Werk

Titel: Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin

Autor: Theis, M.

Jahr: 1919

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0003|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über eine Interpolationsformel von de la Vallée Poussin.

Von

Maria Theis in Bonn.

In der vorliegenden Arbeit werden die allgemeinen Sätze über Interpolationsverfahren, die in einer von H. Hahn kürzlich veröffentlichten Abhandlung „Über das Interpolationsproblem“[1]) bewiesen worden sind, auf eine spezielle von Ch. J. de la Vallée Poussin[2]) aufgestellte Interpolationsformel angewandt. Diese Formel konvergiert, wie de la Vallée Poussin gezeigt hat, für jede stetige Funktion in jedem Punkte, in dem die Funktion von endlicher Variation ist. Aus den von H. Hahn aufgestellten allgemeinen Sätzen ergibt sich diese Tatsache mit großer Leichtigkeit; außerdem läßt sich auf diese Weise zeigen, daß die de la Vallée Poussinsche Formel nicht für jede stetige Funktion konvergiert. Sodann wird aus dieser Formel eine Interpolationsformel abgeleitet, die der Fejérschen Summierung der Fourierschen Reihe in derselben Weise entspricht, wie die de la Vallée Poussinsche Formel den einfachen Partialsummen der Fourierschen Reihe. Für die so gewonnene Formel wird, wieder unter Benutzung der Resultate von H. Hahn, der Nachweis der Konvergenz für alle stetigen Funktionen erbracht.

§ 1.

Bezüglich der Definition eines stetigen, distributiven Interpolationsverfahrens berufen wir uns auf die schon oben erwähnte Arbeit von H. Hahn[3]). Die Bezeichnungsweise ist dieselbe wie dort. Die n-te Näherungsfunktion eines stetigen distributiven Interpolationsverfahrens ist also von der Form:

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{<a,\,b>} f(x_i^{(n)})\, \varphi_i^{(n)}(x);$$

[1]) Mathematische Zeitschrift, Bd. 1 (1918), S. 115–142.
[2]) Bulletins de l'Académie Belgique, Classe des Sciences 1908, S. 319–410.
[3]) Loc. cit.[1]) S. 117–118.

hierin bezeichnen die $x_i^{(n)}$ die bei der n-ten Näherungsfunktion zur Interpolation benutzten Punkte des Interpolationsintervalles $< a, b >$; über sie wird die Summe erstreckt, $f(x)$ ist die zu interpolierende Funktion.

Mit H. Hahn nennen wir ein solches Verfahren konvergent im Punkte $\bar{x}$, wenn die Beziehung besteht:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}).$$

Unsere Ausführungen stützen sich auf die folgenden Sätze[4]):

Satz I: *Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) stetige, in $< a, b >$ geschränkte und nur von erster Art*[5]) *unstetige Funktion $f(x)$ die Beziehung gelte:*

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

ist notwendig und hinreichend, daß folgende Bedingungen erfüllt seien:

1. *Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. *Es gibt eine Zahl A, so daß:*

$$\sum_{<a,b>} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \quad \text{für alle } n.$$

Satz II: *Es genüge das stetige, distributive Interpolationsverfahren:*

$$P^{(n)}(x; f) = \sum_{<a,b>} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x)$$

folgenden Bedingungen:

1. *Bezeichnet $\psi_i^{(n)}(x, h)$ den Wert 0 oder den Wert $\varphi_i^{(n)}(x)$, je nachdem $x_i^{(n)}$ ins Intervall $(x - h, x + h)$ fällt oder nicht, so gelten für jedes $h > 0$ und jedes Intervall $< \alpha, \beta >$ die beiden Beziehungen:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0$$

gleichmäßig in $< a', b' >$ [Teilintervall von (a, b)].

2. *Für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(x-h,\, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) = 1$$

gleichmäßig in $< a', b' >$.

---

[4]) H. Hahn, loc. cit.[1]) S. 126, 129, 137.

[5]) $f(x)$ hat im Punkte ξ eine Unstetigkeit erster Art, wenn die rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwerte $f(\xi + 0)$ und $f(\xi - 0)$ existieren.

3. *Es gibt eine Zahl A, so daß*:

$$\sum_{<a,b>} |\varphi_i^{(n)}(x)| < A$$

für alle n und alle x von $<a', b'>$. Dann gilt für jede in $<a, b>$ geschränkte und nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$, die in allen Punkten von $<a', b'>$ stetig ist, die Beziehung:

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

gleichmäßig in $<a', b'>$.

Satz III: ***Damit für jede im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) stetige Funktion $f(x)$, die in $<a, b>$ von endlicher Variation ist, die Beziehung gelte:***

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(\bar{x}; f) = f(\bar{x}),$$

ist hinreichend, daß folgende zwei Bedingungen erfüllt seien:

1. *Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) ist:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1; \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. *Es gibt eine Zahl A, so daß für alle Intervalle (α, β) und alle n gilt:*

$$\left| \sum_{<\alpha,\beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \right| < A.$$

Für unsere Zwecke müssen wir die Sätze II und III etwas umändern. Wir stellen deshalb noch folgende weiteren Sätze auf.

Satz IIa: ***Für jede in $<a, b>$ geschränkte, nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$, die in $<\bar{a}, \bar{b}>$ [Teilintervall von $<a, b>$] von endlicher Variation und in $<a', b'>$ [Teilintervall von $(\bar{a}, b)$] stetig ist***[6]***, gilt die Beziehung:***

$$\lim_{n=\infty} P^{(n)}(x; f) = f(x)$$

gleichmäßig für alle x von $<a', b'>$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. *Bezeichnet man mit $\psi_i^{(n)}(x, h)$ den Wert 0 oder den Wert $\varphi_i^{(n)}(x)$, je nachdem $x_i^{(n)}$ in das Intervall $(x - h, x + h)$ fällt oder nicht, so gelten für jedes $h > 0$ und jedes Intervall (α, β) die beiden Beziehungen:*

$$(1) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha,\beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0, \qquad (2) \quad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha,\beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0$$

gleichmäßig in $<a', b'>$.

[6]) An den Stellen a' und b' wird volle, nicht nur einseitige Stetigkeit verlangt.

2. *Für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(x-h,\, x+h)} \varphi_i^{(n)}(x) = 1 \tag{3}$$

gleichmäßig in $< a', b' >$.

3. *Es gibt eine Zahl A, so daß für jedes Intervall (α, β):*

$$\Big| \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(x) \Big| < A \tag{4}$$

für alle n und alle x von $< a', b' >$.

4. *Zu jedem $h > 0$ gehört eine Zahl M, so daß:*

$$\sum_{<a,\, x-h>} |\varphi_i^{(n)}(x)| + \sum_{<x+h,\, b>} |\varphi_i^{(n)}(x)| < M \tag{5}$$

für alle n und alle x von $< a', b' >$.

Satz IIIa: *Damit das stetige, distributive Interpolationsverfahren $P^{(n)}(x; f)$ für jede in $< a, b >$ geschränkte und nur von erster Art unstetige Funktion $f(x)$ konvergent sei im Stetigkeitspunkte $\bar{x}$ von (a, b), in dessen Umgebung $f(x)$ von endlicher Variation ist, ist hinreichend, daß folgende drei Bedingungen erfüllt seien:*

1. *Für jedes den Punkt $\bar{x}$ enthaltende Intervall (α, β) gilt:*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1; \qquad \lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) = 1.$$

2. *Es gibt eine Konstante A, so daß für jedes Intervall (α, β) und alle n:*

$$\Big| \sum_{<\alpha, \beta>} \varphi_i^{(n)}(\bar{x}) \Big| < A.$$

3. *Zu jedem $h > 0$ gibt es eine Konstante M, so daß:*

$$\sum_{<a,\, \bar{x}-h>} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| + \sum_{<\bar{x}+h,\, b>} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < M \quad \text{für alle } n.$$

Es sind in diesen beiden Sätzen die Bedingungen weniger scharf, als in den entsprechenden Sätzen II und I; dies wird durch eine neu hinzutretende Voraussetzung ausgeglichen. Der Beweis dieser Sätze unterbleibt hier, weil er sich nicht wesentlich von demjenigen unterscheidet, der von H. Hahn für Satz II und III ausführlich gebracht worden ist[2]).

---

[2]) Loc. cit.[1]) S. 123, 135.

§ 2.

Die n-te Näherungsfunktion des Interpolationsverfahrens von de la Vallée Poussin lautet, wenn wir uns der in § 1 eingeführten Bezeichnungsweise bedienen:

$$(6) \qquad P^{(n)}(x; f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{<a,b)} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)}) = \sum_{<a,b)} f(x_i^{(n)}) \varphi_i^{(n)}(x),$$

worin die Punkte $x_i^{(n)}$ durch die Vorschrift:

$$(7) \qquad x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{n}, \qquad a \leqq x_i^{(n)} < b \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

bestimmt werden.

Es ist also hier:

$$(8) \qquad \varphi_i^{(n)}(x) = \frac{\sin nx}{n} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} = \frac{\sin n(x - x_i^{(n)})}{n(x - x_i^{(n)})},$$

worunter für $x = x_i^{(n)}$ der Wert 1 zu verstehen ist:

$$(8a) \qquad \varphi_i^{(n)}(x_i^{(n)}) = 1.$$

Hieraus ergibt sich sofort: fällt x mit einem der Punkte $x_i^{(n)}$, etwa mit $x_{i^*}^{(n)}$ zusammen, so wird:

$$P^{(n)}(x_{i^*}^{(n)}; f) = f(x_{i^*}^{(n)}),$$

d. h. die n-te Näherungsfunktion ist in den Punkten $x_i^{(n)}$ schon gleich dem Funktionswert von $f(x)$ an der betreffenden Stelle.

Wir wenden uns nun der Frage nach der Konvergenz der de la Vallée Poussinschen Formel zu. Als stetige, distributive Interpolationsformel lassen sich auf sie die Sätze von § 1 anwenden; wir haben also zu untersuchen, inwieweit für sie die in den einzelnen Sätzen über das Interpolationsverfahren gemachten Voraussetzungen zutreffen.

Von de la Vallée Poussin wurde schon auf anderem Wege nachgewiesen[8]):

Satz IV: *Für jede nur von erster Art unstetige Funktion konvergiert*

$$P^{(n)}(x; f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{<a,b)} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)})$$

in jedem Punkte $\bar{x}$ von (a, b) gegen $f(\bar{x})$, in dem $f(x)$ stetig und in dessen Umgebung $f(x)$ von endlicher Variation ist. Ist $f(x)$ in ganz $<\bar{a}, \bar{b}>$ [Teilintervall von $<a, b>$] von endlicher Variation, so ist die Konvergenz eine gleichmäßige in jedem Teilintervall $<a', b'>$ von $(\bar{a}, \bar{b})$, in dem $f(x)$ stetig ist.

[8]) Loc. cit.[2]) S. 341.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich nun für uns sehr einfach, wenn wir uns auf die Sätze IIa und IIIa in § 1 berufen. Wir werden nachweisen, daß die Relationen (1) bis (5) (Satz IIa) im ganzen Intervall $< a, b >$ gleichmäßig gelten; hiermit sind dann die Bedingungen von Satz IIIa von selbst erfüllt.

Bezeichnen wir mit $\psi_i^{(n)}(x, h)$ dieselbe Funktion wie in Satz IIa, so haben wir zunächst zu zeigen: ist (α, β) ein beliebiges Intervall, h eine vorgegebene Zahl > 0, so gelten die Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \sum_{<\alpha, \beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{n=\infty} \sum_{(\alpha, \beta)} \psi_i^{(n)}(x, h) = 0^{9}) \tag{10}$$

gleichmäßig in ganz $< a, b >$.

In der Tat, fällt das Intervall $< x - h, x + h >$ ganz in $< \alpha, \beta >$ hinein, so gilt wegen (8) und der Definition von $\psi_i^{(n)}(x, h)$:

$$\left| \sum_{<\alpha, \beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leqq \left| \frac{\sin n x}{n} \sum_{<\alpha, x-h>} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} \right| + \left| \frac{\sin n x}{n} \sum_{<x+h, \beta>} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} \right|,$$

$\frac{\sin n x}{n} \sum_{<x+h, \beta>} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}}$ ist aber eine alternierende Reihe, deren Glieder monoton abnehmen und falls $\beta = +\infty$, gegen Null gehen; sie ist also ihrem absoluten Betrage nach kleiner als ihr erstes Glied, d. h. kleiner als $\frac{1}{nh}$. Dieselbe Abschätzung ergibt sich für die andere Summe. Wir haben daher:

$$\left| \sum_{<\alpha, \beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leqq \frac{2}{nh}. \tag{11}$$

Liegt dagegen $< x - h, x + h >$ ganz außerhalb $< \alpha, \beta >$, so erhalten wir auf ähnliche Weise:

$$\left| \sum_{<\alpha, \beta>} \psi_i^{(n)}(x, h) \right| \leqq \frac{1}{nh}. \tag{12}$$

Dieselbe Abschätzung läßt sich herleiten, wenn $< \alpha, \beta >$ das Intervall $< x - h, x + h >$ teilweise überdeckt. Für jedes x von $< a, b >$ und jedes Intervall $< \alpha, \beta >$ gilt also eine der beiden Beziehungen (11) und (12), womit das gleichmäßige Bestehen von (9) nachgewiesen ist. Entsprechend aber läßt sich (10) beweisen.

Um nachzuweisen, daß die zweite Bedingung von Satz IIa erfüllt ist, haben wir zu zeigen: für jedes $h > 0$ gilt die Beziehung:

---

[9]) Diese Relationen gelten auch für $\alpha = -\infty$ und $\beta = +\infty$.

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin n x}{n} \sum_{x-h,\, x+h)} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} = 1 \tag{13}$$

gleichmäßig in $< a, b >$.

Der Beweis ergibt sich mit Hilfe der Partialbruchzerlegung von $\frac{1}{\sin x}$. Bekanntlich ist:

$$\frac{1}{\sin n x} = \frac{1}{n x} + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} (-1)^i \left\{ \frac{1}{n x - i\pi} + \frac{1}{i\pi} \right\}, \tag{14}$$

wo in der Summe das Glied $i = 0$ wegzulassen ist.

Wir behaupten:

$$\frac{1}{\sin n x} = \sum_{(x-h,\, x+h)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} + \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} + \sum_{<x-h,\, -\infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} \text{ [10]}. \tag{15}$$

In der Tat, da die Zusatzglieder $\frac{1}{i\pi}$ in (14) sich wegheben, ist:

$$\frac{1}{\sin n x} = \lim_{p=\infty} \sum_{<-p,\, +p>} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi},$$

oder mit anderen Worten: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein p^*, so daß für $p > p^*$:

$$\left| \frac{1}{\sin n x} - \sum_{<-p,\, +p>} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} \right| < \varepsilon. \tag{16}$$

Nun sind:

$$\sum_{<x+h,\, +\infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} \quad \text{und} \quad \sum_{<x-h,\, -\infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi}$$

alternierende Reihen, deren Glieder absteigend gegen 0 gehen. Sie sind daher konvergent, d. h. die rechte Seite von (15) hat einen endlichen Wert. Um ihn zu berechnen, folgern wir aus der Konvergenz der beiden obigen Summen: es gibt ein p^{**}, so daß für alle $p > p^{**}$:

$$\left| \sum_{(p,\, \infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} \right| < \varepsilon, \qquad \left| \sum_{(-p,\, -\infty)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi} \right| < \varepsilon. \tag{17}$$

Wählen wir nun $p > p^*$, $p > p^{**}$ und schreiben die rechte Seite von (15) in der Form:

$$\sum_{(x-h,\, x+h)} \cdots + \sum_{<x+h,\, p>} \cdots + \sum_{<x-h,\, -p>} \cdots + \sum_{(p,\, \infty)} \cdots + \sum_{(-p,\, -\infty)} \cdots,$$

so ergibt sich aus (16) und (17) unsere Behauptung unmittelbar.

---

[10]) $\sum_{(a,\, b)} \frac{(-1)^i}{n x - i\pi}$ bedeutet hier und im folgenden, daß die Summe über alle i erstreckt werden soll, für die die Ungleichung: $a < x_i^{(n)} < b$ besteht.

Aus (15) können wir nun weiter schließen:

$$(18)\quad \frac{\sin nx}{n}\sum_{(x-h,\,x+h)}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}=1-\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x+h,\,\infty)}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}-\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x-h,\,-\infty)}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}$$

Wegen (10) gilt nun:

$$(19)\quad \lim_{n=\infty}\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x+h,\,\infty)}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}+\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x-h,\,-\infty)}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}=0$$

gleichmäßig in $<a, b>$.

Aus (18) und (19) folgt aber das gleichmäßige Bestehen von (13), das zu beweisen war.

Ferner ist zu zeigen: es gibt eine Zahl A, so daß für jedes Intervall (α, β):

$$(21)\quad \left|\frac{\sin nx}{n}\sum_{<\alpha,\,\beta>}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}\right|<A$$

für alle n und alle x in $<a, b>$.

Sei $x_r^{(n)}$ der erste rechts von x liegende Punkt der Menge $\{x_i^{(n)}\}$ $(i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ und $x_l^{(n)}$ der erste links von x liegende Punkt $x_i^{(n)}$[11]). Setzen wir dann:

$$x_r^{(n)}-x=\xi_r^{(n)}, \qquad x-x_l^{(n)}=\xi_l^{(n)},$$

so ergibt sich die Abschätzung:

$$(22)\quad \left|\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x,\,\beta>}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}\right|\leqq\left|\frac{\sin n\,(x-x_r^{(n)})}{n\,(x-x_r^{(n)})}\right|$$

$$+\,|\sin nx|\left|\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+\pi}-\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+2\pi}+-\ldots\right|.$$

Die Reihe:

$$\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+\pi}-\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+2\pi}+\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+3\pi}-\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+4\pi}+-\ldots$$

ist alternierend und monoton abnehmend, also ihrem absoluten Betrage nach kleiner als der absolute Betrag ihres ersten Gliedes. Für dieses gilt:

$$\left|\frac{1}{n\,\xi_r^{(n)}+\pi}\right|\leqq\frac{1}{\pi}\quad\text{für alle } n.$$

Daher folgt aus (22):

$$(23)\quad \left|\frac{\sin nx}{n}\sum_{<x,\,\beta>}\frac{(-1)^i}{x-x_i^{(n)}}\right|\leqq 1+\frac{1}{\pi}$$

für alle n und alle x in $<a, b>$.

[11]) Ist x selbst ein Punkt von $\{x_i^{(n)}\}$, so setzen wir $x_r^{(n)}=x$; $x_l^{(n)}=x-\frac{\pi}{n}$. Wir führen den Beweis für den Fall, daß x in (α, β) liegt.

Auf dieselbe Weise erhält man:

$$(24) \qquad \left|\frac{\sin n x}{n} \sum_{<a,\, x)} \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}}\right| < 1 + \frac{1}{\pi}$$

für alle n und alle x in $< a, b >$.

Aus (23) und (24) folgt aber (21) unmittelbar.

Endlich haben wir noch nachzuweisen: ist $h > 0$ beliebig gewählt, so gibt es eine Zahl M, so daß:

$$\left|\frac{\sin n x}{n}\right| \sum_{<a,\, x-h>} \left|\frac{1}{x - x_i^{(n)}}\right| + \left|\frac{\sin n x}{n}\right| \sum_{<x+h,\, b>} \left|\frac{1}{x - x_i^{(n)}}\right| \leqq M$$

für alle n und alle x in $< a, b >$.

Da $|\sin n x| \leqq 1$, genügt es nachzuweisen, daß:

$$\sum_{<a,\, x-h>} \left|\frac{1}{n \cdot (x - x_i^{(n)})}\right| + \sum_{<x+h,\, b>} \left|\frac{1}{n \cdot (x - x_i^{(n)})}\right| \leqq M.$$

Jedes Glied dieser Summen ist $\leqq \frac{1}{n \cdot h}$. Wegen (7) ist aber die Anzahl der Glieder $\leqq \frac{b-a}{\pi} \cdot n + 1$ und es ergibt sich die Abschätzung:

$$\sum_{<a,\, x-h>} \left|\frac{1}{n (x - x_i^{(n)})}\right| + \sum_{<x+h,\, b>} \left|\frac{1}{n (x - x_i^{(n)})}\right| \leqq \frac{b-a}{h \pi} + \frac{1}{h} = M$$

für alle n und alle x von $< a, b >$.

Die Formel erfüllt also die vier Bedingungen von Satz IIa für das Intervall $< a, b >$ und Satz IV ist bewiesen.

§ 3.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Formel von de la Vallée Poussin für beliebige stetige Funktionen verhält. Soll sie für jede geschränkte Funktion, die in $< a, b >$ nur Unstetigkeiten erster Art hat, in jedem Stetigkeitspunkt von (a, b) konvergieren, so muß sie den Bedingungen von Satz I (§ 1) in jedem Punkte von (a, b) genügen. Wir werden hingegen nachweisen, daß die Formel der Bedingung 2. von Satz I:

$$(25) \qquad \sum_{<a,\, b>} |\varphi_i^{(n)}(\bar{x})| < A \quad \text{für alle } n$$

für keinen Punkt $\bar{x}$ von (a, b) genügt [ausgenommen $\bar{x} = \pm n\pi$].

Sei zunächst $\bar{x}$ eine mit π kommensurable Zahl ($\neq \pm n\pi$):

$$\bar{x} = \frac{p}{q} \pi \qquad q \neq 1;\ p \text{ und } q \text{ teilerfremd},$$

so behaupten wir: es läßt sich stets eine Folge von positiven, ganzen

Zahlen $\{n_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ so auswählen, daß für jedes Intervall (a, b), das den Punkt $\bar{x}$ enthält, die Beziehung gilt:

$$\lim_{\nu=\infty} \left|\frac{\sin n_\nu \bar{x}}{n_\nu}\right| \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}}\right| = +\infty. \tag{26}$$

Zum Beweise behandeln wir zunächst einen besonders einfachen Fall, indem wir die Annahme machen:

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2}; \qquad <a, b> = <0, \pi>. \tag{27}$$

Wir nehmen in diesem Falle für $\{n_\nu\}$ die Folge der ganzen positiven ungeraden Zahlen; dann gilt für jedes n_ν:

$$|\sin n_\nu \bar{x}| = |\sin n_\nu \tfrac{\pi}{2}| = 1,$$

und es bleibt nur noch $\sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n_\nu(\bar{x} - x_i^{(n_\nu)})}\right|$ abzuschätzen. Nun ist:

$$\bar{x} - x_i^{(n_\nu)} = \frac{\pi}{2} - \frac{i\pi}{n_\nu} = \frac{\pi}{2}\frac{n_\nu - 2i}{n_\nu},$$

also:

$$\sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n_\nu(\bar{x} - x_i^{(n_\nu)})}\right| = \frac{2}{\pi} \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n_\nu - 2i}\right|,$$

und es gilt:

$$\sum_{<0,\pi)} \left|\frac{1}{n_\nu\left(\frac{\pi}{2} - x_i^{(n_\nu)}\right)}\right| = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n_\nu} + \frac{1}{n_\nu - 2} + \ldots + 1 + 1 + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n_\nu - 2}\right).$$

Diese Summe wächst mit n_ν über alle Grenzen; hiermit ist (26) für den Fall (27) bewiesen.

Ganz analog läßt sich der Beweis für jeden Punkt $\bar{x} = \frac{p}{q}\pi$ von (a, b) führen, p und q sind teilerfremd vorausgesetzt, $q \neq 1$. Wir bestimmen dann die Folge $\{n_\nu\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ durch die Vorschrift: n_1 sei eine beliebige Primzahl, die in q nicht aufgeht; für $\nu > 1$ sei: $n_\nu = n_1^\nu$. Dann ist:

$$\frac{p}{q} n_\nu \neq n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

und daher:

$$|\sin n_\nu \bar{x}| = |\sin(n_\nu \tfrac{p}{q}\pi)| \geqq |\sin \tfrac{\pi}{q}| = c \qquad (c > 0)$$

$$\left|\frac{\sin n_\nu \bar{x}}{n_\nu}\right| \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}}\right| \geqq c \sum_{<a,b)} \frac{1}{n_\nu |\bar{x} - x_i^{(n_\nu)}|} = c\frac{1}{\pi} \sum_{<a,b)} \frac{1}{|\frac{p}{q} n_\nu - i|}; \tag{28}$$

i durchläuft wieder alle ganzen Zahlen, die der Ungleichung genügen:

$$a \leqq \frac{i\pi}{n_\nu} < b.$$

Wir erhalten daher für jedes ν:

$$(29)\qquad \sum_{<a,b)} \frac{1}{\left|\frac{p}{q} n_\nu - i\right|} = \frac{1}{\frac{p_\nu}{q}+k_\nu} + \frac{1}{\frac{p_\nu}{q}+k_\nu-1} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{\frac{p_\nu}{q_\nu}} + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q_\nu}} + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q_\nu}+1} + \cdots + \frac{1}{\frac{1-p_\nu}{q_\nu}+k'_\nu},$$

wo p_ν eine der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, q-1$ bedeutet und k_ν und k'_ν ganze positive Zahlen sind, die mit ν über alle Grenzen wachsen. (29) konvergiert also mit ν nach ∞ und wegen (28) ist hiermit auch (26) für jedes $\bar{x} = \frac{p}{q}\pi$ $(\bar{x} \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots)$ bewiesen.

Sei endlich $\bar{x}$ ein beliebiger zu π nicht kommensurabler Punkt von (a, b). Wir suchen dann die zu einem beliebigen n gehörigen in $<a, b)$ liegenden Punkte $x_i^{(n)}$ auf und bezeichnen den zunächst links von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ mit $x_l^{(n)}$, die rechts von $\bar{x}$ liegenden der Reihe nach mit:

$$x_{r,1}^{(n)},\ x_{r,2}^{(n)},\ \ldots,\ x_{r,m_n}^{(n)}.$$

Dann ergibt sich folgende Abschätzung:

$$(30)\qquad \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n(\bar{x}-x_i^{(n)})}\right| \geqq \sum_{<x,b)} \left|\frac{1}{n(\bar{x}-x_i^{(n)})}\right|$$
$$\geqq \sum_{k=1}^{m_n} \left|\frac{1}{n\left(x_l^{(n)} - x_{r,k}^{(n)}\right)}\right| = \frac{1}{\pi}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m_n}\right).$$

Da:

$$\lim_{n=\infty} m_n = +\infty,$$

gilt wegen (30):

$$(31)\qquad \lim_{n=\infty} \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n(\bar{x}-x_i^{(n)})}\right| \geqq \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{m_n} \frac{1}{\nu} = +\infty.$$

Andererseits nähert sich, da $\bar{x}$ zu π inkommensurabel ist, die Folge $\sin n\bar{x}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ mit wachsendem n jedem beliebigen Werte zwischen -1 und $+1$, d. h. es gibt eine Teilfolge, deren Grenzwert gleich c $(c > 0)$. Hieraus und aus (31) folgt:

$$\overline{\lim_{n=\infty}} |\sin n\bar{x}| \sum_{<a,b)} \left|\frac{1}{n(\bar{x}-x_i^{(n)})}\right| = +\infty,$$

d. h. auch für alle zu π inkommensurablen Punkte ist (25) nicht erfüllt.

Wir haben also nachgewiesen, daß die Formel von de la Vallée Poussin in keinem Punkte von (a, b) (ausgenommen die Punkte $0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$) der Bedingung 2. von Satz I genügt. Es gibt also

eine in $< a, b >$ geschränkte, nur von erster Art unstetige, im Punkte $\bar{x}$ stetige Funktion $f(x)$, für die diese Interpolationsformel nicht konvergiert. Der Beweis von Satz I[12]) zeigt sogar, daß die Funktion $f(x)$ in ganz $< a, b >$ stetig gewählt werden kann.

§ 4.

Die Interpolationsformel von de la Vallée Poussin

$$P^{(n)}(x;\, f) = \frac{\sin nx}{n} \sum_{< a, b)}' \frac{(-1)^i}{x - x_i^{(n)}} f(x_i^{(n)}),$$

die, wie wir in §§ 2 und 3 gesehen haben, bezüglich der Konvergenz eine weitgehende Analogie mit den Fourierschen Reihen aufweist, hat auch formal mit den Partialsummen dieser Reihen:

$$s_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u) \frac{\sin (n-\frac{1}{2})u}{\sin \frac{u}{2}} du$$

große Ähnlichkeit. Um eine für jede stetige Funktion konvergente Formel zu erhalten, liegt es daher nahe, von dem von Fejér untersuchten, für jede stetige Funktion mit wachsendem n gegen den Funktionswert $f(x)$ konvergierenden Mittelwert:

$$\frac{s_1(x) + s_2(x) + \ldots + s_n(x)}{n} = \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x+u) \left(\frac{\sin n \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^2 du$$

auszugehen und von ihm in ähnlicher Weise ein Interpolationsverfahren abzuleiten. Wir kommen so zu der Formel:

$$F^{(n)}(x;\, f) = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{< a, b)}' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} f(x_i^{(n)}), \tag{32}$$

von der wir nachweisen werden, daß sie die gewünschte Eigenschaft besitzt.

Die Bezeichnungsweise in (32) ist dieselbe wie bei der de la Vallée Poussinschen Formel; auch hier seien die Punkte $x_i^{(n)}$ von der Form:

$$x_i^{(n)} = \frac{i\pi}{n} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{33}$$

und die Summe werde erstreckt über alle $x_i^{(n)}$, die in das Intervall $< a, b)$ fallen.

---

[12]) H. Hahn, loc. cit.[1]), S. 122.

Man kann auch schreiben:

$$F_i^{(n)}(x;f) = \sum_{<a,b)} \frac{\sin^2 n\left(x-x_i^{(n)}\right)}{n^2\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} f(x_i^{(n)}),$$

und erkennt unmittelbar, daß auch bei dieser Formel die Näherungsfunktion $F^{(n)}(x;f)$ an den Stellen $x_i^{(n)}$ $(i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ von $<a,b)$ schon mit dem Funktionswert übereinstimmt.

§ 5.

Da $F^{(n)}(x;f)$ ein stetiges, distributives Interpolationsverfahren bestimmt, können wir uns wieder auf die Sätze von § 1 stützen. Wir werden zunächst zeigen, daß die Formel für jede nur von erster Art unstetige Funktion in jedem Stetigkeitspunkte $\bar{x}$ von (a,b) konvergiert, indem wir nachweisen, daß sie den Bedingungen von Satz I für jeden Punkt x von (a,b) genügt.

Diese Bedingungen lauten für unsere Formel:

1. Ist x ein Punkt von (a,b), so gelten für jedes den Punkt x enthaltende Intervall (α,β) die beiden Beziehungen:

$$(34)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\alpha,\beta>} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} = 1; \qquad (35)\quad \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\alpha,\beta)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} = 1.$$

2. Zu jedem x von (a,b) gibt es eine Zahl A, so daß:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a,b)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} < A \qquad \text{für alle } n.$$

Zu den Intervallen $<\alpha,\beta>$ rechnet auch das Intervall $<a,b>$. Daher ist mit (34) zugleich auch Bedingung 2. erfüllt und wir brauchen nur die Relationen (34) und (35) zu beweisen. Hierzu benutzen wir die Partialbruchzerlegung:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-k)^2}.$$

Aus ihr folgt wegen (33):

$$(36)\qquad 1 = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,+\infty)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2}.$$

Es ist nun:

$$(37)\qquad \begin{aligned} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,+\infty)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} &= \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\alpha,\beta>} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} \\ &+ \frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2} \sum_{(\beta,+\infty)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\alpha)} \frac{1}{\left(x-x_i^{(n)}\right)^2} \end{aligned}$$

und daher wegen (36):

$$(38)\quad 1 = \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\alpha,\beta>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\beta,+\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\alpha)}' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}.$$

Ebenso ergibt sich:

$$(39)\quad 1 = \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\alpha,\beta)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\beta,+\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\alpha>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}$$

(38) und (39) lehren, daß die Gleichungen (34) und (35) erfüllt sind, wenn die vier Grenzwerte:

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2},$$

erstreckt über die Intervalle $(-\infty, \alpha)$, $(\beta, +\infty)$, $(-\infty, \alpha>$ und $<\beta, +\infty)$ für x aus (α, β) gleich Null sind. Führen wir den Beweis etwa für $<\beta, \infty)$, für die andern Intervalle verläuft er ganz analog. Wir haben also zu zeigen:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{<\beta,\infty)}' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} = 0.$$

Nun ist, da x in (α, β) liegt, für genügend großes n:

$$\beta - \frac{\pi}{n} - x \geqq d > 0$$

und wir erhalten für fast alle n die Abschätzung:

$$\frac{1}{n^2} \sum_{<\beta,+\infty)}' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < \frac{1}{n\pi} \int_{\beta-\frac{\pi}{n}}^{\infty} \frac{du}{(x-u)^2} \leqq \frac{1}{n\pi} \frac{1}{d},$$

also:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{<\beta,+\infty)}' \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} = 0.$$

Hiermit sind die Relationen (34) und (35), daher auch Bedingung 2. und unsere obige Behauptung bewiesen.

§ 6.

Um nun noch die Gleichmäßigkeit der Konvergenz nachzuweisen, wenden wir Satz II von § 1 an und zeigen, daß die Formel den Bedingungen desselben für das ganze Intervall (a, b) genügt.

Für die erste Bedingung ist dies der Fall, wenn für jedes $h > 0$ und jedes Intervall (α, β) die beiden Beziehungen:

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<\alpha,\, x-h>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \beta>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} \right) = 0^{13}),$$

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(\alpha,\, x-h>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} + \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \beta)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} \right) = 0 \tag{40}$$

in ganz (a, b) gleichmäßig gelten.

Da die Summen in (40) nur positive Glieder haben, genügt es zu zeigen, daß die Ausdrücke

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\, x-h>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} \quad \text{und} \quad \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, +\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}$$

gleichmäßig gegen Null konvergieren, denn hieraus folgt es für die Intervalle $<\alpha,\ x-h>$, $<x+h, \beta>$, $(\alpha, x-h>$ und $<x+h,\ \beta)$ a fortiori. Führen wir den Nachweis etwa für $\sum_{<x+h,\, \infty)}$, so haben wir zu zeigen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein N, so daß für alle $n \geqq N$ und alle x von (a, b) gilt:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < \varepsilon.$$

Für alle x und alle n ergibt sich, da $\frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}$ monoton abnimmt, die Abschätzung:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < \int_{x+h}^{\infty} \frac{du}{(x-u)^2} + \frac{1}{h^2} \frac{\pi}{n} \leqq \frac{1}{h} + \frac{\pi}{h^2} = A$$

und daher ist:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < \frac{1}{\pi n} A$$

für alle n und alle x. Hieraus folgt für alle x und alle $n > \frac{\varepsilon \pi}{A}$:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < \varepsilon,$$

wie zu beweisen war. Ebenso läßt sich der Beweis für $\sum_{(-\infty,\, x-h>}$ führen.

Um zu zeigen, daß die zweite Bedingung von Satz II in ganz (a, b) erfüllt ist, benutzen wir folgende Zerlegung:

---

[13]) Ist $x - h < \alpha$, so fällt die erste Summe weg, ist $x + h > \beta$, so die zweite, dasselbe gilt für die folgende Gleichung.

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(x-h,\, x+h)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\, +\infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}$$
$$- \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{(-\infty,\, x-h>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} - \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<x+h,\, \infty)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2}.$$

Nach (36) ist der erste Ausdruck rechts für alle x und alle n gleich 1; für den zweiten und dritten Ausdruck aber ist die gleichmäßige Konvergenz gegen 0 soeben nachgewiesen worden.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Formel der Bedingung 3. genügt: es gibt eine Zahl A, so daß:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a,\, b)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} < A$$

für alle n und alle x von $< a, b >$. Dies ergibt sich sehr einfach, wenn wir die Gleichungen (36) und (37) für das Intervall $< a, b >$ ansetzen. In der Tat, da die Summen in (37) nur positive Glieder haben, ist, wegen (36) jede der drei rechtsstehenden Summen, insbesondere:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a,\, b>} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} \leqq 1 \tag{41}$$

für alle x und alle n.

Fassen wir die Ergebnisse von §§ 5 und 6 zusammen, so können wir also den Satz aussprechen:

Satz V: *Ist $f(x)$ eine in $< a, b >$ geschränkte nur von erster Art unstetige Funktion, so konvergiert die Interpolationsformel:*

$$F^{(n)}(x;\, f) = \frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a,\, b)} \frac{1}{\left(x - x_i^{(n)}\right)^2} f(x_i^{(n)})$$

in jedem Punkte $\bar{x}$ von (a, b), in dem $f(x)$ stetig ist, gegen den Funktionswert $f(\bar{x})$. Diese Konvergenz ist in dem Teilintervall $< a', b' >$ von (a, b) gleichmäßig, wenn $f(x)$ in allen Punkten von $< a', b' >$ stetig ist.

§ 7.

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die Formel in einem Unstetigkeitspunkte erster Art von (a, b) verhält[14]). Sei also $\bar{x}$ ein Punkt von (a, b), für den die beiden Grenzwerte $f(\bar{x} + 0)$ und $f(\bar{x} - 0)$ existieren, aber $f(\bar{x} - 0) + f(\bar{x} + 0)$ ist. Zunächst behandeln wir den Fall, daß $\bar{x}$ zu π inkommensurabel, also von allen $x_i^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ verschieden ist. Wir schreiben dann $F^{(n)}(\bar{x};\, f)$ in der Form:

[14]) Eine ähnliche Untersuchung findet sich bei de la Vallée Poussin für die Formel (6). Vgl. loc. cit.[2]) S. 347.

$$F^{(n)}(\bar{x};f)=\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}\sum_{<a,\bar{x}>}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}f(x_i^{(n)})+\frac{\sin^2 nx}{n^2}\sum_{<\bar{x},b)}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}f(x_i^{(n)})$$

$$=S_1(\bar{x},n)+S_2(\bar{x},n)$$

und zerlegen $S_2(\bar{x},n)$ wieder in:

$$S_2(\bar{x},n)=\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}f(\bar{x}+0)\sum_{<\bar{x},b)}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}$$

$$+\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}\sum_{<\bar{x},b)}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}\left[f(x_i^{(n)})-f(\bar{x}+0)\right]=S_2'(\bar{x},n)+S_2''(\bar{x},n).$$

Definieren wir nun die Funktion $g(x)$ durch die Vorschrift:

$$g(x)=\begin{cases}f(x)-f(\bar{x}+0) & \text{für } x>\bar{x},\\ 0 & \text{„ } x\leqq\bar{x},\end{cases}$$

so gilt für jedes $\alpha<\bar{x}$:

$$S_2''(\bar{x},n)=\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}\sum_{<\alpha,b)}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}g(x_i^{(n)}).$$

Zufolge der Definition ist $g(x)$ eine im Punkte $\bar{x}$ stetige, im übrigen nur von erster Art unstetige Funktion und es ist:

$$g(\bar{x})=0.$$

Bei Anwendung von Satz V erhalten wir daher:

$$\lim_{n=\infty}S_2''(\bar{x},n)=g(\bar{x})=0.$$

Führt man für $S_1(\bar{x},n)$ eine analoge Zerlegung durch, so ergibt sich auf dieselbe Weise:

$$\lim_{n=\infty}S_1''(\bar{x},n)=0.$$

Für den Grenzübergang $\lim_{n=\infty}F^{(n)}(\bar{x};f)$ kommen also nur die beiden Ausdrücke in Betracht:

(42)
$$S_1'(\bar{x},n)=\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}\sum_{<a,\bar{x}>}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}f(\bar{x}-0);$$

$$S_2'(\bar{x},n)=\frac{\sin^2 n\bar{x}}{n^2}\sum_{<\bar{x},b)}\frac{1}{\left(\bar{x}-x_i^{(n)}\right)^2}f(\bar{x}+0).$$

Hieraus folgt leicht, daß die Grenzwerte, denen $F^{(n)}(\bar{x};f)$ mit wachsendem n zustrebt, notwendig zwischen $f(\bar{x}+0)$ und $f(\bar{x}-0)$ liegen oder gleich diesen Werten sind. Wir können aber auch noch feststellen, welche von diesen Werten tatsächlich Grenzwerte sind.

Den zunächst rechts von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ bezeichnen wir mit:

$$x_{i_r}^{(n)} = \frac{i_r \pi}{n}$$

und setzen:

$$\frac{i_r \pi - n\bar{x}}{\pi} = \xi_n, \tag{43}$$

so daß:

$$0 < \xi_n < 1.$$

Bei Benutzung dieser Bezeichnungsweise erhalten wir:

$$S_2'(\bar{x}, n) = \tag{44}$$

$$\sin^2(\xi_n \pi)\left[\frac{1}{\pi^2 \xi_n^2} + \frac{1}{\pi^2(\xi_n+1)^2} + \frac{1}{\pi^2(\xi_n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{\pi^2(\xi_n+l)^2}\right] f(\bar{x}+0)$$

wo l eine positive ganze Zahl ist, die mit n über alle Grenzen wächst. Nun gilt für $0 \leqq \xi \leqq 1$:

$$\sin^2(\pi\xi)\cdot\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \cdots\right] \leqq 1 + \frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

d. h. die links auftretende Reihe ist gleichmäßig konvergent für alle ξ aus $< 0, 1 >$. Aus (44) können wir daher weiter schließen: durchläuft n eine solche Folge $\{n_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ mit $\lim\limits_{k=\infty} n_k = \infty$, daß:

$$\lim_{k=\infty} \xi_{n_k} = \xi, \qquad (0 \leqq \xi \leqq 1) \tag{45}$$

so ist:

$$\lim_{k=\infty} S_2'(\bar{x}, n_k) = \frac{1}{\pi^2}\sin^2(\pi\xi)\left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \frac{1}{(\xi+2)^2} + \cdots\right] f(\bar{x}+0); \tag{46}$$

$S_1'(\bar{x}, n_k)$ läßt sich entsprechend abschätzen; denn bezeichnet man den ersten links von $\bar{x}$ liegenden Punkt $x_i^{(n)}$ mit $x_{i_l}^{(n)}$, so ist:

$$\frac{n\left(\bar{x} - x_{i_l}^{(n)}\right)}{\pi} = \frac{n\bar{x} - \pi i_r + \pi}{\pi} = 1 - \xi_n$$

und $S_1'(\bar{x}, n_k)$ geht, wenn (45) gilt, mit wachsendem k gegen:

$$\frac{1}{\pi^2}\sin^2[\pi(1-\xi)]\left[\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{1}{(1-\xi+1)^2} + \frac{1}{(1-\xi+2)^2} + \cdots\right] f(\bar{x}-0).$$

Hieraus und aus (46) folgt, daß $F^{(n_k)}(\bar{x}; f)$ unter Voraussetzung von (45) gegen den Ausdruck konvergiert:

$$\frac{1}{\pi^2}\sin^2(\pi\xi)\left[\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{(\xi+1)^2} + \cdots\right] f(\bar{x}+0)$$
$$+ \frac{1}{\pi^2}\sin^2(\pi\xi)\left[\frac{1}{(1-\xi)^2} + \frac{1}{(1-\xi+1)^2} + \cdots\right] f(\bar{x}-0)$$

und, wenn man die Gleichung beachtet[15]):

$$(47) \qquad \frac{1}{\xi^2}+\frac{1}{(\xi+1)^2}+\frac{1}{(\xi+2)^2}+\ldots=\frac{d^2 \lg \Gamma(\xi)}{d\xi^2}=\chi(\xi),$$

so wird das weiter:

$$(48) \qquad \frac{1}{\pi^2}\sin^2(\pi\xi)\,[\chi(\xi)\,f(\bar{x}+0)+\chi(1-\xi)\,f(\bar{x}-0)].$$

Dieser Ausdruck wird für $\xi=0$ gleich $f(\bar{x}+0)$, für $\xi=1$ gleich $f(\bar{x}-0)$; durchläuft also ξ die Werte:

$$0 \leqq \xi \leqq 1,$$

so nimmt er, wegen der Stetigkeit, alle Werte von $f(\bar{x}+0)$ bis $f(\bar{x}-0)$ an.

Da nun nach Voraussetzung $\bar{x}$ mit π nicht kommensurabel ist, kommt ξ_n wegen (43) mit wachsendem n jedem Werte aus $<0, 1>$ beliebig nahe. Zu jedem $\xi\,(0 \leqq \xi \leqq 1)$ gibt es also eine Folge $\{\xi_{n_k}\}$, die der Relation (45) genügt, und aus unseren letzten Ausführungen können wir schließen:

Satz VI: *Ist $\bar{x}$ ein Unstetigkeitspunkt erster Art von $f(x)$, und ist $\bar{x}$ nicht mit π kommensurabel, so kommt $F^{(n)}(x; f)$ mit wachsendem n allen Werten von $f(\bar{x}+0)$ bis $f(\bar{x}-0)$ beliebig nahe.*

Sei nun $\bar{x}$ ein fester, zu π kommensurabler Punkt:

$$(49) \qquad \bar{x}=\frac{p}{q}\pi. \qquad (p, q \text{ teilerfremd}, q \neq 0)$$

Für $n_\nu = \nu \cdot q$ ist dann:

$$F^{(n_\nu)}(\bar{x}; f)=f(\bar{x})$$

und daher:

$$\lim_{\nu=\infty} F^{(n_\nu)}(\bar{x}; f)=f(\bar{x}).$$

Als einen ersten Grenzwert erhalten wir also den Funktionswert $f(\bar{x})$.

Wir denken uns nun aus der Folge der ganzen positiven Zahlen alle Vielfachen von q ausgeschlossen. Für die übrigbleibende Folge von Zahlen n gelten, wie leicht ersichtlich, die Ausführungen, die wir zu Beginn dieses Paragraphen für zu π inkommensurables $\bar{x}$ gemacht haben, nun auch hier, d. h. lassen wir n alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen, die nicht Vielfache von q sind, so nähert sich $F^{(n)}(x, f)$ mit wachsendem n nur Werten zwischen $f(\bar{x}+0)$ und $f(\bar{x}-0)$ und die Grenzwerte sind Ausdrücke der Form (48).

Wir haben noch zu untersuchen, welchen Werten sich ξ_n in diesem Falle nähern kann. Wegen (49) wird nun:

---

[15]) Enzyklopädie der math. Wissenschaften, Bd. II, I_1, S. 164.

$$\xi_n = \frac{i_r \pi - n\bar{x}}{\pi} = \frac{i_r q - np}{q},$$

d. h. ξ_n und hiermit auch ξ nimmt nur endlich viele, nämlich $q-1$ verschiedene Werte an. Es gilt daher der

Satz VII: *Ist* $\bar{x} = \frac{p}{q}\pi$ (q *und* p *teilerfremd*), *so strebt* $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ *mit wachsendem* n *außer dem Funktionswerte* $f(\bar{x})$ *noch* $q-1$ *verschiedenen Grenzwerten zu, die zwischen* $f(\bar{x}-0)$ *und* $f(\bar{x}+0)$ *liegen.*

Für den speziellen Fall $q=2$ ist $\xi_n = \xi = \frac{1}{2}$ und da wegen (47)

$$\chi(\xi) + \chi(1-\xi) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi\xi}\right)^2$$

gilt:

$$\chi(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2}$$

und (48) erhält den Wert:

$$\tfrac{1}{2}[f(\bar{x}+0) + f(\bar{x}-0)].$$

Mit Rücksicht auf die Sätze VI und VII können wir also sagen: Ist $\bar{x} = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, so konvergiert $F^{(n)}(\bar{x}; f)$ stets gegen $f(\bar{x})$, denn dann ist $F^{(n)}(\bar{x}, f) = f(\bar{x})$ für alle n. Anderenfalls ist in einem Unstetigkeitspunkte erster Art $\bar{x}$ dann und nur dann $\lim\limits_{n=\infty} F^{(n)}(\bar{x}, f) = f(\bar{x})$, wenn $\bar{x} = \pm\frac{\pi}{2}, \pm 3\frac{\pi}{2}, \ldots$ und $f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+0)+f(\bar{x}-0)}{2}$ ist.

§ 8.

Die Formel $F^{(n)}(x; f)$ hat noch einen anderen Vorzug vor der Formel von de la Vallée Poussin, auf den hier noch kurz aufmerksam gemacht werden soll.

Nach einem von H. Hahn bewiesenen Satze[16]) ist ein stetiges distributives Interpolationsverfahren im Punkte $\bar{x}$ von (a, b) dann und nur dann *von endlicher Empfindlichkeit*, wenn für $\bar{x}$ die zweite Bedingung von Satz I (§ 1) erfüllt ist. Wie wir gesehen haben, ist diese Bedingung bei der Formel von de la Vallée Poussin für kein x [ausgenommen $x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$] erfüllt (vgl. § 3). Für $F^{(n)}(x; f)$ aber ist sie erfüllt, denn nach (41) ist:

$$\frac{\sin^2 nx}{n^2} \sum_{<a,b)} \frac{1}{(x - x_i^{(n)})^2} \leqq 1$$

für alle n und alle x.

---

[16]) Loc. cit. [1]), S. 132.

Diese Formel hat also die Empfindlichkeit 1, d. h. ändert man die $f(x_i^{(n)})$ um Beträge $\leqq \delta$ ab, so wird die Änderung, die dadurch die $F^{(n)}(x, f)$ erfahren, an keiner Stelle den Betrag δ übersteigen, während sie für die von de la Vallée Poussin betrachteten Ausdrücke $P^{(n)}(x, f)$ über alle Grenzen wachsen kann.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß auf ganz analoge Weise, wie de la Vallée Poussin aus seiner hier behandelten trigonometrischen Formel eine parabolische abgeleitet hat[17]), sich auch aus unserer Formel $F^{(n)}(x; f)$ eine parabolische herleiten läßt, die unter denselben Bedingungen wie $F^{(n)}(x; f)$, insbesondere also für alle stetigen Funktionen konvergiert; an Stelle von $F^{(n)}(x; f)$ tritt dann ein Polynom, das an $2n + 1$ äquidistanten Stellen des Interpolationsintervalles $< a, b >$ mit $f(x)$ übereinstimmt, und dessen Grad sich als höchstens $26\,n$ ergibt.

---

[17]) Loc. cit. [2]), S. 394.

(Eingegangen am 11. September 1918.)