Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi.

Von

Gábor Szegö in Budapest.

Im folgenden will ich einen einfachen Satz über die Laguerreschen Polynome beweisen und einige Fragen untersuchen, die mit diesem Satze zusammenhängen. Ich betrachte ferner eine gewisse spezielle Klasse von Jacobischen Polynomen, die mit den Laguerreschen in engem Zusammenhange stehen. Endlich bemerke ich einiges über Legendresche Polynome.

§ 1.

Die Laguerreschen Polynome.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem:

$$e^{-\frac{\zeta}{2}},\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta,\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{\nu},\ \ldots$$

und bilde daraus nach dem Vorgange von E. Schmidt durch Ortogonalisierung das System

$$(L)\qquad e^{-\frac{\zeta}{2}}L_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_{\nu}(\zeta),\ \ldots,$$

wo die $L_{\nu}(\zeta)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$(1)\quad \begin{cases} \text{a) } L_{\nu}(\zeta) \text{ ist ein Polynom } \nu\text{-ten Grades,} \\ \text{b) } \int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} L_{\mu}(\zeta) L_{\nu}(\zeta)\, d\zeta = 0, \end{cases} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

$$(2)\quad \text{c) } L_{\nu}(0) = 1.\text{[1]}$$

[1] Die Bedingung b) ist mit der folgenden äquivalent:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} L_{\nu}(\zeta)\zeta^{\varrho}\, d\zeta = 0, \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu-1)$$

und hieraus folgt bekanntlich, daß alle Wurzeln von $L_{\nu}(\zeta)$ positiv sind. Die Normierung $L_{\nu}(0) = 1$ ist also stets möglich.

Durch diese Bedingungen ist das System (L) eindeutig bestimmt. D. h. wenn

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}F_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_\nu(\zeta),\ \ldots$$

ein System von Funktionen bezeichnet, die diesen Bedingungen genügen, so ist

$$F_\nu(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Polynome $L_\nu(\zeta)$ sind die *Laguerreschen Polynome.*

Ich will zunächst zeigen, daß die erzeugende Funktion dieser Polynome, wie schon Laguerre (Werke, Bd. I, S. 436) angibt, folgende ist:

$$(3) \qquad \frac{e^{-\frac{\zeta t}{1-t}}}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(\zeta)t^\nu.$$

Ich beweise das, indem ich die drei obenerwähnten Eigenschaften von $L_\nu(\zeta)$ für die Koeffizienten dieser Entwickelung verifiziere. In der Tat: erstens ist es klar, daß der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades ist. D. h. die Bedingung a) ist erfüllt. Ähnliches gilt für c), weil ja

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu$$

ist. Was endlich die Bedingung b) betrifft, so ist deren Gültigkeit folgendermaßen zu beweisen. Zunächst folgt aus (3)

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}\frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u}\,\frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v}\,d\zeta = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u^\mu v^\nu \int_0^\infty e^{-\zeta}L_\mu(\zeta)L_\nu(\zeta)\,d\zeta.$$

Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}\frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u}\,\frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v}\,d\zeta = \frac{1}{(1-u)(1-v)}\,\frac{1}{1+\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}}$$

$$= \frac{1}{1-uv} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^\nu v^\nu,$$

d. h. b) ist auch erfüllt. Außerdem folgt noch hieraus, daß

$$(1^*) \qquad \int_0^\infty e^{-\zeta}L_\nu^2(\zeta)\,d\zeta = 1,$$

also

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}L_\mu(\zeta)L_\nu(\zeta)\,d\zeta = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich werde weiter eine (ebenfalls schon in der Literatur vorkommende) Darstellung dieser Polynome benutzen, die sich für die Folge als besonders wichtig erweisen wird. Das ist:

(4) $$e^{-\zeta} L_\nu(\zeta) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} e^{-\zeta} \zeta^\nu = e^{-\zeta} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \frac{(-\zeta)^h}{h!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)^{2)}.$$

(Letzteres ergibt sich vermittelst der wohlbekannten Leibnizschen Regel).

Diese Formel ist leicht zu beweisen, indem man, wie vorher, die Gültigkeit der obigen Bedingungen verifiziert. a) und c) sind zunächst erfüllt. Die Bedingung b) ist der folgenden äquivalent:

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} L_\nu(\zeta) \zeta^\varrho \, d\zeta = 0 \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1).$$

Ich setze

$$f_\nu(\zeta) = e^{-\zeta} \zeta^\nu,$$

dann ergibt sich mit Hilfe der partiellen Integration

$$\int_0^\infty \zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta) \, d\zeta = -\varrho \int_0^\infty \zeta^{\varrho - 1} D^{(\nu - 1)} f_\nu(\zeta) \, d\zeta \quad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

da die Funktion $f_\nu(\zeta)$ und ihre sämtlichen Derivierten für $\zeta = \infty$ und die ersten $\nu - 1$ Derivierten für $\zeta = 0$ verschwinden. Es ist also

$$\int_0^\infty \zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta) \, d\zeta = (-1)^\varrho \varrho! \int_0^\infty D^{(\nu - \varrho)} f_\nu(\zeta) \, d\zeta = (-1)^\varrho \varrho! \, D^{(\nu - \varrho - 1)} f_\nu(\zeta) \Big|_0^\infty = 0$$
$$(\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1),$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 2.

Ein Satz über die Laguerreschen Polynome.

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu(\zeta)| < 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Im Falle $\nu = 0$ ist der Satz trivial. Es seien $\nu > 0$, $\zeta > 0$ feste Zahlen und z bezeichne eine komplexe Variable. Die Entwickelung

$$f_\nu(\zeta + z) = a_0(\zeta) + a_1(\zeta) z + \ldots + a_h(\zeta) z^h + \ldots$$

konvergiert für jeden Wert von z, da $f_\nu(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Ferner ist

$$a_h(\zeta) = \frac{1}{h!} D^{(h)} f_\nu(\zeta)$$

und man hat nach Cauchy

$$|a_h(\zeta)| r^h \leq \underset{|z| = r}{\mathrm{Max.}} |f_\nu(\zeta + z)| \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[2]) Ich bezeichne im folgenden die ν-te Derivierte von $f(x)$ mit $D^{(\nu)} f(x)$.

wo $r > 0$ beliebig ist[3]). Da speziell

$$a_\nu(\zeta) = e^{-\zeta} L_\nu(\zeta)$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung:

$$e^{-\zeta} |L_\nu(\zeta)| r^\nu < \operatorname*{Max.}_{0 \leqq \Theta < 2\pi} |e^{-(\zeta + re^{i\Theta})}(\zeta + re^{i\Theta})^\nu|$$

$$< e^{-\zeta} \operatorname*{Max.}_{|\alpha| \leqq 1} e^{-r\alpha}\{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$p(\alpha) = p(\zeta, r; \alpha) = \zeta^2 + r^2 + 2\zeta r\alpha \geqq 0$$

und α eine reelle Veränderliche bezeichnet. Man hat so

$$|L_\nu(\zeta)|\, r^\nu < \operatorname*{Max.}_{|\alpha| \leqq 1} e^{-r\alpha}\{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\zeta, r; \alpha) = e^{-r\alpha}\{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\varphi'(\alpha) = e^{-r\alpha}\{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1}\left\{\frac{\nu}{2} 2\zeta r - r p(\alpha)\right\}$$

$$= r e^{-r\alpha}\{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1}\{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2) - 2\zeta r\alpha\}.$$

D. h. diese Funktion hat an der Stelle

$$\alpha_0 = \alpha_0(\zeta, r) = \frac{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2)}{2\zeta r}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein *Maximum*. Man hat also

$$|L_\nu(\zeta)| r^\nu < \begin{cases} \varphi(1) \\ \varphi(\alpha_0), \\ \varphi(-1) \end{cases} \text{je nachdem} \begin{cases} \alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \\ \alpha_0 \leqq -1 \end{cases} \text{ist.}$$

Es sei jetzt

a) $0 < \zeta \leqq 4\nu$. Ich setze $r = \sqrt{\nu\zeta}$. Es ist

$$\alpha_0 = -\frac{\zeta^2}{2\zeta\sqrt{\nu\zeta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}},$$

so daß $-1 \leqq \alpha_0 < 0$. Man hat also

$$|L_\nu(\zeta)| < \frac{\varphi(\alpha_0)}{r^\nu} = \frac{\varphi(\alpha_0)}{(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

---

[3]) Es gilt sogar der Satz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} |a_h(\zeta)|^2 r^{2h} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_\nu(x + re^{i\Theta})|^2 d\Theta < \operatorname*{Max.}_{|z|=r} |f_\nu(x+z)|^2 \qquad (r > 0).$$

Es ist aber

$$-r\,\alpha_0 = \sqrt{\nu\zeta}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}} = \frac{\zeta}{2}$$

und

$$p(\alpha_0) = \zeta^2 + \nu\zeta + 2\zeta\sqrt{\nu\zeta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}}\right) = \nu\zeta,$$

so daß wir erhalten

$$\varphi(\alpha_0) = e^{\frac{\zeta}{2}}(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}$$

und

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

b) $\zeta \geqq 4\nu$. Ich setze $r = \frac{\zeta}{2}$. Es ist

$$\alpha_0 = \frac{\nu - 4\zeta}{\zeta} \leqq -1,$$

so daß

$$|L_\nu(\zeta)| < \frac{\varphi(-1)}{r^\nu} = \left(\frac{2}{\zeta}\right)^\nu \varphi(-1).$$

Man hat aber

$$\varphi(-1) = e^r\,|\,\zeta - r\,|^\nu = e^{\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu,$$

also

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 3.

Verallgemeinerung.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+1},\ \ldots\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+\nu},\ \ldots,$$

wo $k \geqq 0$ beliebig ist. Durch Orthogonalisierung erhalte ich die Funktionen

$$(L^{(k)}) \qquad e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_0^{(k)}(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_1^{(k)}(\zeta), \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_\nu^{(k)}(\zeta),\ \ldots,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(5)\ \begin{cases} \text{a)}\ L_\nu^{(k)}(\zeta) \text{ ist ein Polynom } \nu\text{-ten Grades,} \\ \text{b)}\ \int_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta)\,L_\nu^{(k)}(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu) \end{cases}$$

(6) c) $L_\nu^{(k)}(0) = 1.$[4])

[4]) Alle Wurzeln von $L_\nu^{(k)}(\zeta)$ sind positiv. Vgl. [1]).

Durch diese Bedingungen ist das System $(L^{(k)})$ völlig bestimmt. Ferner ist

$$L_\nu^{(0)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich will folgenden Satz beweisen:

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 \qquad (k > 0;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dieser Satz folgt aus dem vorigen sehr einfach. Es gilt zunächst die Entwickelung

$$\frac{e^{-\frac{\zeta t}{1-t}}}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) t^\nu \qquad (|t| < 1). \tag{7}$$

In der Tat ist der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades. Ferner hat man $L_\nu^{(k)}(0) = 1$, da

$$\frac{1}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} t^\nu.$$

Endlich gilt die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} \frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{(1-u)^{2k+1}} \frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{(1-v)^{2k+1}} d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{(1-uv)^{2k+1}} =$$

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\mu}{\mu} \binom{2k+\nu}{\nu} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta \cdot u^\mu v^\nu,$$

so daß

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

d. h. die Entwickelung (7) ist richtig. Ferner bekommt man

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} [L_\nu^{(k)}(\zeta)]^2 d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{\binom{2k+\nu}{\nu}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5'}$$

Aus (7) folgt schon leicht unser Satz. Da nämlich

$$\frac{1}{(1-t)^{2k}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu-1}{\nu} t^\nu$$

ist, hat man

$$\binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) + \binom{2k}{1} L_{\nu-1}(\zeta) + \binom{2k+1}{2} L_{\nu-2}(\zeta) + \ldots$$
$$+ \binom{2k+\nu-1}{\nu} L_0(\zeta),$$

woraus für $\zeta = 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} = 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

folgt. Also für $\zeta > 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \cdots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

und so

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 4.

Anwendungen.

Es sei $P(\zeta)$ ein Polynom ν-ten Grades, welches nicht identisch verschwindet. Es gilt dann die Ungleichung

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu + 1) \int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt \qquad (\zeta \geqq 0)$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta) + L_1(\zeta) + \cdots + L_\nu(\zeta)]$$

und $\zeta = 0$ ist $(c \neq 0)$.

Der Beweis ist sehr einfach. Ich setze

$$P(\zeta) = c_0 L_0(\zeta) + c_1 L_1(\zeta) + \cdots + c_\nu L_\nu(\zeta),$$

wo die Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_\nu$ nicht alle verschwinden. Man hat

$$\int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt = c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_\nu^2;$$

ferner nach den vorigen

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |P(\zeta)| \leqq |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_\nu|, \qquad (\zeta \geqq 0)$$

also mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu + 1) \int_0^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens ist notwendig, daß $\zeta = 0$ und

$$(c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu)^2 = (\nu + 1)(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_\nu^2),$$

d. h. $c_0 = c_1 = \cdots = c_\nu$ sei. Daß umgekehrt diese Bedingung auch hinreichend ist, ist ohne weiteres klar.

Zusatz. *Es gilt sogar die Ungleichung*

$$e^{-\zeta} P^2(\zeta) \leqq (\nu + 1) \int_\zeta^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt$$

(ζ braucht nicht $\geqq 0$ sein), *und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn*

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta - \zeta_0) + L_1(\zeta - \zeta_0) + \cdots + L_\nu(\zeta - \zeta_0)]$$

und $\zeta = \zeta_0$ ist ($c \neq 0$, ζ_0 ist beliebig).

Es sei nämlich ζ_0 beliebig, aber fest. Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Polynom ν-ten Grades

$$\bar{P}(\zeta) = e^{-\frac{\zeta_0}{2}} P(\zeta_0 + \zeta),$$

für welches

$$e^{-\zeta} \bar{P}^2(\zeta) \leqq (\nu + 1) \int_0^\infty e^{-t} \bar{P}^2(t)\, dt; \qquad (\zeta \geqq 0)$$

speziell

$$\bar{P}^2(0) \leqq (\nu + 1) \int_0^\infty e^{-t} \bar{P}^2(t)\, dt = (\nu + 1) \int_0^\infty e^{-(\zeta_0 + t)} P^2(\zeta_0 + t)\, dt$$

$$= (\nu + 1) \int_{\zeta_0}^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt,$$

also

$$e^{-\zeta_0} P^2(\zeta_0) \leqq (\nu + 1) \int_{\zeta_0}^\infty e^{-t} P^2(t)\, dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes ist folgende:

Es sei $n = 2\nu$ und $Q(\zeta)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom n-ten Grades, welches für jedes reelle ζ nichtnegativ ist. Man hat dann

$$e^{-\zeta} Q(\zeta) \leqq (\nu + 1) \int_\zeta^\infty e^{-t} Q(t)\, dt$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$Q(\zeta) = c\,[L_0(\zeta - \zeta_0) + L_1(\zeta - \zeta_0) + \dots + L_\nu(\zeta - \zeta_0)]^2$$

und $\zeta = \zeta_0$ ist ($c > 0$, ζ_0 ist beliebig).

$Q(\zeta)$ kann nämlich in der Form dargestellt werden:

$$Q(\zeta) = P_1^2(\zeta) + P_2^2(\zeta),$$

wo die Polynome $P_1(\zeta)$ und $P_2(\zeta)$ höchstens den Grad ν haben. Daraus folgt gleich der Satz.

Da

$$e^{\zeta} \int_\zeta^\infty e^{-t} Q(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-t} Q(\zeta + t)\, dt = \sum_{h=0}^{n} \frac{Q^{(h)}(\zeta)}{h!} \int_0^\infty e^{-t} t^h\, dt = \sum_{h=0}^{\infty} Q^{(h)}(\zeta)$$

ist, kann die letzte Ungleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{Q(\zeta)}{\nu + 1} \leqq Q(\zeta) + Q'(\zeta) + \dots + Q^{(n)}(\zeta). \tag{8}$$

§ 5.

Zusammenhang mit einem gewissen System von Polynomen.

Es sei $k \geqq 0$ beliebig. Ich betrachte für $-1 \leqq x \leqq 1$ das Funktionensystem

$$|x|^k,\ |x|^k x,\ \dots\ |x|^k x^n,\ \dots$$

und bilde daraus ein System

$$(P^{(k)}) \qquad |x|^k P_0^{(k)}(x),\ |x|^k P_1^{(k)}(x),\ \ldots\ |x|^k P_n^{(k)}(x),\ \ldots$$

mit folgenden charakteristischen Eigenschaften:

$$(9) \begin{cases} \text{a)}\ P_n^{(k)}(x) \text{ ist ein Polynom } n\text{-ten Grades,} \\ \text{b)}\ \int\limits_{-1}^{1} x^{2k} P_m^{(k)}(x)\, P_n^{(k)}(x)\, dx = 0, \qquad (m < n) \end{cases}$$

$$(10) \quad \text{c)}\ P_n^{(k)}(1) = 1\ {}^{5)}.$$

Diese Polynome[6]) bilden einen Spezialfall der Jacobischen Polynome[7]) und reduzieren sich auf die wohlbekannten Legendreschen Polynome, wenn $k = 0$ gesetzt wird. Ich möchte hier auf einen merkwürdigen Zusammenhang hinweisen, der zwischen diesen und den Laguerreschen Polynomen besteht. Ich beweise nämlich den Satz:

Es sei $n = 2\nu$ *und*

$$\lim_{k=\infty} k(1 - x_k^2) = \zeta;$$

dann ist

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta).$$

Ich betrachte das Polynom ν-ten Grades $\Pi_\nu^{(k)}(x)$, definiert durch die Formel

$$\begin{aligned} x^{k-\frac12}\Pi_\nu^{(k)}(x) &= \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac12}(x-1)^\nu \\ &= x^{k-\frac12}\sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}(\nu+k-\tfrac12)(\nu+k-\tfrac32)\ldots(\nu+k-h+\tfrac12)\,x^{\nu-h}\frac{(x-1)^h}{h!} \\ &= x^{k-\frac12}\sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}\binom{\nu+k-\frac12}{h} x^{\nu-h}(x-1)^h, \end{aligned}$$

und behaupte zunächst, daß

$$P_n^{(k)}(x) = \Pi_\nu^{(k)}(x^2),$$

d. h.

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(x) &= \sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}(\nu+k-\tfrac12)(\nu+k-\tfrac32)\ldots(\nu+k-h+\tfrac12)\,x^{2\nu-2h}\frac{(x^2-1)^h}{h!} \\ (11) \qquad &= \sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}\binom{\nu+k-\frac12}{h} x^{2\nu-2h}(x^2-1)^h. \end{aligned}$$

---

5) Alle Wurzeln von $P_n^{(k)}(x)$ liegen im Innern des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$. Vgl. 1).

6) Eigentlich nur $P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$; s. unten.

7) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse, Zweite Auflage, Paris (Gauthier-Villars), 1896, Bd. 3, S. 231–233.

ist. Zu diesem Zwecke genügt es offenbar, die obigen Eigenschaften von $P_n^{(k)}(x)$, da diese für das System $(P^{(k)})$ charakteristisch sind, für die rechte Seite von (11) verifizieren. Die Bedingungen a) und c) sind offenbar erfüllt. Was b) betrifft, so ist diese mit dem folgenden äquivalent:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x^{\varrho} \Pi_\nu^{(k)}(x^2)\,dx = 0 \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1),$$

oder, da für ungerade ϱ der Integrand eine ungerade Funktion ist und als solche ein verschwindendes Integral liefert, mit dem folgenden:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k+2\sigma} \Pi_\nu^{(k)}(x^2)\,dx = \int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} \Pi_\nu^{(k)}(x)\,dx = 0$$

$$(\nu \geqq 1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1).^{8})$$

Man bekommt aber durch partielle Integration

$$\int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} \Pi_\nu^{(k)}(x)\,dx = \frac{1}{\nu!}\int_0^1 x^{\sigma} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}\,dx$$

$$= (-1)^{\sigma}\frac{\sigma!}{\nu!}\int_0^1 D^{(\nu-\sigma)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}\,dx = 0,$$

da ja die Funktion $x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}$ und ihre ersten $\nu - 1$ Derivierten für $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden. Damit ist die Gleichung (11) bewiesen.

Jetzt folgt schon unser Satz sehr leicht. Man hat nämlich (ν und h sind feste Zahlen)

$$\lim_{k=\infty}\left(\nu+k-\tfrac{1}{2}\right)\left(\nu+k-\tfrac{3}{2}\right)\ldots\left(\nu+k-h+\tfrac{1}{2}\right) x_k^{2\nu-2h}\frac{(x_k^2-1)^h}{h!} = \frac{(-\zeta)^h}{h!}$$

und so

$$\lim_{k=\infty} P_n^{(k)}(x_k) = \sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}\frac{(-\zeta)^h}{h!} = L_\nu(\zeta);$$

ferner

$$\lim_{k=\infty}|x_k|^k = \lim_{k=\infty}\left\{1-(1-x_k^2)\right\}^{\frac{k}{2}} = e^{-\frac{\zeta}{2}},$$

also

$$\lim_{k=\infty}|x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta), \qquad \text{q. e. d.}$$

[8]) Vgl. Jordan, loc. cit. [7]).

§ 6.

Über eine Eigenschaft der Polynome $P_n^{(k)}(x)$.

Es gilt für die Legendreschen Polynome $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$ der wohlbekannte Satz

$$|P_n(x)| \leqq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; \; |x| \leqq 1). \tag{12}$$

Herr J. Schur hat nun die Vermutung ausgesprochen, daß auch

$$|x^k P_n^{(k)}(x)| \leqq 1 \qquad (k \geqq 0,\; n = 0, 1, 2, \ldots; \; |x| \leqq 1) \tag{13}$$

ist[9]), eine Vermutung, die für genügend große k (n ist eine feste Zahl) mittels des vorgehenden Satzes leicht bestätigt werden kann. Ich will hier diese Vermutung mit Hilfe der einfachen Methode, die ich im § 2 benutzt habe, für alle k beweisen, die die Form

$$k = m + \tfrac{1}{2} \tag{14}$$

haben, wo m eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Zunächst gilt die Formel

$$P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x P_{2\nu}^{(k+1)}(x), \tag{15}$$

denn man hat einerseits (laut Definition)

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma+1} dx = \int_{-1}^{1} |x|^{2k+2} P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0$$

$$(\nu \geqq 1; \; \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

und andererseits

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0 \qquad (\nu \geqq 0; \; \sigma = 0, 1, \ldots, \nu),$$

da das Polynom $P_{2\nu}^{(k+1)}(x)$ nach (11) nur gerade Potenzen enthält. Also ist

$$x^k P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x^{k+1} P_{2\nu}^{(k+1)}(x), \tag{15'}$$

d. h. es genügt den Satz (13) nur für gerade n zu beweisen.

Es sei $\nu \geqq 1$ und x eine gegebene Zahl des Intervalls $0 \leqq x \leqq 1$ (Für $\nu = 0$ ist $P_0^{(k)}(x) = 1$, also der Satz trivial).

Man hat nach dem vorhergehenden

$$x^{k-\frac{1}{2}} P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^{\nu}.$$

Ich setze

$$F_\nu^{(k)}(z) = z^{\nu+k-\frac{1}{2}} (z-1)^{\nu};$$

---

[9]) Diese Vermutung hat die Veranlassung zu den vorangehenden Untersuchungen gegeben.

das ist ein Polynom in z, wenn k die Form $\frac{1}{2}+m$ hat. Es sei

$$F_\nu^{(k)}(x+z)=\sum_{h=0}^{2\nu+k-\frac{1}{2}} A_h(x)z^h.$$

Man hat

$$A_h(x)=\frac{1}{h!}D^{(h)}F_\nu^{(k)}(x)$$

und nach Cauchy

$$|A_h(x)|r^h<\underset{|z|=r}{\mathrm{Max.}}|F_\nu^{(k)}(x+z)| \qquad (h=0,1,\ldots,2\nu+k-\tfrac{1}{2}),$$

wo $r>0$ beliebig ist. Da speziell

$$A_\nu(x)=x^{k-\frac{1}{2}}P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung[10]):

$$x^{k-\frac{1}{2}}|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})|r^\nu<\underset{|z|=r}{\mathrm{Max.}}|(x+z)^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x+z-1)^\nu|$$
$$=\underset{|\alpha|\leq 1}{\mathrm{Max.}}\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$\mu=\nu+k-\tfrac{1}{2}\geqq\nu\geqq 1,$$
$$p(\alpha)=p(x,r;\alpha)=x^2+r^2+2xr\alpha\geqq 0,$$
$$q(\alpha)=q(x,r;\alpha)=(1-x)^2+r^2-2(1-x)r\alpha\geqq 0$$

ist und α eine reelle Veränderliche bezeichnet.

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\Phi(\alpha)=\Phi(x,r;\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\Phi'(\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}-1}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1}\left\{\frac{\mu}{2}2xrq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)rp(\alpha)\right\}$$

und

$$\frac{\mu}{2}2xq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)p(\alpha)=$$
$$=\mu x\{(1-x)^2+r^2\}-\nu(1-x)\{x^2+r^2\}-2(\mu+\nu)x(1-x)r\alpha;$$

d. h. die Funktion $\Phi(\alpha)$ hat an der Stelle

$$\alpha_0=\alpha_0(x,r)=\frac{\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{x^2+r^2}{2xr}}{\mu+\nu}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein Maximum. Man hat also

[10]) Hier kommt zum Vorschein, daß die Einschränkung $k=m+\frac{1}{2}$ wesentlich ist; sonst wird nämlich $F_\nu^{(k)}(z)$ für $z=0$ singulär und man kann daher den Cauchyschen Satz nicht anwenden.

$$x^{k-\frac{1}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})|\,r^{\nu} < \begin{cases}\Phi(1) \\ \Phi(\alpha_0), \\ \Phi(-1)\end{cases} \text{je nachdem} \begin{cases}\alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \\ \alpha_0 \leqq -1\end{cases} \text{ist.}$$

Es sei jetzt

a) $$1 > x \geqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2 \text{[11]}$$

oder, was dasselbe ist,

$$0 < \sqrt{\frac{1-x}{x}} \leqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

Ich setze

$$r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}\,x(1-x)}.$$

Es ist dann

$$\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r} = \frac{1-x+\frac{\nu}{\mu}x}{2r}$$

$$\frac{x^2+r^2}{2xr} = \frac{x+\frac{\nu}{\mu}(1-x)}{2r},$$

d. h.

$$\alpha_0 = \frac{\mu^2-\nu^2}{2r\mu(\mu+\nu)}(1-x) = \frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

so daß $0 \leqq \alpha_0 \leqq 1$. Man hat also

$$x^{\frac{k}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})| < x^{\frac{1-k}{2}}\,\frac{\Phi(\alpha_0)}{r^{\nu}} = x^{\frac{1-k}{2}}\,\frac{\Phi(\alpha_0)}{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

Es ist aber

$$p(\alpha_0) = x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + 2x\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\,\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + \frac{\mu-\nu}{\mu}x(1-x) = x$$

und

$$q(\alpha_0) = (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - 2(1-x)\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\,\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$= (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - \frac{\mu-\nu}{\mu}(1-x)^2 = \frac{\nu}{\mu}(1-x),$$

daher ist

$$\Phi(\alpha_0) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\mu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$$

und

$$x^{\frac{k}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})| < x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}} = x^{\frac{1}{4}} < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

b) $$k > \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad 0 < x \leqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2,$$

[11]) Wenn $k = \frac{1}{2}$, d. h. $\mu = \nu$ ist, so soll $x > 0$ sein.

oder in anderer Form

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

Ich setze $r = \sqrt{x} - x$ [12]. Es ist

$$\mu\left\{\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-1\right\}-\nu\left\{\frac{x^2+r^2}{2xr}+1\right\}=\mu\frac{(1-x-r)^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{(x-r)^2}{2xr}=$$

$$\mu\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2(1-x)\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}-\nu\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=\frac{\mu-\nu-\sqrt{x}(\mu+\nu)}{2\sqrt{x}(1-x)}\geqq 0,$$

also

$$\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{x^2+r^2}{2xr}\geqq\mu+\nu,$$

d. h. $\alpha_0 \leqq 1$, so daß

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right|<x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{r^{\nu}}=x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{x^{\frac{\nu}{2}}(1-\sqrt{x})^{\nu}}.$$

Man hat aber

$$p(1)=(x+r)^2=x,$$
$$q(1)=(1-x-r)^2=(1-\sqrt{x})^2$$

und also

$$\Phi(1)=x^{\frac{\mu}{2}}(1-\sqrt{x})^{\nu},$$

d. h.

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right|<x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}}=x^{\frac{1}{4}}<1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist der Satz (13) für $k=m+\frac{1}{2}$ bewiesen. Es gilt sogar die Ungleichung

$$(13') \qquad \left|x^k P_n^{(k)}(x)\right|<|x|^{\frac{1}{4}} \qquad \left(k=\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2},\tfrac{5}{2},\ldots;\ n=1,2,3,\ldots;\ |x|<1\right).$$

§ 7.

Über die Legendreschen Polynome.

Zum Schluß will ich einen Satz über die Legendreschen Polynome beweisen.

---

[12]) Es ist zu beachten, daß, wenn

$$\lim_{k=\infty} k(1-x_k)=\zeta$$

ist,

$$\lim_{k=\infty} k\sqrt{\frac{\nu}{\mu}x_k(1-x_k)}=\sqrt{\nu\zeta}$$

und

$$\lim_{k=\infty} k(\sqrt{x_k}-x_k)=\frac{\zeta}{2}$$

wird. Vgl. § 2 und § 5.

Es ist

$$P^{(1)}_{2\nu}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu}(x-1)^{\nu} = \frac{1}{2^{\nu}\nu!} D^{(\nu)}(u^2-1)^{\nu} = P_{\nu}(u),$$

wenn $u = 2x - 1$ gesetzt wird. Hier bezeichnet $P_{\nu}(u)$ das ν-te Legendresche Polynom. Man hat so nach (13′)

$$(12) \qquad |P_{\nu}(u)| < 1, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ |u| < 1)$$

was mit einem bekannten Satz übereinstimmt.

Ich will hier einen Satz beweisen, woraus (12) reichlich folgt. Das ist: *Es gilt die Gleichung*

$$(16) \qquad [P_{\nu}(u)]^2 + 2\sum_{h=1}^{\nu}\left[\frac{D^{(h)}P_{\nu}(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)}\right]^2(1-u^2)^h =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{1-\cos^2\vartheta(1-u^2)\}^{\nu}d\vartheta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |u| \leq 1).$$

Beweis. Ich setze

$$f(u) = \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^{\nu}$$

und

$$f(u+z) = B_0(u) + B_1(u)z + \ldots + B_{2\nu}(u)z^{2\nu}$$

$$= B_{\nu}(u)z^{\nu} + \sum_{h=1}^{\nu}\{B_{\nu-h}(u)z^{\nu-h} + B_{\nu+h}(u)z^{\nu+h}\};$$

man hat

$$B_h(u) = \frac{1}{h!}D^{(h)}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^{\nu} \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2\nu).$$

Es sei jetzt $|u| < 1$. Ich behaupte zunächst, daß das Polynom in z

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2})$$

symmetrisch ist, d. h.

$$(17) \quad B_{\nu-h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu-h} = B_{\nu+h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu+h} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu).$$

In der Tat ist

$$(u + iz\sqrt{1-u^2})^2 - 1 = u^2 + 2iuz\sqrt{1-u^2} - z^2(1-u^2) - 1 =$$

$$= z^2\left\{u^2 + 2iu\frac{\sqrt{1-u^2}}{z} + \frac{u^2-1}{z^2} - 1\right\} = z^2\left\{\left(u + i\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)^2 - 1\right\},$$

so daß

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2}) = z^{2\nu}f\left(u + i\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)$$

und hieraus folgt (17). Man hat also

$$B_{\nu-h}(u) = (-1)^h B_{\nu+h}(u)(1-u^2)^h \qquad (h = 1, 2, \ldots, \nu)^{13)}.$$

Jetzt benutze ich die Methode, die ich im vorhergehenden mehrmals angewandt habe[14]. Es ist

$$B_\nu^2(u) r^{2\nu} + \sum_{h=1}^{\nu} \{B_{\nu-h}^2(u) r^{2\nu-2h} + B_{\nu+h}^2(u) r^{2\nu+2h}\} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u+re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Setze ich hier

$$r = \sqrt{1-u^2}\ ^{15)},$$

so folgt

$$B_\nu^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu} + \sum_{h=1}^{\nu}\{B_{\nu-h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu-2h} + B_{\nu+h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu+2h}\}$$

$$= B_\nu^2(u)(1-u^2)^\nu + 2\sum_{h=1}^{\nu} B_{\nu+h}^2(u)(1-u^2)^{\nu+h} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Man hat aber

$$(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})^2 - 1 = (1+u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})(u-1+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})$$

und

$$|(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})^2 - 1|^2$$

$$= \{(1+u)^2+1-u^2+2(1+u)\sqrt{1-u^2}\,\alpha\}\{(1-u)^2+1-u^2-2(1-u)\sqrt{1-u^2}\,\alpha\}$$

$$= (1-u^2)\{2+2\sqrt{1-u^2}\,\alpha\}\{2-2\sqrt{1-u^2}\,\alpha\} = 2^2(1-u^2)\{1-\alpha^2(1-u^2)\},$$

wenn $\alpha = \cos\vartheta$ gesetzt wird; also ist

$$|f(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})|^2 = (1-u^2)^\nu\{1-\cos^2\vartheta\,(1-u^2)\}^\nu.$$

Ferner wird

$$B_\nu(u) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu = P_\nu(u),$$

$$B_{\nu+h}(u) = \frac{1}{(\nu+h)!} D^{(\nu+h)}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu = \frac{D^{(h)}P_\nu(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu)$$

und hieraus folgt unmittelbar der Satz (16)[16].

---

[13]) Diese Relation rührt von Jacobi her. Vgl. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, Zweite Auflage, Berlin 1878, Bd. 1, S. 155.

[14]) Eigentlich eine Verallgemeinerung derselben. Vgl. [8]).

[15]) Vgl. § 6, Fall a).

[16]) Es ist, wie aus bekannten Formeln leicht folgt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{1-\cos^2\vartheta\,(1-u^2)\}^\nu d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2\vartheta + u^2\cos^2\vartheta)^\nu d\vartheta = u^\nu P_\nu\left(\frac{u+\frac{1}{u}}{2}\right).$$

(Eingegangen am 6. Februar 1918.)