Zur Analysis der unendlich vielen Variablen.

Zweite Abhandlung.

Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Von

Leon Lichtenstein in Berlin.

In einer vor einigen Jahren erschienenen Abhandlung habe ich gezeigt, daß sich die Existenz von Eigenwerten gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus der Hilbertschen Theorie vollstetiger quadratischer Formen mit unendlich vielen Variablen ohne Übergang durch die Integralgleichungen erschließen läßt[1]). Den Betrachtungen jener Arbeit liegt die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right)+qy+\lambda ky=0 \tag{1}$$

zugrunde. In (1) bezeichnet p eine in dem Intervalle $(0, \pi)$ erklärte positive, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, q eine stetige nicht positive, k eine beliebige stetige Funktion. In der erwähnten Arbeit werden im einzelnen folgende Randbedingungen betrachtet.

$$\text{A)}\ y(0)=0,\quad y(\pi)=0;\qquad \text{B)}\ \frac{dy(0)}{dx}=0,\quad \frac{dy(\pi)}{dx}=0;$$

$$\text{C)}\ y(0)=0,\quad \frac{dy(\pi)}{dx}=0;$$

$$\text{D)}\ \frac{dy(0)}{dx}-\gamma_1 y(0)=0,\ \frac{dy(\pi)}{dx}+\gamma_2 y(\pi)=0,\ (\gamma_1\geqq 0, \gamma_2\geqq 0, \gamma_1+\gamma_2>0).$$

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlichvielen Variabeln. I. Entwicklungssätze der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 38 (1914), S. 113–166. Diese Arbeit wird im folgenden als die erste Abhandlung bezeichnet.

Außer der Existenz der Eigenwerte wurde a. a. O. ein weitgehender Entwicklungssatz gewonnen. Für den besonders einfachen Fall der Randbedingungen A) lautet dieser Satz wie folgt:

Es möge $k(x)$ in keinem in $(0, \pi)$ gelegenen Intervall identisch verschwinden, und es sei $f(x)$ irgendeine in $(0, \pi)$ stetige, für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende Funktion, die überdies so beschaffen ist, daß die Reihe

$$(2) \qquad \sum_n n^2 \left(\int_0^\pi f(x) \sin nx\, dx \right)^2$$

konvergiert[2]).

Dann gilt die folgende für $0 \leqq x \leqq \pi$ gleichmäßig konvergierende Entwicklung

$$(3) \qquad f(\xi) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi) \int_0^\pi k f \varphi_\alpha dx,$$

unter λ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ die Eigenwerte, unter $\varphi_\alpha(x)$ die den Beziehungen

$$(4) \qquad \int_0^\pi k \varphi_\alpha \varphi_\beta dx = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \qquad \int_0^\pi k \varphi_\alpha^2 dx = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen verstanden. Es ist ferner

$$(5) \qquad \int_0^\pi k f^2 dx = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left(\int_0^\pi k f \varphi_\alpha dx \right)^2.$$

Wie aus den Betrachtungen der vorliegenden Arbeit hervorgeht, gilt ferner die weitere wichtige Entwicklung

$$(6) \qquad \int_0^\pi p \left(\frac{df}{dx} \right)^2 dx = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_0^\pi k f \varphi_\alpha dx \right)^2.$$

Diese Untersuchungen werden in der vorliegenden zweiten Abhandlung fortgesetzt. Es handelt sich jetzt um die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$(7) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda k u = 0.$$

Den folgenden Betrachtungen wird ein beschränktes Gebiet T in der Ebene $x-y$, das einfach oder mehrfach zusammenhängend sein kann, zugrunde gelegt. Die Begrenzung S von T soll aus einer endlichen Anzahl

[2]) Diese Bedingung ist, wie man weiß, der folgenden Bedingung gleichwertig: $f(x)$ hat eine quadratisch integrierbare Ableitung, und es gilt ferner

$$\int_0^x \frac{df(x)}{dx} dx = f(x).$$

geschlossener analytischer und regulärer Kurven bestehen. Die Funktion p ist in T und auf S positiv und nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig, die Funktion k ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und von beliebigem Vorzeichen. Als Randbedingung wird zunächst (Kapitel I) die Beziehung $u = 0$ auf S betrachtet[3]).

Die Existenz unendlich vieler Eigenwerte der Differentialgleichung (7) ist in dem besonderen Falle $p = 1$ zunächst von Herrn M. Mason unter Zuhilfenahme von Variationsbetrachtungen bewiesen worden[4]). Sie folgt, wenn k in $T+S$ längs einer endlichen Anzahl etwa analytischer und regulärer Kurven verschwindet, aus der Hilbertschen Theorie der polaren Integralgleichungen[5]). Weitere Beweise sind in den Untersuchungon von J. Marty[6]), Anna Johnson Pell[7]) und E. Garbe[8]) enthalten.

Während in der ersten Abhandlung von den Sätzen der Theorie linearer Differentialgleichungen kein Gebrauch gemacht wird, wird in der vorliegenden Arbeit angenommen, daß die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \mu\omega = 0, \tag{8}$$

etwa aus der Theorie der linearen Integralgleichungen, bereits feststeht. Die Bestimmung der Eigenwerte der allgemeineren Differentialgleichung (7) wird, wie in der ersten Abhandlung, auf die Untersuchung einer vollstetigen quadratischen Form mit unendlich vielen Variablen $K(X, X)$ zurückgeführt. Die Vollständigkeitsrelation und die Entwicklung der Form $K(X, Y)$ nach Eigenformen ergeben, in die Sprache der Theorie linearer Differentialgleichungen übersetzt, bemerkenswerte Sätze, die über die analogen von der Theorie der Integralgleichungen gelieferten Resultate erheblich hinausreichen.

Wir bezeichnen die irgendwie einfach geordneten Eigenwerte der

---

[3]) Diese Untersuchungen sollen in einer später erscheinenden dritten Abhandlung fortgesetzt werden.

[4]) Vgl. M. Mason, Sur les solutions satisfaisant à des conditions aux limites données de l'équation différentielle $\Delta u + \lambda A(x, y) u = f(x, y)$, Journal des Mathématiques 1904, S. 445–489.

[5]) D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Fünfte Mitteilung, Gött. Nachrichten 1906, S. 439–480 (S. 462–474).

[6]) J. Marty, C. R. 150 (1910), S. 515–518; 603–606; 1031–1033; 1499–1502.

[7]) A. J. Pell, Biorthogonal systems of functions, Transactions of the American Math. Society 12 (1911), S. 135–164; Applications of biorthogonal systems of functions to the theory of integral equations, a. a. O. S. 165–180.

[8]) E. Garbe, Zur Theorie der Integralgleichungen dritter Art, Math. Annalen 76 (1915), S. 527–547.

Differentialgleichung (7) mit λ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$. Es seien φ_α die zugehörigen, den Beziehungen

$$(9) \qquad \int_T k\varphi_\alpha \varphi_\beta \, dx\, dy = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \qquad \int_T k\varphi_\alpha^2 \, dx\, dy = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}$$

gemäß normierten Eigenfunktionen. *Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Nimmt k in T negative Werte an, so gibt es unendlich viele negative Eigenwerte. Wechselt k in T das Zeichen, so gibt es demnach sowohl unendlich viele positive, als auch unendlich viele negative Eigenwerte.*

Es sei $\bar{u}(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es ist

$$(10) \qquad \boxed{\int_T k\bar{u}^2 \, dx\, dy = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\left(\int_T k\bar{u}\varphi_\alpha \, dx\, dy\right)^2.}$$

Es möge jetzt k höchstens auf einer Menge vom Maße Null in T verschwinden. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn k in T und auf S analytisch und regulär ist.

Es gilt dann die wichtige Formel

$$(11) \qquad \boxed{\int_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k\bar{u}\varphi_\alpha \, dx\, dy\right)^2.}$$

Es sei g eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, und es sei $G(\xi, \eta;\, x, y)$ die auf S verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = 0.$$

Jede in der Form

$$(13) \qquad U(\xi, \eta) = \int_T G(\xi, \eta;\, x, y)\, k(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy$$

darstellbare Funktion läßt sich in eine in T und auf S unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(14) \qquad U(\xi, y) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\varphi_\alpha(\xi, \eta) \int_T k\varphi_\alpha U \, dx\, dy$$

entwickeln. Diese Reihe ist gliedweise differentiierbar. Die unendlichen Reihen

$$(15)\quad \frac{\partial U}{\partial \xi} = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \xi} \int_T k\varphi_\alpha\, U\, dx\, dy, \quad \frac{\partial U}{\partial \eta} = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial \eta} \int_T k\varphi_\alpha\, U\, dx\, dy$$

konvergieren in T und auf S unbedingt und gleichmäßig.

Die Theorie der linearen Integralgleichungen liefert demgegenüber nur den folgenden Satz:

Es sei

$$(16)\quad \begin{cases} G^*(\xi, \eta; x, y) = \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1)\, k(x_1, y_1)\, G(x_1, y_1; x, y)\, dx_1\, dy_1, \\ G^{**}(\xi, \eta; x, y) = \int_T G^*(\xi, \eta; x_1, y_1)\, k(x_1, y_1)\, G(x_1, y_1; x, y)\, dx_1\, dy_1, \end{cases}$$

und es sei $\mathfrak{g}(x, y)$ eine in T und auf S stetige Funktion. Jede in der Form

$$(17)\quad V(\xi, \eta) = \int_T G^{**}(\xi, \eta; x, y)\, \mathfrak{g}(x, y)\, dx\, dy$$

darstellbare Funktion läßt sich in die unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(18)\quad V(\xi, \eta) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_\alpha(\xi, \eta) \int_T k\varphi_\alpha\, V\, dx\, dy$$

entwickeln.

In dem zweiten Kapitel wird die folgende für die Variationsrechnung wichtige Randwertaufgabe behandelt.

Es sind diejenigen in T und auf S stetigen, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung

$$(19)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda k u = 0$$

zu bestimmen, die auf S der Randbedingung

$$(20)\quad p \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda h u = 0$$

genügen. Mit q wird irgendeine negative, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige Funktion bezeichnet; h ist eine beliebige nebst ihrer Ableitung stetige Funktion.

Auch hier gibt es im allgemeinen unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte, und es gelten zu (10) und (11) analoge Entwicklungen. Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Der kleinste positive Eigenwert ist einfach. Die zugehörige Eigenfunktion kann in T nicht verschwinden.

Erstes Kapitel.

Das erste Randwertproblem.

§ 1.

Es sei T ein beschränktes, einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene der Variablen x und y. Seine Begrenzung S möge aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer und regulärer Kurven bestehen. Es sei p eine in T und auf S erklärte positive, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion.

In diesem Paragraphen betrachten wir die in T und auf S stetigen, in T regulären, auf S verschwindenden Eigenfunktionen $\omega_j(x, y)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) + \mu\,\omega = 0 \text{ [9]}.$$

Es seien μ_j die zugehörigen Eigenwerte. Der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus entnehmen wir die folgenden Sätze:

1. Die Eigenwerte μ_j sind sämtlich positiv und häufen sich nur im Unendlichen.

2. Die unendliche Reihe $\sum\limits_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergiert.

3. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \omega_j}{\partial x}, \frac{\partial \omega_j}{\partial y}$ sind auch noch auf S stetig.

4. Für jede in T und auf S stetige Funktion $\omega(x, y)$ gilt die Beziehung

$$(2) \qquad \int_T \omega^2\,dx\,dy = \sum_j \left(\int_T \omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2.$$

5. Es sei $G(\xi, \eta; x, y)$ die auf S verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung (1) und es sei $\gamma(x, y)$ eine in T erklärte beschränkte, abteilungsweise stetige Funktion. Jede in der Form

$$(3) \qquad \Omega(\xi, \eta) = \int_T G(\xi, \eta; x, y)\,\gamma(x, y)\,dx\,dy$$

---

[9]) Wir nennen zur Abkürzung eine in T, ausführlicher — im Innern des Gebietes T, nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung, — „in T regulär“.

Wir verstehen ferner unter einem „Bereich“ ein Gebiet nebst Rand (das „abgeschlossene Gebiet“). Statt „im Bereich T“ wird darum oft einfacher „in T und auf S“ oder „in $T+S$“ gesagt. Demnach sind die Ausdrücke wie „in T stetig“ und „in $T+S$ stetig“ wohl zu unterscheiden.

Der Begriff einer in $T+S$ abteilungsweise stetigen Funktion ist bekannt. Wir nennen eine Funktion in T abteilungsweise stetig, wenn sie in jedem in T gelegenen Bereich abteilungsweise stetig ist.

darstellbare Funktion läßt sich in eine in T und auf S gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(4)\qquad \Omega(\xi,\eta)=\sum_j \varphi_j(\xi,\eta)\int_T \Omega\,\varphi_j\,dx\,dy$$

entwickeln. Die Entwicklung (4) gilt demnach insbesondere für jede Funktion Ω, die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetig ist und auf S verschwindet, wenn überdies die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}$ beschränkt und in T abteilungsweise stetig sind.

Es sei $\bar\omega(x,y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion.

Die unendliche Reihe

$$\sum_j \mu_j^2\left(\int_T \bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2$$

***konvergiert.** Es gilt*

$$(5)\qquad \int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)\right\}^2 dx\,dy=\sum_j \mu_j^2\left(\int_T \bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2.$$

Nach (2) ist in der Tat

$$\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)\right\}^2 dx\,dy=\sum_j\left[\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)\right\}\omega_j\,dx\,dy\right]^2=$$

$$=\sum_j\left[\int_T p\left(\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega_j}{\partial x}+\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\frac{\partial\omega_j}{\partial y}\right)dx\,dy\right]^2=\sum_j\left[\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\right)\right\}\bar\omega\,dx\,dy\right]^2=$$

$$=\sum_j\mu_j^2\left(\int_T\bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2.$$

Es gilt ferner die weitere wichtige Formel

$$(6)\qquad \int_T p\left\{\left(\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=\sum_j\mu_j\left(\int_T \omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2.$$

Es ist in der Tat

$$\int_T p\left\{\left(\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=-\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)\right\}\bar\omega\,dx\,dy=$$

$$=-\sum_j\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\right)\right\}\omega_j\,dx\,dy\int_T\bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy=$$

$$=\sum_j\int_T p\left\{\frac{\partial\bar\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega_j}{\partial x}+\frac{\partial\bar\omega}{\partial y}\frac{\partial\omega_j}{\partial y}\right\}\omega_j\,dx\,dy\int_T\bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy=$$

$$=-\sum_j\int_T\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\omega_j}{\partial y}\right)\right\}\bar\omega\,dx\,dy\int_T\bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy=$$

$$=\sum_j\mu_j\left(\int_T\bar\omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2.$$

Aus (6) folgt, wenn $\overline{\overline{\omega}}$ eine weitere wie $\overline{\omega}$ beschaffene Funktion bezeichnet, in bekannter Weise

$$(7)\qquad \int\limits_T p\left\{\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \overline{\overline{\omega}}}{\partial y}\right\}dx\,dy=\sum_j \mu_j\int\limits_T \overline{\omega}\,\omega_j\,dx\,dy\int\limits_T \overline{\overline{\omega}}\,\omega_j\,dx\,dy.$$

Die Formel (6) gilt, wie wir jetzt zeigen wollen, in dem allgemeineren Falle, wenn $\overline{\omega}(x, y)$ eine beliebige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion bezeichnet.

Wir bedienen uns zum Beweis der folgenden Erweiterung des Weierstraßschen Approximationssatzes.

Man kann in unendlich mannigfaltiger Weise eine Folge von Funktionen $\overline{\omega}^{(n)}(x, y)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ angeben, die in T auf S analytisch und regulär sind, auf S verschwinden und überdies so beschaffen sind, daß in T und auf S gleichmäßig

$$(8)\qquad \lim_{n=\infty}\overline{\omega}^{(n)}=\overline{\omega},\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial x}=\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial x},\qquad \lim_{n=\infty}\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial y}=\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial y}$$

gilt[10]).

Nach (6) ist für alle n

$$(9)\qquad \int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=\sum_j \mu_j\left(\int\limits_T \overline{\omega}^{(n)}\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2,$$

demnach

$$(10)\qquad \sum_{j=1}^{m}\mu_j\left(\int\limits_T \overline{\omega}^{(n)}\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2\leqq\int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\overline{\omega}^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy,$$

---

[10]) Wir denken uns T auf die untere Hälfte $\mathfrak{S}^{(0)}$ der Einheitskugel $\mathfrak{S}$ konform abgebildet. Dadurch erscheint $\overline{\omega}(x, y)$ als eine Funktion des Ortes $\mathfrak{s}$ auf $\mathfrak{S}^{(0)}$. Sie sei als solche mit $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ bezeichnet. Die Ortsfunktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ ist stetig, auf dem Rande von $\mathfrak{S}^{(0)}$ gleich Null und hat stetige partielle Ableitungen erster Ordnung. Wir setzen $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ über die ganze Kugel $\mathfrak{S}$ fort, indem wir den inbezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrischen Punkten auf $\mathfrak{S}$ entgegengesetzt gleiche Werte von $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ zuordnen. Es sei jetzt $F(x, y, z)$ diejenige im Innern und auf dem Rande des von $\mathfrak{S}$ begrenzten Kugelkörpers $\mathfrak{K}$ stetige, in $\mathfrak{K}$ reguläre Potentialfunktion, die auf $\mathfrak{S}$ den Wert $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ annimmt. Wir bezeichnen den auf dem nach $\mathfrak{s}$ führenden Halbmesser im Abstande $R \leqq 1$ vom Mittelpunkt gelegenen Punkt mit $(R, \mathfrak{s})$, den Wert von $F(x, y, z)$ daselbst mit $\mathfrak{F}_R(\mathfrak{s})$. Setzt man für alle $\mathfrak{s}$ im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{S}^{(0)}$ etwa

$$\mathfrak{F}_{1-\frac{1}{m}}(\mathfrak{s})=\mathfrak{F}^{(m)}(\mathfrak{s})=\overline{\omega}^{(m)}(x,y),$$

so bilden $\overline{\omega}^{(m)}(x, y)$ eine Folge der gesuchten Art.

mithin für $n \to \infty$

$$(11) \qquad \sum_{j=1}^{m} \mu_j \left(\int_T \bar{\omega}\, \omega_j\, dx\, dy\right)^2 \leqq \int_T p \left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy,$$

also auch

$$(12) \qquad \sum_{j} \mu_j \left(\int_T \omega\, \omega_j\, dx\, dy\right)^2 \leqq \int_T p \left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy.$$

Die unendliche Reihe linker Hand konvergiert. Daß hier das Gleichheitszeichen gilt, läßt sich wie folgt leicht zeigen.

Es sei $\nu(x, y)$ irgendeine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, auf S verschwindende Funktion. Nach (7) gilt

$$(13) \qquad \sum_{j} \mu_j \int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j\, dx\, dy \int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy = \int_T p \left\{\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y}\right\} dx\, dy.$$

Die unendliche Reihe linker Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. In der Tat ist

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \left| \sum_{j>N} \mu_j \int_T \bar{\omega}^{(n)} \omega_j\, dx\, dy \int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy \right|^2 \\ & \leqq \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \omega^{(n)} \omega_j\, dx\, dy\right)^2 \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy\right)^2 \\ & \leqq \int_T p \left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy \sum_{j>N} \mu_j \left(\int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Da die Wertfolge

$$\int_T p \left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

gegen

$$\int_T p \left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy$$

konvergiert, so ist sie gewiß beschränkt. Da ferner die Reihe

$$\sum_{j} \mu_j \left(\int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy\right)^2$$

konvergiert, so konvergiert (13) nach (14) in der Tat im gleichen Grade. Für $n \to \infty$ folgt demnach aus (13)

$$(15) \qquad \int_T p \left\{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \nu}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \nu}{\partial y}\right\} dx\, dy = \sum_{j} \mu_j \int_T \bar{\omega}\, \omega_j\, dx\, dy \int_T \nu\, \omega_j\, dx\, dy.$$

Es sei jetzt θ eine weitere in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige, auf S verschwindende Funktion. Ist $\theta^{(n)}$ eine zu $\bar{\omega}^{(n)}$ analoge, θ approximierende Folge von Funktionen, so ist nach (15)

$$(16)\quad \int_T p\left\{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\frac{\partial \theta^{(n)}}{\partial y}\right\}dx\,dy=\sum_j \mu_j\int_T \bar{\omega}\,\omega_j\,dx\,dy\int_T \theta^{(n)}\omega_j\,dx\,dy.$$

Die Reihe $\sum_j \mu_j\left(\int_T \omega\,\omega_j\,dx\,dy\right)^2$ ist, wie vorhin bewiesen, konvergent.

Durch eine Wiederholung der zuletzt durchgeführten Überlegungen wird gezeigt, daß die Reihe rechter Hand in (16) gleichmäßig konvergiert. Für $n\rightarrow\infty$ folgt hieraus

$$(17)\quad \int_T p\left\{\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial x}+\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right\}dx\,dy=\sum_j \mu_j\int_T \bar{\omega}\,\omega_j\,dx\,dy\int_T \theta\,\omega_j\,dx\,dy.$$

Für $\theta=\bar{\omega}$ ergibt sich hieraus die zu beweisende Beziehung (6).

Die Formel (6) *gilt übrigens noch unter erheblich allgemeineren Voraussetzungen bezüglich der Funktion $\bar{\omega}$, z. B. wenn $\bar{\omega}$ in $T+S$ stetig ist, auf S verschwindet und beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.* Sie gilt auch, wenn darüber hinaus $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ bei der Annäherung an gewisse in endlicher Anzahl vorhandene Punkte in T oder auf S unendlich groß wird, wenn nur das Integral

$$\int_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

konvergiert. Der Beweis läßt sich durch eine geeignete Modifikation der zuletzt durchgeführten Betrachtungen erbringen[11a]).

Die Ergebnisse dieses Paragraphen gelten auch noch bei Gebieten wesentlich allgemeinerer Natur. Wir wollen uns indessen bei diesen Betrachtungen nicht länger aufhalten.

[11a]) Sie gilt, wie sich in ähnlicher Weise beweisen läßt, auch wenn folgende Bedingungen erfüllt sind. 1. Die Funktion $\bar{u}$ ist in $T+S$ stetig, verschwindet auf S und hat in $T+S$ beschränkte Differenzenquotienten. 2. Außer auf einer Menge von Punkten, deren Peano-Jordanscher Inhalt gleich Null ist, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ vorhanden und stetig.

§ 2.

Es möge $k(x, y)$ eine in T und auf S erklärte stetige Funktion bezeichnen, die stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Es sei $u(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende, in T reguläre Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\lambda k u=0. \tag{18}$$

Wie man weiß, sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ auch noch auf S vorhanden und stetig.

Ist v *irgendeine* in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnungen hat, so ist, wie sich durch teilweise Integration leicht zeigen läßt,

$$\int_T\left\{p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\lambda k u v\right\}dx\,dy=0. \tag{19}$$

Es sei im Sinne der Äquivalenz

$$u\sim\sum_j\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\omega_j,\qquad v\sim\sum_j\frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}}\omega_j \tag{20}$$

gesetzt. Nach (17) ist

$$\int_T p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=\sum_j X_j Y_j=(X, Y). \tag{21}$$

Es gilt ferner

$$\left\{\begin{aligned}\int_T k u v\,dx\,dy&=\sum_j\int_T u\omega_j\,dx\,dy\int_T k v\omega_j\,dx\,dy=\sum_j\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\int_T k v\omega_j\,dx\,dy=\\&=\sum_j\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\sum_h\int_T v\omega_h\,dx\,dy\int_T k\omega_j\omega_h\,dx\,dy=\sum_j\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\sum_h\frac{Y_h}{\sqrt{\mu_h}}\int_T k\omega_j\omega_h\,dx\,dy.\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Der Ausdruck

$$K(X, Y)=\sum_{j,h}\frac{X_j Y_h}{\sqrt{\mu_j\mu_h}}\int_T k\omega_j\omega_h\,dx\,dy \tag{23}$$

ist eine vollstetige Bilinearform der unendlich vielen Variablen X_j, Y_j $(j=1, 2, \ldots)$, da, wie wir gleich sehen werden, die Summe der Quadrate der Koeffizienten

$$\sum_{j,h}\frac{1}{\mu_j\mu_h}\left(\int_T k\omega_j\omega_h\,dx\,dy\right)^2 \tag{24}$$

konvergiert. In der Tat ist zunächst, da für $j\leqq h$ allemal $\mu_j\leqq\mu_h$ ist,

$$S^{(m)} = \sum_{j,h=1}^{m} \frac{1}{\mu_j \mu_h} \left(\int_T k \omega_j \omega_h \, dx \, dy \right)^2 \leqq 2 \sum_{\substack{j \leqq m \\ j \leqq h \leqq m}} \frac{1}{\mu_j \mu_h} \left(\int_T k \omega_j \omega_h \, dx \, dy \right)^2$$

$$\leqq 2 \sum_{\substack{j \leqq m \\ j \leqq h \leqq m}} \frac{1}{\mu_j^2} \left(\int_T k \omega_j \omega_h \, dx \, dy \right)^2.$$

Ferner ist

$$\sum_{j \leqq h \leqq m} \left(\int_T k \omega_j \omega_h \, dx \, dy \right)^2 \leqq \sum_h \left(\int_T k \omega_j \omega_h \, dx \, dy \right)^2 = \int_T k^2 \omega_j^2 \, dx \, dy$$

$$\leqq \operatorname{Max} k^2 \int_T \omega_j^2 \, dx \, dy = \operatorname{Max} k^2,$$

demnach

$$S^{(m)} \leqq 2 \operatorname{Max} k^2 \sum_{j \leqq m} \frac{1}{\mu_j^2}. \tag{25}$$

Da nun die Reihe $\sum_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergent ist, so konvergiert, wie behauptet, die Reihe (24).

Aus (22) und (23) folgt jetzt

$$\int_T kuv \, dx \, dy = K(X, Y) \tag{26}$$

und aus (19), (21), (26) weiter

$$(X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0. \tag{27}$$

Es sei $\mathsf{A}(x, y)$ eine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion. In einer ganz analogen Weise gelangt man von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda k u = \mathsf{A} \tag{18*}$$

zu der Beziehung

$$(X, Y) - \lambda K(X, Y) = - \sum_j \frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}} \int_T \mathsf{A} \omega_j \, dx \, dy. \tag{27*}$$

Die Auflösung des homogenen und des nicht homogenen Randwertproblems ist damit auf die Auflösung der den Formeln (27) und (27*) entspringenden unendlich vielen linearen Gleichungen zurückgeführt.

§ 3.

Es sei $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert der quadratischen Form $K(X, X)$ und darum, wie man ohne Schwierigkeiten sieht, auch der Differentialgleichung (18). Es seien

$$\overline{M}^{(\varkappa)}(X) = \sum \overline{m}_j^{(\varkappa)} X_j \qquad (\varkappa = 1, \ldots, r)$$

die zu $\bar{\lambda}$ gehörigen linear unabhängigen Eigenformen. Die Werte

$$\bar{m}_j^{(\varkappa)} \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

sind die r linear unabhängigen Lösungssysteme der linearen Gleichungen

$$(X, Y) - \bar{\lambda} K(X, Y) = 0.$$

Damit die nicht homogenen Gleichungen

$$(X, Y) - \bar{\lambda} K(X, Y) = \sum_j \gamma_j Y_j$$

Lösungen mit konvergenter Quadratsumme haben, müssen nach bekannten Sätzen folgende Bedingungsgleichungen erfüllt sein:

$$\sum_j \gamma_j \bar{m}_j^{(\varkappa)} = 0. \qquad (\varkappa = 1, \ldots, r)$$

Es sei λ^* ein Eigenwert der Differentialgleichung (18), und es sei ψ_ν^* $(\nu = 1, \ldots, r_1)$ ein vollständiges System zu λ^* gehöriger linear unabhängiger Eigenfunktionen. Es gilt

$$\psi_\nu^* = \sum_j \omega_j \int_T \psi_\nu^* \omega_j \, dx \, dy.$$

Offenbar ist

$$\sqrt{\mu_j} \int_T \psi_\nu^* \omega_j \, dx \, dy \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

ein System der Lösungen der linearen Gleichungen

$$(X, Y) - \lambda^* K(X, Y) = 0.$$

Die linearen Formen

$$\Lambda_\nu^*(X) = \sum_j X_j \sqrt{\mu_j} \int_T \psi_\nu^* \omega_j \, dx \, dy \qquad (\nu = 1, \ldots, r_1)$$

sind zu λ^* gehörige Eigenformen von $K(X, X)$.

Es ist leicht zu zeigen, daß es keine zu λ^* gehörige Eigenform gibt, die von den Formen $\Lambda_\nu^*(X)$ $(\nu = 1, \ldots, r_1)$ linear unabhängig wäre.

Sei im Gegensatz hierzu $\Lambda_{r_1+1}^*(X) = \sum_j X_j \tau_j$ eine Form dieser Art. Man kann dann gewiß eine Funktion

$$\mathsf{A}(x, y) = \sum_{j=1}^{r_1+1} \delta_j \omega_j$$

bestimmen, so daß

$$\text{(28)} \qquad \sum_{j=1}^{r_1+1} \delta_j \int_T \psi_\nu^* \omega_j \, dx \, dy = 0, \qquad (\nu = 1, \ldots, r_1)$$

$$\text{(28*)} \qquad \sum_{j=1}^{r_1+1} \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \delta_j \tau_j \neq 0$$

gilt. Für (28) kann man auch setzen

$$\int\limits_T \mathsf{A}\,\psi_\nu^*\,dx\,dy = 0.$$

Nach bekannten Sätzen hat demnach die nicht homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda^* k u = \mathsf{A}$$

in $T + S$ stetige, in T reguläre, auf S verschwindende Lösungen. Wegen (28*) hätten demgegenüber die unendlich vielen Gleichungen

$$(X, Y) - \lambda^* K(X, Y) = -\sum_{j=1}^{r_1+1} \frac{\delta_j}{\sqrt{\mu_j}} Y_j$$

keine Lösungen mit konvergenter Quadratsumme.

Demnach entsprechen die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (18) und die Eigenformen der quadratischen Form $K(X, X)$ einander umkehrbar eindeutig.

§ 4.

Ist das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ [11]) *gleich Null, so ist die quadratische Form $K(X, X)$ abgeschlossen.*

Es möge das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ gleich Null sein, und es möge im Gegensatz zu unserer Behauptung $K(X, X)$ nicht abgeschlossen sein. Dann gibt es eine Linearform $L^*(X) = \sum\limits_j l_j^* X_j$, so daß für alle X_j mit konvergenter Quadratsumme

$$(29) \qquad K(X, \cdot) L^*(\cdot) = \sum_{j,h} \frac{X_h l_j^*}{\sqrt{\mu_j \mu_h}} \int\limits_T k\omega_j \omega_h\,dx\,dy = 0$$

gilt. Es sei im Sinne der Äquivalenz

$$(30) \qquad v^*(x, y) \sim \sum_j \frac{l_j^*}{\sqrt{\mu_j}} \omega_j(x, y);$$

$v^*(x, y)$ ist eine nebst ihrem Quadrate integrierbare Funktion. Aus (29) folgen, wenn man $X_\nu = 1$, $X_h = 0$ $(h \neq \nu)$ setzt, die unendlich vielen Gleichungen

$$(31) \qquad \sum_j \frac{l_j^*}{\sqrt{\mu_j}} \int\limits_T k\omega_j \omega_\nu\,dx\,dy = 0, \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wofür man mit Rücksicht auf (30) auch setzen kann

$$\int\limits_T k v^* \omega_\nu\,dx\,dy = 0. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

---

[11]) D. h. der Menge der Punkte, in denen die Funktion $k(x, y)$ verschwindet.

Nach bekannten Sätzen muß kv^* in T, höchstens außer auf einer Nullmenge, verschwinden. Das gleiche gilt offenbar für v^*. Die Fourierschen Koeffizienten $\frac{l^*}{\sqrt{\mu_j}}$ sind sämtlich gleich Null, die Linearform $L^*(X)$ verschwindet identisch. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist abgeschlossen.

Die vorstehende Bedingung der Abgeschlossenheit der Form $K(X, X)$ ist gewiß erfüllt, wenn k nur längs einer endlichen Anzahl stetig gekrümmter Kurvenstücke verschwindet, insbesondere, wenn k in T und auf S analytisch und regulär ist.

Das System der Eigenwerte der quadratischen Form $K(X, X)$ deckt sich, wie wir gesehen haben, mit dem System der Eigenwerte der Differentialgleichung (18) und darum auch der Integralgleichung

$$u(\xi, \eta) - \frac{\lambda}{2\pi}\int_T G(\xi, \eta; x, y)\, k(x, y)\, u(x, y)\, dx\, dy = 0. \tag{32}$$

Es seien λ_α $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ die irgendwie einfach geordneten Eigenwerte von $K(X, X)$ und

$$L^{(\alpha)}(X) = \sum_j l_j^{(\alpha)} X_j \tag{33}$$

die zugehörigen, den Beziehungen

$$\left\{\begin{aligned} L^{(\alpha)}(\cdot)\, L^{(\beta)}(\cdot) &= \sum_j l_j^{(\alpha)} l_j^{(\beta)} = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \\ L^{(\alpha)}(\cdot)\, L^{(\alpha)}(\cdot) &= \sum_j (l_j^{(\alpha)})^2 = 1 \end{aligned}\right. \tag{34}$$

gemäß normierten Eigenformen. Den Ausführungen des § 3 gemäß ist die unendliche Reihe

$$\sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}}\, \omega_j \tag{35}$$

gleichmäßig konvergent. Ihre Summe liefert eine zu λ_α gehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \lambda_\alpha k u = 0. \tag{36}$$

Es sei

$$\sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}}\, \omega_j(x, y) = \psi_\alpha(x, y). \tag{37}$$

Aus (34), (37), (20) und (21) folgt

$$\int_T p\left\{\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x}\frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y}\frac{\partial \psi_\beta}{\partial y}\right\} dx\, dy = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{38}$$

$$\int_T p\left\{\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy=1, \tag{39}$$

oder nach einer teilweisen Integration mit Rücksicht auf (36)

$$\int_T k\psi_\alpha\psi_\beta\,dx\,dy=0, \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{40}$$

$$\int_T k\psi_\alpha^2\,dx\,dy=\frac{1}{\lambda_\alpha}. \tag{41}$$

Setzt man jetzt

$$\psi_\alpha=\frac{1}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\varphi_\alpha, \tag{42}$$

so erhält man

$$\int_T k\varphi_\alpha\varphi_\beta\,dx\,dy=0, \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{43}$$

$$\int_T k\varphi_\alpha^2\,dx\,dy=\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}. \tag{44}$$

§ 5.

Nach bekannten Sätzen ist

$$K(X,Y)=\sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha}L^{(\alpha)}(X)L^{(\alpha)}(Y)\,^{12}). \tag{45}$$

Es sei $\bar{u}(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Wir setzen

$$\bar{u}(x,y)\sim\sum_j \frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\omega_j. \tag{46}$$

Den Sätzen des § 1 gemäß ist

$$\left\{\begin{aligned} L^{(\alpha)}(X)&=\int_T p\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial y}\right)dx\,dy=\\ &=-\int_T\bar{u}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial\psi_\alpha}{\partial y}\right)\right\}dx\,dy=\\ &=\lambda_\alpha\int_T k\bar{u}\psi_\alpha\,dx\,dy=\frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}\int_T k\bar{u}\varphi_\alpha\,dx\,dy\end{aligned}\right. \tag{47}$$

sowie

$$K(X,X)=\int_T k\bar{u}^2\,dx\,dy. \tag{48}$$

[12]) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Vierte Mitteilung, Gött. Nachrichten 1906, S. 157—227 [S. 201].

Aus der Formel (45) folgt demnach für $X_j = Y_j$

$$\boxed{\int\limits_T k\bar{u}^2\,dx\,dy = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{\bar{\lambda}_\alpha}\left(\int\limits_T k\bar{u}\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right)^2.} \tag{49}$$

Die unendliche Reihe (49) konvergiert wie die Reihe (45) unbedingt.

Ist k in einem in T gelegenen Gebiet Θ positiv, so gibt es gewiß unendlich viele positive Eigenwerte.

Es seien im Gegensatz hierzu $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ die nur in endlicher Anzahl vorhandenen positiven Eigenwerte. Es sei $\bar{v}(x, y)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die in $T - \Theta$ verschwindet und die Beziehungen

$$\int\limits_T k\bar{v}\,\varphi_\alpha\,dx\,dy = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{50}$$

erfüllt. Führt man $\bar{v}$ für $\bar{u}$ in (49) ein, so gelangt man zu einem Widerspruch. *Also ist die Anzahl der positiven Eigenwerte unendlich. Desgleichen ist die Anzahl negativer Eigenwerte unendlich, falls k in T negative Werte annimmt. Wechselt k in T das Vorzeichen, so gibt es demnach unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte.*

Es möge jetzt k höchstens in einer Punktmenge vom Maße Null in T verschwinden. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist abgeschlossen und es gilt

$$(X, X) = \sum_\alpha [L^{(\alpha)}(X)]^2. \tag{51}$$

Den Sätzen des § 1 gemäß ist

$$(X, X) = \int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy. \tag{52}$$

Aus (51), (52) und (47) folgt

$$\boxed{\int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy = \sum_\alpha |\lambda_\alpha|\left(\int\limits_T k\bar{u}\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right)^2.} \tag{53}$$

Ist $\bar{v}$ eine wie $\bar{u}$ beschaffene Funktion, so gilt, wie man sich jetzt leicht überzeugt, die weitere Formel

$$\int\limits_T p\left\{\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right\}dx\,dy = \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \int\limits_T k\bar{u}\,\varphi_\alpha\,dx\,dy \int\limits_T k\bar{v}\,\varphi_\alpha\,dx\,dy. \tag{54}$$

Ist das Maß der Punktmenge $k(x, y) = 0$ größer als Null, so ist die quadratische Form $K(X, X)$ nicht abgeschlossen. In der Formel (53) tritt an Stelle des Gleichheitszeichens das Zeichen $\geqq$.

§ 6.

Bei den folgenden Betrachtungen wird angenommen, daß die Menge $k(x, y) = 0$ vom Maße Null ist.

Es möge $g(x, y)$ eine in T und auf S stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, bezeichnen. Es sei (ξ, η) irgendein Punkt in T oder auf S, und es sei

$$(55)\quad G^*(\xi, \eta; x, y) - \int_T G(\xi, \eta; x_1, y_1)\, k(x_1, y_1)\, G(x_1, y_1; x, y)\, dx_1\, dy_1 \\ = G^*(\xi, \eta; x, y).$$

Wie man sich leicht überzeugt, ist

$$(56)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p \frac{\partial G^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p \frac{\partial G^*}{\partial y}\right) = -2\pi k(x, y)\, G(\xi, \eta; x, y).$$

Die Funktion $G^*(\xi, \eta; x, y)$ ist, als Funktion von x und y aufgefaßt, in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig und auf S gleich Null. Wir führen in (54) für $\bar{u}$ und $\bar{v}$ entsprechend $G^*(\xi, \eta; x, y)$ und $g(x, y)$ ein und erhalten,

$$(57)\quad \int_T G(\xi, \eta; x, y)\, k(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = U(\xi, \eta)$$

gesetzt,

$$(58)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_T p\left\{\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial G^*}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial G^*}{\partial y}\right\} dx\, dy = -\int_T g\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial G^*}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial G^*}{\partial y}\right)\right\} dx\, dy = \\ &\qquad = 2\pi \int_T G(\xi, \eta; x, y)\, k(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy = 2\pi\, U(\xi, \eta) \end{aligned} \right.$$

und wegen (32)

$$(59)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_T k g \varphi_\alpha\, dx\, dy = \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{2\pi}\int_T k(x, y)\, g(x, y) \int_T G(x, y; x_1, y_1)\, k(x_1, y_1)\, \varphi_\alpha(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1\, dx\, dy = \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{2\pi}\int_T k(x_1, y_1)\, \varphi_\alpha(x_1, y_1) \int_T G(x_1, y_1; x, y)\, k(x, y)\, g(x, y)\, dx\, dy\, dx_1\, dy_1 = \\ &= \frac{\lambda_\alpha}{2\pi}\int_T k(x_1, y_1)\, \varphi_\alpha(x_1, y_1)\, U(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1, \end{aligned} \right.$$

$$
(60)\begin{cases}
\int\limits_T k(x,y)\,G^*(\xi,\eta;x,y)\,\varphi_\alpha(x,y)\,dx\,dy = \\
= \int\limits_T\int\limits_T G(\xi,\eta;x_1,y_1)\,k(x_1,y_1)\,G(x_1,y_1;x,y)\,k(x,y)\,\varphi_\alpha(x,y)\,dx_1\,dy_1\,dx\,dy = \\
= \frac{2\pi}{\lambda_\alpha}\int\limits_T G(\xi,\eta;x_1,y_1)\,k(x_1,y_1)\,\varphi_\alpha(x_1,y_1)\,dx_1\,dy_1 = \frac{4\pi^2}{\lambda_\alpha^2}\,\varphi_\alpha(\xi,\eta).
\end{cases}
$$

Aus (53), (58), (59) und (60) folgt nach einer geringfügigen Änderung der Bezeichnungen

$$
(61)\qquad U(\xi,\eta) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\,\varphi_\alpha(\xi,\eta)\int\limits_T k\,\varphi_\alpha\,U\,dx\,dy.
$$

Die unendliche Reihe rechter Hand konvergiert unbedingt und gleichmäßig. In der Tat ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$
(62)\begin{cases}
\left(\sum\limits_{\alpha>N}|\varphi_\alpha(\xi,\eta)|\left|\int\limits_T k\,\varphi_\alpha\,U\,dx\,dy\right|\right)^2 = \left(\sum\limits_{\alpha>N}\frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi}\left|\int\limits_T k\,g\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right|\left|\int\limits_T k\,G^*\varphi_\alpha\,dx\,dy\right|\right)^2 \\
\leqq \sum\limits_{\alpha>N}\frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi}\left|\int\limits_T k\,g\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right|^2 \sum\limits_\alpha \frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi}\left|\int\limits_T k\,G^*\varphi_\alpha\,dx\,dy\right|^2 \leqq \\
\leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial G^*}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G^*}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy \sum\limits_{\alpha>N}\frac{|\lambda_\alpha|}{2\pi}\left(\int\limits_T k\,g\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right)^2.
\end{cases}
$$

Das Integral $\int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial G^*}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial G^*}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$ stellt eine für alle (ξ,η) in T und auf S gleichmäßig beschränkte Funktion dar, die unendliche Reihe $\sum\limits_\alpha|\lambda_\alpha|\left(\int\limits_T k\,g\,\varphi_\alpha\,dx\,dy\right)^2$ konvergiert, also konvergiert in der Tat (61) unbedingt und gleichmäßig.

Man kann noch einen Schritt weiter gehen und in der Formel (54) für $\bar u$ den Ausdruck

$$
\frac{\partial}{\partial\xi}G^*(\xi,\eta;x,y)
$$

einführen. In der Tat ist $\frac{\partial G^*}{\partial\xi}$, als Funktion von x und y aufgefaßt, in T und auf S stetig und auf S gleich Null; die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 G^*}{\partial\xi\,\partial x}$, $\frac{\partial^2 G^*}{\partial\xi\,\partial y}$ sind, außer für $\xi = x$, $\eta = y$, wo sie logarithmisch unendlich werden, stetig. Der Ausdruck

$$
\int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial\xi\,\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 G^*}{\partial\xi\,\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy
$$

ist für alle (ξ, η) in T und auf S gleichmäßig beschränkt. Man findet

$$(63)\qquad \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha(\xi, \eta)}{\partial \xi} \int_T k \varphi_\alpha U \, dx \, dy,$$

und analog

$$(64)\qquad \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \frac{\partial \varphi_\alpha(\xi, \eta)}{\partial \eta} \int_T k \varphi_\alpha U \, dx \, dy.$$

Auch die Reihen (63) *und* (64) *konvergieren unbedingt und gleichmäßig.*

Jede in der Form (61) *darstellbare Funktion läßt sich demnach in eine in T und auf S gleichmäßig konvergierende Reihe nach den Eigenfunktionen der Differentialgleichung* (18) *entwickeln. Die so erhaltene Reihe ist gliedweise differentiierbar.*

§ 7.

Es ist von Interesse, diese Ergebnisse mit den von der Theorie der linearen Integralgleichungen gelieferten Resultaten zu vergleichen[13]).

Es mögen s und t beliebige Punkte in T oder auf S, $\mathsf{K}(s, t)$ einen in $T + S$ stetigen, symmetrischen Kern vom positiven Typus, $A(s)$ eine beliebige in $T + S$ erklärte stetige Funktion, die sowohl positive als auch negative Werte annimmt, bezeichnen. Betrachten wir die Integralgleichung

$$(65)\qquad \eta(s) - \lambda \int_T \mathsf{K}(s, t) A(t) \eta(t) \, dt = 0.$$

Nach den neueren Untersuchungen von E. Garbe läßt sich, wenn der Kern $\mathsf{K}(s, t)$ abgeschlossen ist, jede in der Form

$$(66)\qquad V(s) = \int_T \mathsf{K}(s, t) \mathfrak{g}(t) \, dt \qquad (\mathfrak{g}(t) \text{ in } T + S \text{ stetig})$$

darstellbare Funktion in eine gleichmäßig konvergierende Reihe

$$(67)\qquad V(s) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \eta_\alpha(s) \int_T A(t) V(t) \eta_\alpha(t) \, dt$$

entwickeln[14]).

Im vorliegenden Falle, wo für $\mathsf{K}(s, t)$ und $A(t)$ entsprechend $\frac{1}{2\pi} G(\xi, \eta; x, y)$ und $k(x, y)$ eintreten, ist der vorstehende Satz nicht ohne weiteres anwendbar. Auch genügt es nicht, zu dem ersten iterierten Kern $G^*(\xi, \eta; x, y)$ überzugehen, denn dieser ist nicht vom positiven Typus. Erst der zweite iterierte Kern

---

[13]) Vgl. A. Pell, loc. cit. [7]) sowie E. Garbe, loc. cit. [8]).

[14]) Vgl. E. Garbe, loc. cit. [8]). Dieses Resultat folgt aus dem an jener Stelle angegebenen durch die Substitution

$$\pi_\mu(s) = A(s) \eta_\mu(s), \qquad f(s) = A(s) V(s).$$

$$(68)\quad G^{**}(\xi, \eta; x, y) = \int\limits_T G^*(\xi, \eta; x_1, y_1)\, k(x_1, y_1)\, G(x_1, y_1; x, y)\, dx_1\, dy_1$$

ist, wie sich leicht zeigen läßt, stetig und vom positiven Typus. Ist schließlich $k(x, y)$ in keinem Bereich in T identisch gleich Null, so ist $G^{**}(\xi, \eta; x, y)$ auch abgeschlossen. Jede in der Form

$$(69)\qquad \int\limits_T G^{**}(\xi, \eta; x, y)\, \mathfrak{g}(x, y)\, dx\, dy \qquad (\mathfrak{g}(x, y) \text{ in } T+S \text{ stetig})$$

darstellbare Funktion läßt sich in eine nach Eigenfunktionen der Differentialgleichung (18) fortschreitende, unbedingt und gleichmäßig konvergierende Reihe entwickeln.

Zu genau denselben Ergebnissen führen die etwas älteren Sätze über die linearen Integralgleichungen von A. J. Pell[15]).

Der in dieser Arbeit abgeleitete neue Entwicklungssatz reicht über das soeben genannte Resultat erheblich hinaus[16]).

§ 8.

Es möge jetzt die (nach wie vor in $T+S$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige) Funktion $k(x, y)$ beliebig sein. Die quadratische Form $K(X, X)$ ist im allgemeinen nicht abgeschlossen. Auch das Orthogonalsystem der Eigenformen $L^{(\alpha)}(X)$ ist nicht abgeschlossen. Wir ergänzen es zu einem abgeschlossenen durch die Linearformen

$$(70)\qquad R^{(\alpha)}(X) = \sum_j r_j^{(\alpha)} X_j. \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

Es gilt jetzt

$$(71)\qquad (X, X) = \sum_\alpha [L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_\alpha [R^{(\alpha)}(X)]^2,$$

demnach

$$(72)\quad (X, X) - K(X, X) = \sum_\alpha \left(1 - \frac{1}{\lambda_\alpha}\right)[L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_\alpha [R^{(\alpha)}(X)]^2.$$

Wir nehmen an, daß $k(x, y)$ in T Werte beiderlei Vorzeichens annimmt. Es gibt dann, wie wir wissen, unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte. Wir denken uns die positiven Eigenwerte in eine Reihe $\lambda^{(1)} \leqq \lambda^{(2)} \leqq \ldots$ geordnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen heißen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ Wie man sich leicht überzeugt, ist

---

[15]) Vgl. A. J. Pell, loc. cit.[7]).

[16]) Die von Garbe loc. cit.[8]) S. 529 beiläufig gemachte Bemerkung, aus den Ergebnissen seiner Arbeit folge, daß jede nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion, die längs gewissen Kurven weiteren Bedingungen genügt, ließe sich nach Eigenfunktionen des Problems entwickeln, ist nicht richtig.

$$(73)\quad (X, X) - K(X, X) \geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right)\left\{\sum_\alpha [L^{(\alpha)}(X)]^2 + \sum_\alpha [R^{(\alpha)}(X)]^2\right\}$$
$$\geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right)(X, X).$$

Es möge etwa $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \ldots = \lambda^{(r)}$ sein[17]).

Wir haben uns vorhin alle Eigenwerte in *eine* Reihe $\lambda_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots)$ geordnet gedacht. Es sei jetzt $\lambda_1 = \lambda^{(1)}, \ldots, \lambda_r = \lambda^{(r)}$. In (73) gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn

$$L^{(\alpha)}(X) = 0 \quad (\alpha \neq 1, \ldots r), \qquad R^{(\alpha)}(X) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

ist. Da das Orthogonalsystem $L^{(\alpha)}(X)$, $R^{(\alpha)}(X)$ vollständig ist, so können diese Beziehungen, wie man leicht sieht, nur durch die r-Wertsysteme

$$(74)\qquad X_j = l_j^{(\alpha)} \qquad (\alpha = 1, \ldots r;\ j = 1, 2, \ldots)$$

und ihre linearen Verbindungen erfüllt werden.

Es sei jetzt $\bar{u}(x, y)$ wie in § 5 irgendeine in $T + S$ stetige, auf S verschwindende Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat. Setzt man in (73)

$$(75)\qquad X_j = \int_T \bar{u}\omega_j\, dx\, dy, \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

so findet man

$$(76)\quad \int_T \left[p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} - k\bar{u}^2\right] dx\, dy \geqq \left(1 - \frac{1}{\lambda^{(1)}}\right)\int_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy,$$

oder

$$(77)\qquad \int_T p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy \geqq \lambda^{(1)} \int_T k\bar{u}^2\, dx\, dy.$$

Der kleinste Wert, den das Integral linker Hand für alle der Beziehung $\int_T k\bar{u}^2\, dx\, dy = 1$ *genügenden Funktionen* $\bar{u}$ *annehmen kann, ist nach* (77) *gleich* $\lambda^{(1)}$.

In (77) gilt das Gleichheitszeichen wegen (74) nur für

$$(78)\qquad \bar{u} = \varphi^{(j)} \qquad (j = 1, \ldots, r)^{18})$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß *die Funktionen* $\varphi^{(j)} (j = 1, \ldots, r)$ *in* T *nicht verschwinden, demnach etwa positiv angenommen werden können.*

Es möge in Gegensatz hierzu $\varphi^{(1)}(x, y)$ in T verschwinden, und es sei (x_0, y_0) ein Punkt, in dem $\varphi^{(1)}$ positiv ist. Es sei T^* das größte

---

[17]) Wie sich bald zeigen wird, ist $r = 1$.

[18]) Und für lineare Verbindungen dieser Funktionen. Vgl. übrigens die Fußnote [17]).

(x_0, y_0) enthaltende Gebiet, in dem $\varphi^{(1)} > 0$ ist. Nach Voraussetzung ist T^* von T verschieden.

Wir setzen

$$(79) \qquad u^* = -\varphi^{(1)} \text{ in } T^*, \qquad u^* = \varphi^{(1)} \text{ in } T - T^*$$

und erhalten augenscheinlich

$$(80) \qquad \int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy = \lambda^{(1)} \int\limits_T k u^{*2}\,dx\,dy,$$

was nicht möglich ist, da in der Formel (77) das Gleichheitszeichen nur für die Funktionen (78) gilt[18a]).

Man sieht jetzt leicht ein, daß *der kleinste positive Eigenwert* $\lambda^{(1)}$ *ein einfacher Eigenwert ist*[19]). Die Zahl r ist gleich 1.

Sei etwa $r = 2$. Die Eigenfunktionen $\varphi^{(1)}$ und $\varphi^{(2)}$ sind in T positiv. Offenbar läßt sich eine lineare Kombination

$$\overline{\varphi} = c_1 \varphi^{(1)} + c_2 \varphi^{(2)}$$

bestimmen, die in einem vorgeschriebenen Punkte in T verschwindet. Die Funktion $\overline{\varphi}$ ist indessen eine zu $\lambda^{(1)}$ zugehörige Eigenfunktion der Differentialgleichung (18) und kann in T nicht verschwinden. In einer ganz ähnlichen Weise läßt sich der allgemeinere Satz beweisen:

Der kleinste Wert, den das Integral

$$(81) \qquad \int\limits_T p\left\{\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy$$

für alle den Beziehungen

$$(82) \quad \int\limits_T k\overline{u}^2\,dx\,dy = 1, \quad \int\limits_T k\overline{u}\varphi^{(1)}\,dx\,dy = 0, \ldots, \int\limits_T k\overline{u}\varphi^{(\varkappa)}\,dx\,dy = 0 \quad (\varkappa \geqq 1)$$

[18a]) Die Funktion u^* ist in $T+S$ stetig, auf S gleich Null und hat in $T+S$ beschränkte Differenzenquotienten. Nach bekannten Sätzen sind, außer höchstens auf einer Menge vom Flächenmaße Null, die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u^*}{\partial x}$, $\frac{\partial u^*}{\partial y}$ vorhanden und stetig. Da diese Ableitungen nur auf dem Rande S^* von T^* fehlen können, so ist dieser vom Flächenmaße Null. Da S^* eine abgeschlossene Menge ist, so ist diese quadrierbar und hat demnach den Peano-Jordanschen Inhalt Null. Der Bemerkung in der Fußnote [11a]) zufolge gelten für die Funktion u^* die Formeln (49) und (53). Man darf darum in (77) für $\overline{u}$ auch u^* einsetzen.

[19]) Daß der kleinste positive Eigenwert der Differentialgleichung (18) ein einfacher Eigenwert ist und daß die zugehörige Eigenfunktion in T nicht verschwindet, habe ich auf einem anderen Wege in der Arbeit, Untersuchungen über zweidimensionale reguläre Variationsprobleme. I. Das einfachste Problem bei fester Begrenzung. Jacobische Bedingung und die Existenz des Feldes. Verzweigung der Extremalflächen, Monatshefte für Math. u. Physik 28 (1917), S. 3–51 (insb. S. 13–14), bewiesen.

genügenden Funktionen $\bar{u}$ annehmen kann, ist gleich $\varphi^{(\varkappa+1)}$. Das Minimum wird für $\bar{u} = \varphi^{(\varkappa)}$ erreicht.

Die in diesem Paragraphen abgeleiteten Minimumsätze sind (für $p = 1$) schon früher auf einem anderen Wege von Herrn M. Mason dargetan worden[20]). Herr Mason beweist die Existenz des Minimums direkt und folgert hieraus umgekehrt die Existenz der Eigenwerte.

§ 9.

Alle bisher angegebenen Sätze lassen sich auf die allgemeinere, sich selbst adjungierte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus

$$(83)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\lambda k^{(0)}u=0,\quad ac-b^2>0,\quad a>0$$

sinngemäß übertragen. Sei Θ ein $T+S$ ganz in seinem Innern enthaltendes Gebiet; a, b und c sind in Θ erklärte, nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige Funktionen, die Funktion $k^{(0)}$ ist in Θ stetig und hat stetige Ableitungen erster Ordnung. Für das Integral (81) tritt jetzt der Ausdruck

$$(84)\qquad \iint\limits_T \left\{a\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+c\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\}dx\,dy$$

ein.

Betrachten wir zunächst die partielle Differentialgleichung

$$(85)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{ac-b^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{ac-b^2}}\right)=0.$$

Nach bekannten Sätzen gibt es unendlich viele umkehrbar eindeutige Transformationen

$$x=x(x',y'),\quad y=y(x',y');\quad x'=x'(x,y),\quad y'=y'(x,y),$$

$$(86)\qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}>0,$$

durch deren Vermittlung die Differentialgleichung (85) auf die Form

$$(87)\qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}=0,\qquad u'(x',y')=u(x,y)$$

gebracht werden kann[21]). Das Gebiet T wird dabei in ein von geschlossenen analytischen und regulären Kurven begrenztes Gebiet transformiert.

---

[20]) Vgl. M. Mason, loc. cit. [4]).

[21]) Vgl. L. Lichtenstein, „Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Die erste Rand-

Wendet man jetzt eine Transformation der Form (86) auf die Differentialgleichung (83) an, so gewinnt man, wie sich ohne Schwierigkeiten zeigen läßt, als Ergebnis die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(p'\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(p'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\lambda k'u'=0, \tag{88}$$

$$u'(x',y')=u(x,y),\qquad p'=\sqrt{ac-b^2},\qquad k'=k^{(0)}\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}.$$

Zweites Kapitel.

Eine besondere Randwertaufgabe.

§ 1.

Wir gehen jetzt zur Behandlung der folgenden für die Variationsrechnung wichtigen Randwertaufgabe über.

Es sind diejenigen in T und auf S stetigen, in T regulären Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu+\lambda ku=0 \tag{1}$$

zu bestimmen, die auf S der Randbedingung

$$p\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda hu=0 \tag{2}$$

genügen. Mit q wird irgendeine negative, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in T und auf S stetige Funktion bezeichnet; h ist eine beliebige nebst ihrer Ableitung stetige Funktion, $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale; λ ist ein reeller Parameter.

Betrachten wir die zu der zweiten Randwertaufgabe gehörigen Eigenfunktionen und Eigenwerte der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu+\mu u=0. \tag{3}$$

Wir entnehmen der Theorie partieller Differentialgleichungen vom elliptischen Typus folgende Sätze:

1. Die Differentialgleichung (3) hat unendlich viele, lauter positive Eigenwerte μ_j $(j=1,2,\ldots)$.

2. Die unendliche Reihe $\sum_j \frac{1}{\mu_j^2}$ konvergiert.

---

wertaufgabe. Allgemeine ebene Gebiete", Journal für Mathematik 172 (1913), S. 1—40 (S. 35—40). Die Funktionen $x'(x,y)$, $y'(x,y)$ sind in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetig.

Es sei $\omega_j(x, y)$ die zu μ_j gehörige, der Randbedingung $\frac{\partial \omega_j}{\partial n} = 0$ genügende Eigenfunktion.

3. Ist $\omega(x, y)$ irgendeine in T und auf S stetige Funktion, so gilt

$$\int_T \omega^2\, dx\, dy = \sum_j \Big(\int_T \omega\, \omega_j\, dx\, dy\Big)^2. \tag{4}$$

Es sei $\omega(x, y)$ irgendeine in $T + S$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, der Beziehung $\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial n} = 0$ genügende Funktion. Es gilt

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_T \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\Big) - q\overline{\omega}\Big]^2 dx\, dy = \\
&= \sum_j \Big\{\int_T \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\Big) - q\overline{\omega}\Big]\omega_j\, dx\, dy\Big\}^2 = \\
&= \sum_j \Big\{-\int_T \Big[p\Big(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\frac{\partial \omega_j}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\frac{\partial \omega_j}{\partial y}\Big) + q\overline{\omega}\,\omega_j\Big] dx\, dy\Big\}^2 = \\
&= \sum_j \Big\{\int_T \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\,\frac{\partial \omega_j}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(p\,\frac{\partial \omega_j}{\partial y}\Big) + q\,\omega_j\Big]\overline{\omega}\, dx\, dy\Big\}^2 = \\
&= \sum_j \mu_j^2 \Big(\int_T \omega\, \omega_j\, dx\, dy\Big)^2.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Ferner ist

$$\left\{\begin{aligned}
&\int_T \Big[p\Big\{\Big(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\Big)^2\Big\} - q\,\omega^2\Big] dx\, dy = \\
&= -\int_T \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\Big) + q\overline{\omega}\Big]\overline{\omega}\, dx\, dy = \\
&= -\sum_j \int_T \Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(p\,\frac{\partial \overline{\omega}}{\partial y}\Big) + q\overline{\omega}\Big]\omega_j\, dx\, dy \int_T \overline{\omega}\,\omega_j\, dx\, dy = \\
&= \sum_j \mu_j \Big(\int_T \overline{\omega}\,\omega_j\, dx\, dy\Big)^2.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Die Formel (6) gilt auch noch, wenn $\overline{u}$ irgendeine in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion bezeichnet.

Der Beweis wird ganz wie bei dem entsprechenden Satz in § 1 des I. Kapitels geführt. Für den dort benutzten Approximationssatz tritt jetzt der folgende Satz ein:

Man kann in unendlich mannigfaltiger Weise eine Folge in T und auf S analytischer und regulärer, der Beziehung $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial n} = 0$ genügender Funktionen $\bar{\omega}^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ angeben, die folgende Eigenschaften haben:

1. In T und auf S gilt gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \omega^{(n)} = \bar{\omega}. \tag{7}$$

2. In jedem Bereiche in T gilt gleichmäßig

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}. \tag{8}$$

3. Die Funktionen $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}^{(n)}}{\partial y}$ sind gleichmäßig beschränkt[22]).

Aus (6) folgt in leicht ersichtlicher Weise, wenn $\bar{\bar{\omega}}$ eine weitere nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetige Funktion bezeichnet,

$$\left\{\begin{aligned} &\int_T \left\{ p \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\bar{\omega}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\bar{\omega}}}{\partial y} \right) - q \bar{\omega} \bar{\bar{\omega}} \right\} dx\, dy = \\ &= \sum_j \mu_j \int_T \omega\, \omega_j\, dx\, dy \int_T \bar{\bar{\omega}}\, \omega_j\, dx\, dy. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Die Formel (6) *gilt, wie in ganz ähnlicher Weise bewiesen werden kann, wenn $\bar{\omega}$ eine in T und auf S stetige Funktion bezeichnet, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.* Auch dürfen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y}$ bei der Annäherung an gewisse isoliert liegende Punkte in T oder auf S unendlich groß werden, wenn nur das Integral

$$\int_T p \left\{ \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial y} \right)^2 \right\} dx\, dy \tag{10}$$

konvergiert.

§ 2.

Es seien p_1 und p_2 irgendwelche in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktionen, die auf S den Beziehungen

$$p_1 = -h \frac{dy}{ds}, \quad p_2 = h \frac{dx}{ds} \tag{11}$$

genügen. Es sei u eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung in $T + S$ stetige Funktion, die in T stetige partielle Ableitungen zweiter

[22]) Der Beweis läßt sich ganz wie bei dem in § 1 des ersten Kapitels betrachteten Approximationssatz führen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß diesmal die Funktion $\mathfrak{F}(\mathfrak{s})$ dadurch über die Einheitskugel fortgesetzt wird, daß man ihr in den in bezug auf die Ebene $z = 0$ symmetrischen Punkten gleiche Werte erteilt.

Ordnung hat. Es möge schließlich v eine *willkürliche* in T und auf S nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion bezeichnen, und es sei

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_T \Big[p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-quv+\lambda\Big\{p_1\frac{\partial}{\partial x}(uv)+p_2\frac{\partial}{\partial y}(uv)\\ &\qquad +\left(-k+\frac{\partial p_1}{\partial x}+\frac{\partial p_2}{\partial y}\right)uv\Big\}\Big]dx\,dy=0.\end{aligned}\right.$$

Durch teilweise Integration erhält man aus (12) mit Rücksicht auf (11)

$$(13)\quad \int_T\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu+\lambda ku\right]v\,dx\,dy+\int_S\left(p\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda hu\right)v\,ds=0,$$

demnach, da v willkürlich ist,

$$(14)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu+\lambda ku=0 \quad \text{in } T,$$

$$(15)\quad p\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda hu=0 \qquad \text{auf } S.$$

Die Auflösung der Differentialgleichung (14) unter Zugrundelegung der Randbedingungen (15) und die Bestimmung einer Funktion u den Beziehungen (13) gemäß sind demnach zwei völlig äquivalente Probleme.

Wir setzen

$$(16)\quad u\sim\sum_j\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\,\omega_j,\qquad v\sim\sum_j\frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}}\,\omega_j$$

und erhalten nach (9)

$$(17)\quad \int_T\left\{p\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right)-quv\right\}dx\,dy=\sum_j X_jY_j.$$

Betrachten wir jetzt das Integral

$$(18)\quad \int_T p_1\frac{\partial u}{\partial x}v\,dx\,dy.$$

Führt man hier für u und v die Ausdrücke

$$(19)\quad u_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\,\omega_j,\qquad v_m=\sum_{j=1}^{m}\frac{Y_j}{\sqrt{\mu_j}}\,\omega_j,$$

so erhält man

$$(20)\quad K_m'(X,Y)=\sum_{j,\nu=1}^{m}\frac{X_j}{\sqrt{\mu_j}}\frac{Y_\nu}{\sqrt{\mu_\nu}}\int_T p_1\frac{\partial\omega_j}{\partial x}\omega_\nu\,dx\,dy.$$

Es ist nun

$$(21)\quad \begin{cases} [K'_m(X,Y)]^2 = \left(\int\limits_T p_1 \frac{\partial u_m}{\partial x} v_m\, dx\, dy\right)^2 \leqq \int\limits_T p_1^2 v_m^2\, dx\, dy \int\limits_T \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)^2 dx\, dy \\ \qquad \leqq \frac{\operatorname{Max} p_1^2}{\operatorname{Min} p} \int\limits_T v_m^2\, dx\, dy \int\limits_T p \left\{\left(\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_m}{\partial y}\right)^2\right\} dx\, dy \\ \qquad \leqq \frac{\operatorname{Max} p_1^2}{\operatorname{Min} p} \sum_j \frac{Y_j^2}{\mu_j}\left(\sum_j X_j^2 + \operatorname{Max} q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j}\right). \end{cases}$$

Die Bilinearform $K'(X, Y)$ ist demnach beschränkt. Sie ist ferner, wie wir jetzt zeigen wollen, vollstetig.

Wir bezeichnen den Wert, den $K'(X, Y)$ annimmt, wenn man $Y_1 = \ldots = Y_m = 0$ setzt, mit ${}^mK'(X, Y)$.

Aus (21) folgt leicht

$$(22)\quad \begin{cases} [{}^mK'(X,Y)]^2 \leqq \frac{\operatorname{Max} p_1^2}{\operatorname{Min} p} \sum_{j>m} \frac{Y_j^2}{\mu_j}\left(\sum_j X_j^2 + \operatorname{Max} q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j}\right) \\ \qquad \leqq \frac{1}{\mu_m} \frac{\operatorname{Max} p_1^2}{\operatorname{Min} p} \sum_{j>m} Y_j^2 \left(\sum_j X_j^2 + \operatorname{Max} q \sum_j \frac{X_j^2}{\mu_j}\right). \end{cases}$$

Wegen $\lim\limits_{m \to \infty} \mu_m = 0$ konvergiert ${}^mK'(X, Y)$ für alle den Beziehungen $\sum\limits_j X_j^2 = 1$, $\sum\limits_j Y_j^2 = 1$ genügenden X_j und Y_j *gleichmäßig* gegen Null. Die Differenz $K'(X, Y) - {}^mK'(X, Y)$ läßt sich in der Form

$$(23)\qquad Y_1 M_1(X) + \ldots + Y_m M_m(X)$$

darstellen, unter $M_1(X), \ldots M_m(X)$ gewisse Linearformen der Variablen X_j verstanden. Diese Linearformen sind bekanntlich vollstetig. Hieraus und aus der soeben hervorgehobenen Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges

$$\lim_{m \to \infty} {}^mK'(X, Y) = 0$$

folgt, wie man leicht findet, daß $K'(X, Y)$ vollstetig ist.

Setzt man

$$(24)\quad \int\limits_T \left\{p_1 \frac{\partial}{\partial x}(uv) + p_2 \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \left(-k + \frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\partial p_2}{\partial y}\right) uv\right\} dx\, dy = -K(X, Y),$$

so findet man in ähnlicher Weise, daß $K(X, Y)$ vollstetig ist. Aus (12), (17) und (24) folgt demnach

$$(25)\qquad (X, Y) - \lambda K(X, Y) = 0.$$

Die Eigenwerte λ_α der quadratischen Form $K(X, X)$ sind zugleich die Eigenwerte unseres Problems. Damit ist die Existenz der unendlich vielen Eigenwerte der Randwertaufgabe (1), (2) dargetan.

Wie im Kapitel I § 3 läßt sich zeigen, daß die Eigenfunktionen der Differentialgleichung (1) und die Eigenformen von $K(X, X)$ einander umkehrbar eindeutig entsprechen.

Es seien $L_\alpha(X) = \sum\limits_j l_j^{(\alpha)} X_j$ die zu λ_α gehörigen, in bekannter Weise normierten Eigenformen. Die unendliche Reihe

$$\sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} X_j \tag{26}$$

konvergiert unbedingt und gleichmäßig. Setzt man

$$\sum_j \frac{l_j^{(\alpha)}}{\sqrt{\mu_j}} X_j = \psi_\alpha(x, y), \tag{27}$$

so ist ψ_α eine zu λ_α gehörige Eigenfunktion des Problems. Aus

$$L_\alpha(\cdot) L_\beta(\cdot) = 0 \quad (\alpha \neq \beta), \qquad L_\alpha(\cdot) L_\alpha(\cdot) = 1 \tag{28}$$

folgt wegen (17)

$$\int_T \left[p \left\{ \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \frac{\partial \psi_\beta}{\partial y} \right\} - q \psi_\alpha \psi_\beta \right] dx\, dy = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{29}$$

$$\int_T \left[p \left\{ \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right)^2 \right\} - q \psi_\alpha^2 \right] dx\, dy = 1, \tag{30}$$

oder nach einer teilweisen Integration

$$\left\{ \begin{aligned} & -\int_T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} \right) + q \psi_\alpha \right] \psi_\beta \, dx\, dy + \\ & + \int_S p \psi_\beta \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} dy - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial y} dx \right) = 0, \qquad (\alpha \neq \beta) \end{aligned} \right. \tag{31}$$

folglich wegen (14) und (15)

$$\int_T k \psi_\alpha \psi_\beta \, dx\, dy + \int_S h \psi_\alpha \psi_\beta \, ds = 0 \qquad (\alpha \neq \beta) \tag{32}$$

und analog

$$\int_T k \psi_\alpha^2 \, dx\, dy + \int_S h \psi_\alpha^2 \, ds = \frac{1}{\lambda_\alpha}. \tag{33}$$

Setzt man jetzt

$$\psi_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\sqrt{|\lambda_\alpha|}}, \tag{34}$$

so findet man

$$(35)\qquad \int_T k\varphi_\alpha \varphi_\beta \, dx\, dy + \int_S h\varphi_\alpha \varphi_\beta \, ds = 0, \qquad (\alpha \neq \beta)$$

$$(36)\qquad \int_T k\varphi_\alpha^2 \, dx\, dy + \int_S h\varphi_\alpha^2 \, ds = \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}.$$

Die Formel

$$(37)\qquad K(X, X) = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} [L_\alpha(X)]^2,$$

führt wie in § 5 des ersten Kapitels zu dem Satze

Es sei $\bar{u}(x, y)$ irgendeine in $T + S$ stetige Funktion, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat.

Es gilt

$$(38)\qquad \boxed{\int_T k\bar{u}^2 dx\, dy + \int_S h\bar{u}^2 ds = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}\left(\int_T k\bar{u}\varphi_\alpha dx\, dy + \int_S h\bar{u}\varphi_\alpha ds\right)^2.}$$

Die Formel

$$(39)\qquad (X, X) \geqq \sum_\alpha [L_\alpha(X)]^2$$

führt ebenso zu der Entwicklung

$$(40)\qquad \boxed{\int_T \left[p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} - q\bar{u}^2\right] dx\, dy \geqq \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left(\int_T k\bar{u}\varphi_\alpha dx\, dy + \int_S h\bar{u}\varphi_\alpha ds\right)^2.}$$

Ist die Form $K(X, X)$ abgeschlossen, so gilt hier das Gleichheitszeichen.

Aus der Formel (38) folgt ganz wie in § 3 des ersten Kapitels der Satz

Nimmt k in T positive Werte an, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Nimmt k in T negative Werte an, so gibt es ebenso unendlich viele negative Eigenwerte. Wechselt k in T das Vorzeichen, so gibt es demnach sowohl unendlich viele positive, als auch unendlich viele negative Eigenwerte.

Es mögen jetzt unendlich viele positive Eigenwerte existieren. Aus den Formeln (38) und (40) läßt sich ganz wie in § 6 des ersten Kapitels der folgende Satz ableiten:

Der kleinste Wert, den das Integral

$$(41)\qquad \int_T \left[p\left\{\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2\right\} - q\bar{u}^2\right] dx\, dy$$

für alle in $T+S$ stetigen Funktionen $\bar{u}$ annimmt, die beschränkte, in T abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben und der Beziehung

$$\int_T k\bar{u}^2\,dx\,dy + \int_S h\bar{u}^2\,ds = 1 \tag{42}$$

genügen, ist gleich $\lambda^{(1)}$, dem kleinsten positiven Eigenwert des Randwertproblems (14), (15).

Wir denken uns die positiven Eigenwerte in eine Reihe $\lambda^{(1)} \leqq \lambda^{(2)} \leqq \ldots$ geordnet. Die zugehörigen Eigenfunktionen heißen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots$ Es möge etwa $\lambda^{(1)} = \ldots = \lambda^{(r)}$ sein[28]).

Wir bemerken vor allem, daß $\lambda^{(1)}$ jedenfalls nicht größer als der kleinste positive Eigenwert $\lambda^{(1)*}$ der Differentialgleichung (14) ist, der zu dem ersten Randwertproblem gehört.

Wie im Kapitel I läßt sich zeigen, daß $\lambda^{(1)*}$ der kleinste Wert ist, den der Ausdruck

$$\int_T \left[p\left\{ \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 \right\} - q\bar{u}^2 \right] dx\,dy$$

unter den Nebenbedingungen $\bar{u} = 0$ auf S und $\int_T k\bar{u}^2\,dx\,dy = 1$ annimmt. Die dabei in Frage kommenden Vergleichsfunktionen erfüllen augenscheinlich die Beziehung (42) und bilden daher eine Untermenge der bei der Bestimmung von $\lambda^{(1)}$ heranzuziehenden Funktionen. Hieraus folgt aber, in der Tat, $\lambda^{(1)} \leqq \lambda^{(1)*}$. Betrachten wir etwa die Eigenfunktion $\varphi^{(1)}$. *Sie kann, wie wir jetzt zeigen wollen, in T nicht verschwinden.*

Es möge im Gegensatz hierzu $\varphi^{(1)}$ in T Nullstellen haben. Es sei (x_0, y_0) ein Punkt in T, in dem $\varphi^{(1)}$ positiv ist, und es sei T^* das größte (x_0, y_0) enthaltende Gebiet, in dem $\varphi^{(1)} > 0$ ist. Nach Voraussetzung ist T^* von T verschieden.

Wir setzen

$$u^* = -\varphi^{(1)} \text{ in } T^*, \qquad u^* = \varphi^{(1)} \text{ in } T - T^*$$

und finden

$$\int_T \left[p\left\{ \left(\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)^2 \right\} - qu^{*2} \right] dx\,dy = \lambda^{(1)},$$

$$\int_T k(u^*)^2\,dx\,dy + \int_S h(u^*)^2\,ds = 1,$$

was nicht möglich ist, da der Wert $\lambda^{(1)}$ nur zu den Funktionen $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ gehört.

---

[28]) Es wird sich bald zeigen, daß $r = 1$ ist.

Da $\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(r)}$ in T nicht verschwinden können, *so ist $\lambda^{(1)}$ ein einfacher Eigenwert.* Andernfalls gäbe es nämlich, wie man leicht sieht (vgl. § 8 des I. Kapitels) zu $\lambda^{(1)}$ gehörige Eigenfunktionen, die in T verschwinden.

Man überzeugt sich jetzt leicht, daß $\lambda^{(1)}$ nicht gleich $\lambda^{(1)*}$ sein kann. Andernfalls müßte die Eigenfunktion $\varphi^{(1)}$ auf S der Bedingung

$$(43) \qquad p\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} + h\varphi^{(1)} = 0$$

und, da sie in T nicht verschwindet, der weiteren Bedingung

$$(44) \qquad \varphi^{(1)} = 0$$

auf S genügen.

Aus (43) und (44) folgt

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = 0.$$

Nach bekannten Sätzen müßte $\varphi^{(1)}$ in T identisch verschwinden.

Es ist also

$$(45) \qquad \lambda^{(1)} < \lambda^{(1)*}.$$

Es möge etwa $\varphi^{(1)}$ in T positiv sein. Dann ist $\varphi^{(1)}$ auf S jedenfalls nicht negativ und, wie wir schon wissen, auch nicht identisch gleich Null. Sollte nämlich $\varphi^{(1)}$ auf S auch negative Werte annehmen, so müßte das gleiche auch in T in hinreichender Nähe von S der Fall sein. Dann würde aber $\varphi^{(1)}$ in T verschwinden müssen.

Alle in diesem Kapitel abgeleiteten Sätze lassen sich auf die allgemeinere Differentialgleichung

$$(46) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial y}\right) + q^{(0)}u + \lambda k^{(0)}u = 0,$$

$$ac - b^2 > 0, \; a > 0, \; q^{(0)} < 0$$

und die Randbedingung

$$(47) \qquad \left(b\frac{dx}{ds} - a\frac{dy}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \left(c\frac{dx}{ds} - b\frac{dy}{ds}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda h^{(0)}u = 0$$

sinngemäß übertragen. Für (41) tritt jetzt das Integral

$$(48) \qquad \int\limits_T \left[a\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + c\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right)^2 - q^{(0)}\bar{u}^2\right]dx\,dy;$$

für (42) die Beziehung

$$(49) \qquad \int\limits_T k^{(0)}\bar{u}^2\,dx\,dy + \int\limits_S h^{(0)}\bar{u}^2\,ds = 1$$

ein.

Es sei zum Schluß bemerkt, daß das in diesem Kapitel betrachtete Randwertproblem zwei bekannte Randwertaufgaben als besondere Fälle enthält. Ist h identisch gleich Null, so liegt das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung (1) vor. Ist k identisch gleich Null, so handelt es sich um das Randwertproblem

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right)+qu=0 \text{ in } T,$$

$$p\frac{\partial u}{\partial n}+\lambda hu=0 \text{ auf } S.$$

(Eingegangen am 26. November 1918.)