Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs.

Von

Artur Winternitz in Prag.

Bei wenigen geometrischen Sätzen ist der Gegensatz zwischen der Anschaulichkeit des Inhalts und der Schwierigkeit des Beweises ein so großer, wie bei der Behauptung, daß eine einfache, geschlossene stetige Kurve in der Ebene zwei Gebiete bestimmt, deren gemeinsame Grenze sie ist. Der erste, welcher sie genau formuliert und einen im wesentlichen richtigen Beweis gegeben hat, war C. Jordan[1]), dessen Namen der Satz seither trägt. Das von ihm angewandte Beweisverfahren beruht auf der Möglichkeit, die Kurve durch Folgen von einfachen Polygonen zu approximieren. Für diese wird der Satz als bekannt angenommen. So naturgemäß auch dieser Gedanke ist, so hat sich doch seine vollständige Durchführung als so umständlich erwiesen, daß der Wunsch entstand, den Beweis auf prinzipiell andere und einfachere Grundlage zu stellen. Dies geschah namentlich in der Arbeit, welche L. E. J. Brouwer im 69. Bande der Mathematischen Annalen im Jahre 1910 veröffentlicht hat. Auch in ihr wird der Polygonsatz benutzt, aber nicht zu einem Approximationsverfahren, vielmehr in einer mehr topologischen Weise. Auch wir werden ähnlich verfahren.

Die Grundlage des neuen Beweises bildet die Erkenntnis, daß sich die Unterscheidung der beiden Seiten einer Jordankurve in äußerst einfacher Weise mit Hilfe von Jordanbogen vornehmen läßt (IV 3), wodurch die Zurückführung des Jordanschen Kurvensatzes auf den Satz vom Jordanbogen gelingt, auf die Aussage nämlich, daß ein einfacher stetiger Kurvenbogen die Ebene nicht zerschneidet. Mein Beweis für diesen Satz steht teilweise dem Gedankengang von § 4 der Brouwerschen Arbeit nahe. Die Polygonsätze, welche auch für uns ein wesentliches Hilfsmittel bilden,

---

[1]) Vgl. Cours d'analyse, Paris 1887, Bd. 3, S. 587; zweite Auflage (1893), Bd. 1, S. 90.

habe ich an die Spitze gestellt und bin auch auf ihren Beweis eingegangen, um keinen Zweifel an der Einfachheit desselben zu lassen. Dieser Teil (I) geht im wesentlichen auf Untersuchungen von Hans Hahn zurück[2]. In II sind einige bekannte, einfache Sätze über Kontinua der Vollständigkeit halber auseinandergesetzt, in III wird der Satz vom Jordanbogen und der Jordansche Kurvensatz für eine teilweise geradlinige Jordankurve, in IV der Jordansche Kurvensatz allgemein bewiesen. Daran schließt sich in V eine einfache Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegenüber dem Mehr-als-zwei-dimensionalen. In VI werden dann allgemeinere Gebietsteilungssätze im Sinne unserer Methode behandelt und damit eine einfache Begründung der Riemannschen Zusammenhangstheorie ebener Gebiete gegeben.

I. Streckenzüge und Polygone.

Wir beginnen damit, daß wir die elementargeometrischen Spezialfälle der Sätze vom Jordanbogen und von der (geschlossenen) Jordankurve beweisen. Dazu brauchen wir nur jene einfachen Verknüpfungs- und Anordnungssätze der ebenen Geometrie, wie sie etwa in den Axiomen I 1—3, II von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* zusammengestellt sind, beziehungsweise unmittelbar aus ihnen fließen; namentlich den Satz, daß eine Gerade die Ebene in zwei Gebiete zerlegt (zwei Seiten hat), eine Eigenschaft, welche auch einer „geknickten Geraden" zukommt, das heißt einer aus zwei von demselben Punkt ausgehenden Halbstrahlen gebildeten Figur.

Einen außerhalb eines (einfachen)[3]) Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkt A kann man mit demselben auf folgende Art verbinden. Man zieht von A aus einen Weg nach einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{S}$ und bestimmt auf ihm jene Stelle M, wo er $\mathfrak{S}$ zum erstenmal trifft. Wir nennen M die Mündung dieses Weges und bezeichnen das Stück AM desselben als einen Weg von A bis $\mathfrak{S}$. Mündung eines Weges von A bis $\mathfrak{S}$ kann jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ sein. Man kann nämlich die Mündung nach folgendem Verfahren schrittweise weiterverlegen. Sei RM die letzte Strecke des Weges AM und PM, MQ zwei aufeinanderfolgende geradlinige Strecken auf $\mathfrak{S}$. Will man die Mündung von M nach Q verlegen, so prüfe man zunächst, ob die Strecke RQ den Halbstrahl von M über P trifft. Ist dies nicht der Fall, so bestimme man auf RM einen Punkt R'

[2]) „Über die Anordnungssätze der Geometrie", Monatshefte der Math. und Physik, 19 (1908), S. 289—303.

[3]) Den Zusatz „einfach" bei Streckenzügen und Polygonen lassen wir im folgenden fort, da hier nur von solchen die Rede ist. Auch die Ausdrücke „Weg" und „Verbindung" bedeuten in I. einfache Streckenzüge.

so nahe an M, daß das Dreieck $R'MQ$ gänzlich (M und Q nötigenfalls ausgenommen) frei von den (nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Eck- und Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist und ersetze $R'M$ durch $R'Q$. Im anderen Falle aber verlängere man PM über M hinaus um eine Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht mehr trifft und wähle auf ihr R'' so, daß das Dreieck $R''MQ$ (bis auf M und allenfalls Q) frei von Eck- und Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist und dann R' auf RM so, daß dasselbe auch vom Dreieck $R'MR''$ (bis auf M) gilt und ersetze schließlich $R'M$ durch $R'R''Q$.

Nun können wir den einfachsten unserer Sätze schon ohne weiteres beweisen: *Ein einfacher Streckenzug zerlegt die Ebene nicht, oder: je zwei außerhalb des Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegene Punkte A und B lassen sich durch einen $\mathfrak{S}$ nicht treffenden Weg miteinander verbinden.* In der Tat braucht man nur $\mathfrak{S}$ ein wenig über ein Ende hinaus zu verlängern und von A und B aus in die Verlängerung einmündende Wege zu ziehen.

Nun zu den Polygonen! Ein solches ($\mathfrak{P}$) besteht aus einer Strecke PQ und einem Streckenzug $\mathfrak{S}$, welche nur die Endpunkte gemein haben. Einen nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkt A kann man nach dem eben bewiesenen Satze derart mit $\mathfrak{P}$ verbinden, daß die Mündung auf der Strecke PQ liegt. Machen wir dasselbe mit einem zweiten, nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte B, so können wir entscheiden, ob die Einmündung auf PQ von derselben Seite her erfolgt oder nicht, d. h. ob die letzten Strecken auf derselben Seite der Geraden PQ liegen oder nicht. Im ersten Falle sieht man sofort, auf welche Weise man zu einem A und B verbindenden Weg gelangt, der $\mathfrak{P}$ nicht trifft. Wie aber steht es im zweiten Falle? Daß er tatsächlich eintritt, sieht man an den Endpunkten I, A einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht trifft. Wir stellen nun folgende Überlegung an: Zieht man von einem nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte C aus zwei Halbstrahlen, so bilden sie zusammen eine „geknickte Gerade" γ. Durchläuft man das Polygon von einem seiner (nicht auf γ liegenden) Punkte aus, so bleibt man entweder auf einer Seite von γ oder man geht abwechselnd von der einen Seite auf die andere und kehrt schließlich auf jene zurück, von der man ausgegangen ist. Daher muß eine gerade Anzahl von Durchsetzungen vorhanden sein. Eine Durchsetzung besteht darin, daß der Weg in einen der Halbstrahlen mündet und dann entweder unmittelbar oder nach Durchlaufen einer Strecke längs desselben auf die andere Seite geht. Hiernach ist klar: entweder tragen alle von C ausgehenden Halbstrahlen eine gerade oder alle eine ungerade Anzahl von Durchsetzungen. Im ersten Falle wollen wir dem Punkte C die Marke a, im zweiten die Marke i erteilen. Dadurch ist die Markenverteilung für alle nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte eindeutig definiert. Zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $\mathfrak{P}$ nicht trifft, erhalten offenbar dieselbe Marke (ihre Verbindungsgerade trägt eine gerade Anzahl von Durchsetzungen). Das gleiche gilt für je zwei Punkte, die durch einen $\mathfrak{P}$ nicht treffenden Streckenweg verbunden werden können. Die Punkte I und A hingegen müssen offenbar verschiedene Marken erhalten und sind also durch $\mathfrak{P}$ getrennt. Wir haben bewiesen, *daß das Polygon wirklich zwei Gebiete bestimmt.* (Die Marke i kennzeichnet das Innere, a das Äußere; das zweite enthält Halbstrahlen, das erste nicht.)

II. Hilfssätze über Kontinua.

Bevor wir uns mit dem Studium allgemeiner Jordanbogen und Jordankurven näher befassen, erledigen wir zwei Hilfssätze, welche wir gleich für Kontinua aussprechen, obwohl wir sie zunächst nur für Jordanbogen brauchen. Unter einem Kontinuum verstehen wir eine beschränkte[4]) zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge; eine solche beschränkte Punktmenge also, welche auf keine Weise als aus zwei fremden (nicht leeren), abgeschlossenen Teilmengen bestehend, aufgefaßt werden kann.

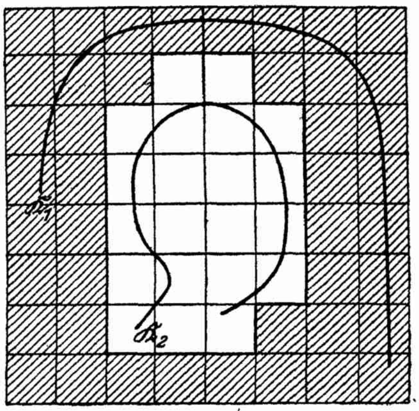

Fig. 1.

1. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch ein Polygon trennen.* Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben voneinander einen positiven Abstand d. Um ein Polygon herzustellen, welches sie voneinander trennt, verfahre man folgendermaßen. Zunächst schließe man beide zusammen in ein Quadrat ein (Seitenlänge a), welches von $\mathfrak{K}_2$ um mehr als d entfernt ist und zerlege es durch zu den Seiten parallele Geraden in n^2 kongruente Teilquadrate von solcher Kleinheit, daß niemals Punkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zugleich in demselben Quadrat vorkommen; man erreicht dies, indem man $n > \frac{a\sqrt{2}}{d}$ annimmt.

Sodann reihe man von einem Teilquadrat, welches einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ enthält, ausgehend, durch wiederholten Übergang von einem Quadrat zu einem benachbarten — welches von einem beliebigen der erreichten Quadrate aus, aber immer nur durch Überschreiten einer Seite erfolgen darf —, Quadrate aneinander, welche einschließlich des Randes frei von $\mathfrak{K}_2$ sind, solange es geht; die erhaltenen Quadrate mache man etwa

[4]) Die Beschränktheit nehmen wir der Bequemlichkeit halber zur Definition.

durch Schraffieren kenntlich. Dann ist man in der Lage, ein Trennungspolygon anzugeben. Beim Schraffieren ist man jedenfalls auf Seiten gestoßen, welche man nicht überschreiten durfte, weil jenseits schon $\mathfrak{K}_2$ liegt. Sei $\alpha\beta$ eine solche, links von ihr ein schraffiertes, rechts ein nicht schraffiertes Quadrat (in welches $\mathfrak{K}_2$ hineinragt). Dann stoßen noch zwei andere Quadrate in β an, hinsichtlich deren zunächst die in Fig. 2 angedeuteten Möglichkeiten 1-4 bestehen; 4 scheidet aber sofort aus. Denn die beiden gegenüberliegenden schraffierten Quadrate müßten durch einen Zug seitenweise aneinanderstoßender schraffierter Quadrate verbunden sein und die beiden anderen, welche Punkte von $\mathfrak{K}_2$ enthalten, wären durch ein Polygon getrennt, welches $\mathfrak{K}_2$ nicht trifft. Die Punkte von $\mathfrak{K}_2$, welche auf der einen Seite desselben, und die, welche auf der anderen liegen, wären zwei fremde, abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{K}_2$, welches doch ein Kontinuum sein sollte. Daraus ist zu entnehmen, daß sich an jede Grenzseite $\alpha\beta$ immer eine zweite $\beta\gamma$ in eindeutig bestimmter Weise anschließt. Da nur endlichviele solche Seiten zur Verfügung stehen, müssen sie sich zu einem Polygon schließen, und dieses trennt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. (Die eine Seite ist schraffiert, die andere nicht. Vgl. Fig. 1.)

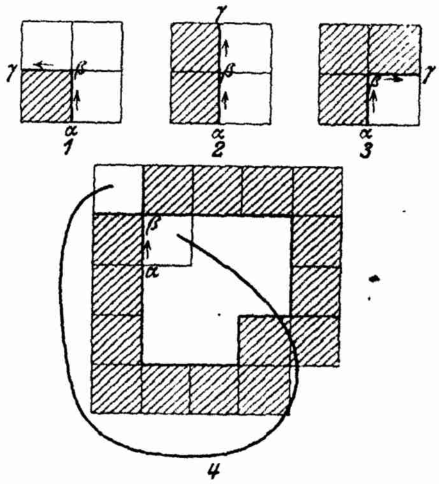

Fig. 2

2. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch einen Jordanbogen miteinander „verbinden".*

Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ können zunächst durch einen Jordanbogen (das ein-eindeutige, stetige Abbild einer Strecke) miteinander verbunden werden, indem man einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ zum Anfangs-, einen Punkt von $\mathfrak{K}_2$ zum Endpunkt des Bogens macht. Es gibt dann (nach Bolzano) auf ihm eine Stelle, wo er $\mathfrak{K}_1$ zuletzt verläßt, und später eine erste, wo er in $\mathfrak{K}_2$ eintritt. Das dazwischenliegende Stück ist es, welches wir als eine „Verbindung" zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bezeichnen wollen. Eine Verbindung zwischen einem Punkt P und einem Kontinuum $\mathfrak{K}$ nennen wir auch einen Weg von P bis $\mathfrak{K}$, den zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Endpunkt: die Mündung desselben in $\mathfrak{K}$. Besteht $\mathfrak{K}$ nicht bloß aus einem einzigen Punkt, so läßt sich die Mündung abändern, indem man den vorliegenden Weg unter Vermeidung seines Endpunktes mit $\mathfrak{K}$ verbindet.

III. Der Satz vom Jordanbogen.

Nun kommen wir zum Beweis des Satzes, daß *ein Jordanbogen t keine Zerlegung der Ebene bewirkt, so daß sich je zwei außerhalb desselben gelegene Punkte A und B durch einen Weg verbinden lassen, welcher ihn nicht trifft.*

1. Wir beweisen den Satz zunächst unter einer scheinbaren Einschränkung. Wir nehmen nämlich an: Nachdem wir von A aus einen Weg bis t gezogen haben, dessen Mündung t_A von den Endpunkten verschieden ist, sei es gelungen, von B aus zwei Wege bis t zu ziehen, deren Mündungen t_B, t'_B durch t_A getrennt werden, und beweisen unter dieser Annahme, daß A mit B durch einen Weg verbunden werden kann, der t nicht trifft. Die Erfüllbarkeit der Annahme selbst werden wir hernach zeigen (vgl. 2.).

Wir ziehen zunächst noch einen Weg von A bis t, dessen Mündung t'_A auf dieselbe Seite falle wie t'_B. Nun zerlegen wir den Jordanbogen t durch zwei Punkte in drei Teilbogen, so daß t_A und t_B dem ersten, t'_A und t'_B dem dritten angehören, während der mittlere m keine von den 4 Mündungen enthält. Die beiden äußeren Teilbogen lassen sich dann nach unserem Hilfssatz II. 1. durch ein Polygon $\mathfrak{P}$ voneinander trennen, welches keinen von ihnen trifft; dieses trennt dann auch sowohl t_A und t'_A, als auch t_B und t'_B. Die Wege $t_A A t'_A$ (w_A) und $t_B B t'_B$ (w_B) durchsetzen also beide $\mathfrak{P}$, und zwar eine ungerade Anzahl mal. Wir werden uns nun davon überzeugen, daß es möglich ist, längs $\mathfrak{P}$ von w_A zu w_B überzugehen, ohne t zu überschreiten. Offenbar handelt es sich bloß darum, m zu vermeiden; denn nur dieser Teilbogen trifft $\mathfrak{P}$. Nun lassen sich zu beiden Seiten von $\mathfrak{P}$ die Endstücke von w_A und w_B durch Streckenwege verbinden, welche weder m noch $\mathfrak{P}$ treffen (denn die verbindenden t-Bogen tun es nicht). Diese bilden zusammen mit w_A und w_B ein einfaches Polygon $\mathfrak{Q}$, welches m nicht trifft. m liegt also auf einer bestimmten (der schraffierten) Seite von $\mathfrak{Q}$. Auf der anderen Seite müssen wir unseren Weg längs $\mathfrak{P}$ suchen, der w_A und w_B verbindet. Unter den auf ihr verlaufenden Teilstreckenzügen von $\mathfrak{P}$ gibt es aber in der Tat einen w_A und w_B verbindenden, — wegen der Ungeradheit der beiden Schnittpunktszahlen. (Der Weg von A nach B ist in Fig. 3 durch Pfeile markiert.)

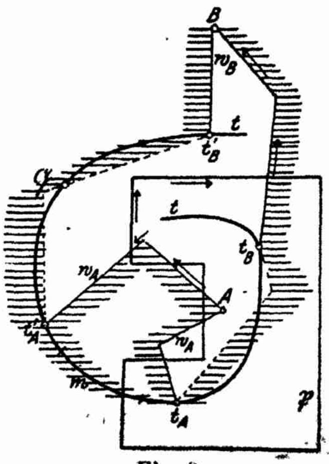

Fig. 3.

2. Nun haben wir noch zu zeigen, daß man wirklich von einem beliebigen Punkt B aus einen Weg ziehen kann, welcher auf einer gegebenen Seite eines bestimmten Kurvenpunktes t_A einmündet. Angenommen also, es gäbe etwa keine Mündung $t_B < t_A$; dann sei $\underline{t}$ die untere Grenze aller t_B; sie zerlegt die Kurve in zwei Teilbögen. Verbinden wir sie miteinander durch einen Weg, der $\underline{t}$ vermeidet, und wählen auf ihm einen Punkt C, so erhalten wir zwei Wege von C bis t, deren Mündungen die Anordnung $t_C < \underline{t} < t'_C$ haben. Da es zwischen t_C und t'_C Mündungen t_B gibt, ist B nach 1. mit C verbindbar; also t_C ein $t_B < \underline{t}$, während $\underline{t}$ doch die untere Grenze aller t_B sein sollte. Damit ist der Beweis für die Umgehbarkeit des Jordanbogens zu Ende geführt.

Bemerkung. Der hier gegebene indirekte Beweis läßt sich auch zu einem direkten Konstruktionsverfahren umgestalten.

3. Die Mündungen t_A der Wege von einem außerhalb des Jordanbogens t liegenden Punkt A bis zu ihm erfüllen t dicht. Sind t_0, t'_0 zwei von den Endpunkten verschiedene Stellen des Jordanbogens, so haben wir soeben bewiesen, daß man von A aus sowohl Wege ziehen kann, deren Mündung $t_A < t_0$, als auch solche, deren Mündung $t'_A > t'_0$ ist. Wir haben noch zu zeigen, daß man auch einen finden kann, dessen Mündung zwischen t_0 und t'_0 liegt. Zu diesem Zwecke brauchen wir bloß die beiden äußeren Teilbogen durch ein Polygon voneinander zu trennen. Dieses trifft dann sowohl $t_A A t'_A$ als auch den mittleren Teilbogen und vermittelt so eine Verbindung zwischen A und demselben. Der Jordanbogen ist also die Grenze des von ihm bestimmten Gebiets; jedenfalls also eine abgeschlossene, nirgends dichte Punktmenge. (In jedem Kreis bleibt ein Kreis frei.)

4. Nun können wir einen Spezialfall des Jordanschen Kurvensatzes sehr leicht beweisen; den Fall nämlich, daß die Jordankurve $\mathfrak{J}$ ein geradliniges Stück enthält, also aus einer Strecke PQ und einem Jordanbogen t besteht, welche bloß ihre Endpunkte gemein haben. Da letzterer keine Gebietsteilung der Ebene bewirkt, kann man von jedem nicht auf $\mathfrak{J}$ liegenden Punkte aus einen Weg ziehen, der auf der Strecke PQ in $\mathfrak{J}$ mündet. Macht man das für zwei Punkte A und B, so können die beiden Wege von derselben Seite her in die Strecke münden; dann bekommt man sofort eine $\mathfrak{J}$ nicht treffende Verbindung zwischen A und B. Im anderen Falle aber gibt es keine. Eine solche (w) gäbe nämlich zur Entstehung eines Polygons Anlaß, welches P und Q trennte. Der sie verbindende Bogen t müßte es treffen gegen die Voraussetzung über w. Daß durch die Kurve getrennte Punktepaare wirklich vorhanden sind, sieht man an den Endpunkten einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche nur den Bogen t nicht erreicht.

IV. Der Jordansche Kurvensatz.

1. Nun gehen wir zum Beweis des allgemeinen Jordanschen Kurvensatzes über und stellen zunächst eine kleine Hilfsbetrachtung an.

Wir denken uns drei Jordanbogen 1, 2, 3, welche nur ihre Endpunkte P und Q gemein haben. Zwei Punkte A und B seien beide mit 1 und 2 durch Streckenwege verbindbar, so daß vorher keiner von den beiden andern Bogen getroffen wird. Die Mündungen seien t_A^1, t_A^2, t_B^1, t_B^2. Ich behaupte: A und B lassen sich durch einen Weg verbinden, der keinen von den drei Bogen trifft[*]). Zum Beweise brauchen wir bloß die spezielle Jordankurve $A t_A^1 t_B^1 B t_B^2 t_A^2 A$ ($\mathfrak{J}$) heranzuziehen. Diese hat nach dem Vorangehenden (III. 4.) zwei Seiten. Auf einer von ihnen (schraffiert) liegen 3 und die nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Reste von 1 und 2. Von einem auf der anderen Seite liegenden Punkt C aus kann man nun sowohl $t_A^1 A t_A^2$ als auch $t_B^1 B t_B^2$ erreichen, wodurch in der Tat eine Verbindung zwischen A und B hergestellt wird.

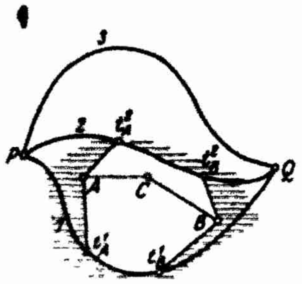

Fig. 4

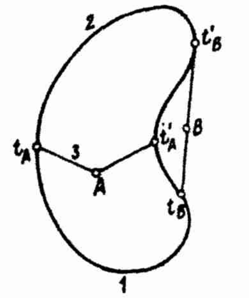

Fig. 5.

2. Liegt nun eine beliebige Jordankurve $\mathfrak{K}$ vor, so können wir von einem nicht zu ihr gehörigen Punkte A aus zwei Streckenwege nach ihr ziehen, welche an verschiedenen Stellen t_A, t_A' einmünden und erhalten dadurch drei Jordanbogen, welche nur ihre Endpunkte gemein haben. Die Bogen 1 und 2 bilden $\mathfrak{K}$, 3 ist ein Streckenzug. Wir haben also den eben betrachteten Fall vor uns. Doch wissen wir hier mehr. Die Bogen 1 und 3 bilden zusammen eine spezielle Jordankurve der in III. 4. betrachteten Art. Der Bogen 2 verläuft (bis auf die Endpunkte) auf einer Seite von ihr. Es gibt Punkte, welche auf der anderen liegen. Von einem solchen aus lassen sich 1 und 3 erreichen, 2 aber nicht. Nach unserer

[*]) Natürlich wird angenommen, daß die von A und B aus gezogenen Wege einander nicht schon begegnen; überdies können wir annehmen, daß die von A ausgehenden Wege nur A, die von B ausgehenden nur B gemein haben.

Hilfsbetrachtung ist also *jeder* Punkt, von dem aus 1 und 3 erreichbar sind, von 2 getrennt. Es gibt somit keinen Punkt, von dem aus alle drei Bogen erreichbar wären. Auch 2 und 3 bilden eine spezielle Jordankurve der behandelten Art und es gibt 1 gegenüberliegende Punkte. Von diesen aus sind 2 und 3 erreichbar, 1 nicht. Diese beiden Klassen von Punkten (Gebiete) sind fremd. In bezug auf die Jordankurve $\mathfrak{K}$ ergeben sie erst ein Gebiet, 3 ist ja dann als Verbindungsweg benutzbar. Gibt es noch weitere Punkte? Punkte also, welche weder von 1 noch von 2 getrennt sind, d. h. solche, von denen aus man 1 und 2, und somit 3 nicht erreichen kann. Ja, solche gibt es. Man braucht nur einen Verbindungsweg $t_B B t'_B$ zwischen 1 und 2 herzustellen, welcher 3 umgeht. Dann ist B ein solcher Punkt. Je zwei Punkte, von denen aus 1 und 2 (ohne Begegnung mit 3) erreichbar sind, können wieder nach unserer Hilfsbetrachtung miteinander verbunden werden.

Die Jordankurve bestimmt also genau zwei Gebiete; der Jordansche Satz ist bewiesen.

3. Zugleich gewinnen wir ein äußerst einfaches Kennzeichen der getrennten Lage zweier Punkte A und B in bezug auf eine Jordankurve $\mathfrak{K}$.

Nennen wir einen Weg, der nur seine Endpunkte auf der Kurve hat, einen „Steg", so können wir es so aussprechen:

A und B sind dann und nur dann getrennt, wenn sie auf zwei fremden Stegen liegen, deren Enden getrennte Paare auf $\mathfrak{K}$ bilden. (Fig. 5.)

Unter einem Weg (bzw. Steg) können wir hier einen allgemeinen Jordanbogen verstehen. Die Streckenwege haben ihre Rolle ausgespielt. Die Kenntnis des Jordanschen Satzes gestattet uns jetzt die Wiederholung der Überlegungen dieses Abschnitts unter Benutzung beliebiger Jordanbogen an Stelle der Streckenzüge.

Etwas allgemeiner als oben können wir noch sagen:

Zwei einander und der Jordankurve fremde Kontinua sind dann und nur dann durch dieselbe getrennt, wenn man von ihnen nach der Kurve je zwei fremde Stege legen kann, deren Enden auf ihr getrennte Paare bilden.

4. Daß ferner die Jordankurve die gemeinsame Grenze der beiden von ihr bestimmten Gebiete ist, folgt unmittelbar aus dem Satz vom Jordanbogen. Denn um von einem gegebenen Punkte aus einen Weg zu ziehen, der in einen gegebenen Teilbogen mündet, braucht man nur den Restbogen zu umgehen.

V. Invarianz der Dimensionenzahl.

1. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich aus unseren Überlegungen der folgende Satz, der einen Teil des Satzes von der Invarianz der Dimensionenzahl ausspricht:

Eine Punktmenge, die einen dreidimensionalen Würfel enthält, kann kein eindeutig-stetiges Abbild in der Ebene haben.

Man nehme innerhalb des Würfels einen Kreis und eine Strecke AB, welche keinen Punkt gemein haben. Dann lassen sich sicher zwei fremde Stege legen, deren Enden getrennte Punktepaare auf dem Kreise sind und von denen der eine über A, der andere über B geht. Das Bild des Kreises wäre eine Jordankurve $\mathfrak{K}$. Die Bilder von A und B wären durch das Bild der Strecke AB miteinander verbunden, während sie doch nach IV. 3. durch $\mathfrak{K}$ getrennt sein müßten.

2. Auch folgender Satz läßt sich leicht mit unseren Hilfsmitteln beweisen, der gleichfalls eine Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegenüber dem Mehr-als-zwei-dimensionalen enthält:

Es ist unmöglich, je zwei von fünf Punkten der Ebene in ihr durch Wege zu verbinden, welche einander (außer in den fünf Punkten selbst) nicht treffen.

VI. Ein Jordanbogen in einem Gebiet. Theorie der Querschnitte.

Aus IV. 3. ergibt sich unmittelbar, daß ein Jordansches Gebiet durch einen hindurchgehenden Steg (Querschnitt) in zwei Teilgebiete zerlegt wird. Wir wollen jetzt allgemein die Frage behandeln, auf welche Weise die Verbindbarkeit der Punktepaare irgendeines Gebiets[6]) mit beschränkter Grenze durch einen nicht überschreitbaren Jordanbogen beeinflußt wird, welcher bis auf seine Endpunkte in ihm verläuft. Es ist leicht zu erkennen, daß der Jordanbogen umgangen werden kann, wenn er einschließlich seiner Endpunkte im Gebiet liegt, auch dann, wenn nur einer von den Endpunkten der Grenze angehört, ebenso aber, wenn die beiden Endpunkte verschiedenen Komponenten[7]) der Gebietsgrenze α angehören. Dazu ist nur

[6]) Ein Gebiet ist eine Punktmenge $\mathfrak{G}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. Um jeden ihrer Punkte als Mittelpunkt läßt sich eine Kreisscheibe legen, die ihr ganz angehört,
2. Je zwei Punkte derselben lassen sich innerhalb $\mathfrak{G}$ durch einen Weg verbinden.

Ein Punkt gehört der Grenze von $\mathfrak{G}$ an, wenn in jedem Kreis um ihn sowohl Punkte von $\mathfrak{G}$, als auch Punkte des Restes liegen.

[7]) Man sagt von zwei Punkten, daß sie derselben Komponente einer beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge α angehören, wenn es ein in derselben enthaltenes Kontinuum gibt, dem sie angehören.

eine leichte Modifikation unseres in II. 1., 2. gegebenen Beweises für den Satz vom Jordanbogen erforderlich. Man muß nur jedesmal die Wege und das Trennungspolygon $\mathfrak{P}$ so einrichten, daß sie im Gebiet verlaufen[8]).

Gehören aber beide Endpunkte des Jordanbogens t derselben Komponente $\varkappa$ der Gebietsgrenze an, so zerlegt er das Gebiet $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete.

Wir stellen zunächst innerhalb $\mathfrak{G}$ einen Steg $t_1 M_1 t_1'$ (1) her (einen Bogen, von dem nur die Endpunkte zu t gehören) und verbinden den Teilbogen $t_1 < t < t_1'$ mit dem Rest von t durch einen zweiten, den ersten nicht treffenden Steg $t_2 M_2 t_2'$ (2). Die Endpunkte bilden getrennte Paare auf t und haben etwa die Anordnung $t_1 < t_2 < t_1' < t_2'$. Nun können wir zeigen, daß jeder nicht auf t liegende Punkt A von $\mathfrak{G}$ entweder mit (1) oder mit (2) verbunden werden kann, wonach sicher nicht mehr als zwei Teilgebiete vorhanden sind. Fassen wir die Jordankurve $t_1 M_1 t_1' t_2' M_2 t_2 t_1$ ($\mathfrak{J}$) ins Auge, so liegt der Teilbogen $t_2 < t < t_1'$ den Enden $t < t_1$ und $t > t_2'$, welche durch $\varkappa$ verbunden sind, gegenüber (IV. 3.). Nun kann man von A aus zwei Wege bis t ziehen, von denen der eine zwischen t_2 und t_1', der andere aber unterhalb t_1 in t einmündet. Einer von ihnen muß notwendig einen von den beiden Stegen treffen, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Anderseits ist aber auch leicht zu zeigen, daß die beiden Stege nicht innerhalb $\mathfrak{G}$ durch einen Weg verbunden werden können, welcher t nicht trifft, so daß also wirklich zwei Teilgebiete da sind. Wäre nämlich $M_1 (w) M_2$ ein solcher, so ergäbe sich wieder eine Jordankurve $M_1 (w) M_2 t_2 t_1' M_1$ ($\mathfrak{K}$); t_1 und t_2' lägen auf verschiedenen Seiten derselben. (Sie lägen nämlich auf den Stegen $M_1 t_1 t_2$ bzw. $M_2 t_2' t_1'$, deren Mündungen auf $\mathfrak{K}$ getrennt liegen.) Das sie verbindende Kontinuum, welches aus den Bogen $t < t_1$, $t > t_2'$ und der Grenzkomponente $\varkappa$ besteht, welcher die Endpunkte angehören, müßte die Jordankurve $\mathfrak{K}$ treffen

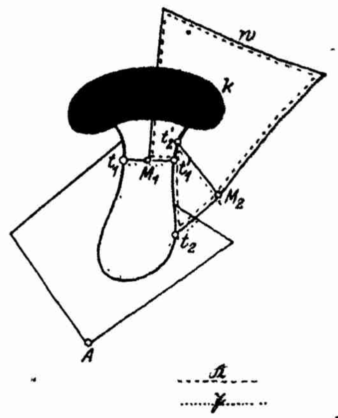

Fig. 6.
Der schwarze Fleck stellt hier den Rest von $\mathfrak{G}$ dar.

[8]) Zwei verschiedene Komponenten von α lassen sich – wie in der Mengenlehre gezeigt wird (vgl. etwa Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 303) – zu zwei fremden, abgeschlossenen Teilmengen erweitern, die zusammen α erschöpfen. Auf deren Abstand $d > 0$ kommt es bei der Herstellung eines α nicht treffenden Trennungspolygons zwischen den beiden Komponenten an. Ein solches liegt von selbst im Gebiet.

(sonst zerfiele es in zwei fremde abgeschlossene Teilmengen); w bliebe nicht in $\mathfrak{G}$, was doch vorausgesetzt war.

Das Gesagte gibt auch ohne weiteres die Möglichkeit, bei einem beliebigen Netz, das aus endlich vielen Punkten und einander nicht treffenden Verbindungen zwischen ihnen besteht, zu entscheiden, wieviel Gebiete vorhanden sind und von welchen Bogen dieselben begrenzt werden. Man braucht sich die Figur nur dadurch entstanden zu denken, daß ein Bogen nach dem anderen zu den Punkten hinzugefügt wird.

Prag, im Januar 1918.

(Eingegangen am 31. Januar 1918.)