während γ der Bedingung $\gamma\varrho < 1$ genügt, so liegt $|f(z)|$ auch im Inneren des Winkelraumes unterhalb derselben Schranke wie am Rande.

Satz I′: *Wenn eine ganze Funktion der Ordnung ϱ in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ von Null und Eins verschieden ist, so muß entweder $\varrho \leqq \frac{1}{\alpha}$ oder $\varrho \geqq \frac{1}{2-\alpha}$ sein.*

Sie muß also in dem Restraum um so stärker wachsen, wenn sie in dem Winkel der Öffnung $\alpha\pi$ in ihrem Wachstum in der angegebenen Weise beschränkt sein soll.

Ich bringe die Kurven $\varrho = \frac{1}{\alpha}$ und $\varrho = \frac{1}{2-\alpha}$ in der Fig. 1 zur Anschauung und schraffiere die nach Satz I′ in Betracht kommenden ϱ-Werte. Halbebenen und kleinere Winkelräume können also bei allen Ordnungen von Null- und Einsstellen frei bleiben, während größere Winkelräume nur bei gewissen aus der Figur ersichtlichen Ordnungen frei bleiben können. Die folgende Fig. 2 bringt noch die zu jeder Ordnung ϱ gehörige Maximalöffnung eines von Null- und Einsstellen freien Winkelraumes zur Anschauung. Da

$$f(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{\beta - \alpha}$$

die Werte Null und Eins ausläßt, wenn $\varphi(z)$ die α und β meidet, da $f(z)$ ferner dieselbe Ordnung wie $\varphi(z)$ besitzt, so kann der Satz I′ auch so ausgesprochen werden:

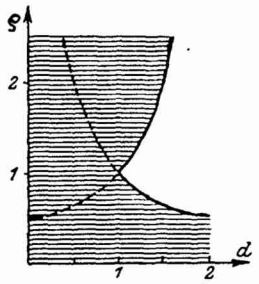

Fig. 1.

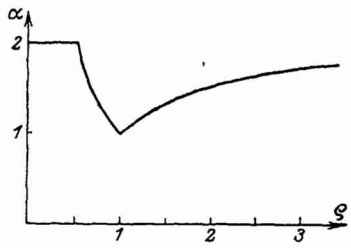

Fig. 2.

Satz I: *Jede ganze Funktion der Ordnung ϱ nimmt für $\frac{1}{2} \leqq \varrho \leqq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\frac{1}{\varrho}\pi$ übersteigt, für $\varrho \geqq 1$ in jedem Winkelraum, dessen Öffnung $\pi\left(2 - \frac{1}{\varrho}\right)$ übersteigt, alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft an.*

Bemerkung: Die angestellten Überlegungen lassen sich sofort auf irgendwelche Funktionen übertragen, die in der Umgebung einer isolierten singulären Stelle von endlicher Ordnung sind.

4. Ich gehe nun zu der weiteren Frage über, ob die nach Satz I möglich erscheinenden Fälle der von Null- und Einsstellen freien Winkelräume wirklich eintreten. Bei der dazu nötigen Untersuchung leisten

wieder (wie a. a. O.[1])) die Mittag-Lefflerschen[5]) Funktionen $E_\alpha(z)$ gute Dienste. Durch Funktionen, welche mit den $E_\alpha(z)$ nahe zusammenhängen, werden für $\varrho > \frac{1}{2}$ die aus Fig. 2 ersichtlichen Öffnungsschranken erreicht. Man kann dies, wenn man will, den Untersuchungen von Wiman[6]) entnehmen. Da aber die dort gegebenen Beweise oft die wünschenswerte Strenge vermissen lassen und zudem das Resultat dort nicht unmittelbar abzulesen ist, ziehe ich es vor, in Anlehnung an die von Wiman verwendete Methode, meine Behauptungen ausführlich zu rechtfertigen.

5. Die Funktionen $E_\alpha(z)$ werden am besten durch die Integraldarstellung

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}d\zeta}{\zeta - z}$$

erklärt. Als Integrationsweg ist dabei der in der Fig. 3 verzeichnete zu wählen; z liegt links von S. Im Integranden ist der auf der reellen positiven Achse positive Zweig von $e^{\zeta^{1/\alpha}}$ zu nehmen. Aus dieser Integraldarstellung lassen sich alle Eigenschaften von $E_\alpha(z)$ leicht ablesen, so die Potenzreihendarstellung

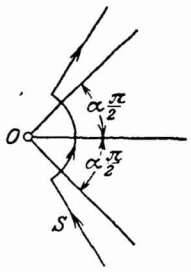

Fig. 3.

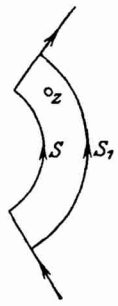

Fig. 4.

$$E_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\Gamma(1+\alpha\nu)}.$$

Also ist z. B.

$$E_1(z) = e^z \quad \text{und} \quad E_2(z) = \tfrac{1}{2}\left(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}\right).$$

Wir wollen uns aber fortan auf $0 < \alpha < 2$ beschränken.

Es möge zunächst das Verhalten von $E_\alpha(z)$ für $|\arg z| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ untersucht werden. Aus Fig. 4 liest man ab:

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_{S_1} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_{S_1 - S} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}d\zeta}{\zeta - z},$$

also

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}}. \tag{3}$$

[5]) Mittag-Leffler, Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène (cinquième note), Acta mathematica, Bd. 29 (1904), S. 101–181 (S. 132–137).

[6]) A. Wiman, Über die Nullstellen der Funktionen $E_\alpha(x)$, Acta mathematica, Bd. 29 (1905), S. 217–234.

Daher wird

$$\left|E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha}\int_S \left|\frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} d\zeta}{\zeta - z}\right| = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\alpha}\int_S \frac{|e^{\zeta^{1/\alpha}}|\,|d\zeta|}{|z|\,\left|1 - \frac{\zeta}{z}\right|}.$$

Wenn aber ζ auf S liegt und z auf den Winkelraum $|\arg z| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ rechts von S beschränkt ist und gleichzeitig einen nicht zu kleinen absoluten Betrag hat, so kann sich $\frac{\zeta}{z}$ nicht beliebig der 1 nähern. Da ferner auf den geradlinigen Teilen von S

$$|e^{\zeta^{1/\alpha}}| = e^{\cos\frac{\varphi}{\alpha}|\zeta|^{1/\alpha}} \to 0$$

strebt, wegen $|\arg\zeta| = |\varphi| > \alpha\frac{\pi}{2}$, so haben wir für den Winkelraum $|\arg z| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ von einem gewissen $|z| = R$ an:

$$(4) \qquad \left|E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| \leqq \frac{M}{|z|}.$$

Hier ist M eine passend gewählte positive Zahl. Man darf jedenfalls $R > 4M$ wählen.

Setzt man nun $z = |z| e^{i\varphi}$, so wird für $|\varphi| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$

$$\left|\frac{1}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| = \frac{1}{\alpha} e^{\cos\frac{\varphi}{\alpha}|z|^{1/\alpha}} \geqq \frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$(5) \qquad \left|\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| > 2 \quad \text{und} \quad \left|\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1\right| > 1 \quad \text{für} \quad |\varphi| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}.$$

Wähle ich nun aber $|z| > R$, so wird nach (4) in $|\varphi| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$

$$(6) \qquad \left|4E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| < 1.$$

In $|\varphi| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ wird daher nach (5) und (6)

$$|4E_\alpha(z)| = \left|\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} + \left(4E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right)\right| \geqq \left|\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| - \left|4E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| > 1$$

und

$$|4E_\alpha(z) - 1| = \left|\left(\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1\right) + \left(4E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right)\right| \geqq \left|\frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}} - 1\right| - \left|4E_\alpha(z) - \frac{4}{\alpha} e^{z^{1/\alpha}}\right| > 0.$$

Also ist $4E_\alpha(z)$ im Gebiete $|z| > 4M$, $|\arg z| \leqq \alpha\frac{\pi}{2}$ von Null und Eins verschieden. Damit haben wir eine Funktion der Ordnung $\frac{1}{\alpha}$ gefunden $\left(\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{2}\right)$, die in einem Winkelraum der Öffnung $\alpha\pi$ die Werte Null und

Eins ausläßt. Damit ist gezeigt, daß die in Satz I für $\frac{1}{2} < \varrho \leq 1$ gegebene Schranke die genaue ist. So haben wir den

Satz II′: *Es gibt Funktionen der Ordnung* ϱ $(\frac{1}{2} < \varrho \leqq 1)$, *nämlich die Funktionen* $4\,E_{1/\varrho}(z)$, *die in einem Winkelraum der Öffnung* $\frac{1}{\varrho}\pi$ *und auf seinem Rande die Werte Null und Eins auslassen.*

Für $\varrho > 1$ dagegen hat unsere Betrachtung noch nicht ergeben, daß die in Satz I genannte Schranke die genaue ist. In diesen Fällen werden wir die Antwort finden, wenn wir $E_\alpha(z)$ in demjenigen Winkelraum betrachten, welcher den eben herangezogenen zu 2π ergänzt. Das ist der Winkelraum, in welchem $E_\alpha(z)$ abnimmt, während es in dem eben betrachteten zunahm. Für größere Winkelräume nämlich, welche den eben betrachteten enthalten, versagt unser Schluß, weil dann $E_\alpha(z)$ am Rande stärker abnimmt als $\frac{1}{z}$.

6. Es möge also nun $\alpha > 1$ und $|\arg z| < \alpha\frac{\pi}{2}$ sein. Weil

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z} + \frac{\zeta}{(\zeta - z)z}$$

ist, so hat man

$$E_\alpha(z) = -\frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_S e^{\zeta^{1/\alpha}}\,d\zeta + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}\zeta\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Nun aber wird

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\alpha}\int_S e^{\zeta^{1/\alpha}}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\substack{S' \\ (\eta = \zeta^{1/\alpha})}} e^{\eta}\eta^{\alpha-1}\,d\eta = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Daher wird in jedem Teilbereich des Abnahmeraumes der Funktion $E_\alpha(z)$, welcher zur *Linken* von S liegt,

$$E_\alpha(z) = -\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}\zeta\,d\zeta}{\zeta - z}.$$

Also wird

$$\left| E_\alpha(z) + \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \right| \leqq \frac{M}{|z|^2}.$$

Dabei hängt aber nun M von der Größe desjenigen Teilwinkelraumes des Abnahmeraumes ab, für welchen wir die Abschätzung vornehmen wollen; denn man muß ja S so verschieben, daß es denselben nicht trifft. M könnte also über alle Grenzen wachsen, wenn sich die Öffnung des Teilwinkelraumes dem Werte $(2-\alpha)\pi$ nähert. Die vorhin angewandte Schlußweise läßt also nun nur erkennen, daß es ganze Funktionen der Ordnung ϱ gibt, nämlich $E_{1/\varrho}(z) - 1$, welche in gewissen Winkelräumen, deren Öffnung

beliebig wenig von $\left(2-\frac{1}{\varrho}\right)\pi$ abweicht, die Werte Null und Eins auslassen. Man wähle nur $|z|$ so groß, daß

$$\left|\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right| < \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{M}{|z|^2} < \tfrac{1}{2}$$

wird. Dann wird

$$|E_\alpha(z)-1| = \left|\left(-1-\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right)+\left(E_\alpha(z)+\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right)\right| > 1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}=0$$

und ebenso

$$|E_\alpha(z)-2| > 1.$$

Die Funktionen $E_\alpha(z)-1$ lassen also in gewissen zur negativen reellen Achse symmetrischen Winkelräumen, deren Öffnung beliebig wenig von $(2-\alpha)\pi$ abweicht, die Werte Null und Eins aus.

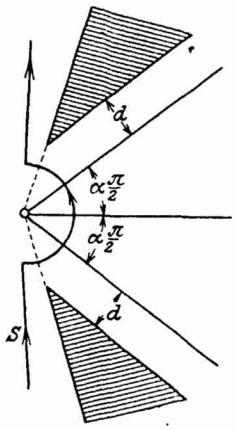

Fig. 5.

Die Überlegung zeigt aber noch nicht, daß diese Funktionen in gewissen Winkelräumen, deren Öffnung *genau* den Wert $(2-\alpha)\pi$ hat, die Werte Null und Eins auslassen. Um das zu erkennen, muß man die eben verwendete Abschätzung noch verschärfen. Es kommt offenbar darauf an, zu zeigen, daß man d so wählen kann, daß $E_\alpha(z)-1$ in zwei Winkelräumen von der Art der in Fig. 5 schraffierten die Werte Null und Eins meidet. Um das einzusehen, legen wir S so, wie es in der Fig. 5 angedeutet ist, und wollen d nun passend wählen. Wenn dann z einem der schraffierten Bereiche angehört, also rechts von S liegt, so tragen wir in (3)

$$\frac{1}{\zeta-z} = -\frac{1}{z}+\frac{\zeta}{(\zeta-z)z}$$

ein und erhalten

$$E_\alpha(z) = \frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\frac{1}{2\pi i}\int_S \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}}\zeta\, d\zeta}{\zeta-z}.$$

Also wird wie vorhin

$$\left|E_\alpha(z)-\frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}}+\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right)\right| \leqq \frac{M}{|z|^2}.$$

Für $|z| > \sqrt{2M}$ ist also

$$\left|E_\alpha(z)-\frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}}-\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right)\right| < \tfrac{1}{2}.$$

Wir werden nachher zeigen, daß man die schraffierten Bereiche so wählen kann, daß darin

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right)\right| < \tfrac{1}{2}$$

bleibt. Setzt man außerdem noch $|z| > \sqrt{2}\,M$ voraus, so kann man wie oben erkennen, daß $E_\alpha(z) - 1$ in den schraffierten Räumen die Werte Null und Eins ausläßt. Denn es wird ja

$$E_\alpha(z) - 1 = -1 + \frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right)$$

$$+\left(E_\alpha(z) - \frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\right)\right)\Bigg| > 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} > 0.$$

Und ebenso wird

$$|E_\alpha(z) - 2| > 1.$$

Da aber die schraffierten Winkelräume die vorhin herangezogenen Teilwinkelräume des Abnahmeraumes zum Teil überdecken, so haben wir den

Satz II″: *Es gibt Funktionen einer jeden Ordnung $\varrho > 1$, nämlich die Funktionen $E_{1/\varrho}(z) - 1$, welche in einem passend gewählten Winkelraum der Öffnung $\left(2 - \frac{1}{\varrho}\right)\pi$ und auf seiner Grenze die Werte Null und Eins auslassen.*

7. Alles kommt also darauf an, zu zeigen, daß für hinreichend große d in den schraffierten Bereichen der Fig. 5

$$\left|\frac{1}{\alpha}\left(e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right)\right| < \tfrac{1}{2}$$

bleibt. Dies aber kann man wie folgt erkennen:

Wir hatten oben schon bemerkt, daß man denjenigen Zweig der Funktion $e^{z^{1/\alpha}}$ nehmen muß, welcher auf der positiven reellen Achse positiv ist. Derselbe ist also in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen z-Ebene eindeutig erklärt. Setzen wir

$$w = z^{1/\alpha},$$

so geht vermöge der durch diese Funktion vermittelten Abbildung diese aufgeschnittene z-Ebene, wegen $\alpha < 1$, in ein bei $w = 0$ gewundenes Riemannsches Flächenstück der Öffnung $\frac{2\pi}{\alpha}$ über. Dasselbe enthält also eine volle w-Ebene, namentlich also auch die beiden in Fig. 6 schraffierten Quadranten, in welchen $\Re(w) < -\beta$ sei. Die Kurven

$$\Re(w) = -\beta, \quad \Im(w) > 0$$

und

$$\Re(w) = -\beta, \quad \Im(w) < 0$$

aber gehen bei der Abbildung $z = w^\alpha$ in zwei Kurven der z-Ebene über,

welche Asymptoten mit den Richtungen $\frac{\alpha\pi}{2}$ und $-\frac{\alpha\pi}{2}$ besitzen. Ich habe sie schematisch in Fig. 7 zusammen mit den Bildern der beiden schraffierten Quadranten dargestellt. In den schraffierten Bildern der beiden Quadranten ist nun jedenfalls

$$\left|e^{z^{1/\alpha}}\right| < e^{-\beta}.$$

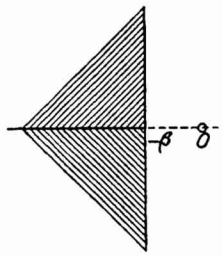

Fig. 6.

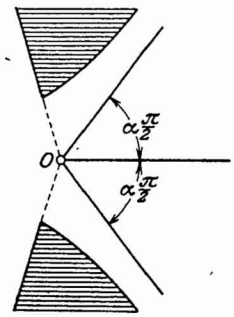

Fig. 7.

Das kann also durch hinreichend große Wahl von β kleiner als $\frac{\alpha}{4}$ gemacht werden. Wählt man also die in Fig. 5 schraffierten Bereiche so, daß sie den beiden schraffierten Quadrantenbildern angehören — dazu braucht man nur d hinreichend groß zu wählen —, so ist in denselben nun auch

$$\left|\frac{1}{\alpha}e^{z^{1/\alpha}}\right| < \frac{1}{4}.$$

Man kann nun aber β auch so groß wählen, daß in den Quadrantenbildern

$$\left|\frac{1}{\alpha}\frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right| < \frac{1}{4}$$

wird.

Wählt man dann die schraffierten Bereiche der Fig. 5 so, daß sie den Quadrantenbildern angehören, so ist darin tatsächlich

$$\frac{1}{\alpha}\left|e^{z^{1/\alpha}} - \frac{1}{z}\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\right| < \frac{1}{2}.$$

Das war aber gerade noch zu beweisen, um Satz II'' voll zu begründen.

8. Nun bleiben noch die Ordnungen $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ zu betrachten. Für $\varrho = \frac{1}{2}$ kann man als Beispiel die Funktion

$$E_2(z) = \tfrac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}})$$

nehmen. *Ihre Null- und Einsstellen gehören sämtlich der negativen reellen Achse an.* Wenn nämlich

$$\tfrac{1}{2}(e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}) = a$$

sein soll, so muß

$$e^{2\sqrt{z}} - 2ae^{\sqrt{z}} + 1 = 0,$$

also

$$e^{\sqrt{z}} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

sein. Für reelle a mit $|a| \leqq 1$ sind dies aber komplexe Zahlen vom Betrage Eins. Also muß $\sqrt{z} = iq$ also $z = -q^2$ sein, wie wir beweisen wollten.

Wenn man nun versucht, auf dem bisher verfolgten Wege weiter zu gehen, um auch die Ordnungen $\varrho < \frac{1}{2}$ mit Hilfe der Funktionen $E_\alpha(z)$ zu erledigen ($\alpha > 2$), so kommt man bald in große Weitläufigkeiten. Ich ziehe es daher vor, diese Fälle auf einem anderen wesentlich bequemeren Wege zu behandeln.

9. Mit $P_\varrho(z)$ will ich hier die folgende ganze Funktion der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ bezeichnen:

$$P_\varrho(z) = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^\varrho}\right).$$

Der Exponent ϱ soll dabei *größer* als Zwei sein. Ich will zunächst zeigen, daß die sämtlichen Extremwerte, welche diese Funktion für positive reelle z zwischen den verschiedenen Nullstellen n^ϱ annimmt, dem Betrage nach eine gewisse wesentlich positive Schranke überschreiten. Man kann dies allerdings den sehr eindringenden Abschätzungen dieser Funktion entnehmen, welche Hardy[7]) gefunden hat. Da aber das eben angegebene Resultat wesentlich einfacher gewonnen werden kann, will ich es rasch herleiten. Ich betrachte dazu den Quotienten

$$\frac{P_\varrho(z)}{\sin \pi z^{1/\varrho}} = \frac{\prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n^\varrho}\right)}{\pi z^{1/\varrho} \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right)}.$$

Hier ist stets für $z > 0$

$$\left|1 - \frac{z}{n^\varrho}\right| \geqq \left|1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right|.$$

Denn sei 1) $z < n^\varrho$, so ist

$$\left|1 - \frac{z}{n^\varrho}\right| = 1 - \frac{z}{n^\varrho} \quad \text{und} \quad \left|1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right| = 1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}.$$

[7]) Vgl. Hardy, On the function $P_\varrho(z)$, The quarterly Journal of pure and applied mathematics, Bd. 37 (1906), S. 146–172.

Ferner ist aber

$$\frac{z}{n^\varrho} < \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}.$$

Denn aus $z < n^\varrho$ folgt $z^{1-2/\varrho} < n^{\varrho-2}$.

Sei 2) $z = n^\varrho$, so wird

$$\lim_{z \to n^\varrho} \frac{1 - \frac{z}{n^\varrho}}{1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}} = \frac{\varrho}{2} > 1$$

Sei (3) $z > n^\varrho$, so wird

$$\left|1 - \frac{z}{n^\varrho}\right| = \frac{z}{n^\varrho} - 1 \quad \text{und} \quad \left|1 - \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}\right| = \frac{z^{2/\varrho}}{n^2} - 1.$$

Ferner ist

$$\frac{z}{n^\varrho} > \frac{z^{2/\varrho}}{n^2}.$$

Denn aus

$$z > n^\varrho \quad \text{folgt} \quad z^{1-2/\varrho} > n^{\varrho-2}.$$

Daher ist stets

$$\left|\frac{P_\varrho(z)}{\sin \pi z^{1/\varrho}}\right| > \frac{1}{\pi} z^{-1/\varrho} \left|\frac{1-z}{1-z^{2/\varrho}}\right| \left|\frac{1-\frac{z}{2^\varrho}}{1-\frac{z^{2/\varrho}}{2^2}}\right| \cdots \left|\frac{1-\frac{z}{\varkappa^\varrho}}{1-\frac{z^{2/\varrho}}{\varkappa^2}}\right| \sim \frac{1}{\pi} 2^{2-\varrho} \cdot 3^{2-\varrho} \cdots \varkappa^{2-\varrho} \cdot z^{\varkappa - \frac{2\varkappa+1}{\varrho}},$$

wächst also mit z über alle Grenzen[8]). Da aber zwischen je zwei Nullstellen von $\sin \pi z^{1/\varrho}$ stets eine Stelle liegt, wo der absolute Betrag dieser Funktion gleich 1 wird, so wachsen die Extremalwerte von $P_\varrho(z)$ über alle Grenzen. Namentlich liegen sie also alle oberhalb einer wesentlich positiven Schranke, wie wir beweisen wollten.

10. Auf dies Ergebnis gestützt, kann man nun leicht Funktionen einer jeden Ordnung $\varrho \leqq \frac{1}{2}$ konstruieren, deren sämtliche Null- und Einsstellen der positiven reellen Achse angehören. Ich will zunächst Polynome dieser Art bilden und betrachte dazu die Funktion

$$f_n(z) = 1 + \mu_n \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right). \quad (0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n)$$

Ihre Einsstellen liegen alle auf der positiven reellen Achse. μ_n soll so bestimmt werden, daß auch die Nullstellen alle der positiven reellen Achse angehören. Ich betrachte dazu die Funktion

$$\varphi_n(z) = \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)\left(1 - \frac{z}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{a_n}\right).$$

---

[8]) Wegen $\varrho > 2$ ist nämlich für hinreichend groß gewähltes $\varkappa$: $(\varrho - 2)\varkappa > 1$, also $\varkappa - \frac{2\varkappa+1}{\varrho} > 0$.

Zwischen je zwei Nullstellen derselben liegen gewisse Maxima und Minima. μ_n werde dann so gewählt, daß für $\mu_n \varphi_n(z)$ die absoluten Beträge aller dieser Extreme die Eins übertreffen. Dann wird zwischen je zweien solchen Extremen jedenfalls mindestens eine Nullstelle von $f_n(z)$ liegen, da ja die Maxima von φ_n Werte von f_n über zwei, die Minima aber Werte unter Null liefern. Den $n-1$ Extremen entsprechend haben wir also jedenfalls $n-2$ Nullstellen von $f_n(z)$ zwischen a_1 und a_n. Wähle ich nun noch — was mit den bisherigen Bedingungen durchaus verträglich ist — μ_n so, daß $1+\mu_n$ negativ wird, so ist für $z \geq 0$ erst recht $f_n(z) < 0$. Hier können also keine Nullstellen von $f_n(z)$ liegen, während eine weitere zwischen 0 und a_1 liegt, weil ja $f_n(a_1) = 1$ ist. So habe ich $n-1$ reelle Nullstellen von $f_n(z)$. Daher muß auch die letzte reell und nach allem Voraufgegangenen notwendig positiv sein.

Satz II‴: *Es gibt Polynome eines jeden Grades, deren sämtliche Null- und Einsstellen der positiven reellen Achse angehören.*

11. Von diesen Polynomen ausgehend, kann man nun auch leicht ganze Funktionen einer jeden Ordnung $\varrho < \frac{1}{2}$ konstruieren, deren Null- und Einsstellen ausschließlich der positiven reellen Achse angehören. Ich wähle dazu als Polynom $\varphi_n(z)$ zunächst den n-ten Abschnitt von $P_\varrho(z)$, setze also

$$\varphi_n(z) = (1-z)\left(1-\frac{z}{2^\varrho}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n^\varrho}\right).$$

Dann bilde ich hiermit ein $f_n(z)$ und gehe mit n über alle Grenzen. Ich muß dazu nur noch zeigen, daß ich $\mu_n = \mu$ von n unabhängig wählen kann. Das lassen aber gerade die Ausführungen von Nr. 9 erkennen. Denn die Extreme von $P_\varrho(z)$ sind dem Betrage nach kleiner als die im gleichen Intervalle $\varkappa^\varrho < z < (\varkappa+1)^\varrho$ $(\varkappa < n)$ gelegenen Extreme von $\varphi_n(z)$. Überhaupt gilt ja für $z < n^\varrho$

$$\varphi_n(z) > P_\varrho(z).$$

Denn für $z < n^\varrho$, $h > 0$ ist ja $0 < 1 - \frac{z}{(n+h)^\varrho} < 1$.

Wenn ich demnach μ so wähle, daß die Extreme von

$$\mu P_\varrho(z)$$

dem Betrage nach die Eins übertreffen, so übertreffen auch die durchweg größeren Extreme von $\mu\varphi_n(z)$ alle dem Betrage nach die Eins. Wird dann noch μ so gewählt, daß $1+\mu$ negativ ist, so liegen also alle Nullstellen und alle Einsstellen von

$$f_n(z) = 1 + \mu(1-z)\left(1-\frac{z}{2^\varrho}\right)\cdots\left(1-\frac{z}{n^\varrho}\right)$$

auf der positiven reellen Achse. Nun ist aber in jedem endlichen Teil der komplexen Ebene gleichmäßig

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = 1 + \mu P_\varrho(z).$$

Nach dem Satz von Rouché[9]) ergibt sich hieraus, daß auch alle Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu P_\varrho(z)$$

der positiven reellen Achse angehören.

12. Die eben verwendete Methode erlaubt es auch, Funktionen der Ordnung Null zu bilden, deren sämtliche Null- und Einsstellen auf der positiven reellen Achse liegen. Wir müssen dazu nur statt wie eben von $P_\varrho(z)$ jetzt von

$$Q(z) \prod_{n=1,2\ldots} \left(1 - \frac{z}{e^n}\right)$$

ausgehen. Wieder hat man zunächst zu zeigen, daß die zwischen positiven Nullstellen gelegenen Extreme dem Betrage nach oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen. Dazu betrachtet man diesmal den Quotienten

$$\frac{Q(z)}{\sin(\pi \log z)} = \frac{\Pi\left(1 - \frac{z}{e^n}\right)}{\pi \log z\, \Pi\left(1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}\right)}$$

und überzeugt sich, daß für $z = e^2$

$$\left| \frac{1 - \frac{z}{e^n}}{1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}} \right| \leq 1$$

ist. Denn sei 1. $z \leq e^n$, so wird $1 - \frac{z}{e^n} > 1 - \frac{(\log z)^2}{n^2} > 0$. Denn es ist $\frac{z}{e^n} < \frac{(\log z)^2}{n^2}$, und dies folgt aus $\frac{z}{(\log z)^2} < \frac{e^n}{n^2}$. Die Ableitung von $\frac{z}{(\log z)^2}$ ist nämlich $\frac{\log z - 2}{(\log z)^3}$ und diese ist für $z > e^2$ positiv. Für solche z wächst also der Ausdruck, hat also für $z = e^n$ seinen größten Wert $\frac{e^n}{n^2}$. Für $z < e^n$ ist also wirklich

$$\frac{z}{(\log z)^2} < \frac{e^n}{n^2}.$$

[9]) Dieser wichtige Satz lautet: Wenn $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei in einem abgeschlossenen Bereiche reguläre eindeutige Funktionen sind, und wenn am Rande desselben $|\varphi| < |f|$ ist, so hat $\varphi(z) + f(z)$ im Bereiche ebenso viele Nullstellen wie $f(z)$. Die hier in Betracht kommende Folgerung hat zuerst Herr Hurwitz (Math. Ann. 33 (1899), S. 247) aus dem Satz von Rouché gezogen. Vgl. auch meine Arbeit in dieser Zeitschrift Bd. 2 (1918), S. 158—170 (S. 167).

2. Ferner ist

$$\lim_{z \to e^n} \frac{1 - \frac{z}{e^n}}{1 - \frac{(\log z)^2}{n^2}} = \lim_{z \to e^n} \frac{z n^2}{2 e^n \log z} \sim .$$

3. Endlich sei $z > e^n$. Dann wird

$$\frac{z}{e^n} - 1 > \frac{(\log z)^2}{n^2} - 1 > 0.$$

Denn es ist $\frac{z}{e^n} > \frac{(\log z)^2}{n^2}$, weil $\frac{z}{(\log z)^2} > \frac{e^n}{n^2}$ ist. Die Ableitung von $\frac{z}{(\log z)^2}$ ist nämlich nach wie vor positiv, so daß $\frac{z}{(\log z)^2}$ für $z = e^n$ seinen kleinsten Wert $\frac{e^n}{n^2}$ hat.

Diese Überlegung zeigt nun wieder, daß für $z > e^2$

$$\frac{Q(z)}{\sin(\pi \log z)} > \frac{1}{\pi} \frac{1}{\log z} \left| \frac{1 - \frac{z}{e}}{1 - (\log z)^2} \right| \sim \frac{1}{\pi} \frac{1}{e} \frac{z}{(\log z)^4}.$$

Daraus folgt also wie vorhin, daß die absoluten Beträge der Extreme von $Q(z)$ tatsächlich alle oberhalb einer wesentlich positiven Schranke liegen. Das ermöglicht es aber nun, die Überlegungen von Nr. 11 zu wiederholen, um zu erkennen, daß man eine Zahl μ so wählen kann, daß sämtliche Null- und Einsstellen von

$$1 + \mu Q(z)$$

auf der positiven reellen Achse liegen.

Fassen wir also das Ergebnis der beiden letzten Nummern zusammen, so haben wir den

Satz II'''': *Man kann Funktionen einer jeden Ordnung* $0 \leq \varrho < \frac{1}{2}$ *bilden, deren sämtliche Null- und Einsstellen auf der positiven reellen Achse liegen.*

Diese vier Sätze zusammen liefern nun die folgende Ergänzung zu Satz I:

Satz II: *Polynome, ganze Funktionen der Ordnung Null und ganze Funktionen, deren Ordnung* $\frac{1}{2}$ *nicht übersteigt, können in beliebig großen Winkelräumen zwei Ausnahmewerte zulassen, derart, daß z. B. sämtliche Null- und Einsstellen der positiven reellen Achse angehören können.*

Liegt die Ordnung ϱ *einer ganzen Funktion zwischen* $\frac{1}{2}$ *und* 1, *so können passende Winkelräume der Öffnung* $\frac{1}{\varrho}\pi$ *einschließlich des Randes von Null- und Einsstellen frei bleiben. In jedem größeren Winkelraum*

aber nehmen diese Funktionen alle Werte bis auf höchstens eine Ausnahme unendlich oft an. Wenn endlich die Ordnung der ganzen Funktion größer oder gleich 1 *ist, so können passende Winkelräume der Öffnung* $\left(2 - \frac{1}{\varrho}\right)\pi$ *einschließlich des Randes zwei oder mehr Ausnahmewerte zulassen*[10]. *In jedem größeren Winkelraum aber werden wieder alle Werte mit höchstens einer Ausnahme unendlich oft angenommen.*

[10]) a. a. O. [1]) habe ich gezeigt, daß diese Winkelräume schlicht abgebildet werden können, daß es also ganze Funktionen gibt, die darin keinen Wert mehr als einmal annehmen.

(Eingegangen am 7. August 1918.)