MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
BERLIN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
BERLIN

1. BAND 4. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 22. JUNI 1918)

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1918

Die

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

erscheint in zwanglosen Heften, deren vier zu Bänden von etwa 28 Bogen vereinigt werden sollen. Der Preis eines jeden Bandes beträgt M. 24.—. Jährlich sollen zwei Bände herausgegeben werden. Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung sowie durch die Verlagsbuchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden natürlich auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Die Verfasser erhalten 50 Sonderabdrücke ihrer Abhandlungen kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Schriftleitung. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift, etwaige Abbildungen auf einem besonderen Blatt gezeichnet, einzureichen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

---

1. Band. **Inhalt:** 4. Heft.

Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs.

Von

Artur Winternitz in Prag.

Bei wenigen geometrischen Sätzen ist der Gegensatz zwischen der Anschaulichkeit des Inhalts und der Schwierigkeit des Beweises ein so großer, wie bei der Behauptung, daß eine einfache, geschlossene stetige Kurve in der Ebene zwei Gebiete bestimmt, deren gemeinsame Grenze sie ist. Der erste, welcher sie genau formuliert und einen im wesentlichen richtigen Beweis gegeben hat, war C. Jordan[1]), dessen Namen der Satz seither trägt. Das von ihm angewandte Beweisverfahren beruht auf der Möglichkeit, die Kurve durch Folgen von einfachen Polygonen zu approximieren. Für diese wird der Satz als bekannt angenommen. So naturgemäß auch dieser Gedanke ist, so hat sich doch seine vollständige Durchführung als so umständlich erwiesen, daß der Wunsch entstand, den Beweis auf prinzipiell andere und einfachere Grundlage zu stellen. Dies geschah namentlich in der Arbeit, welche L. E. J. Brouwer im 69. Bande der Mathematischen Annalen im Jahre 1910 veröffentlicht hat. Auch in ihr wird der Polygonsatz benutzt, aber nicht zu einem Approximationsverfahren, vielmehr in einer mehr topologischen Weise. Auch wir werden ähnlich verfahren.

Die Grundlage des neuen Beweises bildet die Erkenntnis, daß sich die Unterscheidung der beiden Seiten einer Jordankurve in äußerst einfacher Weise mit Hilfe von Jordanbogen vornehmen läßt (IV 3), wodurch die Zurückführung des Jordanschen Kurvensatzes auf den Satz vom Jordanbogen gelingt, auf die Aussage nämlich, daß ein einfacher stetiger Kurvenbogen die Ebene nicht zerschneidet. Mein Beweis für diesen Satz steht teilweise dem Gedankengang von § 4 der Brouwerschen Arbeit nahe. Die Polygonsätze, welche auch für uns ein wesentliches Hilfsmittel bilden,

[1]) Vgl. Cours d'analyse, Paris 1887, Bd. 3, S. 587; zweite Auflage (1893), Bd. 1, S. 90.

habe ich an die Spitze gestellt und bin auch auf ihren Beweis eingegangen, um keinen Zweifel an der Einfachheit desselben zu lassen. Dieser Teil (I) geht im wesentlichen auf Untersuchungen von Hans Hahn zurück[2]. In II sind einige bekannte, einfache Sätze über Kontinua der Vollständigkeit halber auseinandergesetzt, in III wird der Satz vom Jordanbogen und der Jordansche Kurvensatz für eine teilweise geradlinige Jordankurve, in IV der Jordansche Kurvensatz allgemein bewiesen. Daran schließt sich in V eine einfache Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegenüber dem Mehr-als-zwei-dimensionalen. In VI werden dann allgemeinere Gebietsteilungssätze im Sinne unserer Methode behandelt und damit eine einfache Begründung der Riemannschen Zusammenhangstheorie ebener Gebiete gegeben.

I. Streckenzüge und Polygone.

Wir beginnen damit, daß wir die elementargeometrischen Spezialfälle der Sätze vom Jordanbogen und von der (geschlossenen) Jordankurve beweisen. Dazu brauchen wir nur jene einfachen Verknüpfungs- und Anordnungssätze der ebenen Geometrie, wie sie etwa in den Axiomen I 1—3, II von Hilberts *Grundlagen der Geometrie* zusammengestellt sind, beziehungsweise unmittelbar aus ihnen fließen; namentlich den Satz, daß eine Gerade die Ebene in zwei Gebiete zerlegt (zwei Seiten hat), eine Eigenschaft, welche auch einer „geknickten Geraden" zukommt, das heißt einer aus zwei von demselben Punkt ausgehenden Halbstrahlen gebildeten Figur.

Einen außerhalb eines (einfachen)[3] Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegenen Punkt A kann man mit demselben auf folgende Art verbinden. Man zieht von A aus einen Weg nach einem beliebigen Punkt von $\mathfrak{S}$ und bestimmt auf ihm jene Stelle M, wo er $\mathfrak{S}$ zum erstenmal trifft. Wir nennen M die Mündung dieses Weges und bezeichnen das Stück AM desselben als einen Weg von A bis $\mathfrak{S}$. Mündung eines Weges von A bis $\mathfrak{S}$ kann jeder Punkt von $\mathfrak{S}$ sein. Man kann nämlich die Mündung nach folgendem Verfahren schrittweise weiterverlegen. Sei RM die letzte Strecke des Weges AM und PM, MQ zwei aufeinanderfolgende geradlinige Strecken auf $\mathfrak{S}$. Will man die Mündung von M nach Q verlegen, so prüfe man zunächst, ob die Strecke RQ den Halbstrahl von M über P trifft. Ist dies nicht der Fall, so bestimme man auf RM einen Punkt R'

[2]) „Über die Anordnungssätze der Geometrie", Monatshefte der Math. und Physik, 19 (1908), S. 289—303.

[3]) Den Zusatz „einfach" bei Streckenzügen und Polygonen lassen wir im folgenden fort, da hier nur von solchen die Rede ist. Auch die Ausdrücke „Weg" und „Verbindung" bedeuten in I. einfache Streckenzüge.

so nahe an M, daß das Dreieck $R'MQ$ gänzlich (M und Q nötigenfalls ausgenommen) frei von den (nur in endlicher Anzahl vorhandenen) Eck- und Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist und ersetze $R'M$ durch $R'Q$. Im anderen Falle aber verlängere man PM über M hinaus um eine Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht mehr trifft und wähle auf ihr R'' so, daß das Dreieck $R''MQ$ (bis auf M und allenfalls Q) frei von Eck- und Endpunkten von $\mathfrak{S}$ ist und dann R' auf RM so, daß dasselbe auch vom Dreieck $R'MR''$ (bis auf M) gilt und ersetze schließlich $R'M$ durch $R'R''Q$.

Nun können wir den einfachsten unserer Sätze schon ohne weiteres beweisen: *Ein einfacher Streckenzug zerlegt die Ebene nicht, oder: je zwei außerhalb des Streckenzuges $\mathfrak{S}$ gelegene Punkte A und B lassen sich durch einen $\mathfrak{S}$ nicht treffenden Weg miteinander verbinden.* In der Tat braucht man nur $\mathfrak{S}$ ein wenig über ein Ende hinaus zu verlängern und von A und B aus in die Verlängerung einmündende Wege zu ziehen.

Nun zu den Polygonen! Ein solches ($\mathfrak{P}$) besteht aus einer Strecke PQ und einem Streckenzug $\mathfrak{S}$, welche nur die Endpunkte gemein haben. Einen nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkt A kann man nach dem eben bewiesenen Satze derart mit $\mathfrak{P}$ verbinden, daß die Mündung auf der Strecke PQ liegt. Machen wir dasselbe mit einem zweiten, nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte B, so können wir entscheiden, ob die Einmündung auf PQ von derselben Seite her erfolgt oder nicht, d. h. ob die letzten Strecken auf derselben Seite der Geraden PQ liegen oder nicht. Im ersten Falle sieht man sofort, auf welche Weise man zu einem A und B verbindenden Weg gelangt, der $\mathfrak{P}$ nicht trifft. Wie aber steht es im zweiten Falle? Daß er tatsächlich eintritt, sieht man an den Endpunkten I, A einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche $\mathfrak{S}$ nicht trifft. Wir stellen nun folgende Überlegung an: Zieht man von einem nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte C aus zwei Halbstrahlen, so bilden sie zusammen eine „geknickte Gerade" γ. Durchläuft man das Polygon von einem seiner (nicht auf γ liegenden) Punkte aus, so bleibt man entweder auf einer Seite von γ oder man geht abwechselnd von der einen Seite auf die andere und kehrt schließlich auf jene zurück, von der man ausgegangen ist. Daher muß eine gerade Anzahl von Durchsetzungen vorhanden sein. Eine Durchsetzung besteht darin, daß der Weg in einen der Halbstrahlen mündet und dann entweder unmittelbar oder nach Durchlaufen einer Strecke längs desselben auf die andere Seite geht. Hiernach ist klar: entweder tragen alle von C ausgehenden Halbstrahlen eine gerade oder alle eine ungerade Anzahl von Durchsetzungen. Im ersten Falle wollen wir dem Punkte C die Marke a, im zweiten die Marke i erteilen. Dadurch ist die Markenverteilung für alle nicht auf $\mathfrak{P}$ liegenden Punkte eindeutig definiert. Zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke $\mathfrak{P}$ nicht trifft, erhalten offenbar dieselbe Marke (ihre Verbindungsgerade trägt eine gerade Anzahl von Durchsetzungen). Das gleiche gilt für je zwei Punkte, die durch einen $\mathfrak{P}$ nicht treffenden Streckenweg verbunden werden können. Die Punkte I und A hingegen müssen offenbar verschiedene Marken erhalten und sind also durch $\mathfrak{P}$ getrennt. Wir haben bewiesen, *daß das Polygon wirklich zwei Gebiete bestimmt.* (Die Marke i kennzeichnet das Innere, a das Äußere; das zweite enthält Halbstrahlen, das erste nicht.)

II. Hilfssätze über Kontinua.

Bevor wir uns mit dem Studium allgemeiner Jordanbogen und Jordankurven näher befassen, erledigen wir zwei Hilfssätze, welche wir gleich für Kontinua aussprechen, obwohl wir sie zunächst nur für Jordanbogen brauchen. Unter einem Kontinuum verstehen wir eine beschränkte[4]) zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge; eine solche beschränkte Punktmenge also, welche auf keine Weise als aus zwei fremden (nicht leeren), abgeschlossenen Teilmengen bestehend, aufgefaßt werden kann.

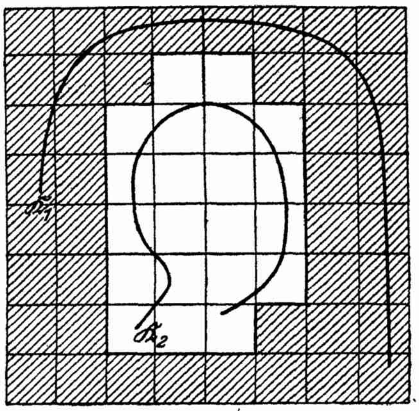

Fig. 1.

1. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch ein Polygon trennen.* Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ haben voneinander einen positiven Abstand d. Um ein Polygon herzustellen, welches sie voneinander trennt, verfahre man folgendermaßen. Zunächst schließe man beide zusammen in ein Quadrat ein (Seitenlänge a), welches von $\mathfrak{K}_2$ um mehr als d entfernt ist und zerlege es durch zu den Seiten parallele Geraden in n^2 kongruente Teilquadrate von solcher Kleinheit, daß niemals Punkte von $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ zugleich in demselben Quadrat vorkommen; man erreicht dies, indem man $n > \frac{a\sqrt{2}}{d}$ annimmt.

Sodann reihe man von einem Teilquadrat, welches einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ enthält, ausgehend, durch wiederholten Übergang von einem Quadrat zu einem benachbarten — welches von einem beliebigen der erreichten Quadrate aus, aber immer nur durch Überschreiten einer Seite erfolgen darf —, Quadrate aneinander, welche einschließlich des Randes frei von $\mathfrak{K}_2$ sind, solange es geht; die erhaltenen Quadrate mache man etwa

[4]) Die Beschränktheit nehmen wir der Bequemlichkeit halber zur Definition.

durch Schraffieren kenntlich. Dann ist man in der Lage, ein Trennungspolygon anzugeben. Beim Schraffieren ist man jedenfalls auf Seiten gestoßen, welche man nicht überschreiten durfte, weil jenseits schon $\mathfrak{K}_2$ liegt. Sei $\alpha\beta$ eine solche, links von ihr ein schraffiertes, rechts ein nicht schraffiertes Quadrat (in welches $\mathfrak{K}_2$ hineinragt). Dann stoßen noch zwei andere Quadrate in β an, hinsichtlich deren zunächst die in Fig. 2 angedeuteten Möglichkeiten 1-4 bestehen; 4 scheidet aber sofort aus. Denn die beiden gegenüberliegenden schraffierten Quadrate müßten durch einen Zug seitenweise aneinanderstoßender schraffierter Quadrate verbunden sein und die beiden anderen, welche Punkte von $\mathfrak{K}_2$ enthalten, wären durch ein Polygon getrennt, welches $\mathfrak{K}_2$ nicht trifft. Die Punkte von $\mathfrak{K}_2$, welche auf der einen Seite desselben, und die, welche auf der anderen liegen, wären zwei fremde, abgeschlossene Teilmengen von $\mathfrak{K}_2$, welches doch ein Kontinuum sein sollte. Daraus ist zu entnehmen, daß sich an jede Grenzseite $\alpha\beta$ immer eine zweite $\beta\gamma$ in eindeutig bestimmter Weise anschließt. Da nur endlichviele solche Seiten zur Verfügung stehen, müssen sie sich zu einem Polygon schließen, und dieses trennt $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$. (Die eine Seite ist schraffiert, die andere nicht. Vgl. Fig. 1.)

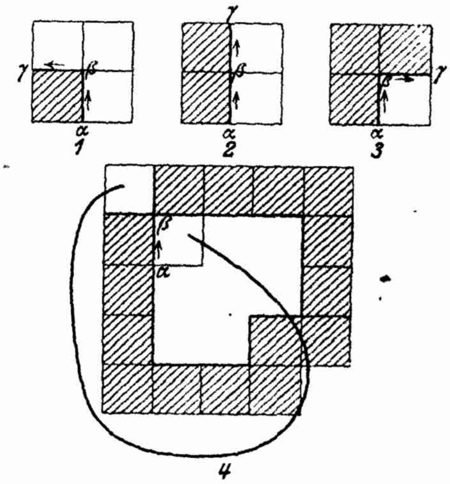

Fig. 2

2. *Zwei fremde Kontinua lassen sich durch einen Jordanbogen miteinander „verbinden".*

Zwei fremde Kontinua $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ können zunächst durch einen Jordanbogen (das ein-eindeutige, stetige Abbild einer Strecke) miteinander verbunden werden, indem man einen Punkt von $\mathfrak{K}_1$ zum Anfangs-, einen Punkt von $\mathfrak{K}_2$ zum Endpunkt des Bogens macht. Es gibt dann (nach Bolzano) auf ihm eine Stelle, wo er $\mathfrak{K}_1$ zuletzt verläßt, und später eine erste, wo er in $\mathfrak{K}_2$ eintritt. Das dazwischenliegende Stück ist es, welches wir als eine „Verbindung" zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ bezeichnen wollen. Eine Verbindung zwischen einem Punkt P und einem Kontinuum $\mathfrak{K}$ nennen wir auch einen Weg von P bis $\mathfrak{K}$, den zu $\mathfrak{K}$ gehörigen Endpunkt: die Mündung desselben in $\mathfrak{K}$. Besteht $\mathfrak{K}$ nicht bloß aus einem einzigen Punkt, so läßt sich die Mündung abändern, indem man den vorliegenden Weg unter Vermeidung seines Endpunktes mit $\mathfrak{K}$ verbindet.

III. Der Satz vom Jordanbogen.

Nun kommen wir zum Beweis des Satzes, daß *ein Jordanbogen t keine Zerlegung der Ebene bewirkt, so daß sich je zwei außerhalb desselben gelegene Punkte A und B durch einen Weg verbinden lassen, welcher ihn nicht trifft.*

1. Wir beweisen den Satz zunächst unter einer scheinbaren Einschränkung. Wir nehmen nämlich an: Nachdem wir von A aus einen Weg bis t gezogen haben, dessen Mündung t_A von den Endpunkten verschieden ist, sei es gelungen, von B aus zwei Wege bis t zu ziehen, deren Mündungen t_B, t'_B durch t_A getrennt werden, und beweisen unter dieser Annahme, daß A mit B durch einen Weg verbunden werden kann, der t nicht trifft. Die Erfüllbarkeit der Annahme selbst werden wir hernach zeigen (vgl. 2.).

Wir ziehen zunächst noch einen Weg von A bis t, dessen Mündung t'_A auf dieselbe Seite falle wie t'_B. Nun zerlegen wir den Jordanbogen t durch zwei Punkte in drei Teilbogen, so daß t_A und t_B dem ersten, t'_A und t'_B dem dritten angehören, während der mittlere m keine von den 4 Mündungen enthält. Die beiden äußeren Teilbogen lassen sich dann nach unserem Hilfssatz II. 1. durch ein Polygon $\mathfrak{P}$ voneinander trennen, welches keinen von ihnen trifft; dieses trennt dann auch sowohl t_A und t'_A, als auch t_B und t'_B. Die Wege $t_A A t'_A$ (w_A) und $t_B B t'_B$ (w_B) durchsetzen also beide $\mathfrak{P}$, und zwar eine ungerade Anzahl mal. Wir werden uns nun davon überzeugen, daß es möglich ist, längs $\mathfrak{P}$ von w_A zu w_B überzugehen, ohne t zu überschreiten. Offenbar handelt es sich bloß darum, m zu vermeiden; denn nur dieser Teilbogen trifft $\mathfrak{P}$. Nun lassen sich zu beiden Seiten von $\mathfrak{P}$ die Endstücke von w_A und w_B durch Streckenwege verbinden, welche weder m noch $\mathfrak{P}$ treffen (denn die verbindenden t-Bogen tun es nicht). Diese bilden zusammen mit w_A und w_B ein einfaches Polygon $\mathfrak{Q}$, welches m nicht trifft. m liegt also auf einer bestimmten (der schraffierten) Seite von $\mathfrak{Q}$. Auf der anderen Seite müssen wir unseren Weg längs $\mathfrak{P}$ suchen, der w_A und w_B verbindet. Unter den auf ihr verlaufenden Teilstreckenzügen von $\mathfrak{P}$ gibt es aber in der Tat einen w_A und w_B verbindenden, — wegen der Ungeradheit der beiden Schnittpunktszahlen. (Der Weg von A nach B ist in Fig. 3 durch Pfeile markiert.)

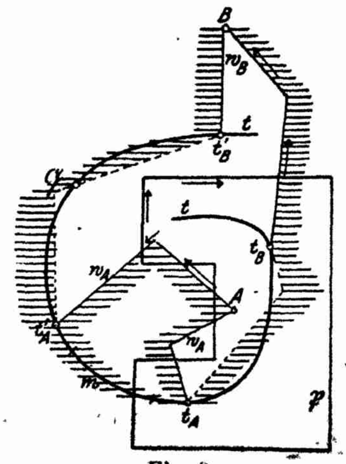
Fig. 3.

2. Nun haben wir noch zu zeigen, daß man wirklich von einem beliebigen Punkt B aus einen Weg ziehen kann, welcher auf einer gegebenen Seite eines bestimmten Kurvenpunktes t_A einmündet. Angenommen also, es gäbe etwa keine Mündung $t_B < t_A$; dann sei $\underline{t}$ die untere Grenze aller t_B; sie zerlegt die Kurve in zwei Teilbögen. Verbinden wir sie miteinander durch einen Weg, der $\underline{t}$ vermeidet, und wählen auf ihm einen Punkt C, so erhalten wir zwei Wege von C bis t, deren Mündungen die Anordnung $t_C < \underline{t} < t'_C$ haben. Da es zwischen t_C und t'_C Mündungen t_B gibt, ist B nach 1. mit C verbindbar; also t_C ein $t_B < \underline{t}$, während $\underline{t}$ doch die untere Grenze aller t_B sein sollte. Damit ist der Beweis für die Umgehbarkeit des Jordanbogens zu Ende geführt.

Bemerkung. Der hier gegebene indirekte Beweis läßt sich auch zu einem direkten Konstruktionsverfahren umgestalten.

3. Die Mündungen t_A der Wege von einem außerhalb des Jordanbogens t liegenden Punkt A bis zu ihm erfüllen t dicht. Sind t_0, t'_0 zwei von den Endpunkten verschiedene Stellen des Jordanbogens, so haben wir soeben bewiesen, daß man von A aus sowohl Wege ziehen kann, deren Mündung $t_A < t_0$, als auch solche, deren Mündung $t'_A > t'_0$ ist. Wir haben noch zu zeigen, daß man auch einen finden kann, dessen Mündung zwischen t_0 und t'_0 liegt. Zu diesem Zwecke brauchen wir bloß die beiden äußeren Teilbogen durch ein Polygon voneinander zu trennen. Dieses trifft dann sowohl $t_A\,A\,t'_A$ als auch den mittleren Teilbogen und vermittelt so eine Verbindung zwischen A und demselben. Der Jordanbogen ist also die Grenze des von ihm bestimmten Gebiets; jedenfalls also eine abgeschlossene, nirgends dichte Punktmenge. (In jedem Kreis bleibt ein Kreis frei.)

4. Nun können wir einen Spezialfall des Jordanschen Kurvensatzes sehr leicht beweisen; den Fall nämlich, daß die Jordankurve $\mathfrak{J}$ ein geradliniges Stück enthält, also aus einer Strecke PQ und einem Jordanbogen t besteht, welche bloß ihre Endpunkte gemein haben. Da letzterer keine Gebietsteilung der Ebene bewirkt, kann man von jedem nicht auf $\mathfrak{J}$ liegenden Punkte aus einen Weg ziehen, der auf der Strecke PQ in $\mathfrak{J}$ mündet. Macht man das für zwei Punkte A und B, so können die beiden Wege von derselben Seite her in die Strecke münden; dann bekommt man sofort eine $\mathfrak{J}$ nicht treffende Verbindung zwischen A und B. Im anderen Falle aber gibt es keine. Eine solche (w) gäbe nämlich zur Entstehung eines Polygons Anlaß, welches P und Q trennte. Der sie verbindende Bogen t müßte es treffen gegen die Voraussetzung über w. Daß durch die Kurve getrennte Punktepaare wirklich vorhanden sind, sieht man an den Endpunkten einer PQ durchkreuzenden Strecke, welche nur den Bogen t nicht erreicht.

IV. Der Jordansche Kurvensatz.

1. Nun gehen wir zum Beweis des allgemeinen Jordanschen Kurvensatzes über und stellen zunächst eine kleine Hilfsbetrachtung an.

Wir denken uns drei Jordanbogen 1, 2, 3, welche nur ihre Endpunkte P und Q gemein haben. Zwei Punkte A und B seien beide mit 1 und 2 durch Streckenwege verbindbar, so daß vorher keiner von den beiden andern Bogen getroffen wird. Die Mündungen seien t_A^1, t_A^2, t_B^1, t_B^2. Ich behaupte: A und B lassen sich durch einen Weg verbinden, der keinen von den drei Bogen trifft[5]). Zum Beweise brauchen wir bloß die spezielle Jordankurve $A\,t_A^1\,t_B^1\,B\,t_B^2\,t_A^2\,A$ ($\mathfrak{J}$) heranzuziehen. Diese hat nach dem Vorangehenden (III. 4.) zwei Seiten. Auf einer von ihnen (schraffiert) liegen 3 und die nicht zu $\mathfrak{J}$ gehörigen Reste von 1 und 2. Von einem auf der anderen Seite liegenden Punkt C aus kann man nun sowohl $t_A^1\,A\,t_A^2$ als auch $t_B^1\,B\,t_B^2$ erreichen, wodurch in der Tat eine Verbindung zwischen A und B hergestellt wird.

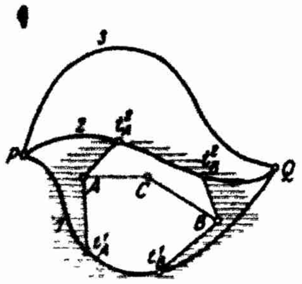

Fig. 4

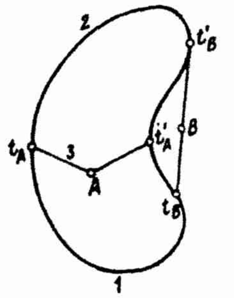

Fig. 5.

2. Liegt nun eine beliebige Jordankurve $\mathfrak{K}$ vor, so können wir von einem nicht zu ihr gehörigen Punkte A aus zwei Streckenwege nach ihr ziehen, welche an verschiedenen Stellen t_A, t_A' einmünden und erhalten dadurch drei Jordanbogen, welche nur ihre Endpunkte gemein haben. Die Bogen 1 und 2 bilden $\mathfrak{K}$, 3 ist ein Streckenzug. Wir haben also den eben betrachteten Fall vor uns. Doch wissen wir hier mehr. Die Bogen 1 und 3 bilden zusammen eine spezielle Jordankurve der in III. 4. betrachteten Art. Der Bogen 2 verläuft (bis auf die Endpunkte) auf einer Seite von ihr. Es gibt Punkte, welche auf der anderen liegen. Von einem solchen aus lassen sich 1 und 3 erreichen, 2 aber nicht. Nach unserer

[5]) Natürlich wird angenommen, daß die von A und B aus gezogenen Wege einander nicht schon begegnen; überdies können wir annehmen, daß die von A ausgehenden Wege nur A, die von B ausgehenden nur B gemein haben.

Hilfsbetrachtung ist also *jeder* Punkt, von dem aus 1 und 3 erreichbar sind, von 2 getrennt. Es gibt somit keinen Punkt, von dem aus alle drei Bogen erreichbar wären. Auch 2 und 3 bilden eine spezielle Jordankurve der behandelten Art und es gibt 1 gegenüberliegende Punkte. Von diesen aus sind 2 und 3 erreichbar, 1 nicht. Diese beiden Klassen von Punkten (Gebiete) sind fremd. In bezug auf die Jordankurve $\mathfrak{K}$ ergeben sie erst ein Gebiet, 3 ist ja dann als Verbindungsweg benutzbar. Gibt es noch weitere Punkte? Punkte also, welche weder von 1 noch von 2 getrennt sind, d. h. solche, von denen aus man 1 und 2, und somit 3 nicht erreichen kann. Ja, solche gibt es. Man braucht nur einen Verbindungsweg $t_B B t'_B$ zwischen 1 und 2 herzustellen, welcher 3 umgeht. Dann ist B ein solcher Punkt. Je zwei Punkte, von denen aus 1 und 2 (ohne Begegnung mit 3) erreichbar sind, können wieder nach unserer Hilfsbetrachtung miteinander verbunden werden.

Die Jordankurve bestimmt also genau zwei Gebiete; der Jordansche Satz ist bewiesen.

3. Zugleich gewinnen wir ein äußerst einfaches Kennzeichen der getrennten Lage zweier Punkte A und B in bezug auf eine Jordankurve $\mathfrak{K}$.

Nennen wir einen Weg, der nur seine Endpunkte auf der Kurve hat, einen „Steg", so können wir es so aussprechen:

A und B sind dann und nur dann getrennt, wenn sie auf zwei fremden Stegen liegen, deren Enden getrennte Paare auf $\mathfrak{K}$ bilden. (Fig. 5.)

Unter einem Weg (bzw. Steg) können wir hier einen allgemeinen Jordanbogen verstehen. Die Streckenwege haben ihre Rolle ausgespielt. Die Kenntnis des Jordanschen Satzes gestattet uns jetzt die Wiederholung der Überlegungen dieses Abschnitts unter Benutzung beliebiger Jordanbogen an Stelle der Streckenzüge.

Etwas allgemeiner als oben können wir noch sagen:

Zwei einander und der Jordankurve fremde Kontinua sind dann und nur dann durch dieselbe getrennt, wenn man von ihnen nach der Kurve je zwei fremde Stege legen kann, deren Enden auf ihr getrennte Paare bilden.

4. Daß ferner die Jordankurve die gemeinsame Grenze der beiden von ihr bestimmten Gebiete ist, folgt unmittelbar aus dem Satz vom Jordanbogen. Denn um von einem gegebenen Punkte aus einen Weg zu ziehen, der in einen gegebenen Teilbogen mündet, braucht man nur den Restbogen zu umgehen.

V. Invarianz der Dimensionenzahl.

1. Als unmittelbare Folgerung ergibt sich aus unseren Überlegungen der folgende Satz, der einen Teil des Satzes von der Invarianz der Dimensionenzahl ausspricht:

Eine Punktmenge, die einen dreidimensionalen Würfel enthält, kann kein eindeutig-stetiges Abbild in der Ebene haben.

Man nehme innerhalb des Würfels einen Kreis und eine Strecke AB, welche keinen Punkt gemein haben. Dann lassen sich sicher zwei fremde Stege legen, deren Enden getrennte Punktepaare auf dem Kreise sind und von denen der eine über A, der andere über B geht. Das Bild des Kreises wäre eine Jordankurve $\mathfrak{K}$. Die Bilder von A und B wären durch das Bild der Strecke AB miteinander verbunden, während sie doch nach IV. 3. durch $\mathfrak{K}$ getrennt sein müßten.

2. Auch folgender Satz läßt sich leicht mit unseren Hilfsmitteln beweisen, der gleichfalls eine Kennzeichnung des Zweidimensionalen gegenüber dem Mehr-als-zwei-dimensionalen enthält:

Es ist unmöglich, je zwei von fünf Punkten der Ebene in ihr durch Wege zu verbinden, welche einander (außer in den fünf Punkten selbst) nicht treffen.

VI. Ein Jordanbogen in einem Gebiet. Theorie der Querschnitte.

Aus IV. 3. ergibt sich unmittelbar, daß ein Jordansches Gebiet durch einen hindurchgehenden Steg (Querschnitt) in zwei Teilgebiete zerlegt wird. Wir wollen jetzt allgemein die Frage behandeln, auf welche Weise die Verbindbarkeit der Punktepaare irgendeines Gebiets[6]) mit beschränkter Grenze durch einen nicht überschreitbaren Jordanbogen beeinflußt wird, welcher bis auf seine Endpunkte in ihm verläuft. Es ist leicht zu erkennen, daß der Jordanbogen umgangen werden kann, wenn er einschließlich seiner Endpunkte im Gebiet liegt, auch dann, wenn nur einer von den Endpunkten der Grenze angehört, ebenso aber, wenn die beiden Endpunkte verschiedenen Komponenten[7]) der Gebietsgrenze α angehören. Dazu ist nur

[6]) Ein Gebiet ist eine Punktmenge $\mathfrak{G}$ mit folgenden zwei Eigenschaften:

1. Um jeden ihrer Punkte als Mittelpunkt läßt sich eine Kreisscheibe legen, die ihr ganz angehört,
2. Je zwei Punkte derselben lassen sich innerhalb $\mathfrak{G}$ durch einen Weg verbinden.

Ein Punkt gehört der Grenze von $\mathfrak{G}$ an, wenn in jedem Kreis um ihn sowohl Punkte von $\mathfrak{G}$, als auch Punkte des Restes liegen.

[7]) Man sagt von zwei Punkten, daß sie derselben Komponente einer beschränkten, abgeschlossenen Punktmenge α angehören, wenn es ein in derselben enthaltenes Kontinuum gibt, dem sie angehören.

eine leichte Modifikation unseres in II. 1., 2. gegebenen Beweises für den Satz vom Jordanbogen erforderlich. Man muß nur jedesmal die Wege und das Trennungspolygon $\mathfrak{P}$ so einrichten, daß sie im Gebiet verlaufen[8]).

Gehören aber beide Endpunkte des Jordanbogens t derselben Komponente $\varkappa$ der Gebietsgrenze an, so zerlegt er das Gebiet $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete.

Wir stellen zunächst innerhalb $\mathfrak{G}$ einen Steg $t_1 M_1 t_1'$ (1) her (einen Bogen, von dem nur die Endpunkte zu t gehören) und verbinden den Teilbogen $t_1 < t < t_1'$ mit dem Rest von t durch einen zweiten, den ersten nicht treffenden Steg $t_2 M_2 t_2'$ (2). Die Endpunkte bilden getrennte Paare auf t und haben etwa die Anordnung $t_1 < t_2 < t_1' < t_2'$. Nun können wir zeigen, daß jeder nicht auf t liegende Punkt A von $\mathfrak{G}$ entweder mit (1) oder mit (2) verbunden werden kann, wonach sicher nicht mehr als zwei Teilgebiete vorhanden sind. Fassen wir die Jordankurve $t_1 M_1 t_1' t_2' M_2 t_2 t_1$ ($\mathfrak{J}$) ins Auge, so liegt der Teilbogen $t_2 < t < t_1'$ den Enden $t < t_1$ und $t > t_2'$, welche durch $\varkappa$ verbunden sind, gegenüber (IV. 3.). Nun kann man von A aus zwei Wege bis t ziehen, von denen der eine zwischen t_2 und t_1', der andere aber unterhalb t_1 in t einmündet. Einer von ihnen muß notwendig einen von den beiden Stegen treffen, womit unsere Behauptung bewiesen ist. Anderseits ist aber auch leicht zu zeigen, daß die beiden Stege nicht innerhalb $\mathfrak{G}$ durch einen Weg verbunden werden können, welcher t nicht trifft, so daß also wirklich zwei Teilgebiete da sind. Wäre nämlich $M_1 (w) M_2$ ein solcher, so ergäbe sich wieder eine Jordankurve $M_1 (w) M_2 t_2 t_1' M_1$ ($\mathfrak{K}$); t_1 und t_2' lägen auf verschiedenen Seiten derselben. (Sie lägen nämlich auf den Stegen $M_1 t_1 t_2$ bzw. $M_2 t_2' t_1'$, deren Mündungen auf $\mathfrak{K}$ getrennt liegen.) Das sie verbindende Kontinuum, welches aus den Bogen $t < t_1$, $t > t_2'$ und der Grenzkomponente $\varkappa$ besteht, welcher die Endpunkte angehören, müßte die Jordankurve $\mathfrak{K}$ treffen

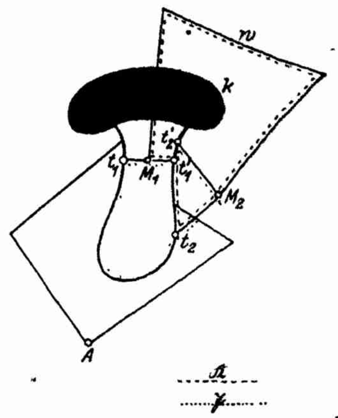

Fig. 6.
Der schwarze Fleck stellt hier den Rest von $\mathfrak{G}$ dar.

[8]) Zwei verschiedene Komponenten von α lassen sich – wie in der Mengenlehre gezeigt wird (vgl. etwa Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 303) – zu zwei fremden, abgeschlossenen Teilmengen erweitern, die zusammen α erschöpfen. Auf deren Abstand $d > 0$ kommt es bei der Herstellung eines α nicht treffenden Trennungspolygons zwischen den beiden Komponenten an. Ein solches liegt von selbst im Gebiet.

(sonst zerfiele es in zwei fremde abgeschlossene Teilmengen); w bliebe nicht in $\mathfrak{G}$, was doch vorausgesetzt war.

Das Gesagte gibt auch ohne weiteres die Möglichkeit, bei einem beliebigen Netz, das aus endlich vielen Punkten und einander nicht treffenden Verbindungen zwischen ihnen besteht, zu entscheiden, wieviel Gebiete vorhanden sind und von welchen Bogen dieselben begrenzt werden. Man braucht sich die Figur nur dadurch entstanden zu denken, daß ein Bogen nach dem anderen zu den Punkten hinzugefügt wird.

Prag, im Januar 1918.

(Eingegangen am 31. Januar 1918.)

Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi.

Von

Gábor Szegö in Budapest.

Im folgenden will ich einen einfachen Satz über die Laguerreschen Polynome beweisen und einige Fragen untersuchen, die mit diesem Satze zusammenhängen. Ich betrachte ferner eine gewisse spezielle Klasse von Jacobischen Polynomen, die mit den Laguerreschen in engem Zusammenhange stehen. Endlich bemerke ich einiges über Legendresche Polynome.

§ 1.

Die Laguerreschen Polynome.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem:

$$e^{-\frac{\zeta}{2}},\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta,\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{\nu},\ \ldots$$

und bilde daraus nach dem Vorgange von E. Schmidt durch Ortogonalisierung das System

$$(L) \qquad e^{-\frac{\zeta}{2}}L_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}L_{\nu}(\zeta),\ \ldots,$$

wo die $L_{\nu}(\zeta)$ folgende Bedingungen erfüllen:

$$(1) \begin{cases} \text{a) } L_{\nu}(\zeta) \text{ ist ein Polynom } \nu\text{-ten Grades,} \\ \text{b) } \int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} L_{\mu}(\zeta) L_{\nu}(\zeta)\, d\zeta = 0, \end{cases} \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

(2) c) $L_{\nu}(0) = 1.$[1])

[1]) Die Bedingung b) ist mit der folgenden äquivalent:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\zeta} L_{\nu}(\zeta) \zeta^{\varrho}\, d\zeta = 0, \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

und hieraus folgt bekanntlich, daß alle Wurzeln von $L_{\nu}(\zeta)$ positiv sind. Die Normierung $L_{\nu}(0) = 1$ ist also stets möglich.

Durch diese Bedingungen ist das System (L) eindeutig bestimmt. D. h. wenn

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}F_0(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_1(\zeta),\ \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}F_\nu(\zeta),\ \ldots$$

ein System von Funktionen bezeichnet, die diesen Bedingungen genügen, so ist

$$F_\nu(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Die Polynome $L_\nu(\zeta)$ sind die *Laguerreschen Polynome.*

Ich will zunächst zeigen, daß die erzeugende Funktion dieser Polynome, wie schon Laguerre (Werke, Bd. I, S. 436) angibt, folgende ist:

$$\frac{e^{-\frac{\zeta t}{1-t}}}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} L_\nu(\zeta)t^\nu. \tag{3}$$

Ich beweise das, indem ich die drei obenerwähnten Eigenschaften von $L_\nu(\zeta)$ für die Koeffizienten dieser Entwickelung verifiziere. In der Tat: erstens ist es klar, daß der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades ist. D. h. die Bedingung a) ist erfüllt. Ähnliches gilt für c), weil ja

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu$$

ist. Was endlich die Bedingung b) betrifft, so ist deren Gültigkeit folgendermaßen zu beweisen. Zunächst folgt aus (3)

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}\frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u}\,\frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v}\,d\zeta = \sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} u^\mu v^\nu \int_0^\infty e^{-\zeta}L_\mu(\zeta)L_\nu(\zeta)\,d\zeta.$$

Es ist aber

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}\frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{1-u}\,\frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{1-v}\,d\zeta = \frac{1}{(1-u)(1-v)}\,\frac{1}{1+\frac{u}{1-u}+\frac{v}{1-v}}$$

$$= \frac{1}{1-uv} = \sum_{\nu=0}^{\infty} u^\nu v^\nu,$$

d. h. b) ist auch erfüllt. Außerdem folgt noch hieraus, daß

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}L_\nu^2(\zeta)\,d\zeta = 1, \tag{1*}$$

also

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}L_\mu(\zeta)L_\nu(\zeta)\,d\zeta = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich werde weiter eine (ebenfalls schon in der Literatur vorkommende) Darstellung dieser Polynome benutzen, die sich für die Folge als besonders wichtig erweisen wird. Das ist:

$$(4)\quad e^{-\zeta}L_\nu(\zeta) = \frac{1}{\nu!}D^{(\nu)}e^{-\zeta}\zeta^\nu = e^{-\zeta}\sum_{h=0}^{\nu}\binom{\nu}{h}\frac{(-\zeta)^h}{h!} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)^{2)}.$$

(Letzteres ergibt sich vermittelst der wohlbekannten Leibnizschen Regel).

Diese Formel ist leicht zu beweisen, indem man, wie vorher, die Gültigkeit der obigen Bedingungen verifiziert. a) und c) sind zunächst erfüllt. Die Bedingung b) ist der folgenden äquivalent:

$$\int_0^\infty e^{-\zeta}L_\nu(\zeta)\zeta^\varrho d\zeta = 0 \qquad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu-1).$$

Ich setze

$$f_\nu(\zeta) = e^{-\zeta}\zeta^\nu,$$

dann ergibt sich mit Hilfe der partiellen Integration

$$\int_0^\infty \zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta)\,d\zeta = -\varrho\int_0^\infty \zeta^{\varrho-1}D^{(\nu-1)}f_\nu(\zeta)d\zeta \quad (\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

da die Funktion $f_\nu(\zeta)$ und ihre sämtlichen Derivierten für $\zeta = \infty$ und die ersten $\nu - 1$ Derivierten für $\zeta = 0$ verschwinden. Es ist also

$$\int_0^\infty \zeta^\varrho D^{(\nu)} f_\nu(\zeta)d\zeta = (-1)^\varrho \varrho! \int_0^\infty D^{(\nu-\varrho)}f_\nu(\zeta)d\zeta = (-1)^\varrho \varrho!\, D^{(\nu-\varrho-1)}f_\nu(\zeta)\Big|_0^\infty = 0$$
$$(\nu \geqq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, \nu-1),$$

woraus die Behauptung folgt.

§ 2.

Ein Satz über die Laguerreschen Polynome.

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}|L_\nu(\zeta)| < 1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Beweis. Im Falle $\nu = 0$ ist der Satz trivial. Es seien $\nu > 0$, $\zeta > 0$ feste Zahlen und z bezeichne eine komplexe Variable. Die Entwickelung

$$f_\nu(\zeta + z) = a_0(\zeta) + a_1(\zeta)z + \ldots + a_h(\zeta)z^h + \ldots$$

konvergiert für jeden Wert von z, da $f_\nu(z)$ eine ganze transzendente Funktion ist. Ferner ist

$$a_h(\zeta) = \frac{1}{h!}D^{(h)}f_\nu(\zeta)$$

und man hat nach Cauchy

$$|a_h(\zeta)|\, r^h \leqq \underset{|z|=r}{\text{Max.}}\, |f_\nu(\zeta + z)| \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots).$$

---

[2]) Ich bezeichne im folgenden die ν-te Derivierte von $f(x)$ mit $D^{(\nu)}f(x)$.

wo $r > 0$ beliebig ist[3]). Da speziell

$$a_\nu(\zeta) = e^{-\zeta} L_\nu(\zeta)$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung:

$$e^{-\zeta} | L_\nu(\zeta) | r^\nu < \underset{0 \leqq \Theta < 2\pi}{\mathrm{Max.}} | e^{-(\zeta + re^{i\Theta})} (\zeta + re^{i\Theta})^\nu |$$

$$< e^{-\zeta} \underset{|\alpha| \leqq 1}{\mathrm{Max.}} \, e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$p(\alpha) = p(\zeta, r; \alpha) = \zeta^2 + r^2 + 2\zeta r\alpha \geqq 0$$

und α eine reelle Veränderliche bezeichnet. Man hat so

$$| L_\nu(\zeta) | \, r^\nu < \underset{|\alpha| \leqq 1}{\mathrm{Max.}} \, e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\zeta, r; \alpha) = e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\varphi'(\alpha) = e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2} - 1} \left\{ \frac{\nu}{2} 2\zeta r - r p(\alpha) \right\}$$

$$= r e^{-r\alpha} \{p(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2} - 1} \{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2) - 2\zeta r\alpha\}.$$

D. h. diese Funktion hat an der Stelle

$$\alpha_0 = \alpha_0(\zeta, r) = \frac{\nu\zeta - (\zeta^2 + r^2)}{2\zeta r}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein *Maximum*. Man hat also

$$| L_\nu(\zeta) | r^\nu < \begin{cases} \varphi(1) \\ \varphi(\alpha_0), \\ \varphi(-1) \end{cases} \text{je nachdem} \begin{cases} \alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \\ \alpha_0 \leqq -1 \end{cases} \text{ist.}$$

Es sei jetzt

a) $0 < \zeta \leqq 4\nu$. Ich setze $r = \sqrt{\nu\zeta}$. Es ist

$$\alpha_0 = -\frac{\zeta^2}{2\zeta\sqrt{\nu\zeta}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}},$$

so daß $-1 \leqq \alpha_0 < 0$. Man hat also

$$| L_\nu(\zeta) | < \frac{\varphi(\alpha_0)}{r^\nu} = \frac{\varphi(\alpha_0)}{(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

---

[3]) Es gilt sogar der Satz:

$$\sum_{h=0}^{\infty} | a_h(\zeta) |^2 r^{2h} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f_\nu(x + re^{i\Theta}) |^2 \, d\Theta < \underset{|z| = r}{\mathrm{Max.}} \, | f_\nu(x + z) |^2 \qquad (r > 0).$$

Es ist aber

$$-r\alpha_0 = \sqrt{\nu\zeta}\,\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}} = \frac{\zeta}{2}$$

und

$$p(\alpha_0) = \zeta^2 + \nu\zeta + 2\zeta\sqrt{\nu\zeta}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta}{\nu}}\right) = \nu\zeta,$$

so daß wir erhalten

$$\varphi(\alpha_0) = e^{\frac{\zeta}{2}}(\nu\zeta)^{\frac{\nu}{2}}$$

und

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

b) $\zeta \geqq 4\nu$. Ich setze $r = \frac{\zeta}{2}$. Es ist

$$\alpha_0 = \frac{\nu - \frac{1}{4}\zeta}{\zeta} \leqq -1,$$

so daß

$$|L_\nu(\zeta)| < \frac{\varphi(-1)}{r^\nu} = \left(\frac{2}{\zeta}\right)^\nu \varphi(-1).$$

Man hat aber

$$\varphi(-1) = e^r\,|\zeta - r|^\nu = e^{\frac{\zeta}{2}}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^\nu,$$

also

$$|L_\nu(\zeta)| < e^{\frac{\zeta}{2}}, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 3.

Verallgemeinerung.

Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Funktionensystem

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+1},\ \ldots\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^{k+\nu},\ \ldots,$$

wo $k \geqq 0$ beliebig ist. Durch Orthogonalisierung erhalte ich die Funktionen

$$(L^{(k)}) \qquad e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_0^{(k)}(\zeta),\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_1^{(k)}(\zeta), \ldots,\ e^{-\frac{\zeta}{2}}\zeta^k L_\nu^{(k)}(\zeta),\ \ldots,$$

die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$(5)\ \begin{cases} \text{a)}\ L_\nu^{(k)}(\zeta) \text{ ist ein Polynom } \nu\text{-ten Grades,} \\ \text{b)}\ \int_0^\infty e^{-\zeta}\zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu) \end{cases}$$

(6) c) $L_\nu^{(k)}(0) = 1.$[4])

[4]) Alle Wurzeln von $L_\nu^{(k)}(\zeta)$ sind positiv. Vgl. [1]).

Durch diese Bedingungen ist das System $(L^{(k)})$ völlig bestimmt. Ferner ist

$$L_\nu^{(0)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ich will folgenden Satz beweisen:

Es ist für jedes positive ζ

$$e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 \qquad (k > 0; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dieser Satz folgt aus dem vorigen sehr einfach. Es gilt zunächst die Entwickelung

$$(7) \qquad \frac{e^{-\frac{\zeta t}{1-t}}}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) t^\nu \qquad (|t| < 1).$$

In der Tat ist der ν-te Koeffizient dieser Entwickelung ein Polynom ν-ten Grades. Ferner hat man $L_\nu^{(k)}(0) = 1$, da

$$\frac{1}{(1-t)^{2k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{\nu} t^\nu.$$

Endlich gilt die Formel

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} \frac{e^{-\frac{\zeta u}{1-u}}}{(1-u)^{2k+1}} \frac{e^{-\frac{\zeta v}{1-v}}}{(1-v)^{2k+1}} d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{(1-uv)^{2k+1}} =$$

$$\sum_{\mu,\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\mu}{\mu} \binom{2k+\nu}{\nu} \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta \cdot u^\mu v^\nu,$$

so daß

$$\int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} L_\mu^{(k)}(\zeta) L_\nu^{(k)}(\zeta) d\zeta = 0, \qquad (\mu \gtrless \nu)$$

d. h. die Entwickelung (7) ist richtig. Ferner bekommt man

$$(5') \qquad \int_0^\infty e^{-\zeta} \zeta^{2k} [L_\nu^{(k)}(\zeta)]^2 d\zeta = \frac{\Gamma(2k+1)}{\binom{2k+\nu}{\nu}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus (7) folgt schon leicht unser Satz. Da nämlich

$$\frac{1}{(1-t)^{2k}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu-1}{\nu} t^\nu$$

ist, hat man

$$\binom{2k+\nu}{\nu} L_\nu^{(k)}(\zeta) = L_\nu(\zeta) + \binom{2k}{1} L_{\nu-1}(\zeta) + \binom{2k+1}{2} L_{\nu-2}(\zeta) + \ldots$$
$$+ \binom{2k+\nu-1}{\nu} L_0(\zeta),$$

woraus für $\zeta = 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} = 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \ldots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

folgt. Also für $\zeta > 0$

$$\binom{2k+\nu}{\nu} e^{-\frac{\zeta}{2}} |L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1 + \binom{2k}{1} + \binom{2k+1}{2} + \cdots + \binom{2k+\nu-1}{\nu}$$

und so

$$|e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu^{(k)}(\zeta)| < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 4.

Anwendungen.

Es sei $P(\zeta)$ ein Polynom ν-ten Grades, welches nicht identisch verschwindet. Es gilt dann die Ungleichung

$$e^{-\zeta}P^2(\zeta) \leqq (\nu+1)\int_0^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt \qquad (\zeta \geqq 0)$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta) + L_1(\zeta) + \cdots + L_\nu(\zeta)]$$

und $\zeta = 0$ ist $(c \neq 0)$.

Der Beweis ist sehr einfach. Ich setze

$$P(\zeta) = c_0 L_0(\zeta) + c_1 L_1(\zeta) + \cdots + c_\nu L_\nu(\zeta),$$

wo die Konstanten $c_0, c_1, \ldots c_\nu$ nicht alle verschwinden. Man hat

$$\int_0^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt = c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_\nu^2;$$

ferner nach den vorigen

$$e^{-\frac{\zeta}{2}}|P(\zeta)| \leqq |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_\nu|, \qquad (\zeta \geqq 0)$$

also mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung

$$e^{-\zeta}P^2(\zeta) \leqq (\nu+1)\int_0^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens ist notwendig, daß $\zeta = 0$ und

$$(c_0 + c_1 + \cdots + c_\nu)^2 = (\nu+1)(c_0^2 + c_1^2 + \cdots + c_\nu^2),$$

d. h. $c_0 = c_1 = \cdots = c_\nu$ sei. Daß umgekehrt diese Bedingung auch hinreichend ist, ist ohne weiteres klar.

Zusatz. *Es gilt sogar die Ungleichung*

$$e^{-\zeta}P^2(\zeta) \leqq (\nu+1)\int_\zeta^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt$$

(ζ braucht nicht $\geqq 0$ sein), *und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn*

$$P(\zeta) = c\,[L_0(\zeta-\zeta_0) + L_1(\zeta-\zeta_0) + \cdots + L_\nu(\zeta-\zeta_0)]$$

und $\zeta = \zeta_0$ ist ($c \neq 0$, ζ_0 ist beliebig).

Es sei nämlich ζ_0 beliebig, aber fest. Ich betrachte für $\zeta \geqq 0$ das Polynom ν-ten Grades

$$\bar{P}(\zeta) = e^{-\frac{\zeta_0}{2}} P(\zeta_0 + \zeta),$$

für welches

$$e^{-\zeta}\bar{P}^2(\zeta) \leqq (\nu + 1)\int_0^\infty e^{-t}\bar{P}^2(t)\,dt; \qquad (\zeta \geqq 0)$$

speziell

$$\bar{P}^2(0) \leqq (\nu + 1)\int_0^\infty e^{-t}\bar{P}^2(t)\,dt = (\nu + 1)\int_0^\infty e^{-(\zeta_0+t)}P^2(\zeta_0 + t)\,dt$$

$$= (\nu + 1)\int_{\zeta_0}^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt,$$

also

$$e^{-\zeta_0}P^2(\zeta_0) \leqq (\nu + 1)\int_{\zeta_0}^\infty e^{-t}P^2(t)\,dt, \qquad \text{q. e. d.}$$

Eine weitere Verallgemeinerung dieses Satzes ist folgende:

Es sei $n = 2\nu$ und $Q(\zeta)$ ein nicht identisch verschwindendes Polynom n-ten Grades, welches für jedes reelle ζ nichtnegativ ist. Man hat dann

$$e^{-\zeta}Q(\zeta) \leqq (\nu + 1)\int_\zeta^\infty e^{-t}Q(t)\,dt$$

und das Gleichheitszeichen ist dann und nur dann gültig, wenn

$$Q(\zeta) = c\,[L_0(\zeta - \zeta_0) + L_1(\zeta - \zeta_0) + \dots + L_\nu(\zeta - \zeta_0)]^2$$

und $\zeta = \zeta_0$ ist ($c > 0$, ζ_0 ist beliebig).

$Q(\zeta)$ kann nämlich in der Form dargestellt werden:

$$Q(\zeta) = P_1^2(\zeta) + P_2^2(\zeta),$$

wo die Polynome $P_1(\zeta)$ und $P_2(\zeta)$ höchstens den Grad ν haben. Daraus folgt gleich der Satz.

Da

$$e^\zeta\int_\zeta^\infty e^{-t}Q(t)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}Q(\zeta + t)\,dt = \sum_{h=0}^{n}\frac{Q^{(h)}(\zeta)}{h!}\int_0^\infty e^{-t}t^h\,dt = \sum_{h=0}^{\infty}Q^{(h)}(\zeta)$$

ist, kann die letzte Ungleichung auch in der Form geschrieben werden:

$$\frac{Q(\zeta)}{\nu + 1} \leqq Q(\zeta) + Q'(\zeta) + \dots + Q^{(n)}(\zeta). \tag{8}$$

§ 5.

Zusammenhang mit einem gewissen System von Polynomen.

Es sei $k \geqq 0$ beliebig. Ich betrachte für $-1 \leqq x \leqq 1$ das Funktionensystem

$$|x|^k,\ |x|^k x,\ \dots\ |x|^k x^n,\ \dots$$

und bilde daraus ein System

$$(P^{(k)}) \qquad |x|^k P_0^{(k)}(x),\ |x|^k P_1^{(k)}(x),\ \ldots\ |x|^k P_n^{(k)}(x),\ \ldots$$

mit folgenden charakteristischen Eigenschaften:

$$(9)\ \begin{cases} \text{a)}\ P_n^{(k)}(x) \text{ ist ein Polynom } n\text{-ten Grades,} \\ \text{b)}\ \int\limits_{-1}^{1} x^{2k} P_m^{(k)}(x) P_n^{(k)}(x)\,dx = 0, \qquad (m < n) \end{cases}$$

$$(10)\quad \text{c)}\ P_n^{(k)}(1) = 1\ [5].$$

Diese Polynome[6]) bilden einen Spezialfall der Jacobischen Polynome[7]) und reduzieren sich auf die wohlbekannten Legendreschen Polynome, wenn $k = 0$ gesetzt wird. Ich möchte hier auf einen merkwürdigen Zusammenhang hinweisen, der zwischen diesen und den Laguerreschen Polynomen besteht. Ich beweise nämlich den Satz:

Es sei $n = 2\nu$ und

$$\lim_{k=\infty} k(1 - x_k^2) = \zeta;$$

dann ist

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta).$$

Ich betrachte das Polynom ν-ten Grades $\Pi_\nu^{(k)}(x)$, definiert durch die Formel

$$x^{k-\frac{1}{2}} \Pi_\nu^{(k)}(x) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^\nu$$

$$= x^{k-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} (\nu+k-\tfrac{1}{2})(\nu+k-\tfrac{3}{2})\ldots(\nu+k-h+\tfrac{1}{2}) x^{\nu-h} \frac{(x-1)^h}{h!}$$

$$= x^{k-\frac{1}{2}} \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \binom{\nu+k-\frac{1}{2}}{h} x^{\nu-h}(x-1)^h,$$

und behaupte zunächst, daß

$$P_n^{(k)}(x) = \Pi_\nu^{(k)}(x^2),$$

d. h.

$$P_n^{(k)}(x) = \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} (\nu+k-\tfrac{1}{2})(\nu+k-\tfrac{3}{2})\ldots(\nu+k-h+\tfrac{1}{2}) x^{2\nu-2h} \frac{(x^2-1)^h}{h!}$$

$$(11)\quad = \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \binom{\nu+k-\frac{1}{2}}{h} x^{2\nu-2h}(x^2-1)^h.$$

---

[5]) Alle Wurzeln von $P_n^{(k)}(x)$ liegen im Innern des Intervalls $-1 \leq x \leq 1$. Vgl. [1]).

[6]) Eigentlich nur $P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$; s. unten.

[7]) Vgl. C. Jordan, Cours d'analyse, Zweite Auflage, Paris (Gauthier-Villars), 1896, Bd. 3, S. 231–233.

ist. Zu diesem Zwecke genügt es offenbar, die obigen Eigenschaften von $P_n^{(k)}(x)$, da diese für das System $(P^{(k)})$ charakteristisch sind, für die rechte Seite von (11) verifizieren. Die Bedingungen a) und c) sind offenbar erfüllt. Was b) betrifft, so ist diese mit dem folgenden äquivalent:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x^{\varrho} \Pi_\nu^{(k)}(x^2)\, dx = 0 \qquad (\nu \geq 1;\ \varrho = 0, 1, \ldots, 2\nu - 1),$$

oder, da für ungerade ϱ der Integrand eine ungerade Funktion ist und als solche ein verschwindendes Integral liefert, mit dem folgenden:

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k+2\sigma} \Pi_\nu^{(k)}(x^2)\, dx = \int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} \Pi_\nu^{(k)}(x)\, dx = 0$$

$$(\nu \geq 1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1).^{8})$$

Man bekommt aber durch partielle Integration

$$\int_0^1 x^{k+\sigma-\frac{1}{2}} \Pi_\nu^{(k)}(x)\, dx = \frac{1}{\nu!} \int_0^1 x^{\sigma} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^{\nu}\, dx$$

$$= (-1)^{\sigma} \frac{\sigma!}{\nu!} \int_0^1 D^{(\nu-\sigma)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^{\nu}\, dx = 0,$$

da ja die Funktion $x^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x-1)^{\nu}$ und ihre ersten $\nu - 1$ Derivierten für $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden. Damit ist die Gleichung (11) bewiesen.

Jetzt folgt schon unser Satz sehr leicht. Man hat nämlich (ν und h sind feste Zahlen)

$$\lim_{k=\infty} (\nu + k - \tfrac{1}{2})(\nu + k - \tfrac{3}{2}) \ldots (\nu + k - h + \tfrac{1}{2})\, x_k^{2\nu-2h} \frac{(x_k^2 - 1)^h}{h!} = \frac{(-\zeta)^h}{h!}$$

und so

$$\lim_{k=\infty} P_n^{(k)}(x_k) = \sum_{h=0}^{\nu} \binom{\nu}{h} \frac{(-\zeta)^h}{h!} = L_\nu(\zeta);$$

ferner

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k = \lim_{k=\infty} \left\{1 - (1 - x_k^2)\right\}^{\frac{k}{2}} = e^{-\frac{\zeta}{2}},$$

also

$$\lim_{k=\infty} |x_k|^k P_n^{(k)}(x_k) = e^{-\frac{\zeta}{2}} L_\nu(\zeta), \qquad \text{q. e. d.}$$

[8]) Vgl. Jordan, loc. cit. [7]).

§ 6.

Über eine Eigenschaft der Polynome $P_n^{(k)}(x)$.

Es gilt für die Legendreschen Polynome $P_n^{(0)}(x) = P_n(x)$ der wohlbekannte Satz

$$(12) \qquad |P_n(x)| \leq 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots; \; |x| \leq 1).$$

Herr J. Schur hat nun die Vermutung ausgesprochen, daß auch

$$(13) \qquad |x^k P_n^{(k)}(x)| \leq 1 \qquad (k \geq 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots; \; |x| \leq 1)$$

ist[9]), eine Vermutung, die für genügend große k (n ist eine feste Zahl) mittels des vorgehenden Satzes leicht bestätigt werden kann. Ich will hier diese Vermutung mit Hilfe der einfachen Methode, die ich im § 2 benutzt habe, für alle k beweisen, die die Form

$$(14) \qquad k = m + \tfrac{1}{2}$$

haben, wo m eine nichtnegative ganze Zahl ist.

Zunächst gilt die Formel

$$(15) \qquad P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x P_{2\nu}^{(k+1)}(x),$$

denn man hat einerseits (laut Definition)

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma+1} dx = \int_{-1}^{1} |x|^{2k+2} P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0$$

$$(\nu \geqq 1; \; \sigma = 0, 1, \ldots, \nu - 1)$$

und andererseits

$$\int_{-1}^{1} |x|^{2k} x P_{2\nu}^{(k+1)}(x) x^{2\sigma} dx = 0 \qquad (\nu \geqq 0; \; \sigma = 0, 1, \ldots, \nu),$$

da das Polynom $P_{2\nu}^{(k+1)}(x)$ nach (11) nur gerade Potenzen enthält. Also ist

$$(15') \qquad x^k P_{2\nu+1}^{(k)}(x) = x^{k+1} P_{2\nu}^{(k+1)}(x),$$

d. h. es genügt den Satz (13) nur für gerade n zu beweisen.

Es sei $\nu \geqq 1$ und x eine gegebene Zahl des Intervalls $0 \leq x \leq 1$ (Für $\nu = 0$ ist $P_0^{(k)}(x) = 1$, also der Satz trivial).

Man hat nach dem vorhergehenden

$$x^{k-\frac{1}{2}} P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^{\nu+k-\frac{1}{2}} (x-1)^{\nu}.$$

Ich setze

$$F_\nu^{(k)}(z) = z^{\nu+k-\frac{1}{2}} (z-1)^{\nu};$$

---

[9]) Diese Vermutung hat die Veranlassung zu den vorangehenden Untersuchungen gegeben.

das ist ein Polynom in z, wenn k die Form $\frac{1}{2}+m$ hat. Es sei

$$F_\nu^{(k)}(x+z)=\sum_{h=0}^{2\nu+k-\frac{1}{2}} A_h(x)z^h.$$

Man hat

$$A_h(x)=\frac{1}{h!}D^{(h)}F_\nu^{(k)}(x)$$

und nach Cauchy

$$|A_h(x)|r^h<\operatorname*{Max.}_{|z|=r}|F_\nu^{(k)}(x+z)| \qquad (h=0,1,\ldots,2\nu+k-\tfrac{1}{2}),$$

wo $r>0$ beliebig ist. Da speziell

$$A_\nu(x)=x^{k-\frac{1}{2}}P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})$$

ist, bekomme ich folgende Ungleichung[10]):

$$x^{k-\frac{1}{2}}|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})|r^\nu<\operatorname*{Max.}_{|z|=r}|(x+z)^{\nu+k-\frac{1}{2}}(x+z-1)^\nu|$$
$$=\operatorname*{Max.}_{|\alpha|\leqq 1}\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}},$$

wo

$$\mu=\nu+k-\tfrac{1}{2}\geqq\nu\geqq 1,$$
$$p(\alpha)=p(x,r;\alpha)=x^2+r^2+2xr\alpha\geqq 0,$$
$$q(\alpha)=q(x,r;\alpha)=(1-x)^2+r^2-2(1-x)r\alpha\geqq 0$$

ist und α eine reelle Veränderliche bezeichnet.

Ich betrachte jetzt die Funktion

$$\Phi(\alpha)=\Phi(x,r;\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}}.$$

Es ist

$$\Phi'(\alpha)=\{p(\alpha)\}^{\frac{\mu}{2}-1}\{q(\alpha)\}^{\frac{\nu}{2}-1}\left\{\frac{\mu}{2}2xrq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)rp(\alpha)\right\}$$

und

$$\frac{\mu}{2}2xq(\alpha)-\frac{\nu}{2}2(1-x)p(\alpha)=$$
$$=\mu x\{(1-x)^2+r^2\}-\nu(1-x)\{x^2+r^2\}-2(\mu+\nu)x(1-x)r\alpha;$$

d. h. die Funktion $\Phi(\alpha)$ hat an der Stelle

$$\alpha_0=\alpha_0(x,r)=\frac{\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{x^2+r^2}{2xr}}{\mu+\nu}$$

ihr einziges Extremum, und zwar ein Maximum. Man hat also

[10]) Hier kommt zum Vorschein, daß die Einschränkung $k=m+\frac{1}{2}$ wesentlich ist; sonst wird nämlich $F_\nu^{(k)}(z)$ für $z=0$ singulär und man kann daher den Cauchyschen Satz nicht anwenden.

$$x^{k-\frac{1}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})|\,r^{\nu} < \begin{cases} \Phi(1) \\ \Phi(\alpha_0), \quad \text{je nachdem} \\ \Phi(-1) \end{cases} \begin{cases} \alpha_0 \geqq 1 \\ |\alpha_0| \leqq 1 \quad \text{ist.} \\ \alpha_0 \leqq -1 \end{cases}$$

Es sei jetzt

a) $$1 > x \geqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2 \text{[11]}$$

oder, was dasselbe ist,

$$0 < \sqrt{\frac{1-x}{x}} \leqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

Ich setze

$$r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}\,x(1-x)}.$$

Es ist dann

$$\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r} = \frac{1-x+\frac{\nu}{\mu}x}{2r}$$

$$\frac{x^2+r^2}{2xr} = \frac{x+\frac{\nu}{\mu}(1-x)}{2r},$$

d. h.

$$\alpha_0 = \frac{\mu^2-\nu^2}{2r\mu(\mu+\nu)}(1-x) = \frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}},$$

so daß $0 \leqq \alpha_0 \leqq 1$. Man hat also

$$x^{\frac{k}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})| < x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(\alpha_0)}{r^{\nu}} = x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(\alpha_0)}{\left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\nu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}}.$$

Es ist aber

$$p(\alpha_0) = x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + 2x\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$
$$= x^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) + \frac{\mu-\nu}{\mu}x(1-x) = x$$

und

$$q(\alpha_0) = (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - 2(1-x)\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\sqrt{x(1-x)}\,\frac{\mu-\nu}{2\sqrt{\mu\nu}}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$$
$$= (1-x)^2 + \frac{\nu}{\mu}x(1-x) - \frac{\mu-\nu}{\mu}(1-x)^2 = \frac{\nu}{\mu}(1-x),$$

daher ist

$$\Phi(\alpha_0) = \left(\frac{\nu}{\mu}\right)^{\frac{\nu}{2}} x^{\frac{\mu}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}}$$

und

$$x^{\frac{k}{2}}\,|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})| < x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}} = x^{\frac{1}{4}} < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Es sei

b) $$k > \tfrac{1}{2} \quad \text{und} \quad 0 < x \leqq \left(\frac{\mu-\nu}{\mu+\nu}\right)^2,$$

---

[11]) Wenn $k = \frac{1}{2}$, d. h. $\mu = \nu$ ist, so soll $x > 0$ sein.

oder in anderer Form

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}} \geqq \frac{2\sqrt{\mu\nu}}{\mu-\nu}.$$

Ich setze $r = \sqrt{x} - x$ [12]). Es ist

$$\mu\left\{\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-1\right\}-\nu\left\{\frac{x^2+r^2}{2xr}+1\right\}=\mu\frac{(1-x-r)^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{(x-r)^2}{2xr}=$$

$$\mu\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2(1-x)\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}-\nu\frac{1}{2\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}=\frac{\mu-\nu-\sqrt{x}(\mu+\nu)}{2\sqrt{x}(1-x)}\geqq 0,$$

also

$$\mu\frac{(1-x)^2+r^2}{2(1-x)r}-\nu\frac{x^2+r^2}{2xr}\geqq\mu+\nu,$$

d. h. $\alpha_0 \leqq 1$, so daß

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{r^\nu} = x^{\frac{1-k}{2}}\frac{\Phi(1)}{x^{\frac{\nu}{2}}(1-\sqrt{x})^\nu}.$$

Man hat aber

$$p(1)=(x+r)^2=x,$$

$$q(1)=(1-x-r)^2=(1-\sqrt{x})^2$$

und also

$$\Phi(1)=x^{\frac{\mu}{2}}(1-\sqrt{x})^\nu,$$

d. h.

$$x^{\frac{k}{2}}\left|P_{2\nu}^{(k)}(\sqrt{x})\right| < x^{\frac{1-k+\mu-\nu}{2}} = x^{\frac{1}{4}} < 1, \qquad \text{q. e. d.}$$

Damit ist der Satz (13) für $k=m+\frac{1}{2}$ bewiesen. Es gilt sogar die Ungleichung

(13′) $\quad |x^k P_n^{(k)}(x)| < |x|^{\frac{1}{4}} \qquad (k=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\ldots;\ n=1,2,3,\ldots;\ |x|<1).$

§ 7.

Über die Legendreschen Polynome.

Zum Schluß will ich einen Satz über die Legendreschen Polynome beweisen.

---

[12]) Es ist zu beachten, daß, wenn

$$\lim_{k=\infty} k(1-x_k)=\zeta$$

ist,

$$\lim_{k=\infty} k\sqrt{\frac{\nu}{\mu}x_k(1-x_k)}=\sqrt{\nu\zeta}$$

und

$$\lim_{k=\infty} k(\sqrt{x_k}-x_k)=\frac{\zeta}{2}$$

wird. Vgl. § 2 und § 5.

Es ist

$$P_{2\nu}^{(\frac{1}{2})}(\sqrt{x}) = \frac{1}{\nu!} D^{(\nu)} x^\nu (x-1)^\nu = \frac{1}{2^\nu \nu!} D^{(\nu)} (u^2-1)^\nu = P_\nu(u),$$

wenn $u = 2x - 1$ gesetzt wird. Hier bezeichnet $P_\nu(u)$ das ν-te Legendresche Polynom. Man hat so nach (13′)

$$(12) \qquad |P_\nu(u)| < 1, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots;\ |u| < 1)$$

was mit einem bekannten Satz übereinstimmt.

Ich will hier einen Satz beweisen, woraus (12) reichlich folgt. Das ist: *Es gilt die Gleichung*

$$(16) \quad [P_\nu(u)]^2 + 2\sum_{h=1}^{\nu} \left[\frac{D^{(h)} P_\nu(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)}\right]^2 (1-u^2)^h =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{1 - \cos^2\vartheta\,(1-u^2)\}^\nu d\vartheta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ |u| < 1).$$

Beweis. Ich setze

$$f(u) = \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu$$

und

$$f(u+z) = B_0(u) + B_1(u)z + \ldots + B_{2\nu}(u)z^{2\nu}$$

$$= B_\nu(u)z^\nu + \sum_{h=1}^{\nu} \{B_{\nu-h}(u)z^{\nu-h} + B_{\nu+h}(u)z^{\nu+h}\};$$

man hat

$$B_h(u) = \frac{1}{h!} D^{(h)} \left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu \qquad (h = 0, 1, \ldots, 2\nu).$$

Es sei jetzt $|u| < 1$. Ich behaupte zunächst, daß das Polynom in z

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2})$$

symmetrisch ist, d. h.

$$(17) \quad B_{\nu-h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu-h} = B_{\nu+h}(u)(i\sqrt{1-u^2})^{\nu+h} \quad (h = 1, 2, \ldots, \nu).$$

In der Tat ist

$$(u + iz\sqrt{1-u^2})^2 - 1 = u^2 + 2iuz\sqrt{1-u^2} - z^2(1-u^2) - 1 =$$

$$= z^2\left\{u^2 + 2iu\frac{\sqrt{1-u^2}}{z} + \frac{u^2-1}{z^2} - 1\right\} = z^2\left\{\left(u + i\,\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)^2 - 1\right\},$$

so daß

$$f(u + iz\sqrt{1-u^2}) = z^{2\nu} f\left(u + i\frac{\sqrt{1-u^2}}{z}\right)$$

und hieraus folgt (17). Man hat also

$$B_{\nu-h}(u)=(-1)^h B_{\nu+h}(u)(1-u^2)^h \qquad (h=1,2,\ldots,\nu)\text{[13]}.$$

Jetzt benutze ich die Methode, die ich im vorhergehenden mehrmals angewandt habe[14]. Es ist

$$B_\nu^2(u)r^{2\nu}+\sum_{h=1}^{\nu}\{B_{\nu-h}^2(u)r^{2\nu-2h}+B_{\nu+h}^2(u)r^{2\nu+2h}\}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(u+re^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Setze ich hier

$$r=\sqrt{1-u^2}\text{ [15]},$$

so folgt

$$B_\nu^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu}+\sum_{h=1}^{\nu}\{B_{\nu-h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu-2h}+B_{\nu+h}^2(u)(\sqrt{1-u^2})^{2\nu+2h}\}$$

$$=B_\nu^2(u)(1-u^2)^\nu+2\sum_{h=1}^{\nu}B_{\nu+h}^2(u)(1-u^2)^{\nu+h}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})|^2 d\vartheta.$$

Man hat aber

$$(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})^2-1=(1+u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})(u-1+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})$$

und

$$|(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})^2-1|^2$$

$$=\{(1+u)^2+1-u^2+2(1+u)\sqrt{1-u^2}\alpha\}\{(1-u)^2+1-u^2-2(1-u)\sqrt{1-u^2}\alpha\}$$

$$=(1-u^2)\{2+2\sqrt{1-u^2}\alpha\}\{2-2\sqrt{1-u^2}\alpha\}=2^2(1-u^2)\{1-\alpha^2(1-u^2)\},$$

wenn $\alpha=\cos\vartheta$ gesetzt wird; also ist

$$|f(u+\sqrt{1-u^2}e^{i\vartheta})|^2=(1-u^2)^\nu\{1-\cos^2\vartheta\,(1-u^2)\}^\nu.$$

Ferner wird

$$B_\nu(u)=\frac{1}{\nu!}D^{(\nu)}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu=P_\nu(u),$$

$$B_{\nu+h}(u)=\frac{1}{(\nu+h)!}D^{(\nu+h)}\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^\nu=\frac{D^{(h)}P_\nu(u)}{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\nu+h)} \qquad (h=1,2,\ldots,\nu)$$

und hieraus folgt unmittelbar der Satz (16)[16].

---

[13]) Diese Relation rührt von Jacobi her. Vgl. E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen, Zweite Auflage, Berlin 1878, Bd. 1, S. 155.

[14]) Eigentlich eine Verallgemeinerung derselben. Vgl. [8]).

[15]) Vgl. § 6, Fall a).

[16]) Es ist, wie aus bekannten Formeln leicht folgt,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{1-\cos^2\vartheta\,(1-u^2)\}^\nu d\vartheta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin^2\vartheta+u^2\cos^2\vartheta)^\nu d\vartheta=u^\nu P_\nu\left(\frac{u+\frac{1}{u}}{2}\right).$$

(Eingegangen am 6. Februar 1918.)

Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen.

(Erste Mitteilung.)

Von

E. Hecke in Basel.

Einige sehr verschiedenartige Fragen aus der Funktionen- und Zahlentheorie haben mich zu der Erkenntnis geführt, daß die bisher eingeführten Zeta- und L-Funktionen noch nicht ausreichen, um die Theorie in vollem Umfange angreifen zu können. Vielmehr muß noch eine Erweiterung in neuer Richtung eintreten, welche dem Vorhandensein von Einheiten in den algebraischen Körpern gerecht wird. Ich setze den Grundgedanken am reellen quadratischen Körper auseinander.

Sei h die Klassenzahl, ε die Grundeinheit. Alsdann ordnen wir jedem Ideal $\mathfrak{a}$ eine Größe $\lambda(\mathfrak{a})$ zu vermöge der Gleichung

$$\lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{\frac{\pi i}{\log|\varepsilon|} \log\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right|\right\}, \qquad (\exp x = e^x)$$

worin die Zahl α (α' ist die Konjugierte) sich aus

$$\alpha = \mathfrak{a}^h$$

bestimmt. Ersichtlich hängt $\lambda(\mathfrak{a})$ nicht davon ab, welche der assoziierten Zahlen man für α wählt. λ hat den Betrag 1 und es gilt

$$\lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}) \cdot \lambda(\mathfrak{b}).$$

Daher ist die Reihe

$$f(s) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

worin $\mathfrak{r}$ alle Ideale des Körpers durchläuft, konvergent für $\Re(s) > 1$ und hier gilt auch noch die Produktzerlegung

$$f(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \left(1 - \frac{\lambda(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}\right)^{-1}$$

(über die Primideale $\mathfrak{p}$ zu erstrecken). Daraus geht hervor, daß $f(s)$ mit der Verteilung der Primideale zusammenhängt. Dieser Ansatz läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, indem man an Stelle von λ eine Potenz von λ mit ganzen rationalen, oder sogar mit gebrochenen Exponenten einsetzt. Alle diese unendlich vielen verschiedenen Funktionen lassen sich nach meiner von der Zetafunktion her bekannten Methode behandeln. Insbesondere zeigt sich, daß alle $f(s)$ ganze transzendente Funktionen sind, die einer Funktionalgleichung des bekannten Typus genügen, und im Punkte $s = 1$ (wie auch auf der ganzen Geraden $\Re(s) = 1$) nicht verschwinden. Letzteres liefert einen Existenzsatz etwa derart, daß eine indefinite quadratische Form auch dann noch unendlich viele Primzahlen darstellt, wenn man die ganzzahligen Variabeln x, y in der x-y-Ebene auf einen beliebigen *Winkelraum* einschränkt, der durch zwei vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahlen gebildet wird.

Zur obigen Definition von $\lambda(\mathfrak{a})$ gelangt man ganz naturgemäß, wenn man sich die Aufgabe stellt, eine Funktion $\lambda(x)$ des positiven Argumentes x zu bestimmen, so daß

$$\lambda(\varepsilon x) = \lambda(x),$$

$$\lambda(x \cdot y) = \lambda(x) \cdot \lambda(y).$$

In der vorliegenden Arbeit bringe ich in § 1 für einen beliebigen Körper die Definition der λ, welche ich Charaktere nach den Einheiten nenne. In § 2 führe ich die neuen Zetafunktionen ein und beweise unter Vorwegnahme der Tatsache, daß sie in der ganzen Ebene regulär sind, ihr Nichtverschwinden auf der Geraden $\Re(s) = 1$; sodann gebe ich in § 3 den Existenzbeweis für Primideale, deren Charaktere in einen beliebig vorgeschriebenen Bereich fallen. Die Dirichletsche Methode ist hier, wo man *unendlich viele* Funktionen mit Charakteren hat, erst nach einer Modifikation anwendbar. In § 4 endlich, der nur formaler Natur ist und keinen neuen Gedanken bringt, führe ich diese Zetafunktionen auf die Thetafunktionen zurück, woraus sich ergibt, daß sie ganze transzendente Funktionen sind. Schließlich behandle ich in § 5 einige Modifikationen am Beispiel des reellen quadratischen Körpers, wo ich auch den Zusammenhang dieser Theorie mit dem oben angeführten Satze über Primzahlen in indefiniten quadratischen Formen erörtere. In einer zweiten Mitteilung beabsichtige ich, eine Erweiterung der Definition der λ vorzunehmen, worin dann die konjugierten Größen nicht nur mit ihrem absoluten Betrag auftreten.

§ 1.

Charaktere eines Ideals nach den Einheiten.

Sei k ein algebraischer Zahlkörper von n-tem Grade; unter den Konjugierten seien

$$k^{(1)},\ k^{(2)},\ \dots\ k^{(r_1)} \quad \text{reell,}$$

$$k^{(r_1+1)},\ \dots\ k^{(r_1+r_2)} \quad \text{imaginär}$$

und $k^{(r_1+p)}$ konjugiert imaginär mit $k^{(r_1+r_2+p)}$ für $p = 1, 2, \dots, r_2$.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner Note über die L-Funktionen (Göttinger Nachrichten 1917, S. 299—318).

Sind $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_r$ ein System von Grundeinheiten, so hat die Matrix von $(r+1)^2$ Elementen

$$\begin{pmatrix} 1 & \log|\varepsilon_1^{(1)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(1)}| \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(2)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(2)}| \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \log|\varepsilon_1^{(r+1)}| & \dots & \log|\varepsilon_r^{(r+1)}| \end{pmatrix}$$

eine von Null verschiedene Determinante und die reziproke Matrix möge sein:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{n} e_1 & \frac{1}{n} e_2 & \dots & \frac{1}{n} e_{r+1} \\ e_1^{(1)} & e_2^{(1)} & \dots & e_{r+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^{(r)} & e_2^{(r)} & \dots & e_{r+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Es bestehen also die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{e_q}{n} + \sum_{k=1}^{r} e_q^{(k)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{pq}, \qquad (p, q = 1, 2, \dots, r+1)$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{r+1} e_q = 1, & \sum_{q=1}^{r+1} e_q^{(p)} = 0, \\ \sum_{q=1}^{r+1} e_q \log|\varepsilon_p^{(q)}| = 0, & (p = 1, 2, \dots, r) \end{cases}$$

$$(3) \qquad \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\varepsilon_k^{(p)}| = \delta_{kq}. \qquad (k, q = 1, 2, \dots, r)$$

Hierbei ist $\delta_{pq} = 1$, wenn $p = q$, sonst gleich Null.

Unter dem log ist hier, wie auch späterhin, der reelle Wert zu verstehen.

Aus (2) entnimmt man noch die Werte von e_q:

$$e_q = 1 \quad \text{für} \quad q = 1, 2, \ldots, r_1,$$
$$e_q = 2 \quad \text{für} \quad q \geqq r_1 + 1.$$

Wir ordnen nun jeder von 0 verschiedenen Zahl μ des Körpers k in folgender Weise eine Zahl vom absoluten Betrage 1 zu, die mit $\lambda(\mu)$ bezeichnet werde:

Seien $m_1, m_2, \ldots m_r$ beliebige ganze rationale Zahlen, so setzen wir

$$(4) \qquad \lambda(\mu) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log|\mu^{(p)}|\right\}.$$

Für jedes feste System m ist so eine zahlentheoretische Funktion $\lambda(\mu)$ definiert, welche ein *Charakter der Zahl μ nach den Einheiten* heiße und folgende Eigenschaften hat:

1) Für eine beliebige Einheit η des Körpers ist wegen (3)

$$\lambda(\eta\mu) = \lambda(\mu).$$

Also ist $\lambda(\mu)$ dem *Ideal* (μ) zugeordnet.

2) $|\lambda(\mu)| = 1$,

3) $\lambda(\alpha \cdot \beta) = \lambda(\alpha) \cdot \lambda(\beta)$ für beliebige von Null verschiedene Körperzahlen α, β.

4) Ist $\lambda(\mu)$ für alle ganzen Körperzahlen, also für alle Körperzahlen, gleich 1, so ist notwendig $m_1 = m_2 = \ldots m_r = 0$. Denn setzt man dann $1 + t\mu^{(p)}$ an Stelle von $\mu^{(p)}$ und läßt t über rationale Werte gegen Null konvergieren, so folgt $\sum_{p=1}^{r} m_q e_p^{(q)} = 0$ für $p = 1, \ldots r+1$ und hieraus $m_1 = \ldots = m_r = 0$.

Um die Funktion λ auch für Ideale zu erklären, welche nicht Hauptideale sind, verfahren wir folgendermaßen: Das System der Idealklassen des Körpers k (im gewöhnlichen weiteren Sinne genommen) denken wir uns durch eine Basis dargestellt, deren Elemente Primzahlpotenzgrad haben, aus jeder Basisklasse dann ein für allemal fest ein Ideal $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots$ gewählt; endlich seien $c_1, c_2, \ldots$ ihre Grade, also

$$\varrho_i = \mathfrak{r}_i^{c_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

Körperzahlen, vermittels deren wir die positiven Zahlen $\tau_i^{(p)}$ definieren

$$\tau_i^{(p)} = \left|\sqrt[c_i]{\varrho_i^{(p)}}\right|. \quad (p = 1, 2, \ldots n;\ i = 1, 2, \ldots)$$

Diese τ gehören natürlich nicht mehr dem Körper an. Ist dann $\mathfrak{a}$ ein beliebiges Ideal, so gibt es ganze rationale Exponenten a_i (die mod. c_i eindeutig bestimmt sind), so daß

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}_1^{a_1}\,\mathfrak{r}_2^{a_2}\ldots = \alpha$$

eine Körperzahl ist. Alsdann setzen wir

$$(5) \qquad \lambda(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\,\tau_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\}.$$

Daß diese Zahl, wenn die τ und m einmal fest angenommen sind, nur von dem Ideal $\mathfrak{a}$ abhängt, erkennt man daraus, daß der Ausdruck sich nicht ändert, wenn man α durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und daß er sich auch nicht ändert, wenn man die ganzen Zahlen a_i irgendwie anders wählt, also mod. c_i verändert. In dieser Arbeit denken wir uns die τ den Bedingungen gemäß auf irgendeine Art fest gewählt; die Zahlen m lassen wir dagegen noch willkürlich.

Die idealtheoretische Funktion $\lambda(\mathfrak{a})$ mag ein *Charakter von* $\mathfrak{a}$ *nach den Einheiten* heißen. Es gilt wieder:

$$|\lambda(\mathfrak{a})| = 1,$$

$$\lambda(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a})\cdot\lambda(\mathfrak{b}) \quad \text{für irgend zwei Ideale } \mathfrak{a},\ \mathfrak{b} \text{ des Körpers.}$$

Jeder Charakter läßt sich ersichtlich aus r *Grundcharakteren*

$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log\left|\frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\,\tau_2^{(p)a_2}\ldots}\right|\right\} \qquad (q = 1, \ldots, r)$$

zusammensetzen, welche entstehen, wenn man eine der Zahlen $m = 1$, die andern gleich Null nimmt, und zwar ist

$$(6) \qquad \lambda(\mathfrak{a}) = \lambda_1^{m_1}(\mathfrak{a})\,\lambda_2^{m_2}(\mathfrak{a})\ldots\lambda_r^{m_r}(\mathfrak{a}).$$

Einem jeden System von Grundeinheiten des Körpers entspricht natürlich eine bestimmte Art von Grundcharakteren.

Die Werte der r-Charaktere $\lambda_q(\mathfrak{a})$ in Verbindung mit der Zahl $N(\mathfrak{a})$ bestimmen das Ideal $\mathfrak{a}$ eindeutig, indem offenbar der Satz gilt:

Wenn zwei Ideale dieselben Grundcharaktere und die gleiche Norm besitzen, so sind sie identisch.

Der Satz ist für zwei Hauptideale unmittelbar aus der Formel (1) und Gl. (4) abzulesen, und daraus ergibt sich seine Richtigkeit auch für zwei beliebige Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, indem man die Potenzen $\mathfrak{a}^h$, $\mathfrak{b}^h$ (h die Klassenzahl) betrachtet.

Die Charaktere allein ohne Hinzunahme der Norm bestimmen dagegen das Ideal nicht völlig. Denn es gibt Zahlen μ, wofür alle $\lambda(\mu) = 1$ sind, nämlich alle μ, unter deren Potenzen (μ^k) rationale Ideale vorkommen.

§ 2.

Die Zetafunktionen mit Charakteren.

Mit Hilfe eines Charakters $\lambda(\mathfrak{a})$ nach den Einheiten bilde man die analytische Funktion der komplexen Variabeln s, welche für $\Re(s) > 1$ durch

$$\zeta(s;\ \lambda) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}$$

(zu summieren über alle ganzen Ideale $\mathfrak{r}$ des Körpers) dargestellt wird. Entsprechend definieren wir, wenn $\mathfrak{f}$ ein beliebiges ganzes Ideal und $\chi(\mathfrak{a})$ ein Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist,

$$L(s;\lambda,\chi) = \sum_{\mathfrak{r}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}.$$

Beide Funktionen gestatten überdies wegen der Multiplikationsregel für λ und χ eine *Produktdarstellung* für $\Re(s) > 1$:

$$(7)\qquad \begin{cases} \zeta(s;\lambda) = \prod\limits_{\mathfrak{p}} [1-\lambda(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1}, \\ L(s;\lambda,\chi) = \prod\limits_{\mathfrak{p}} [1-\lambda(\mathfrak{p})\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}]^{-1} \end{cases}$$

und stehen daher mit der Verteilung der Primideale in Zusammenhang ($\mathfrak{p}$ durchläuft in dem Produkte alle Primideale).

Ist λ identisch 1, so haben wir es mit den gewöhnlichen ζ- und L-Funktionen zu tun. Im andern Falle ist so zu jedem Körper, der unendlich viele Einheiten enthält, eine unendliche Serie neuer Funktionen definiert, welche von Bedeutung für das Studium verborgenerer Eigenschaften des Körpers sind. Ich werde hier meine von den ζ- und L-Funktionen bekannten Methoden auf diese Funktionen anwenden, ohne wesentliche Modifikation läßt sich die Rechnung wie bei jenen durchführen. Sie findet sich im vorletzten Paragraphen dieser Arbeit.

Für die Anwendung auf die Verteilung der Primideale ist, wie zu erwarten, das Verhalten der Funktionen im Punkte $s = 1$ ausschlaggebend, sowie weiter auf der vertikalen Geraden durch 1. In dieser Hinsicht will ich in diesem Paragraphen unter Vorwegnahme der Tatsache, daß für $\lambda \not\equiv 1$ die Funktionen auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg regulär sind, folgenden Satz beweisen:

Die Funktionen $\zeta(s;\lambda)$ und $L(s;\lambda,\chi)$ sind für $\lambda \not\equiv 1$ auf der Geraden $\Re(s) = 1$ durchweg von Null verschieden.

Zunächst wird, um den Gedanken möglichst klar hervortreten zu lassen, der Punkt $s = 1$ für sich erledigt, und zwar auf Grund einer

Methode, wie sie Herr de la Vallée Poussin zum Beweise des Nichtverschwindens der Riemannschen ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(s) = 1$ ersonnen hat, in Kombination mit bereits bekannten Sätzen über die gewöhnlichen ζ- und L-Funktionen.

Sei $s = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, so ist

$$\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{\mathfrak{p}} \frac{\Re(\lambda(\mathfrak{p})^m)}{N(\mathfrak{p})^{(1+\varepsilon)m}}.$$

Da nun λ eine Zahl vom absoluten Betrage 1 ist, so ist auf Grund der Kosinus-Ungleichung

$$(8) \qquad \begin{cases} 3 + 4\cos\varphi + \cos 2\varphi = 2(1+\cos\varphi)^2 \geqq 0, \\ 3 + 4\Re(\lambda) + \Re(\lambda^2) \geqq 0, \end{cases}$$

also

$$3\log|\zeta(1+\varepsilon)| + 4\log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda)| + \log|\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 0,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1,$$

oder

$$(9) \qquad |\varepsilon\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot \left|\frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon}\right|^4 \varepsilon \cdot |\zeta(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1.$$

Wäre nun $\zeta(1;\lambda) = 0$, wo λ nicht identisch 1, so wäre, weil $\zeta(s;\lambda)$ regulär, der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\zeta(1+\varepsilon;\lambda)}{\varepsilon} = \zeta'(1;\lambda)$$

endlich, während $\lim\limits_{\varepsilon=0} \varepsilon\zeta(1+\varepsilon)$ eine endliche von Null verschiedene Zahl ist, da die ζ-Funktion in 1 einen einfachen Pol hat. Lassen wir daher in (9) ε gegen Null konvergieren, so müßte, da auch der letzte Faktor regulär ist, die linke Seite gegen Null konvergieren, im Widerspruch mit der Ungleichung.

Also ist

$$\zeta(1;\lambda) \neq 0.$$

Die entsprechende Tatsache für $L(1;\lambda,\chi)$ wird in ähnlicher Weise bewiesen, indem wir uns auf den früher von mir bewiesenen Satz stützen, daß $L(1,\chi) \neq 0$.

Bilden wir nämlich

$$(10) \qquad F(s;\lambda) = \prod_{\chi} L(s;\lambda,\chi),$$

worin das Produkt über sämtliche Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist, so wird bekanntlich

$$F(s;\lambda) = \prod_{\mathfrak{p}} [1 - \lambda^f(\mathfrak{p}) N(\mathfrak{p})^{-fs}]^{-e}, \qquad (\mathfrak{p},\mathfrak{f}) = 1$$

worin e, f ganze rationale von $\mathfrak{p}$ abhängige Zahlen sind, deren Produkt gleich der Anzahl $h(\mathfrak{f})$ der Klassen mod. $\mathfrak{f}$ ist.

Ist nun λ identisch 1, so hat, wie schon erwähnt, $F(s;1)$ bei $s=1$ einen einfachen Pol. Ist λ nicht identisch 1, so sind alle Faktoren in (10) also auch $F(s;\lambda)$ regulär bei $s=1$.

Auf Grund dieser beiden Tatsachen gestattet die wie oben zu beweisende Ungleichung

$$|F(1+\varepsilon;1)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon;\lambda^2)| \geqq 1$$

offenbar den gleichen Schluß zu machen, daß für $\lambda \not\equiv 1$

$$F(1;\lambda) \neq 0.$$

ist. Derselbe Gedanke ergibt auch den Nachweis des Nichtverschwindens dieser Funktionen auf der ganzen Geraden $\sigma = 1$. Denn offenbar gelten für beliebiges reelles t auf Grund der Produktdarstellung und der Ungleichung (8) wieder für $\varepsilon > 0$ die Ungleichungen

$$|\zeta(1+\varepsilon)|^3 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |\zeta(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$
$$|F(1+\varepsilon)|^3 \cdot |F(1+\varepsilon+ti;\lambda)|^4 \cdot |F(1+\varepsilon+2ti;\lambda^2)| \geqq 1,$$

und wegen des regulären Verhaltens der zweiten und dritten Faktoren bei $\varepsilon = 0$ kann daher der zweite Faktor nicht Null werden.

§ 3.

Die Verteilung der Charaktere für Primideale.

Es soll jetzt gezeigt werden, wie das Nichtverschwinden unserer ζ- und L-Funktionen wieder zu einem Satz über die Existenz unendlich vieler Primideale von bestimmten Eigenschaften führt.

Die Werte der r Grundcharaktere

$$\lambda_1(\mathfrak{a}),\ \lambda_2(\mathfrak{a}), \dots \lambda_r(\mathfrak{a})$$

sind komplexe Zahlen vom Betrage 1. Natürlich gibt es nicht zu einem beliebigen System komplexer Zahlen $\varkappa_1, \dots, \varkappa_r$ vom Betrage 1 ein Ideal $\mathfrak{a}$, dessen Charaktere $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ diese Werte haben. Wohl aber gibt es Ideale $\mathfrak{a}$, deren Charaktere mit beliebiger Genauigkeit mit $\varkappa_1, \dots, \varkappa_r$ übereinstimmen, und zwar kann man sogar für $\mathfrak{a}$ Primideale einer beliebig vorgeschriebenen Klasse mod. $\mathfrak{f}$ wählen. Das ist der in Aussicht genommene Satz, der also genauer so formuliert werden mag:

I. *Sind $\varkappa_1, \dots, \varkappa_r$ beliebige Zahlen vom Betrage 1, δ eine beliebige positive Größe, so gibt es in jeder Idealklasse mod. $\mathfrak{f}$ unendlich viele Primideale 1. Grades $\mathfrak{p}$, wofür die r Ungleichungen*

$$|\lambda_q(\mathfrak{p}) - \varkappa_q| < \delta \qquad (q = 1, 2, \dots, r)$$

bestehen.

Da

$$\lambda_q(\mathfrak{a}) = \exp\left\{2\pi i \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\tau_1^{(p)a_1}\tau_2^{(p)a_2}\ldots} \right| \right\},$$

so können wir unsern Satz auch so aussprechen:

II. *Ist* $\mathfrak{a}$ *ein festes Ideal, prim zu* $\mathfrak{f}$, *und lassen wir* $\mathfrak{p}$ *alle Primideale, wofür*

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f}), \ \textit{also } \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \alpha \textit{ eine Zahl ist,}$$

durchlaufen, so liegen im r-dimensionalen Raume die Punkte mit den Koordinaten

$$(11) \qquad c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a}) = \sum_{p=1}^{r+1} e_p^{(q)} \log |\alpha^{(p)}| \qquad (q = 1, \ldots, r)$$

überall dicht mod. 1.

Reduktion von $c_q(\mathfrak{p}\mathfrak{a})$ mod. 1 bedeutet offenbar Übergang von α zu einer geeigneten assoziierten Zahl. Nimmt man zu (11) noch die Gleichung

$$\sum_{p=1}^{r+1} e_p \log |\alpha^{(p)}| = \log \sqrt[n]{N(\alpha)}$$

und löst das so entstehende Gleichungssystem nach $\log|\alpha^{(p)}|$ auf, so kommt

$$\log \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right| = \sum_{q=1}^{r} c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p}) \log |\varepsilon_q^{(p)}| \qquad (p = 1, \ldots, r+1).$$

Läßt man daher $\alpha = \mathfrak{a}\mathfrak{p}$ sämtliche Zahlen (auch die assoziierten) durchlaufen, wo $\mathfrak{p}$ ein Primideal mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$) ist, so liegen die r Zahlen

$$x_1 = \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right|, \ldots, x_r = \left| \frac{\alpha^{(r)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right|$$

im Bereich der positiven x überall dicht.

Dafür endlich läßt sich auch sagen: Sind a_p, b_p $(p = 1, \ldots, r)$ r Paare positiver Zahlen und $a_p < b_p$, so gibt es zu jedem $\mathfrak{a}$ (prim zu $\mathfrak{f}$) unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$, derart, daß

$$\mathfrak{a}\mathfrak{p} \sim 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f}), \quad \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \alpha$$

und

$$a_p < \left| \frac{\alpha^{(p)}}{\sqrt[n]{N(\alpha)}} \right| < b_p \qquad (p = 1, \ldots, r).$$

In der Formulierung II will ich den Satz jetzt beweisen.

Sei also $\mathfrak{a}$ ein beliebiges zu $\mathfrak{f}$ primes Ideal, λ ein Charakter nach den Einheiten, welcher nicht identisch 1 ist, dann erkennt man zunächst, daß die Funktion

$$P(s;\lambda,\mathfrak{a})=\sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathfrak{f})}}\frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s}$$

regulär im Punkte $s=1$ (sogar auf der Vertikalen $\Re(s)=1$) ist.

In der Tat ist nach (7)

$$\log L(s;\lambda,\chi)=\sum_{\mathfrak{p}}\frac{\lambda(\mathfrak{p})\,\chi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}+g(s),$$

wo $g(s)$ für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär. Aus der bekannten Eigenschaft der Gruppencharaktere mod. $\mathfrak{f}$:

$$\sum_{\chi}\chi(\mathfrak{m})=\begin{cases}0, & \text{wenn } \mathfrak{m}\not\sim 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f}),\\ h(\mathfrak{f}), & \text{wenn } \mathfrak{m}\sim 1 \ (\text{mod. } \mathfrak{f})\end{cases}$$

folgt daher durch Summation über alle $h(\mathfrak{f})$ Charaktere χ mod. $\mathfrak{f}$

$$\lambda(\mathfrak{a})\sum_{\chi}\chi(\mathfrak{a})\log L(s;\lambda,\chi)=h(\mathfrak{f})\sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ \mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\text{mod.}\,\mathfrak{f})}}\frac{\lambda(\mathfrak{p}\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{p})^s}+g_1(s),$$

worin die Summe rechts über die Primideale $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1$ (mod. $\mathfrak{f}$) zu erstrecken ist, $g_1(s)$ wieder für $\Re(s)>\frac{1}{2}$ regulär ist. Da nun nach dem vorigen Paragraphen die $L(s;\lambda,\chi)$ auf der Geraden $\Re(s)=1$ regulär und von Null verschieden sind, sobald $\lambda\neq 1$, so folgt unsere Behauptung über $P(s;\lambda,\mathfrak{a})$.

Dagegen wird $P(s;1,\mathfrak{a})$ bei Annäherung an den Punkt 1 unendlich wie $-\frac{1}{h(\mathfrak{f})}\log(s-1)$.

Um nun zu zeigen, daß in dem Einheitswürfel

$$(12)\qquad 0\leqq x_q\leqq 1 \qquad (q=1,\ldots,r)$$

die mod. 1 genommenen Punkte

$$c_q(\alpha)=\sum_{p=1}^{r+1}e_p^{(q)}\log|\alpha^{(p)}| \qquad (q=1,\ldots,r)$$

für $\alpha=\mathfrak{a}\mathfrak{p}$ überall dicht liegen, konstruieren wir uns eine *endliche* Fouriersche Reihe nach $x_1,\ldots,x_r$

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r)=a_0+\sum_{m_1,\ldots,m_r}a(m_1,\ldots,m_r)\,e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_rx_r)},$$

welche folgende Eigenschaften haben soll:

1. Sei J ein beliebiges Gebiet im Innern des Würfels (12), etwa selbst ein kleiner Würfel, A sei der übrige Teil des Würfels (12), der nicht zu J gehört; φ soll nun durchweg reell sein und

$$(13)\qquad \varphi(x_1,\ldots,x_r)<0 \quad \text{in } A.$$

2. Das konstante Glied von φ sei

$$a_0 > 0.$$

Eine derartige Reihe kann man sich leicht verschaffen, wenn man die Fourierentwicklung einer Funktion, die in A negativ ist, während sie in J große positive Werte haben soll, an einer geeigneten Stelle abbricht.

Wir bezeichnen weiter mit $\varphi(\mathfrak{p})$ den Wert der Reihe φ, den sie im Punkte $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ hat, und ferner mit $\mathfrak{p}_J$ und $\mathfrak{p}_A$ die Primideale, deren Zahlen $c_q(\mathfrak{a}\mathfrak{p})$ entsprechend mod. 1 in J und A liegen. Dann gilt offenbar die Identität (für $\Re(s) > 1$)

$$(14)\quad a_0 P(s;1,\mathfrak{a}) + \sum_{m_1,\ldots,m_r}{}' a(m_1,\ldots,m_r) P(s;\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\ldots\lambda_r^{m_r},\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}\sim 1(\mathfrak{f})} \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s}.$$

Auf der linken Seite steht eine endliche Summe, die wegen $a_0 > 0$ positiv unendlich groß wird, wenn wir s über reelle Werte abnehmend gegen 1 konvergieren lassen. Die rechte Seite dagegen ist wegen (13)

$$\sum \frac{\varphi(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p})^s} = \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s} + \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_A)}{N(\mathfrak{p}_A)^s} \leq \sum \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}.$$

Also wächst

$$\sum_{\mathfrak{p}_J} \frac{\varphi(\mathfrak{p}_J)}{N(\mathfrak{p}_J)^s}$$

über alle Grenzen, wenn s an 1 heranrückt, die Reihe muß also unendlich viele Elemente enthalten, und insbesondere muß auch

$$\sum_{\mathfrak{p}_J} \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)}$$

divergieren.

Zum Beweise der beiden naheliegenden Vermutungen

$$\sum \frac{1}{N(\mathfrak{p}_J)^s} = \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \log \frac{1}{s-1} + g(s),$$

$$\pi_J(x) \text{ asymptotisch gleich } \frac{V_J}{h(\mathfrak{f})} \frac{x}{\log x},$$

wo bedeutet: V_J das Volumen von J, $g(s)$ eine bei $s = 1$ endlich bleibende Funktion, $\pi_J(x)$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}_J$, deren Norm $\leq x$ ist, reichen die Hilfsmittel allein nicht aus, welche man bei den bisher behandelten Problemen über die Verteilung der Primideale benutzt. Denn zum Beweise der genannten Behauptungen hätte man an Stelle von φ diejenige *unendliche* Fourierreihe zu nehmen, die in A gleich 0, in J gleich 1 ist, und in der Identität (14) hätten wir auf der linken Seite dann eine Reihe, deren analytischer Charakter erst durch eine besondere Untersuchung festgestellt werden müßte.

§ 4.

Das analytische Verhalten der Zetafunktionen mit Charakteren und ihre Funktionalgleichung.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die oben eingeführten Zetafunktionen ganze transzendente Funktionen sind und einer Funktionalgleichung genügen, was nun genau nach der Methode geschehen soll, die ich bei der Dedekindschen Zetafunktion angewandt habe.

Ich benutze dieselben Bezeichnungen wie in meiner früheren Arbeit, nur daß ich die Grundeinheiten jetzt mit ε statt mit η bezeichne. Ist μ eine Körperzahl, $\lambda(\mu)$ ein Charakter nach den Einheiten (der als nicht identisch 1 angenommen wird), so setzen wir unter Benutzung der Größen e_p aus § 1 ($e_p = 1$, wenn $k^{(p)}$ reell, sonst $= 2$) zunächst das einzelne Glied der Zetareihe in die Form

$$\frac{\lambda(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \prod_{p=1}^{r+1} |\mu^{(p)}|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}},$$

sodann führen wir mit Hilfe eines nachher zu definierenden positiven c für den einzelnen Faktor des Produktes das Γ-Integral ein, und zwar für reelle Körper $k^{(p)}$:

$$\left|c^{\frac{1}{2}} \mu^{(p)}\right|^{-s e_p + 2\pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right)$$

$$= \int_0^\infty e^{-c|\mu^{(p)}|^2 t_p}\, t_p^{\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}} \frac{d t_p}{t_p},$$

für imaginäre Körper den entsprechenden Ausdruck, aber mit $2c$ an Stelle von c. In dem Produkt über die Indizes p treten dann die Größen auf:

$$\Gamma(s;\lambda) = \prod_{p=1}^{r+1} \Gamma\left(\frac{s e_p}{2} - \pi i \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right), \tag{15}$$

$$\gamma(\lambda) = \exp\left\{\pi i \log 2 \sum_{p=r_1+1}^{r+1} \sum_{q=1}^{r} m_q e_p^{(q)}\right\}.$$

Letztere Größe, von dem Faktor 2 bei imaginären $k^{(p)}$ herrührend, ist von s, μ unabhängig und hat den Betrag 1. Wenn $r_2 = 0$, ist natürlich $\gamma = 1$ zu setzen.

Sei nun $\mathfrak{f}$ irgendein ganzes Ideal des Körpers $\neq 1$, $\chi(\mathfrak{r})$ ein *eigentlicher* Charakter mod. $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{c}$ ein festes Hilfsideal, so daß

$$\mathfrak{c}\mathfrak{f} = \omega$$

eine Zahl ist, so definieren wir für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ die Thetafunktion

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a}\mathfrak{c})} \chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}\right) \exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n} \frac{|\mu^{(p)}|^2}{|\omega^{(p)}|}\, t_p\right\}, \tag{16}$$

worin

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt[n]{d\,N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{c})}}$$

und die Summe über sämtliche Zahlen μ des Ideals $\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ zu erstrecken ist. Die Definition (16) soll für $\mathfrak{f}=1$ durch folgende ersetzt werden:

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right) \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a})} \exp\left\{-c\sum_{p=1}^{n} |\mu^{(p)}|^2 t_p\right\} \qquad (\mathfrak{c}=1,\ \omega=1),$$

in der Summe tritt hier das Glied mit dem Exponenten 0 auf, und es ist in meiner früheren Bezeichnung für $\mathfrak{f}=1$

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \chi\left(\frac{1}{\mathfrak{a}}\right)\vartheta(t;\mathfrak{a}).$$

In *jedem* Falle gilt die dort bewiesene Transformationsformel

$$\vartheta(t;\chi,\mathfrak{a}) = \frac{W(\chi)}{\sqrt{t_1\ldots t_n}}\,\vartheta\left(\frac{1}{t};\bar\chi,\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{c}\mathfrak{d}}\right) \tag{17}$$

mit

$$W(\chi)\,W(\bar\chi) = 1,$$

speziell ist

$$W(\chi) = \chi(\mathfrak{d}) \quad \text{für} \quad \mathfrak{f}=1.$$

Nachdem so der Anschluß an die Formeln meiner früheren Arbeit hergestellt ist, nehme ich $\mathfrak{c}=\mathfrak{f}^{-1}$, also $\omega=1$, eine Vereinfachung, die ich damals übersehen habe.

Wir betrachten nun die Teilsumme

$$\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{r}\,\sim\,\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}} \frac{\lambda(\mathfrak{r})\,\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s},$$

welche über alle Ideale $\mathfrak{r}\ (\neq 0)$ der Klasse $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{f}$ zu erstrecken ist, und erhalten auf dem alten Wege

$$\gamma(\lambda)\,\lambda\left(\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{f}}\right) A^s\,\Gamma(s;\lambda)\,\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \tag{18}$$

$$= \frac{2^{r_1-1}nR}{w}\int\limits_{u=0}^{\infty}\int\limits_{-\frac12}^{+\frac12}\!\!\cdots\!\int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})\,u^{\frac{ns}{2}}\exp\left\{2\pi i\sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\}dx_1\ldots dx_r\,\frac{du}{u}.$$

Die neuen Veränderlichen $u, x_1, \ldots, x_r$ hängen dabei mit den alten $t_1, \ldots, t_{r+1}$ durch

$$t_p = u\exp\left\{2\sum_{q=1}^{r} x_q \log|\varepsilon_q^{(p)}|\right\} \qquad (p=1,\ldots,r+1) \tag{19}$$

zusammen, und A ist die positive Zahl

$$A = (dN(\mathfrak{f})\pi^{-n}2^{-2r_2})^{\frac{1}{2}}.$$

Die Integration über $x_1, \ldots, x_r$ bringt, da nicht alle m Null sind, das Glied der Thetareihe mit dem Exponenten Null zum Wegfall, wenn ein solches in der Reihe auftritt.

Das Integral über u wird zerlegt in die beiden Integrale über u von 0 bis 1 und von 1 bis ∞, im ersten $\frac{1}{u}$ als neue Variable eingeführt, die Transformationsformel (17) angewandt und endlich berücksichtigt, daß der Integrationsbereich der x symmetrisch zum Nullpunkt liegt. So ergibt sich

$$(20)\quad \begin{cases} \gamma(\lambda)A^s\Gamma(s;\lambda)\zeta(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}), \\ \lambda(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) + W(\chi)\,g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right), \end{cases}$$

worin gesetzt ist

$$g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{2^{r_1-1}nR}{w}\int\limits_{u=1}^{\infty}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\!\!\ldots\!\int \vartheta(t;\chi,\mathfrak{a})\,u^{\frac{ns}{2}}\exp\left\{2\pi i\sum_{q=1}^{r} m_q x_q\right\}dx_1\ldots dx_r\frac{du}{u}.$$

Daraus folgt

$$\lambda\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = g\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) + W(\bar{\chi})\,g(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}),$$

das heißt

$\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a})$ ist eine ganze transzendente Funktion von s, wenn λ nicht identisch 1 ist, und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = W(\bar{\chi})\,\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\,\xi(s;\lambda,\chi,\mathfrak{a}).$$

Nach seiner Definition hängt ξ nicht von $\mathfrak{a}$ selbst, sondern nur von der Idealklasse $\mathfrak{a}$ ab. Durch Summation über die sämtlichen Idealklassen folgt daher:

Die Funktion

$$(21)\qquad \xi(s;\lambda,\chi) = \gamma(\lambda)A^s\Gamma(s;\lambda)L(s;\lambda,\chi)$$

ist eine ganze transzendente Funktion von s und genügt der Funktionalgleichung

$$\xi(1-s;\bar{\lambda},\bar{\chi}) = W(\bar{\chi})\,\bar{\lambda}(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\,\xi(s;\lambda,\chi).$$

Voraussetzung hierbei ist nur, daß λ nicht identisch 1 und daß χ ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ ist, sobald $\mathfrak{f} \neq 1$.

Die „trivialen" Nullstellen von $L(s;\lambda,\chi)$, den Polen von $\Gamma(s;\lambda)$ entsprechend, liegen auf $(r+1)$ Geraden, die parallel zur reellen Achse der s-Ebene verlaufen. Es wäre von Interesse, festzustellen, ob diese $(r+1)$ Geraden alle voneinander verschieden sein müssen, wie es z. B. beim quadratischen Körper der Fall ist.

Die *Bedeutung dieser Funktionen* liegt, abgesehen von den Anwendungen auf die Theorie der Verteilung der Primideale, zunächst auf dem Gebiet der *Funktionentheorie*. Bei festem $\mathfrak{f}$ bildet nämlich erst die Gesamtheit aller $L(s; \lambda, \chi)$ für alle Charaktere ein *Äquivalent für die Thetareihe*, mit der sie durch (20) verknüpft sind. Denn ersichtlich sind die $\xi(s; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ nichts anderes als die *Fourierkoeffizienten* von

$$(22) \qquad G(s; x_1, \ldots, x_r) = \int_0^\infty \vartheta(t; \chi, \mathfrak{a})\, u^{\frac{ns}{2}} \frac{du}{u},$$

als Funktion von $x_1, \ldots, x_r$ betrachtet. (Für die t sind unter dem Integralzeichen die u, x nach (19) einzutragen.) Übrigens ist G, wie durch gliedweise Integration der Thetareihe folgt, ein spezieller Fall der „Zetafunktionen n-ter Ordnung", die bereits aus Untersuchungen der Herren Lerch, Epstein u. a. bekannt sind. Aus (21) folgt aber weiter nach dem Fourierschen Integraltheorem die Umkehrung

$$\vartheta(t; \chi, \mathfrak{a}) = \frac{n}{4\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(s; x_1, \ldots, x_r)\, u^{-\frac{ns}{2}}\, ds,$$

eine Schlußweise, deren Durchführung im Gebiet der analytischen Funktionen wir den schönen Untersuchungen von Herrn Mellin[1]) verdanken. Setzen wir hier für G die Fourierentwicklung mit den Koeffizienten $\xi(s; \lambda, \chi, \mathfrak{a})$ ein, so erhält man eine Darstellung der Funktion ϑ von $(r+1)$ Variabeln durch die Gesamtheit der ξ, aus welchen dann hervorgeht, daß die Funktionalgleichung der ξ ihrerseits die Transformationsformel der Thetafunktion zur Folge hat — wie es bekanntlich bei der Riemannschen Zetafunktion der Fall ist.

Eine ähnliche Verwendung der Funktionen ξ hat mich nun dazu geführt, für jeden algebraischen Zahlkörper eine ihm zugehörige Gattung analytischer Funktionen von n (oder weniger) Variabeln zu konstruieren, die eine Reihe sehr merkwürdiger Eigenschaften besitzen und als ein Analogon zur Exponentialfunktion und den elliptischen Modulfunktionen im rationalen Körper bezeichnet werden können. Besonders evident ist die Analogie, wenn es sich um einen total reellen Körper handelt, für diesen haben die in Rede stehenden Funktionen eine nahe Beziehung zu den

[1]) Abriß einer einheitlichen Theorie der Gamma- und hypergeometrischen Funktionen, Math. Ann. 68 (1910), S. 305—337.

Modulfunktionen von n Veränderlichen, die bereits öfter untersucht worden sind. Meine Theorie liefert in dieser Hinsicht als wichtigstes Resultat die *Existenz und die Transformationsgleichung derjenigen Funktion von n Variabeln, welche der Funktion* $\log \eta(\omega)$ *entspricht*, was ich mit den bisher bekannten Hilfsmitteln vergeblich zu beweisen versucht habe.

Eine ganz besondere Bedeutung aber gewinnen die Funktionen mit λ-Charakteren für die Theorie der Reziprozitätsgesetze und der relativ Abelschen Zahlkörper, wenn man in Verallgemeinerung bekannter Gedankengänge den Zusammenhang studiert, der zwischen den Funktionen eines Grundkörpers und denen eines Oberkörpers besteht. Ich komme hierauf bei einer andern Gelegenheit ausführlich zurück.

Es ist nun noch eine — mit einem engeren Äquivalenzbegriff zusammenhängende — Ergänzung notwendig, die ich für reelle quadratische Körper im folgenden Paragraphen entwickle.

§ 5.

Reelle quadratische Zahlkörper.

Für solche Körper, unter deren Konjugierten auch reelle Körper vorkommen, lassen sich unter Umständen noch die Quadratwurzeln aus den Charakteren $\lambda(\mu)$ derart als Funktionen von μ definieren, daß die Produktregel in Gültigkeit bleibt. Im reellen quadratischen Körper mit der Grundeinheit ε $(\varepsilon > 1)$ z. B. lautet zunächst das Schema der Größen $\frac{e_p}{n}$, $e_p^{(q)}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\log|\varepsilon|}, & \frac{-1}{2\log|\varepsilon|} \end{pmatrix}.$$

Alle Charaktere sind Potenzen von

$$\lambda(\mu) = \exp\left\{\pi i \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{\log|\varepsilon|}\right\},$$

und die Funktion

$$\Gamma(s; \lambda^m) = \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2} + \frac{m\pi i}{2\log|\varepsilon|}\right).$$

Nunmehr nehmen wir an, daß die Norm der Grundeinheit gleich -1 sei. Setzen wir dann für jede Körperzahl $\mu\ (\neq 0)$

$$\lambda_0(\mu) = \exp\left\{\pi i m \frac{\log|\mu| - \log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\} \operatorname{sgn}(\mu\mu')^m,$$

wo m ganz rational, so ändert sich $\lambda_0(\mu)$ nicht, wenn man μ durch eine assoziierte Zahl ersetzt, und es ist wieder

$$\lambda_0(\alpha\beta) = \lambda_0(\alpha) \cdot \lambda_0(\beta).$$

Für gerade m stimmt λ_0 mit den Charakteren $\lambda^{\frac{m}{2}}$ überein. Wir wollen die Funktionalgleichung für die Funktion L ableiten, welche mit ungeradem m bei λ_0 gebildet sind.

Zu diesem Zwecke entnehmen wir aus den Beziehungen, welche ich als Gl. (6) – (10) in meiner Arbeit über die L-Funktionen bewies, folgende Formel:

$$(23)\qquad \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})} \exp\{-c[(\mu+v)^2 t + (\mu'+v')^2 t']\}\cdot\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right) =$$

$$= \frac{W(\chi)}{\sqrt{t\,t'}} \sum_{\nu\equiv 0\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}}\right)} \exp\left\{-c'\left(\frac{\nu^2}{t}+\frac{\nu'^2}{t'}\right)+2\pi i(\nu v+\nu' v')\right\}\chi(\nu\mathfrak{a}\mathfrak{d}).$$

Hierbei bedeuten v, v' irgendwelche Größen, χ ist ein eigentlicher Charakter mod. $\mathfrak{f}$ (falls $\mathfrak{f}\neq 1$), und

$$c = c(\mathfrak{a}) = \frac{\pi}{\sqrt{d N(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})}},\qquad c' = c\left(\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

Differentiiert man die Relation (23) nach v und dann nach v', setzt nachher $v = v' = 0$, so ergibt sich eine Transformationsgleichung für die Funktion

$$(24)\qquad \vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a}) = \frac{1}{N(\mathfrak{a})} \sum_{\mu\equiv 0\,(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})} \exp\{-c(\mu^2 t + \mu'^2 t')\}\,\mu\mu'\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

nämlich

$$(25)\qquad \vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a}) = \frac{-W(\chi)}{(tt')^{\frac{3}{2}}}\,\vartheta'\left(\frac{1}{t},\bar\chi,\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right).$$

Nun ist für *ungerades* m

$$\frac{\lambda_0(\mu)}{|N(\mu)|^s} = \exp\left\{\pi i m\,\frac{\log|\mu|-\log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\}\frac{\operatorname{sgn}(\mu\mu')}{|N(\mu)|^s} =$$

$$= \exp\left\{\pi i m\,\frac{\log|\mu|-\log|\mu'|}{2\log|\varepsilon|}\right\}\frac{\mu\mu'}{|N(\mu)|^{s+1}} =$$

$$= \mu\mu'\,|\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}\,|\mu'|^{-(s+1)-\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}.$$

Auf den dritten und vierten Faktor dieses Produktes wenden wir die Umformung mit dem Γ-Integral an, führen zur Abkürzung für λ_0 mit ungeraden m ein:

$$(26)\qquad \Gamma(s;\lambda_0) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}-\frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}+\frac{\pi i m}{4\log|\varepsilon|}\right).$$

Damit wird für ungerade m

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{d}{N(\mathfrak{f})}}\cdot\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})A^s\sum_{\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}\sim 1}\frac{\lambda_0(\mathfrak{r})\chi(\mathfrak{r})}{N(\mathfrak{r})^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \pi^{-(s+1)}\left(dN(\mathfrak{a}^2\mathfrak{f}^{-1})\right)^{\frac{1}{2}(s+1)}\frac{1}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})}\frac{\lambda_0(\mu)\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)}{|N(\mu)|^s}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{c^{-(s+1)}}{N(\mathfrak{a})}\sum_{(\mu)\equiv 0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}-1)}\chi\left(\frac{\mu}{\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1}}\right)\mu\mu'\cdot|\mu|^{-(s+1)+\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}|\mu'|^{-(s+1)-\frac{\pi i m}{2\log|\varepsilon|}}\cdot\Gamma(s;\lambda_0)$$

$$= \frac{4R}{w}\int_{u=0}^{\infty}\int_{x=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx$$

und folglich wegen (25)

$$\lambda_0(\mathfrak{a}\mathfrak{f}^{-1})\cdot\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) - W(\chi)g\left(1-s;\bar{\lambda}_0,\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right),$$

worin

$$g(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}) = \frac{4R}{w}\int_{u=1}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}}\vartheta'(t;\chi,\mathfrak{a})\,e^{\pi i m x}u^{s+1}\frac{du}{u}\,dx.$$

Für ξ resultiert daher bei ungeradem m die Funktionalgleichung

$$\xi\left(1-s;\bar{\lambda}_0,\bar{\chi},\frac{1}{\mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{f}^{-1}}\right) = -W(\bar{\chi})\bar{\lambda}_0(\mathfrak{f}\mathfrak{d})\xi(s;\lambda_0,\chi,\mathfrak{a}).$$

Ganz dieselbe Funktionalgleichung finden wir für quadratische Körper, deren Grundeinheit die Norm $+1$ hat, sofern wir den engeren Äquivalenzbegriff zugrunde legen: Zwei Ideale heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn ihr Quotient gleich einer Körperzahl gesetzt werden kann, die $\equiv 1$ mod. $\mathfrak{f}$ ist und positive Norm besitzt. Wir haben in den vorangehenden Formeln nur m durch eine gerade Zahl zu ersetzen und $\chi(\mu)$ durch $\chi_0(\mu) = \chi(\mu)\operatorname{sgn}(\mu\mu')$ (χ_0 ist dann ein Charakter dieser engeren Klassengruppe).

Das Nichtverschwinden und das reguläre Verhalten auf der Geraden $\Re(s) = 1$ ergibt sich dann wörtlich wie früher nun auch für die mit λ_0 bzw. χ_0 gebildeten L-Funktionen, woraus dann ebenso der Existenzsatz für Primideale folgt:

Sind α_1, α_2 Basiszahlen von $\mathfrak{a}$, so liegen die Zahlen

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{4\log|\varepsilon|} \qquad (\text{wenn } N(\varepsilon) = -1),$$

bzw.

$$\frac{\log\left|\frac{\omega}{\omega'}\right|}{2\log|\varepsilon|} \qquad (\text{wenn } N(\varepsilon) = +1)$$

überall dicht mod. 1, wenn man

$$\omega = \alpha_1 x + \alpha_2 y$$

nur diejenigen Zahlen positiver Norm in $\mathfrak{a}$ durchlaufen läßt, wofür

$$\frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal}$$

und

$$\omega - \text{Einheit } (\text{mod. } \mathfrak{f});$$

$\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{a}$ sind hierbei teilerfremd vorausgesetzt.

Für $\mathfrak{f} = 1$ ergibt sich hieraus eine sehr elegante geometrische Formulierung: Durch Multiplikation von ω mit einer geeigneten Potenz von ε^2 im ersten Fall, von ε im zweiten Fall lassen sich die obigen Quotienten auf eine einzige Art in das Intervall $0 \ldots 1$ bringen, wenn überdies noch verlangt wird:

$$\omega > 0, \quad \omega' > 0$$

Für beliebiges positives $\vartheta_1 < \vartheta_2$ gibt es daher unendlich viele ω mit

$$\vartheta_1 < \frac{\omega}{\omega'} < \vartheta_2, \quad \frac{\omega}{\mathfrak{a}} \text{ Primideal}.$$

Diese Ungleichung stellt aber in der x-y-Ebene einen beliebigen Winkelraum W dar, der durch zwei Halbstrahlen vom Nullpunkt aus begrenzt wird. Somit ergibt sich:

Ist $ax^2 + bxy + cy^2$ eine indefinite, ganzzahlige Form, wo $b^2 - 4ac$ Diskriminante eines quadratischen Körpers ist, so stellt sie unendlich viele Primzahlen dar, auch wenn man die ganzzahligen Variabeln auf einen Winkelraum W einschränkt.

Um den Satz in dieser Form auch für allgemeine Diskriminanten zu beweisen, ist es nötig, den engeren Begriff der Äquivalenz mod. $\mathfrak{f}$ heranzuziehen:

Zwei zu $\mathfrak{f}$ teilerfremde Ideale $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ heißen äquivalent mod. $\mathfrak{f}$, wenn man $\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$ gleich einer Zahl α setzen kann, wo α total positiv, $\alpha \equiv 1 \,(\text{mod. } \mathfrak{f})$. Dabei ist dann in den Charakteren λ an Stelle von ε die „Grundeinheit ε^n mod. $\mathfrak{f}$" zu setzen, wo ε^n die kleinste Potenz, welche $\equiv 1 \,(\text{mod. } \mathfrak{f})$ ist. Die so entstehenden L-Funktionen lassen sich, wie man sofort sieht, prinzipiell nach den gleichen Methoden behandeln wie oben. Auf diese Weise ergibt sich:

Sei $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ eine indefinite, ganzzahlige primitive quadratische Form, $b^2 - 4ac$ kein Quadrat, d die Diskriminante des Körpers $K(\sqrt{b^2 - 4ac})$, ferner k, m, n ganze Zahlen. Alsdann stellt der Ausdruck

$$f(kx + m, \; ky + n)$$

unendlich viele Primzahlen dar, wenn x, y die ganzen Zahlen eines vorgegebenen Winkelraumes W durchlaufen. Hierbei gilt für k, m, n noch die Bedingung:

$$f(m, n) \text{ prim zu } \frac{k}{d}\cdot(b^2 - 4ac).$$

In diesem Zusammenhange ist noch zu erwähnen, daß derartige Funktionen wie $\sum\limits_{x,y} f(x, y)^{-s}$, wo x, y auf W eingeschränkt ist, bereits in den klassischen Untersuchungen von Herrn de la Vallée Poussin sowie in späteren von Herrn Landau auftreten[2]), wo sie indes mit ganz anderen Mitteln behandelt werden. Unter anderem ist bekannt, daß diese Funktionen bei $s = 1$ einen einfachen Pol besitzen, was ich mit meinen Methoden nicht unmittelbar schließen kann.

Basel, Februar 1918.

---

[2]) Ch. de la Vallée Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, t. 20/21, 1896/97, insbesondere 4. partie. — E. Landau, Neuer Beweis eines analytischen Satzes des Herrn de la Vallée Poussin, Jahresber. d. deutsch. Math.-Ver. 24 (1915), S. 250—278.

(Eingegangen am 14. Februar 1918.)

Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

I. Schur in Berlin.

In seiner Note, „Sur quelques théorèmes d'Algèbre" (Comptes Rendus, Bd. 100, 1885, S. 439—440) hat Stieltjes gezeigt, daß einige der in den Anwendungen häufig vorkommenden Klassen von Polynomen, insbesondere die Kugelfunktionen und die Hermiteschen Polynome, sich durch gewisse Maximaleigenschaften ihrer Diskriminanten kennzeichnen lassen. Diesen Sätzen lassen sich noch andere, ähnlich geartete an die Seite stellen, unter anderem auch ein Satz, der zur Charakterisierung der sog. Laguerreschen Polynome dienen kann (§§ 1—3). Vor allem kommt es mir aber darauf an, zu zeigen, daß man auf Grund dieser Resultate die bekannte von Cauchy herrührende Bemerkung über die Möglichkeit, mit Hilfe der Diskriminante einer Gleichung eine untere Schranke für die Wurzeldifferenzen anzugeben, in bemerkenswerter Weise weiter verfolgen kann. Es ergibt sich, daß bei gewissen allgemeinen Klassen von Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten zwischen der Größe des höchsten Koeffizienten und der Größe der Wurzeln ein enger Zusammenhang besteht (§§ 5—8). Als besonders überraschend erscheint mir der Satz IX, der schon für den Fall der „total reellen" *ganzen* algebraischen Zahlen ein neues Resultat liefert und auch rein zahlentheoretische Anwendungen zuläßt.

§ 1.

Ein Satz von Stieltjes.

Im folgenden bezeichne ich den Ausdruck

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{\varkappa<\lambda}{}_1^n (x_\varkappa - x_\lambda)^2 \qquad (n \geq 2)$$

als die *Diskriminante der n Größen* x_ν. Erscheinen diese Zahlen insbesondere als die Wurzeln der Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

so verstehe ich unter der *Diskriminante der Gleichung* den Ausdruck

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Sind $a_0, a_1, \dots, a_n$ ganze rationale Zahlen, so ist bekanntlich auch D eine ebensolche Zahl.

In seiner oben erwähnten Note hat nun Stieltjes einen Satz ausgesprochen, der folgendermaßen formuliert werden soll:

I. *Sind $x_1, x_2, \dots, x_n$ reelle Zahlen, die den Bedingungen*

$$(1) \qquad -1 \leqq x_\nu \leqq 1 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

unterworfen werden, so ist der größte Wert, den $\Delta(x_1, x_2, \dots, x_n)$ annehmen kann, gleich

$$(2) \qquad M_n = \frac{2^2 \cdot 3^3 \dots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots (n-2)^{n-2}}{3^3 \cdot 5^5 \dots (2n-3)^{2n-3}}. \qquad (M_2 = 4)$$

Dieses Maximum erreicht Δ nur für die Nullstellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ des Polynoms $F_n(x)$, das als der Koeffizient von z^n in der Entwicklung von $\sqrt{1 - 2xz + z^2}$ nach Potenzen von z auftritt und auch als das Integral

$$F_n = \int_x^1 P_{n-1}\, dx = -\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-2}(x^2-1)^{n-1}}{dx^{n-2}}$$

der $(n-1)$-ten Kugelfunktion charakterisiert werden kann.

Der Beweis, den Stieltjes nicht angibt, läßt sich mit Hilfe der Differentialrechnung leicht erbringen. Da Δ eine stetige Funktion ist und (1) ein abgeschlossenes Gebiet $\mathfrak{G}$ darstellt, so gibt es in $\mathfrak{G}$ gewiß Stellen, an denen Δ seinen größten Wert M_n erhält. An einer solchen Stelle sind jedenfalls die x_ν voneinander verschieden und, da Δ symmetrisch ist, so kann angenommen werden, daß $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ ist. Für $n = 2$ ist $\Delta \leqq 4$ und nur dann gleich 4, wenn $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ ist. Ist aber $n > 2$, so ist für $1 < \nu < n$ jedenfalls $-1 < x_\nu < 1$ und daher

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial x_\nu} = 2 \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{1}{x_\nu - x_\lambda} = 0. \qquad (\lambda \neq \nu)$$

$\nu \neq \lambda$

Setzt man also

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \qquad f_\nu(x) = \frac{f(x)}{x - x_\nu},$$

so muß

$$(3) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n}{}' \frac{1}{x - x_\lambda} = \frac{f'_\nu(x)}{f_\nu(x)}$$

für $x = x_\nu$ verschwinden. Dies liefert

$$f''(x_\nu) = 2 f_\nu'(x_\nu) = 0.$$

Da nun $f''(x)$ nur $n-2$ Nullstellen besitzt, so muß $x_1 = -1$, $x_n = 1$ sein. Zugleich erkennen wir, daß $(x^2-1)f''(x)$ durch $f(x)$ teilbar und als Polynom n-ten Grades, abgesehen von einem konstanten Faktor, gleich $f(x)$ sein muß. Da der Koeffizient von x^n in $(x^2-1)f''(x)$ gleich $n(n-1)$ ist, so erhalten wir

$$(x^2-1)f''(x) = n(n-1)f(x).$$

Durch diese Differentialgleichung wird aber das Polynom $f(x)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und, da aus

$$(4)\qquad \varphi = \sqrt{1-2xz+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n, \qquad (x^2-1)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = z^2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

folgt, daß auch das Polynom F_n der Differentialgleichung genügt, so ist $f(x) = \text{const.}\, F_n(x)$.

Es handelt sich also nur noch darum, die Diskriminante M_n der Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von $F_n(x)$ zu berechnen. Setzt man nun

$$F_n(x) = c_n x^n + c_n' x^{n-1} + \ldots, \qquad c_n = -\frac{1\cdot 3\ldots 2n-3}{1.2\ldots n}$$

und bezeichnet mit y_β und z_γ die Nullstellen von $F_n'(x)$ und $F_{n-1}'(x)$, so wird

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} M_n = \frac{1}{c_n^n} \prod_{\alpha=1}^{n} F_n'(x_\alpha) = \frac{n^n}{c_n^{n-1}} \prod_{\beta=1}^{n-1} F_n(y_\beta).$$

Aus (4) folgt aber wegen $z\frac{\partial\varphi}{\partial z} = (x-z)\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ die Gleichung

$$n F_n(x) = x F_n'(x) - F_{n-1}'(x).$$

Daher ist $n F_n(y_\beta) = -F_{n-1}'(y_\beta)$ und

$$(5)\qquad (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} M_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{c_n^{n-1}} \prod_{\beta=1}^{n-1} F_{n-1}'(y_\beta)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} n\cdot(n-1)^{n-1} c_{n-1}^{n-1}}{n^{n-2} c_n^{n-1} c_n^{n-2}} \prod_{\gamma=1}^{n-2} F_n'(z_\gamma).$$

Nun besteht aber für die Polynome F_n' (die negativ genommenen Kugelfunktionen) die Rekursionsformel

$$(n-1)F_n' - (2n-3)xF_{n-1}' + (n-2)F_{n-2}' = 0.$$

Hieraus ergibt sich $(n-1)F'_n(z_\gamma) = -(n-2)F'_{n-2}(z_\gamma)$ und daher ist wegen (5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} M_n = -\frac{(n-1)(n-2)^{n-2}c_{n-1}^{n-1}}{n^{n-3}c_n^{2n-3}} \prod_{\gamma=1}^{n-2} F'_{n-2}(z_\gamma).$$

Andererseits liefert (5)

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} M_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}(n-1)}{c_{n-1}^{n-2}} \prod_{\gamma=1}^{n-2} F'_{n-2}(z_\gamma).$$

Daher ist

$$\frac{M_n}{M_{n-1}} = \frac{(n-2)^{n-2}}{n^{n-3}}\left(\frac{c_{n-1}}{c_n}\right)^{2n-3} = \frac{(n-2)^{n-2}}{n^{n-3}}\left(\frac{n}{2n-3}\right)^{2n-3} = \frac{n^n(n-2)^{n-2}}{(2n-3)^{2n-3}}.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit $M_2 = 4$ die zu beweisende Gl. (2).

§ 2.

Das Maximum der Diskriminante im Gebiete $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$.

Stieltjes hat a. a. O. noch hervorgehoben, daß der Ausdruck

$$e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

seinen größten Wert $e^{-\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n$ nur dann erhält, wenn x_1, $x_2, \ldots, x_n$ die Nullstellen des n-ten Hermiteschen Polynoms

$$H_n(x) = x^n - 1\cdot\binom{n}{2}x^{n-2} + 1\cdot 3\cdot\binom{n}{4}x^{n-4} - \ldots = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{dx^n}$$

sind. Ich brauche im folgenden einen anderen, ähnlichen Satz:

II. *Für reelle Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die der Bedingung*

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1 \tag{6}$$

genügen, ist das Maximum M'_n von $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich

$$M'_n = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n}{(n^2-n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}} \tag{7}$$

und diesen Wert nimmt Δ nur dann an, wenn die Größen $x_\nu\sqrt{n^2-n}$ der Gleichung $H_n(x) = 0$ genügen.

Zunächst erkennt man in bekannter Weise leicht, daß an jeder Stelle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Gebietes (6), an der die Funktion Δ ihr Maximum M'_n erreicht,

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1.$$

sein muß. Die Gesamtheit der Wertsysteme, die dieser Gleichung genügen, erhält man, indem man

$$x_1 = \cos\vartheta_1, \quad x_2 = \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_2, \ldots, \quad x_{n-1} = \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \cos\vartheta_{n-1},$$
$$x_n = \sin\vartheta_1 \ldots \sin\vartheta_{n-2} \sin\vartheta_{n-1}$$

setzt und für die „Polarkoordinaten“ $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$ alle reellen Werte zuläßt. Die Zahl M_n' erscheint daher als das Maximum der periodischen Funktion

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1})$$

der ϑ_ν. Soll nun $\Delta = \Phi = M_n'$ werden, so muß insbesondere, da

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \vartheta_{n-1}} = 0, \quad \frac{\partial x_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-1}} = -x_n, \quad \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_{n-1}} = x_{n-1} \qquad (\mu < n-1)$$

ist,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta_{n-1}} = -\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n-1}} x_n + \frac{\partial \Delta}{\partial x_n} x_{n-1} = 0$$

werden. Wegen der Symmetrie von Δ folgt ebenso für je zwei Indizes α und β

$$(8) \qquad -\frac{\partial \Delta}{\partial x_\alpha} x_\beta + \frac{\partial \Delta}{\partial x_\beta} x_\alpha = 0.$$

Setzt man nun

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = x^n - c_1 x^{n-1} + \ldots, \qquad f_\nu(x) = \frac{f(x)}{x - x_\nu},$$

so folgt aus (8) nach Division durch Δ wegen (3) und $f'(x_\nu) = f_\nu(x_\nu)$, $f''(x_\nu) = 2 f_\nu'(x_\nu)$

$$x_\beta \frac{f''(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} = x_\alpha \frac{f''(x_\beta)}{f'(x_\beta)}.$$

Ist nun etwa x_1 von Null verschieden und setzt man

$$\frac{1}{x_1} \cdot \frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \gamma,$$

so verschwindet das Polynom n-ten Grades $\gamma x f' - f''$ für alle n Nullstellen von $f(x)$. Daher muß

$$\gamma x f' - f'' = \gamma n f$$

sein. Durch Vergleichen der Koeffizienten von x^{n-1} und x^{n-2} erhält man hieraus

$$c_1 = 0, \qquad -2 c_2 \gamma = n(n-1),$$

und da

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = c_1^2 - 2 c_2 = 1$$

sein soll, so ergibt sich $2c_2 = -1$, also $\gamma = n(n-1)$. Folglich ist

$$n(n-1)xf' - f'' = n^2(n-1)f.$$

Setzt man nun $x_\nu \sqrt{n^2 - n} = \xi_\nu$ und $\Pi(x - \xi_\nu) = g(x)$, so genügt

$$g(x) = (n^2 - n)^{\frac{n}{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{n^2 - n}}\right)$$

der Differentialgleichung

$$xg' - g'' = ng,$$

die auch durch das Hermitesche Polynom H_n befriedigt wird. Durch diese Differentialgleichung ist aber das Polynom g bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt. Daher wird $g = H_n$ und folglich ist

$$(9) \qquad (n^2 - n)^{\frac{1}{2}(n^2 - n)} M_n' = \Delta(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = D_n$$

nichts anderes als die Diskriminante von $H_n = 0$.

Um nun D_n zu berechnen, hat man sich der bekannten, leicht zu beweisenden Formeln

$$(10) \qquad H_n' = nH_{n-1}, \qquad H_n - xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$$

zu bedienen. Bezeichnet man die Nullstellen von H_{n-1} mit η_β, so wird

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D_n = \prod_{\alpha=1}^{n} H_n'(\xi_\alpha) = n^n \prod_{\alpha=1}^{n} H_{n-1}(\xi_\alpha) = n^n \prod_{\beta=1}^{n-1} H_n(\eta_\beta).$$

Aus der zweiten der Gleichungen (10) folgt daher

$$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} D_n = (-1)^{n-1} n^n (n-1)^{n-1} \prod_{\beta=1}^{n-1} H_{n-2}(\eta_\beta).$$

Andererseits ist aber

$$(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} D_{n-1} = (n-1)^{n-1} \prod_{\beta=1}^{n-1} H_{n-2}(\eta_\beta).$$

Dies ergibt wegen $D_2 = 4$

$$D_n = n^n D_{n-1} = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n.$$

Aus (9) folgt nun die zu beweisende Formel (7).

Auf das Kugelgebiet (6) des n-dimensionalen Raumes läßt sich leicht auch ein beliebiges symmetrisches ellipsoidales Gebiet

$$E = a \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 + 2b \sum_{\substack{1 \\ \varkappa < \lambda}}^{n} x_\varkappa x_\lambda \leqq 1$$

zurückführen. Hierbei soll E eine positiv definite quadratische Form sein, was dann und nur dann der Fall ist, wenn $a > b > -\frac{a}{n-1}$ ist. Setzt man $\Sigma x_\nu = s_1$ und

$$\alpha = \frac{\sqrt{a+(n-1)b} - \sqrt{a-b}}{n}, \qquad \beta = \sqrt{a-b},$$

so wird

$$E = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha s_1 + \beta x_\nu)^2.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

II*. *Das Maximum von $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ im Gebiete $E \leq 1$ ist gleich*

$$\frac{M'_n}{\beta^{n^2-n}} = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n}{\left((a-b)(n^2-n)\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}}.$$

§ 3.

Das Maximum der Diskriminante in einigen anderen Gebieten.

III. *Für nicht negative reelle Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die der Bedingung*

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq 1$$

genügen, ist das Maximum M''_n von $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gleich

$$M''_n = \frac{2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}}{(n^2-n)^{n^2-n}}. \tag{11}$$

Diesen Wert nimmt Δ nur dann an, wenn die Größen $(n^2-n)x_\nu$ die Nullstellen des Polynoms

$$G_n = \frac{x}{1!} - \binom{n-1}{1}\frac{x^2}{2!} + \binom{n-1}{2}\frac{x^3}{3!} - \ldots \pm \frac{x^n}{n!}$$

sind, das zu dem ***Laguerreschen*** *Polynom*

$$L_{n-1} = \frac{e^x}{(n-1)!} \cdot \frac{d^{n-1}(e^{-x}x^{n-1})}{dx^{n-1}} = 1 - \binom{n-1}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n-1}{2}\frac{x^2}{2!} - \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

in der Beziehung $G_n = \int_0^x L_{n-1}\,dx$ steht.

Ähnlich wie im Falle des Satzes II müssen hier die Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, für die $\Delta = M''_n$ wird, der Bedingung $\Sigma x_\nu = 1$ genügen. Setzt man

$$x_1 = \cos^2\vartheta_1, \quad x_2 = \sin^2\vartheta_1 \cos^2\vartheta_2, \ldots,$$

$x_{n-1} = \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\cos^2\vartheta_{n-1}$, $x_n = \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\sin^2\vartheta_{n-1}$ und $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Psi(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1})$, so wird wieder M''_n das Maximum der periodischen Funktion Ψ von $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{n-1}$. Da insbesondere

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial \vartheta_{n-1}} = -\frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_{n-1}}, \quad \sin^2\vartheta_1 \ldots \sin^2\vartheta_{n-2}\sin\vartheta_{n-1}\cos\vartheta_{n-1} \quad \frac{\partial x_n}{\partial \vartheta_{n-1}} = 2x_{n-1}x_n \qquad -1$$

wird, so muß an jeder Stelle, an der $\Delta = M_n''$ wird, wegen $\frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta_{n-1}} = 0$

$$x_{n-1} x_n \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_{n-1}} - \frac{\partial \Delta}{\partial x_n} \right) = 0$$

und allgemein für je zwei Indizes α und β

$$x_\alpha x_\beta \left(\frac{\partial \Delta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial \Delta}{\partial x_\beta} \right) = 0$$

sein. Setzt man wie in den früheren Fällen

$$f(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = x^n - c_1 x^{n-1} + \dots,$$

so ergibt sich hier

$$x_\alpha x_\beta \left(\frac{f''(x_\alpha)}{f'(x_\alpha)} - \frac{f''(x_\beta)}{f'(x_\beta)} \right) = 0.$$

Wären nun alle x_ν von Null verschieden, so müßten die n Ausdrücke $\frac{f''(x_\nu)}{f'(x_\nu)}$ einander gleich, etwa gleich γ sein. Das ist nicht möglich, da alsdann das Polynom $\gamma f' - f''$ des Grades $n - 1$ die n Nullstellen x_1, $x_2, \dots, x_n$ aufweisen würde. Es muß also eine der Zahlen x_ν, etwa x_n verschwinden. Ist dann $\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \gamma$, so erhalten wir

$$\frac{f''(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{f''(x_2)}{f'(x_2)} = \dots = \frac{f''(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} = \gamma.$$

Daher ist $x(\gamma f' - f'')$ für alle n Werte $x_1, x_2, \dots, x_n$ gleich Null und also

(12) $$x(\gamma f' - f'') = \gamma n f.$$

Das liefert insbesondere durch Vergleichen der Koeffizienten von x^{n-1} die Gleichung $n^2 - n = \gamma c_1$. Da nun $c_1 = \Sigma x_\nu = 1$ ist, so ergibt sich $\gamma = n^2 - n$. Setzt man demnach $(n^2 - n) x_\nu = \xi_\nu$ und

$$g(x) = \prod_{\nu=1}^{n} (x - \xi_\nu) = (n^2 - n)^n f\left(\frac{x}{n^2 - n}\right),$$

so folgt aus (12)

$$x(g' - g'') = n g.$$

Durch diese Differentialgleichung ist das Polynom $g(x)$ wieder bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt, und da auch das Polynom $G_n(x)$ ihr genügt, so ist $g(x) = \text{const.}\ G_n(x)$.

Es handelt sich also wieder nur darum, die Diskriminante

$$(n^2 - n)^{n^2 - n} M_n'' = \Delta(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = D_n$$

der Wurzeln von $G_n(x) = 0$ zu berechnen. Auf Grund der leicht zu beweisenden Relationen

$$n G_n = (x - n + 1) G_n' + (n - 1) G_{n-1}',$$

$$(n - 1) G_n' - (2n - 3 - x) G_{n-1}' + (n - 2) G_{n-2}' = 0$$

erhält man nun ganz ähnlich wie im Falle des § 1

$$D_n = n^n (n - 1)^{n-1} D_{n-1},$$

was wegen $D_2 = 4$ für D_n den Wert

$$D_n = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n \cdot 2^2 \cdot 3^3 \ldots (n - 1)^{n-1}$$

und für M_n'' den in der Formel (11) angegebenen Wert liefert.

In ganz ähnlicher Weise wie bei den Hermiteschen Polynomen H_n ergibt sich für die Diskriminante der Nullstellen des Laguerreschen Polynoms L_n der Wert $2^3 \cdot 3^5 \cdot 4^7 \ldots n^{2n-1}$. Man hat sich hierbei der Gleichungen

$$L_n' = - n L_{n-1}, \qquad n L_n - (2n - 1 - x) L_{n-1} + (n - 1) L_{n-2} = 0$$

zu bedienen.

Es sei noch erwähnt, daß man die Diskriminanten der hier vorkommenden Polynome F_n, H_n, G_n und L_n auch mit Hilfe eines von Stieltjes[1]) und Herrn Hilbert[2]) angegebenen allgemeinen Satzes über die Diskriminante einer abbrechenden hypergeometrischen Reihe berechnen kann.

Auf einen weiteren Satz über $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ hat mich Herr G. Pólya aufmerksam gemacht:

IV. *Für komplexe Größen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren absolute Beträge höchstens gleich 1 sind, ist das Maximum von $|\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)|$ gleich n^n, und dieser Wert wird nur dann erreicht, wenn $x_1, x_2, \ldots, x_n$ abgesehen von einem gemeinsamen Faktor mit den n Wurzeln der Gleichung $x^n - 1 = 0$ übereinstimmen.*

Der Beweis ergibt sich hier unmittelbar vermittelst der Gleichung

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = |x_\alpha^\beta|^2, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n, \ \beta = 0, 1, \ldots, n - 1)$$

indem man auf die rechts stehende Determinante den bekannten Hadamardschen Satz über den Maximalwert des absoluten Betrages einer Determinante, deren Elemente im Einheitskreise liegen, anwendet.

---

1) „Sur les polynômes de Jacobi", Comptes Rendus, Bd. 100 (1885), S. 620—622.

2) „Über die Diskriminante der im Endlichen abbrechenden hypergeometrischen Reihe", Journal f. Math., Bd. 103 (1888), S. 337—345.

§ 4.

Einführung einiger abkürzender Bezeichnungen.

Bei den im folgenden zu behandelnden Gleichungen

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \tag{13}$$

sollen die Koeffizienten a_ν stets als ganze rationale Zahlen mit dem größten gemeinsamen Teiler 1 vorausgesetzt werden. Den ersten Koeffizienten a_0 nehme ich als positiv an. Die n Wurzeln von (13) bezeichne ich zumeist mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ und die Potenzsumme Σx_ν^m mit s_m.

Definition. *Von einer Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante sage ich, sie gehöre*

1. *zur Klasse R, wenn ihre Wurzeln alle reell sind;*
2. *zur Klasse P, wenn sie nur positive reelle Wurzeln besitzt;*
3. *zur Klasse E, wenn ihre Wurzeln sämtlich vom absoluten Betrage 1 sind.*

Die noch zu betrachtende vierte Klasse K soll ferner alle ganzzahligen Gleichungen umfassen, deren Wurzeln sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen, wobei (im Gegensatz zu den drei anderen Fällen) auch mehrfache Wurzeln vorkommen dürfen.

Unter $R(a)$ verstehe ich die Gesamtheit der Gleichungen der Klasse R, bei denen der erste Koeffizient a_0 den vorgeschriebenen Wert a hat. Das Zeichen $R(|w| \leq \lambda)$ soll ferner die Menge aller Gleichungen von R kennzeichnen, deren Wurzeln im Intervall $-\lambda \leq x \leq \lambda$ liegen. Soll außerdem noch a_0 den vorgeschriebenen Wert a haben, so spreche ich von der Teilklasse $R(a; |w| \leq \lambda)$ von R. Ähnliche Bezeichnungen gelten auch für die Klassen P, E und K.

Diese vier Klassen von Gleichungen hängen in gewisser Weise zusammen. Gehört nämlich $f(x) = 0$ zur Klasse P, so ist $f(x^2) = 0$ eine Gleichung der Klasse R. Ist ferner (13) eine Gleichung der Klasse E und sind alle x_ν von ± 1 verschieden, so ist $n = 2m$ eine gerade Zahl und $a_\nu = a_{n-\nu}$. Unter den Größen

$$y_\nu = x_\nu + x_\nu^{-1} = 2\,\Re(x_\nu)$$

sind nur m voneinander verschieden und diese genügen der Gleichung

$$g(y) = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} + (a_2 - m a_0) y^{m-2} + \dots = 0, \tag{14}$$

die zur Klasse $R(|w| < 2)$ gehört. Ist umgekehrt $g(y) = 0$ eine Gleichung dieser Klasse, deren Grad m ist, so ist die Gleichung $x^m g(x + x^{-1}) = 0$ in E enthalten. Die Gl. (14) nenne ich die zu (13) *assoziierte Gleichung*

Bezeichnet man die zu ihr gehörenden Potenzsummen mit $t_1, t_2, \ldots,$ so wird insbesondere

$$t_1 = s_1, \qquad t_2 = s_2 + 2m.$$

Ist ferner (13) eine Gleichung der Klasse K, so gehören die beiden Gleichungen

$$f(x) \pm x^m f(x^{-1}) = 0$$

zur Klasse E. Für je zwei ganze Zahlen α und β, die der Bedingung $|\alpha| > |\beta|$ genügen, ist außerdem zugleich mit $f(x) = 0$ auch die Gleichung

$$\alpha f(x) + \beta x^n f(x^{-1}) = 0$$

in K enthalten. Insbesondere gehört $f(x) = 0$ dann und nur dann zur Klasse K, wenn die Gleichung

$$\frac{1}{x}(a_0 f(x) - a_n x^n f(x^{-1})) = 0$$

des Grades $n-1$ diese Eigenschaft hat[3]).

Es sei noch erwähnt, daß man unter Benutzung dieser Bezeichnungen einen bekannten wichtigen Satz von Kronecker[4]) kurz so aussprechen kann: *Jede Wurzel einer Gleichung der Klasse $E(1)$ ist eine Einheitswurzel.*

§ 5.

Über das kleinste Intervall, in dem die Wurzeln einer Gleichung der Klasse K liegen.

Setzt man zur Abkürzung

$$n' = 2^2 \cdot 3^3 \ldots n^n = e^{2\log 2 + 3\log 3 + \ldots + n\log n}$$

und deutet, wenn α_n und β_n zwei Zahlenfolgen sind, im Anschluß an bekannte von P. Bachmann und E. Landau eingeführte Bezeichnungen durch

$$\alpha_n = \Omega(\beta_n)$$

an, daß $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ existieren und von Null verschieden sein soll, so ergibt sich mit Hilfe der Eulerschen Summationsformel

$$n' = \Omega\left(n^{\frac{1}{2}(n^2+n)+\frac{1}{12}} e^{-\frac{n^2}{4}}\right). \tag{15}$$

---

3) Diese Sätze habe ich in meiner Arbeit, „Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind", Journ. f. Math., Bd. 147 (1917), S. 205—232 (vgl. insbesondere S. 208 und 230) bewiesen.

4) „Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coeffizienten", Werke, Bd. 1, S. 105—108. Vgl. auch Hilbert, „Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper". Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 4 (1897), S. 221.

Die in § 1 bestimmte Zahl M_n läßt sich nun in der Form

$$M_n = 2^{n^2+n}\frac{(2n-1)^{2n-1}}{(n-1)^{n-1}n^n}\frac{n'^4}{(2n)'},$$

schreiben. Hieraus folgt wegen (15) ohne Mühe

$$(16)\qquad M_n = \Omega\left(\frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{2^{n^2-2n}}\right) < c\frac{n^{n+\frac{1}{4}}}{2^{n^2-2n}},$$

wo c eine gewisse Konstante bedeutet.

Es sei nun, wenn α, β und γ drei positive Konstanten sind, eine Gleichung (13) der Klasse R gegeben, die den Bedingungen

$$a_0 \leqq \alpha\beta^n, \qquad |x_\nu| \leqq \gamma \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n \geqq 2)$$

genügt. Für die Diskriminante

$$D = a_0^{2n-2}\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

der Gleichung besteht dann die Ungleichung

$$D \leqq \alpha^{2n-2}\beta^{2n^2-2n}\gamma^{n^2-n}M_n,$$

also wegen (16), da D eine positive ganze Zahl ist[5]),

$$(17)\qquad 1 \leqq D < c\cdot 2^n\alpha^{2n-2}\left(\frac{\beta^2\gamma}{2}\right)^{n^2-n}n^{n+\frac{1}{4}}.$$

Ist nun $\beta^2\gamma < 2$, so konvergiert dieser Ausdruck mit wachsendem n gegen 0 und ist also, abgesehen von endlich vielen Werten $n = 2, 3, \ldots, N$ kleiner als 1. Für $n > N$ kann daher (17) nicht gelten. Ist aber $n \leqq N$, so ist

$$|a_\nu| = a_0\left|\sum x_{\lambda_1}x_{\lambda_2}\ldots x_{\lambda_\nu}\right| \leqq \alpha\beta^n\binom{n}{\nu}\gamma^n,$$

also unterhalb einer allein von α, β und γ abhängenden Schranke gelegen. Daher kommen für die ganzen Zahlen $a_0, a_1, \ldots$ nur endlich viele Werte in Betracht. Wir erhalten also:

V. *Sind α, β, γ drei positive Konstanten und ist $\beta^2\gamma < 2$, so gibt es unter den Gleichungen*

$$(18)\qquad f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \qquad (a_0 > 0)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln (für die Gesamtheit aller Gradzahlen n)[6]) *nur endlich*

[5]) Es ist sogar, wie Herr Hilbert, „Über diophantische Gleichungen", Gött. Nachrichten 1897, S. 48—54, bewiesen hat, abgesehen von gewissen nur bei $n \leqq 3$ vorkommenden Ausnahmefällen, $D > 1$.

[6]) Daß der vorhin ausgeschlossene Fall $n = 1$ keine Ausnahme bildet, ist ohne weiteres klar.

viele, bei denen $a_0 \leq \alpha\beta^n$ *ist und die Wurzeln alle im Intervall* $-\gamma \leq x \leq \gamma$ *liegen.*

Hieraus ergibt sich insbesondere, daß bei vorgeschriebenem a_0 die Klasse $R(a_0;\ |w| \leq \gamma)$ für $\gamma < 2$ nur endlich viele Gleichungen (eventuell keine) enthalten kann. Für $\gamma = 2$ ist das aber, wie auch a_0 gewählt wird, nicht mehr der Fall. Denn wählt man für a_1 irgendeine zu a_0 teilerfremde Zahl aus der Reihe $1, 2, \ldots, a_0 - 1$, so ist für jedes n

$$h(x) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} = 0$$

eine Gleichung der Klasse K und demnach (vgl. § 4)

$$h(x) + x^{2n} h(x^{-1}) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + a_1 x + a_0 = 0$$

in der Klasse $E(a_0)$ enthalten[7]). Die hierzu assoziierte Gleichung gehört dann zur Klasse $R(a_0;\ |w| \leq 2)$. Wir können also den Satz aussprechen:

VI. *Bei gegebenem* a_0 *gibt es für* $0 < \gamma < 2$ *nur endlich viele, dagegen für* $\gamma \geq 2$ *unendlich viele Gleichungen* (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Wurzeln sämtlich reell, voneinander verschieden und in dem Intervall* $-\gamma \leq x \leq \gamma$ *gelegen sind.*

Am kürzesten kann man diesen Satz so formulieren:

VI*. *Für jedes* a_0 *ist in der Klasse* $R(a_0)$

$$\lambda = \text{Lim inf Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|) = 2\text{[8]}).$$

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß für $a_0 = 1$ der Satz VI sich aus dem am Schluß des § 4 erwähnten Satze von Kronecker ergibt. Denn sind die Wurzeln x_ν der Gleichung (18) reell, voneinander verschieden und im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ gelegen, so genügen, wenn $x_\nu = 2\cos\varphi_\nu$ $(0 \leq \varphi_\nu \leq \pi)$ gesetzt wird, die $2n$ Größen $e^{i\varphi_\nu}$ und $e^{-i\varphi_\nu}$ der Gleichung

$$F(x) = x^n f(x + x^{-1}) = x^{2n} + b_1 x^{2n-1} + \ldots = 0$$

und sind daher Einheitswurzeln. Ist aber $|x_\nu| \leq \gamma < 2$, so lassen sich zwei allein von γ abhängende Zahlen λ und μ angeben, so daß $0 < \lambda \leq \varphi_\nu \leq \mu < \pi$ wird. Es gibt aber nur endlich viele Einheitswurzeln $e^{i\varphi_\nu}$, die mit allen konjugiert algebraischen Zahlen dieser Bedingung genügen.

Eine weitere interessante Folgerung aus dem Satze V ergibt sich,

[7]) Für $a_0 = 1$ hat man hierbei $a_1 = 0$ zu setzen.

[8]) Diese Zahl λ kann entweder als die kleinste Häufungsstelle der Menge aller in Betracht kommenden Zahlen $M = \text{Max}(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|)$ oder auch etwas genauer so gedeutet werden: Man denke sich die sämtlichen Gleichungen der Klasse $R(a_0)$ nach dem bekannten Cantorschen Verfahren als abzählbare Folge $G_1 = 0$, $G_2 = 0, \ldots$ angeordnet. Bestimmt man dann für $G_\nu = 0$ die zugehörige Zahl M_ν, so ist $\lambda = \lim\inf_{\nu=\infty} M_\nu$.

indem man $\gamma = 1$ setzt. Es handelt sich dann also um Gleichungen der Klasse $R(|w| \leqq 1)$. Auf derartige Gleichungen führen insbesondere die Kugelfunktionen und andere in der Analysis häufig vorkommende Polynome. Die Bedingung $\beta^2\gamma < 2$ lautet hier $\beta < \sqrt{2}$ und aus V folgt insbesondere, daß für die Klasse $R(|w| \leqq 1)$

$$\lambda' = \text{Lim inf} \sqrt[n]{a_0} \geqq \sqrt{2} = 1{,}414\ldots$$

ist. Daß $\lambda' \leqq 2$ ist, lehrt schon die Betrachtung der Gleichungen

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + \ldots = 0.$$

Man kann aber noch eine etwas genauere Abschätzung erhalten. Es seien nämlich

$$Q_\nu(x) = a_0^{(\nu)} x^\nu + a_1^{(\nu)} x^{\nu-1} + \ldots$$

die durch die Rekursionsformel

$$Q_{\nu+1} = (2x-1)Q_\nu + (x^2-x)Q_{\nu-1}, \qquad Q_0 = 1, \qquad Q_1 = 2x-1$$

bestimmten Polynome. Man erkennt leicht, daß die Funktionen

$$(19) \qquad Q_n,\ Q_{n-1},\ \ldots,\ Q_0$$

im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$ eine zu Q_n gehörende Sturmsche Kette im allgemeineren Sinne darstellen. Da ferner $F_\nu(0) = (-1)^\nu$, $F_\nu(1) = 1$ ist, so gehen in (19) beim Übergang von 0 zu 1 genau n Vorzeichenwechsel verloren. Daher sind die Wurzeln von $Q_n(x) = 0$ reell, voneinander verschieden und im Intervall $0 < x < 1$ enthalten. Die Gleichung $Q_\nu(x^2) = 0$ des Grades 2ν gehört daher zur Klasse $R(|w| < 1)$ und ihr erster Koeffizient $a_0^{(\nu)}$ bestimmt sich vermittelst der Rekursionsformel

$$a_0^{(\nu+1)} = 2a_0^{(\nu)} + a_0^{(\nu-1)}, \qquad a_0^{(0)} = 1, \qquad a_0^{(1)} = 2.$$

Hieraus folgt in bekannter Weise

$$a_0^{(\nu)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[(1+\sqrt{2})^{\nu+1} - (1-\sqrt{2})^{\nu+1}\right],$$

also

$$\lim_{\nu=\infty} \sqrt[2\nu]{a_0^{(\nu)}} = \sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß die zu untersuchende Größe λ' im Intervall

$$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots \leqq \lambda' \leqq \sqrt{1+\sqrt{2}} = 1{,}553\ldots$$

liegt. Dieses Ergebnis können wir ausführlicher folgendermaßen ausdrücken:

VII. *Hat man eine Folge von unendlich vielen Gleichungen*

$$c_0^{(\nu)} x^{n_\nu} + c_1^{(\nu)} x^{n_\nu - 1} + \ldots = 0 \qquad (c_0^{(\nu)} > 0)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschie-

denen Wurzeln, die im Intervall $-1 \leq x \leq 1$ *liegen, so können für* $\beta < \sqrt{2}$ *die Quotienten* $\frac{c_0^{(\nu)}}{\beta^{n_\nu}}$ *nicht unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, dagegen kann dies für* $\beta \geq \sqrt{1+\sqrt{2}}$ *eintreten.*

Auf eine Verallgemeinerung des Satzes VI hat mich Herr G. Pólya aufmerksam gemacht:

VI**. *Ist* $p \leq x \leq q$ *ein gegebenes Intervall, dessen Länge* $q-p$ *kleiner als 4 ist, so kann es bei vorgeschriebenem* a_0 *nur endlich viele Gleichungen* (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten geben, deren Wurzeln sämtlich reell, voneinander verschieden und in diesem Intervall gelegen sind.*

Setzt man nämlich $\frac{1}{2}(p+q) = x_0$, $\frac{1}{2}(q-p) = \gamma$, so wird $|x_\nu - x_0| \leq \gamma < 2$ und daher

$$\begin{aligned} 1 \leq D &= a_0^{2n-2} \Delta(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \ldots, x_n - x_0) \\ &\leq a_0^{2n-2} \gamma^{n^2-n} M_n < c a_0^{2n-2} \cdot 2^n \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n^2-n} n^{n+\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck konvergiert wieder mit wachsendem n gegen 0 und daher kann die Ungleichung nur für endlich viele Werte $n \leq N$ erfüllt sein. Aus

$$|x_\nu| \leq |x_0| + \gamma, \qquad |a_\nu| = a_0 \left| \sum x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu} \right| \leq a_0 \binom{n}{\nu} (|x_0| + \gamma)^\nu$$

folgt dann wie früher, daß nur endlich viele Gleichungen in Betracht kommen.

§ 6.

Über das arithmetische Mittel der Quadrate der Wurzeln einer Gleichung der Klasse R.

Aus der Formel (15) ergibt sich für das in § 2 bestimmte Maximum M_n von $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ im Gebiete $\Sigma x_\nu^2 \leq 1$

$$\begin{aligned} M_n' &= \frac{n'}{(n^2-n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}} \\ &= \Omega\left(n^{\frac{1}{2}(3n-n^2)+\frac{1}{12}} e^{\frac{1}{4}(2n-n^2)}\right) < c' \cdot n^{\frac{1}{2}(3n-n^2)+\frac{1}{12}} e^{\frac{1}{4}(2n-n^2)}, \end{aligned}$$

wo c' wieder eine Konstante bedeutet. Sind nun wieder α, β, γ drei gegebene positive Zahlen und betrachtet man eine Gleichung (18) der Klasse R, die den Bedingungen

$$a_0 \leq \alpha \beta^n, \qquad s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leq \gamma n$$

genügt, so wird

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \alpha^{2n-2} \beta^{2n^2-2n} (\gamma n)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n',$$

also
$$1 \leqq D < c' \alpha^{2n-2} e^{\frac{n}{4}} n^{n+\frac{1}{12}} \left(\frac{\beta^4 \gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}.$$

Für $\beta^4 \gamma < e^{\frac{1}{2}}$ konvergiert dies gegen Null und die Ungleichung kann daher, sobald n eine gewisse Zahl N übertrifft, nicht mehr bestehen. Für $n < N$ ist ferner wegen $x_\nu^2 \leqq \gamma n$
$$|a_\nu| = \left| a_0 \sum x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_\nu} \right| \leqq \alpha \beta^n \cdot \binom{n}{\nu} (\gamma n)^{\frac{\nu}{2}}$$
unterhalb einer endlichen Schranke gelegen. Hieraus folgt:

VIII. *Sind α, β, γ drei positive Konstanten und $\beta^4 \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so kann es nur endlich viele Gleichungen*[9]) (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ geben, die den Bedingungen*
$$a_0 \leqq \alpha \beta^n, \qquad \frac{a_1^2 - 2a_0 a_2}{n a_0^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq \gamma$$
genügen.

Insbesondere enthält also bei gegebenem a_0 die Klasse $R(a_0)$ für $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ nur endlich viele Gleichungen, bei denen $s_2 \leqq \gamma n$ wird. Daß dies für $\gamma \geqq 2$, wie auch a_0 gewählt wird, nicht mehr richtig ist, erkennt man folgendermaßen. Setzt man b für $a_0 = 1$ gleich 0 und für $a_0 > 1$ gleich 1, so gehört die Gleichung
$$a_0 x^{2n} + b x^n + a_0 = 0$$
zur Klasse E und die assoziierte Gleichung, die hier die Form
$$a_0 x^n - n a_0 x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} a_0 x^{n-4} + \ldots + b + \varepsilon_n a_0 = 0 \tag{20}$$
$$(\varepsilon_n = 0,\ 2 \text{ oder } -2)$$
hat, zur Klasse R (vgl. § 4). Für $n > 2$ wird nun bei dieser Gleichung $s_2 = 2n$. Wir können also den Satz aussprechen:

IX. *Bei vorgeschriebenem a_0 gibt es für*
$$\gamma < e^{\frac{1}{2}} = 1{,}6487 \ldots$$
nur endlich viele, dagegen für $\gamma \geqq 2$ unendlich viele Gleichungen (18) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die der Bedingung*
$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq \gamma$$
genügen.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen können wir auch sagen:

[9]) Wenn hier und im folgenden von endlich oder unendlich vielen Gleichungen gesprochen wird, so ist das stets so gemeint, daß ihr Grad nicht festgehalten werden soll.

IX*. *Für jedes a_0 ist in der Klasse $R(a_0)$*

$$e^{\frac{1}{2}} \leqq \text{Lim inf} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} \quad 2.$$

Daß dieser Limes inferior, den ich mit $\lambda_2(a_0)$ bezeichnen will, mindestens gleich 1 sein muß, ist leicht einzusehen. Denn nehmen wir, was offenbar zulässig ist, alle x_ν als von 0 verschieden an, so wird

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} > (x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{a_n^2}{a_0^2}\right)^{\frac{1}{n}} \geqq \frac{1}{a_0^{2/n}},$$

und da $a_0^{2/n}$ mit wachsendem n gegen 1 konvergiert, so ist gewiß $\lambda_2(a_0) \geqq 1$. Es wirkt aber überraschend, daß man hier 1 durch die wesentlich größere Zahl $e^{\frac{1}{2}}$ ersetzen kann.

Der Satz IX läßt sich in ähnlicher Weise, wie das beim Satze VI auf Anregung des Herrn **Pólya** geschehen war, noch etwas verallgemeinern:

IX**. *Bei vorgeschriebenem a_0 läßt sich zu jedem positiven $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ eine Zahl $N = N(a_0, \gamma)$ bestimmen, so daß für $n \geqq N$ in jeder ganzzahligen Gleichung mit dem höchsten Gliede $a_0 x^n$ und lauter reellen, voneinander verschiedenen Wurzeln $x_1, x_2, \dots, x_n$ bei beliebig gewähltem x_0*

$$\frac{S_2(x_0)}{n} \quad \frac{(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2 + \dots \quad (x_n - x_0)^2}{n} \quad \gamma$$

wird. Hält man außerdem noch x_0 fest, so kann es nur endlich viele Gleichungen dieser Art geben, für die $S_2(x_0) \leqq n\gamma$ wird.

Der Beweis ergibt sich wieder, indem man die Diskriminante D der Gleichung in der Form

$$D = a_0^{2n-2} \Delta(x_1 - x_0, x_2 - x_0, \dots, x_n - x_0)$$

schreibt. Soll $S_2(x_0) \leqq n\gamma$ sein, so muß

$$1 \leqq D \leqq a_0^{2n-2} (n\gamma)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n' < c' a_0^{2n-2} e^{\frac{n}{4}} n^{n+\frac{1}{12}} \left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}$$

sein. Für $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ kann diese Ungleichung, sobald n eine gewisse Schranke $N(a_0, \gamma)$ übertrifft, nicht mehr bestehen. Hierbei ist $N(a_0, \gamma)$ von x_0 unabhängig. Bei festgehaltenem x_0 führt auch die Annahme $n \leqq N(a_0, \gamma)$ wegen $|x_\nu| \leqq |x_0| + \sqrt{n\gamma}$ nur auf endlich viele Gleichungen, für die $(S_2 x_0) \leqq n\gamma$ sein kann.

Der erste Teil dieses Satzes besagt nur, daß für $n > N$ das Minimum von

$$S_2(x_0) = s_2 - 2 s_1 x_0 + n x_0^2$$

größer als $n\gamma$ ist. Dieses Minimum wird für $x_0 = \frac{s_1}{n}$ erreicht und hat den Wert $s_2 - \frac{s_1^2}{n}$. *Für $n > N(a_0, \gamma)$ ist daher*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \gamma + \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2. \tag{21}$$

Will man für ein gegebenes $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$, z. B. für $\gamma = 1{,}5$, eine einigermaßen brauchbare Abschätzung für $N(a_0, \gamma)$ erhalten, so empfiehlt es sich, nicht von der Formel (15) Gebrauch zu machen, sondern folgendermaßen zu schließen. Setzt man

$$\mu_n = a_0^{2n-2}(n\gamma)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} M_n' = a_0^{2n-2}\gamma^{\frac{1}{2}(n^2-n)} \frac{n!}{(n-1)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}},$$

so wird

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = a_0^2\gamma^n(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} < a_0^2\gamma^n(n+1)\cdot e\cdot e^{-\frac{1}{2}(n^2-n)\cdot\frac{1}{n}},$$

also

$$\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} < (n+1)\, e^{\frac{3}{2}} a_0^2 \left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^n.$$

Hieraus folgt

$$\mu_n < n!\, e^{\frac{3n-3}{2}} a_0^{2n-2}\left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)} < \sqrt{2\pi}\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n+1}\cdot e^{\frac{3n-3}{2}} a_0^{2n-2}\left(\frac{\gamma}{e^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}(n^2-n)}.$$

Es ist also gewiß $\mu_n < 1$, sobald

$$2(n-1)\log a_0 + \log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{n}{2} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n < \frac{n^2-n}{2}\log\left(\gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}}\right)$$

wird. Beachtet man nun, daß für $n > e^3 = 20{,}08\ldots$

$$\log\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\log n < \frac{n-1}{2},$$

so erkennt man (nach Division durch $n-1$), daß es nur darauf ankommt, eine Zahl $N(a_0, \gamma) > e^3$ zu bestimmen, so daß

$$1 + 2\log a_0 + \log N < \frac{N}{2}\log\left(\gamma^{-1}e^{\frac{1}{2}}\right)$$

wird. Für $\gamma = 1{,}5$ und $\gamma = 1{,}53$ habe ich auf diese Weise gefunden, daß es jedenfalls genügt,

$$N(a_0, 1{,}5) \geqq 130\,(1 + 2\log a_0), \qquad N(a_0, 1{,}53) \geqq 170\,(1 + 2\log a_0)$$

zu setzen. *Im Falle $a_0 = 1$ ist also insbesondere für $n \geqq 130$*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} > \frac{3}{2} + \left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right)^2.$$

§ 7.

Über Gleichungen mit positiven reellen Wurzeln.

Gehört die Gleichung

$$(22)\quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = 0 \quad (a_0 > 0)$$

zur Klasse P, so ist

$$f(x^2) = a_0 x^{2n} + a_1 x^{2n-2} + \dots + a_n = a_0 \prod_{\mu=1}^{2n} (x - y_\mu) = 0$$

eine Gleichung der Klasse R, und hierbei wird das arithmetische Mittel der Quadrate der y_μ gleich dem arithmetischen Mittel der x_ν. Wendet man auf $f(x^2) = 0$ die Sätze der §§ 5 und 6, so ergeben sich analoge Aussagen über $f(x) = 0$. Der Satz VI liefert unter Berücksichtigung des Zusatzes VI** nichts Neues. Dagegen ergeben sich aus VII und IX Folgerungen, die hervorgehoben zu werden verdienen.

X. *Hat man eine Folge von unendlich vielen Gleichungen*

$$c_0^{(\nu)} x^{n_\nu} + c_1^{(\nu)} x^{n_\nu - 1} + \dots = 0 \qquad (c_0^{(\nu)} > 0)$$

mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, positiven Wurzeln, die voneinander verschieden und höchstens gleich 1 sind, so können für $\beta < 2$ *die Quotienten* $\dfrac{c_0^{(\nu)}}{\beta^{n_\nu}}$ *nicht unterhalb einer endlichen Schranke bleiben, dagegen kann dies für* $\beta \geqq 1 + \sqrt{2} = 2{,}414\dots$ *eintreten.*

XI. *Bei vorgeschriebenem* a_0 *gibt es für* $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ *nur endlich viele, dagegen für* $\gamma \geqq 2$ *unendlich viele Gleichungen* (22) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen positiven, voneinander verschiedenen Wurzeln, für die*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leqq \gamma$$

wird.

Um ein System von unendlich vielen Gleichungen der Klasse $P(a_0)$ zu erhalten, die der Bedingung $\Sigma x_\nu = 2n$ genügen, hat man nur in dem Beispiel (20) des vorigen Paragraphen n durch $2n$ und x^2 durch x zu ersetzen. Das liefert für jedes n eine Gleichung

$$(23)\quad a_0 x^n - 2n a_0 x^{n-1} + n(2n-3) a_0 x^{n-2} - \dots + (b \pm 2a_0) = 0$$

der gewünschten Art.

Man kann die Sätze X und XI wieder kurz zusammenfassen:

Für die Klasse $P(w \leqq 1)$ *ist*

$$2 \leqq \operatorname{Lim\,inf} \sqrt[n]{a_0} \leqq 1 + \sqrt{2},$$

ferner ist bei gegebenem a_0 für die Klasse $P(a_0)$

$$e^{\frac{1}{2}} \leqq \operatorname{Lim\,inf} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \leqq 2.$$

Die Untersuchung des arithmetischen Mittels der x_ν läßt sich auch ohne Benutzung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen mit Hilfe des Satzes III durchführen, doch erhält man hierbei, wie aus

$$(n\gamma)^{n^2-n} M_n'' = \gamma^{n^2-n} \frac{n'^2}{n^n (n-1)^{n^2-n}} = \Omega\left(e^{\frac{n}{2}} n^{n+\frac{1}{6}} \left(\gamma e^{-\frac{1}{2}}\right)^{n^2-n}\right)$$

hervorgeht (vgl. die Formeln (11) und (15)), kein besseres Resultat.

Von Interesse ist noch folgender Satz:

XII. *Bei vorgeschriebenem a_0 gibt es für*

$$\delta < e^{\frac{1}{2}} + e = 4{,}367\ldots$$

nur endlich viele, dagegen für $\delta \geqq 6$ unendlich viele Gleichungen (22) *mit ganzzahligen Koeffizienten und lauter reellen, positiven Wurzeln, die voneinander verschieden sind und der Bedingung*

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \leqq \delta$$

genügen. Oder, was auf dasselbe hinauskommt: Für die Klasse $P(a_0)$ ist

$$e^{\frac{1}{2}} + e \leqq \operatorname{Lim\,inf} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n} \leqq 6. \tag{24}$$

Auf die untere Schranke $e^{\frac{1}{2}} + e$ wird man geführt, indem man auf die Gleichung (22) die Formel (21) in Verbindung mit dem Satze XI anwendet. Betrachtet man andererseits die Gleichungen (23) der Klasse $P(a_0)$, so wird hier für jedes $n > 2$

$$s_2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 4n^2 - 2n(2n-3) = 6n.$$

Ebenso wie im Falle des vorigen Paragraphen ist es mir bis jetzt nicht gelungen, die Abschätzung des Limes inferior (24) genauer durchzuführen.

§ 8.

Die Gleichungen der Klassen E und K.

Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu) = 0 \quad (a_0 > 0) \tag{25}$$

eine Gleichung der Klasse E, d. h. eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Wurzeln z_ν voneinander verschieden und vom absoluten Betrage 1 sind. Ich nehme noch an, daß unter den z_ν die Zahlen ± 1

nicht vorkommen und $a_1 \geqq 0$ ist. Das letztere kann durch die Substitution $z \mid - z$ stets erreicht werden. Die der ebenfalls zu E gehörenden Gleichung $f(z^2) = 0$ entsprechende assoziierte Gleichung der Klasse R (vgl. § 4) hat die Form

$$(26) \qquad a_0 x^n + (a_1 - n a_0) x^{n-2} + \ldots = a_0 \prod_{\nu=1}^{n} (x - x_\nu) = 0,$$

und es ist insbesondere

$$s_2 = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 = 2n - \frac{2a_1}{a_0} = 2n - 2\left|\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu\right|.$$

Ist nun $0 < \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so gibt es bei vorgeschriebenem a_0 nach Satz IX nur endlich viele Gleichungen (26), für die $s_2 \leqq n\gamma$ wird. Daher gibt es auch nur endlich viele Gleichungen (25) der Klasse E, für die

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}\right| \geqq 1 - \frac{\gamma}{2}$$

wird, und das gilt offenbar auch, wenn ich die Annahme $z_\nu \neq \pm 1$, $a_1 \geqq 0$ falle lasse.

Gehört ferner die Gleichung (25) zur Klasse K, so ist

$$(27) \quad z^2 f(z) + z^n f(z^{-1}) = a_0 z^{n+2} + a_1 z^{n+1} + (a_2 + a_n) z^n + \ldots \quad 0$$

eine Gleichung der Klasse E, bei der die Summe der Wurzeln gleich $\sum z_\nu$ ist. Wird nun a_0 festgehalten und ist $0 < \gamma < e^{\frac{1}{2}}$, so läßt sich, wie aus dem vorhin Bewiesenen folgt, zu jedem γ' zwischen γ und $e^{\frac{1}{2}}$ eine Zahl N' angeben, so daß für $n > N'$ das arithmetische Mittel der Wurzeln von (27) absolut kleiner als $1 - \frac{\gamma'}{2}$ wird. Ist nun

$$N \geqq N', \qquad N \geqq \frac{4 - 2\gamma'}{\gamma' - \gamma},$$

so wird für $n > N$

$$\left|\frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}\right| < \frac{n+2}{n}\left(1 - \frac{\gamma'}{2}\right) < 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

Die endlich vielen n, die eine Ausnahme bilden können, führen, da die Klasse $K(a_0)$ überhaupt nur endlich viele Gleichungen eines vorgegebenen Grades enthält, nur auf endlich viele Gleichungen $f(z) = 0$.

Wir können also den Satz aussprechen:

XIII. *Ist a_0 eine gegebene ganze Zahl und* (25) *eine Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Wurzeln entweder alle vom absoluten Betrage* 1 *und voneinander verschieden sind oder sämtlich im Innern des Einheitskreises liegen (wobei auch mehrfache Wurzeln vorkommen können),* *so liegt für jede Zahl* $\varrho > 1 - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2}$ *der Schwerpunkt* $\frac{1}{n}(z_1 + z_2 + \dots + z_n)$ *der Wurzelpunkte, abgesehen von endlich vielen Ausnahmefällen, im Innern des Kreises* $|z| \leqq \varrho$. *Für jede der beiden Klassen* $E(a_0)$ *und* $K(a_0)$ *ist also bei vorgeschriebenem* a_0

$$(28) \qquad \operatorname{Lim\,sup} \left| \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} \right| \leqq 1 - \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} = 0{,}1756\dots$$

Hieraus folgt z. B. leicht, daß bei gegebenem a_0 in beiden Fällen nur endlich viele Gleichungen existieren können, für die mehr als vier Fünftel der Wurzeln in der Halbebene $\Re(z) \geqq \frac{1}{2}$ liegen.

Für $a_0 = 1$ kommt nur die Klasse $E(1)$ in Betracht und aus dem in § 4 erwähnten Satze von Kronecker folgt auf Grund bekannter Eigenschaften der Einheitswurzeln, daß in diesem Falle der Limes superior (28) gleich 0 ist. Ob dies auch für $a_0 > 1$ richtig ist, habe ich bis jetzt nicht entscheiden können.

Einen weiteren hierher gehörigen Satz verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn G. Pólya:

XIV. *Sind* α *und* β *gegebene positive Konstanten, und betrachtet man die Gesamtheit aller Gleichungen* (25) *mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante, für die* $a_0 < \alpha\beta^n$ *ist, so können, sobald* n *eine gewisse Schranke übertrifft, nicht alle Wurzeln in einem Kreise liegen, dessen Radius kleiner als* $\frac{1}{\beta^2}$ *ist. Ist ferner* C *ein gegebener Kreis mit dem Radius* $r < 1$, *so kann es bei vorgeschriebenem* a_0 *nur endlich viele Gleichungen* (25) *mit ganzzahligen Koeffizienten und nicht verschwindender Diskriminante geben, deren Wurzeln sämtlich in* C *liegen.*

Der Beweis ergibt sich auf Grund des Satzes IV ganz ebenso wie in den früheren Fällen. Man hat hierbei nur zu beachten, daß $r^{n^2-n}n^n$ für $0 < r < 1$ mit wachsendem n dem Grenzwert 0 zustrebt.

§ 9.

Anwendungen auf total reelle algebraische Zahlkörper.

Ein algebraischer Zahlkörper $\mathsf{K} = \mathsf{P}(\vartheta)$ des Grades n heißt bekanntlich *total reell*, wenn K und die zu K konjugierten Körper nur reelle Zahlen enthalten. Ist ξ eine Zahl von K, so mögen die zu ξ konjugierten Zahlen mit $\xi', \xi'', \dots, \xi^{(n-1)}$ und die rationalen Zahlen

$$S(\xi) = \xi + \xi' + \dots + \xi^{(n-1)}, \qquad N(\xi) = \xi\xi' \dots \xi^{(n-1)}$$

wie üblich als die Spur und die Norm von ξ bezeichnet werden. Ebenso soll, wenn $\mathfrak{a}$ ein (ganzes) Ideal des Körpers ist, unter $N(\mathfrak{a})$ die Norm von $\mathfrak{a}$ verstanden werden.

Aus dem Satze VII ergibt sich zunächst:

XV. *Es sei $r < \sqrt{2}$ eine positive Konstante und $\mathfrak{a}$ ein Ideal des (total reellen) Körpers* K. *Sind dann α und β zwei von Null verschiedene, durch $\mathfrak{a}$ teilbare ganze Zahlen von* K, *die den Bedingungen*

$$|\beta^{(\nu)}| < |\alpha^{(\nu)}|, \quad |N(\alpha)| \leq r^n N(\mathfrak{a}) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

genügen, so können die n Zahlen $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}$ nicht voneinander verschieden sein. Eine Ausnahme kann nur für endlich viele Körper K *und bei jedem von ihnen nur für endlich viele Zahlen $\frac{\beta}{\alpha}$ eintreten.*

Betrachtet man nämlich die Gleichung

$$\prod_{\nu=0}^{n-1} (x\alpha^{(\nu)} - \beta^{(\nu)}) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n = 0,$$

so sind $c_0, c_1, \ldots, c_n$ ganze rationale Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler gleich der Norm $N(\mathfrak{d})$ des größten gemeinsamen Idealteilers $\mathfrak{d} = (\alpha, \beta)$ der Zahlen α und β ist[10]. Nach Division durch $N(\mathfrak{d})$ entsteht eine Gleichung

$$(29) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, in der

$$|a_0| = \frac{|N(\alpha)|}{N(\mathfrak{d})} \leq \frac{|N(\alpha)|}{N(\mathfrak{a})} \leq r^n$$

ist. Die Wurzeln $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}}$ dieser Gleichung sind reell und absolut kleiner als 1. Verlangt man nun noch, daß sie voneinander verschieden sein sollen, so kommen nach Satz VII nur endlich viele Gleichungen (29) und also auch nur endlich viele Zahlen $\frac{\beta}{\alpha}$ in Betracht. Außerdem ist jede dieser Ausnahmezahlen eine erzeugende Größe des zu betrachtenden Körpers K. Hieraus folgt die Richtigkeit unserer Behauptung.

Wählt man z. B. für $\mathfrak{a}$ das Hauptideal $\mathfrak{o} = (1)$ und versteht unter ω eine von Null verschiedene ganze Zahl des Körpers, so sind für $\alpha = 1 + \omega + \omega^2$, $\beta = \omega$ die Bedingungen $|\beta^{(\nu)}| < |\alpha^{(\nu)}|$ von selbst erfüllt. Für $r < \sqrt{2}$ folgt daher, wenn von endlich vielen Körpern K abgesehen wird, aus der Annahme $N(1 + \omega + \omega^2) \leq r^n$, daß unter den Zahlen $\frac{\beta^{(\nu)}}{\alpha^{(\nu)}} = 1 + \omega^{(\nu)} + \omega^{(\nu)-1}$ einander gleiche vorkommen müssen. Dies tritt nur dann ein, wenn eine der Zahlen $\omega', \omega'', \ldots, \omega^{(n-1)}$ entweder gleich ω oder gleich ω^{-1} wird.

Bedeutet ferner α eine rationale Primzahl p und $\mathfrak{a}$ einen Idealteiler von p, dessen Norm gleich p^a sei, so lautet die Bedingung $|N(\alpha)| \leq r^n N(\mathfrak{a})$ einfach $p^{n-a} < r^n$. Ist also dies der Fall, so kann im allgemeinen eine

[10]) Vgl. die in Fußnote [5]) zitierte Arbeit von Herrn Hilbert.

durch $\mathfrak{a}$ teilbare Zahl β, die mit allen zu ihr konjugierten Zahlen absolut kleiner als p ist, nicht eine den Körper erzeugende Zahl sein. Eine Ausnahme kann nur bei endlich vielen total reellen Körpern eintreten.

Von größerem Interesse sind die Folgerungen, die sich aus den Ergebnissen des § 6 ziehen lassen. Es mögen nämlich $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ eine Basis im Gebiete $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von K bilden. Ist

$$\xi = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2 + \ldots + x_n \omega_n$$

die zugehörige Fundamentalform, so setze man für $m = 1, 2, \ldots$

$$F_{2m}(\xi) = \sum_{\nu=1}^{n} \xi^{(\nu)^{2m}} = \sum S(\omega_{\lambda_1} \omega_{\lambda_2} \ldots \omega_{\lambda_{2m}}) x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_{2m}}.$$

Diese homogene Funktion der Variabeln x_ν hat ganze rationale Koeffizienten und ist positiv definit. Läßt man $x_1, x_2, \ldots, x_n$ alle ganzen rationalen Zahlen durchlaufen, für die ξ von den konjugierten Zahlen $\xi^{(\nu)}$ verschieden ausfällt, so sei μ_{2m} der kleinste Wert, den $F_{2m}(\xi)$ annimmt. Aus dem Satze IX folgt nun: *Zu jeder positiven Größe $\gamma < e^{\frac{1}{2}}$ gehört eine Zahl $N(\gamma)$ derart, daß für $n \geqq N(\gamma)$ stets $\mu_2 > \gamma n$ wird.* Für positive Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_n$ gelten aber bekanntlich, wenn $s_k = \sum u_\nu^k$ gesetzt wird, die Ungleichungen

$$\frac{s_1}{n} \leqq \sqrt{\frac{s_2}{n}} \leqq \sqrt[3]{\frac{s_3}{n}} \leqq \cdots$$

Ist daher $\mu_{2m} = F_{2m}(\xi)$, so wird für $n \geqq N(\gamma)$

$$\mu_{2m} \geqq n \left(\frac{F_2(\xi)}{n}\right)^m \geqq n \left(\frac{\mu_2}{n}\right)^m > \gamma^m n.$$

Man kann noch ein etwas genaueres Resultat ableiten. Ist $F_{4m}(\xi) = \mu_{4m}$, so können die Zahlen

$$(30) \qquad \xi^{2m}, \xi'^{2m}, \ldots, (\xi^{(n-1)})^{2m}$$

nur dann nicht voneinander verschieden sein, wenn n gerade ist und die n Zahlen $\xi^{(\nu)}$ in $\frac{n}{2}$ Paare von entgegengesetzt gleichen Zahlen zerfallen. In diesem Fall sind unter den Zahlen (30) genau $\frac{n}{2}$ voneinander verschieden und diese genügen einer irreduziblen Gleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten, wobei der höchste Koeffizient gleich 1 wird. Wendet man nun auf diese Gleichung die Formel (21) des § 6 an und beachtet noch, daß das arithmetische Mittel der Zahlen (30) gleich dem der unter ihnen verschiedenen ist, und daß das Analoge auch für die Potenzen $(\xi^{(\nu)})^{4m}$ gilt, so ergibt sich, daß für $\frac{n}{2} \geqq N(\gamma)$

$$\frac{\mu_{4m}}{n} > \gamma + \left(\frac{F_{2m}(\xi)}{n}\right)^2 \geqq \gamma + \left(\frac{\mu_{2m}}{n}\right)^2.$$

wird. Setzt man daher

$$\gamma_2 = \gamma, \quad \gamma_4 = \gamma + \gamma_2^2, \quad \gamma_8 = \gamma + \gamma_4^2, \ldots,$$

so wird insbesondere für $n \geqq 2N(\gamma)$

$$\mu_{2\lambda} > \gamma_{2\lambda} n.$$

Für $\gamma = 1{,}53$ wird z. B. $\gamma_8 > 16$, außerdem genügt es $N(1{,}5) = 130$, $N(1{,}53) = 170$ zu setzen (vgl. den Schluß des § 6). Daher ist speziell

$$(31) \qquad \mu_2 > \frac{3n}{2} \quad (\text{für } n \geqq 130), \qquad \mu_8 > 16n \quad (\text{für } n \geqq 340)^{11}).$$

Um hiervon eine Anwendung zu machen, betrachte ich die (in unserem Falle positive) *Grundzahl d* des Körpers K. Aus einem bekannten Satze von Minkowski[12]) ergibt sich für total reelle Körper

$$(32) \qquad d > \left(\frac{n^n}{n!}\right)^2 > \frac{e^{2n - \frac{1}{6n}}}{2\pi n},$$

und hieraus folgt die wichtige Tatsache, daß unter den Körpern aller möglichen Grade nur endlich viele die vorgeschriebene Grundzahl d besitzen können. Um dies zu beweisen, genügt es jedoch für d irgendeine untere Schranke anzugeben, die mit n über alle Grenzen wächst. Die Ungleichung (32) beweist Minkowski mit Hilfe seines allgemeinen Satzes über die in gewissen konvexen Bereichen liegenden Gitterpunkte. Für total reelle Körper gestatten nun unsere Ergebnisse eine untere Schranke von der gewünschten Art allein unter Benutzung des in arithmetischer Hinsicht wesentlich elementareren Minkowskischen Satzes über Linearformen abzuleiten. Auf Grund dieses Satzes lassen sich nämlich die ganzen rationalen Zahlen x_ν so wählen, daß

$$0 < |\xi| \leqq \sqrt{d}, \quad |\xi'| < 1, \quad \ldots, \quad |\xi^{(n-1)}| < 1$$

wird[13]). Hierbei sind die n Zahlen $\xi^{(\nu)}$ gewiß voneinander verschieden. Für $n \geqq 130$ wird daher wegen (31)

$$d + n - 1 > F_2(\xi) > \frac{3n}{2}, \quad \text{d. h.} \quad d > \frac{n}{2} + 1.$$

Eine bessere Abschätzung erhält man mit Hilfe des Satzes I. Es wird nämlich

$$\begin{aligned} d &\leqq \Delta(\xi, \xi', \ldots, \xi^{(n-1)}) \\ &= \prod_{\nu=1}^{n-1} (\xi - \xi^{(\nu)})^2 \Delta(\xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n-1)}) < (\sqrt{d} + 1)^{2n-2} \cdot M_{n-1}, \end{aligned}$$

[11]) Für $\gamma = e^{\frac{1}{2}}$ wird $\gamma_8 = 20{,}7\ldots$, für genügend große Werte von n ist daher sogar $\mu_8 > 20n$.

[12]) „Geometrie der Zahlen", S. 134.

[13]) Vgl. den in Fußnote [4]) zitierten Hilbertschen „Bericht", S. 212.

woraus sich auf Grund der Formel (16) eine Ungleichung der Formel $d > \text{const.}\,\frac{2^n}{n}$ ergibt. Wählt man ferner, was ebenfalls möglich ist, die x_ν so, daß

$$0 < |\xi| \leqq d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad |\xi'| < d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad \ldots, \quad |\xi^{(n-2)}| < d^{\frac{1}{2n-2}}, \quad |\xi^{(n-1)}| < 1$$

wird, und nimmt man an, die $\xi^{(\nu)}$ seien auch hier voneinander verschieden, so liefert die zweite der Ungleichungen (31) für $n \geqq 340$

$$(n-1)d^{\frac{4}{n-1}} + 1 > F_8(\xi) > 16n,$$

also $d > 2^{n-1}$. Die hier über die $\xi^{(\nu)}$ gemachte Voraussetzung ist für *primitive* Körper K gewiß erfüllt.

Es dürfte von Interesse sein, diese noch sehr in den Anfängen steckende Betrachtung weiter zu verfolgen.

Berlin, den 27. Februar 1918.

(Eingegangen am 27. Februar 1918.)

Über streckentreue und konforme Abbildung.

Von

Harald Bohr in Kopenhagen.

In einer Ebene mit gegebenem Umlaufssinn, deren Punkte wir durch eine komplexe Variable $z = x + iy$ charakterisieren, sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet G gegeben, das wir der Einfachheit halber als das Innere einer Jordanschen Kurve annehmen werden. In einer anderen Ebene mit gegebenem Umlaufssinn, deren Punkte wir durch die komplexe Variable $\zeta = \xi + i\eta$ charakterisieren, sei ebenfalls ein im Endlichen gelegenes, durch eine Jordansche Kurve begrenztes Gebiet Γ gegeben, und es sei das Gebiet G *eineindeutig* und *stetig* auf das Gebiet Γ abgebildet. Die (im Gebiete G definierte) Funktion, welche G auf Γ abbildet, werden wir mit $\zeta = f(z)$ bezeichnen, während wir die inverse (im Gebiete Γ definierte) Funktion, welche Γ auf G abbildet, mit $z = \varphi(\zeta)$ bezeichnen.

Unter den eineindeutigen und stetigen Abbildungen des Gebietes G auf das Gebiet Γ sind die *konformen Abbildungen* von ganz besonderer Wichtigkeit. Das sind Abbildungen, bei denen die im Gebiete G definierte Abbildungsfunktion $f(z)$ eine *analytische Funktion* ist, mit anderen Worten Abbildungen, die so beschaffen sind, daß bei jedem festen z_0 in G der Differenzenquotient

$$\frac{\zeta - \zeta_0}{z - z_0} = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

einem bestimmten (wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von selbst von Null verschiedenen) Grenzwerte $f'(z_0)$ zustrebt, wenn der Punkt z in beliebiger Weise gegen z_0 konvergiert, was wir durch $z \rightarrow z_0$ bezeichnen werden.

Wir wollen im folgenden eine eineindeutige und stetige Abbildung von G auf Γ eine *streckentreue Abbildung* nennen, wenn bei jedem festen z_0 in G der positive Bruch

$$\frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-z_0|} = \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}$$

für $z \to z_0$ einem bestimmten positiven Grenzwerte $g(z_0)$ zustrebt.

Ferner soll eine eineindeutige und stetige Abbildung von G auf Γ eine *winkeltreue Abbildung* heißen, wenn bei jedem festen z_0 in G die auf dem Einheitskreise gelegene Zahl

$$\frac{\operatorname{sign}(\zeta-\zeta_0)}{\operatorname{sign}(z-z_0)} = \frac{\operatorname{sign}(f(z)-f(z_0))}{\operatorname{sign}(z-z_0)},$$

unter sign u für $u \neq 0$ die Zahl $\frac{u}{|u|}$ verstanden, sich für $z \to z_0$ einem bestimmten Grenzwerte $h(z_0)$ nähert. Offenbar ist $|h(z_0)| = 1$.

Weil die *eine* Gleichung

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\zeta-\zeta_0}{z-z_0} = u_0 \,(\neq 0)$$

mit den *zwei* Gleichungen

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|\zeta-\zeta_0|}{|z-z_0|} = |u_0|, \qquad \lim_{z \to z_0} \frac{\operatorname{sign}(\zeta-\zeta_0)}{\operatorname{sign}(z-z_0)} = \operatorname{sign} u_0$$

dem Inhalte nach übereinstimmt, sind die beiden Aussagen: 1. die Abbildung von G auf Γ ist *konform*, und 2. die Abbildung von G auf Γ ist *sowohl streckentreu als winkeltreu*, offenbar als gleichbedeutend anzusehen.

Ich werde nunmehr in der vorliegenden Abhandlung den Satz beweisen:

Hauptsatz: *Jede eineindeutige und stetige Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet Γ, die streckentreu ist und den Umlaufssinn ungeändert läßt, ist eine konforme Abbildung. Sie ist also von selbst winkeltreu.*

Dieser Satz läßt sich offenbar (aus Symmetriegründen) auch folgendermaßen aussprechen:

Es sei $f(z)$ eine im Gebiete G stetige Funktion, die das Gebiet G schlicht auf das Gebiet Γ abbildet, und zwar derart, daß die Abbildung streckentreu ist. Dann ist $f(z)$ entweder eine analytische Funktion oder die konjugierte einer analytischen Funktion in G. Der eine oder andere Fall tritt ein, je nachdem der Umlaufssinn bei der eineindeutigen und stetigen Abbildung erhalten bleibt oder nicht.

Ich hebe noch zur Orientierung hervor, daß in diesem Satze die Voraussetzung, daß die im Gebiete G definierte stetige Funktion $\zeta = f(z)$ dieses *schlicht* auf ein Gebiet Γ in der ζ-Ebene abbildet, *wesentlich* ist. Der Satz gilt *nicht* mehr, wenn diese Voraussetzung weggelassen wird. Mit anderen Worten: *Eine in einem Gebiete G stetige Funktion* $f(z)$, *von der nur vorausgesetzt wird, daß sie überall in G einen „absoluten Differentialquotienten" besitzt, d. h. die so beschaffen ist, daß bei jedem festen z_0 in G der Quotient*

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$$

für $z \rightarrow z_0$ einem bestimmten positiven Grenzwerte zustrebt, braucht weder analytisch in G noch konjugiert zu einer analytischen Funktion in G zu sein. Um dies einzusehen, genügt schon ein so einfaches Beispiel, wie es durch die etwa im Einheitskreise G durch die Festsetzungen

$$f(z) = f(x+iy) = \begin{cases} x+iy & \text{für } y \geqq 0, \\ x-iy & \text{für } y \leqq 0 \end{cases}$$

definierte, stetige Funktion $f(z)$ geliefert wird. Denn es hat offenbar diese Funktion in jedem Punkte z in G einen absoluten Differentialquotienten (gleich $+1$), und sie ist dennoch weder analytisch in G noch zu einer analytischen Funktion in G konjugiert. — Durch diese letzte Bemerkung ist eine Frage aus den Grundlagen der Theorie der analytischen Funktionen, welche neben anderen ähnlichen Problemen in einer Abhandlung von Herrn Remak[1]) aufgestellt ist, erledigt.

Bei dem folgenden Beweis des Hauptsatzes wird der von Lebesgue eingeführte Maßbegriff sowie der Lebesguesche Integralbegriff eine sehr wesentliche Rolle spielen[2]). Wir teilen den Beweis in drei Abschnitte ein.

In § 1 werden wir, ausgehend von einem bekannten Satze aus der Theorie der analytischen Funktionen, den Beweis des Hauptsatzes auf den Beweis des folgenden Satzes zurückführen:

Satz A: *Es bilde die stetige Funktion $\zeta = f(z)$ das Gebiet G eineindeutig, streckentreu und unter Beibehaltung des Umlaufssinnes auf das Gebiet Γ ab. Dann gehört zu jedem $\delta > 0$ ein $\varepsilon > 0$, so daß für ein jedes System im Gebiete G gelegener und nicht übereinandergreifender Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, die Summe*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right|$$

[1]) R. Remak, „Über winkeltreue und streckentreue Abbildung an einem Punkte und in der Ebene", Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 38 (1914), S. 193 bis 246.

[2]) Betreffs der im folgenden zu verwendenden Sätze aus der Lebesgueschen Theorie werde ich an den einzelnen Stellen auf das soeben erschienene Buch von C. Carathéodory, „Vorlesungen über reelle Funktionen", Leipzig 1918, verweisen, in welchem ein systematischer Aufbau der Lebesgueschen Theorie gegeben wird.

kleiner als δ ist. Unter $\int\limits_{q_n} f(z)\,dz$ wird das komplexe Integral von $f(z)$ längs des Umfanges des Quadrates q_n verstanden.

Der § 2 enthält eine für den Beweis des Satzes A benötigte mengentheoretische Betrachtung über streckentreue Abbildungen. Von den in § 2 bewiesenen Hilfssätzen sei an dieser Stelle der folgende erwähnt. *Bei einer streckentreuen Abbildung des Gebietes G auf das Gebiet Γ hat jede Menge M in Γ, die einer im Gebiete G gelegenen Menge M vom Maße Null entspricht, selbst das Maß Null.*

Schließlich werden wir in § 3 unter Benutzung der Resultate von § 2 den Beweis des Satzes A und damit denjenigen des Hauptsatzes in wenigen Worten führen können.

§ 1.

Es bedeute überall im folgenden $\zeta = f(z)$ eine Funktion, die das Gebiet G in der z-Ebene *eineindeutig* und *stetig* auf das Gebiet Γ in der ζ-Ebene abbildet, und zwar derart, daß die Abbildung *streckentreu* ist und *den Umlaufssinn nicht ändert.* Es handelt sich darum zu beweisen, daß die Abbildung *konform* ist, d. h. *daß $f(z)$ eine im Gebiete G analytische Funktion ist.*

Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die nach Voraussetzung in G stetige Funktion $f(z)$ daselbst analytisch ist, besteht nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze darin, *daß das komplexe Integral $\int f(z)\,dz$, erstreckt über den Rand eines beliebigen in G gelegenen Quadrates, verschwindet.* Wir werden den Beweis des Hauptsatzes dadurch erbringen, daß wir das Erfülltsein der zuletzt genannten Bedingung nachweisen.

Es sei in der z-Ebene ein beliebiges Quadrat mit der Seitenlänge S (also dem Flächeninhalt S^2) gegeben, dessen Rand ganz im Innern des Gebietes G verläuft, und es bezeichne Q die Menge aller Punkte z, die im Innern oder auf dem Rande des Quadrates liegen. Der Abstand der Menge Q von der Jordanschen Kurve, die G begrenzt, möge $H\,(H > 0)$ heißen. Wir betrachten alsdann für alle z in Q und für $0 < |h| < H$ die positive, stetige Funktion der beiden komplexen Variablen z und h

$$F(z, h) = \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|}.$$

Nach Voraussetzung existiert für jedes feste z in Q der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} F(z, h) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|}.$$

Wir bezeichnen diesen mit $g(z)$. Wäre hierbei noch außerdem vorausgesetzt, daß der Grenzübergang *für alle z in Q gleichmäßig* ist, so wäre der Beweis, daß das Integral $\int f(z)\,dz$, über den Umfang von Q erstreckt, gleich Null ist, unschwer zu führen. Eine solche Voraussetzung findet sich aber im Hauptsatze nicht. Nun hat sich aber bekanntlich, nachdem man dazu übergegangen ist, Punktmengen mittels des von Lebesgue eingeführten verfeinerten Maßbegriffes zu messen, das sehr bemerkenswerte Resultat ergeben, daß *jeder* Grenzübergang, bei welchem ein Parameter auftritt, in bezug auf diesen Parameter „im wesentlichen" gleichmäßig ist[3]). Indem wir speziell die vorhin eingeführte Funktion $F(z, h)$ betrachten, sprechen wir den soeben erwähnten Satz der Lebesgueschen Theorie wie folgt aus.

Hilfssatz 1: *Jedem (beliebig kleinen) $\lambda > 0$ läßt sich in Q eine meßbare Teilmenge T mit einem Maß größer als $S^2 - \lambda$ zuordnen, so daß für alle z in T die Funktion*

$$F(z, h) = \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|}$$

für $h \to 0$ gegen $g(z)$ gleichmäßig strebt. Es gibt also zu jedem $\delta_1 > 0$ ein (von z unabhängiges) $\delta_2 > 0$ derart, daß für alle z in T und für $0 < |h| < \delta_2$ die Ungleichheit

$$\left| \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|} - g(z) \right| < \delta_1$$

besteht.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Hilfssatz auf unser Problem anzuwenden, schicken wir zwei äußerst einfache geometrische Hilfssätze voraus, von denen der erste evident ist, während der Beweis des zweiten so nahe liegt, daß wir diesen dem Leser überlassen können.

Hilfssatz 2: *Es sei q ein Quadrat (mit Einschluß des Randes) in der z-Ebene, das durch Vermittelung einer Funktion $\zeta = F(z)$ eineindeutig und stetig auf ein Gebiet (mit Einschluß des Randes) in der ζ-Ebene abgebildet wird. Es mögen im Quadrate q zwei Punkte z_1 und $z_2 \neq z_1$ existieren, so daß für jedes $z \neq z_1$ in q*

$$\frac{|F(z) - F(z_1)|}{|z - z_1|} = k_1,$$

für jedes $z \neq z_2$ in q

$$\frac{|F(z) - F(z_2)|}{|z - z_2|} = k_2$$

gilt, unter k_1 und k_2 zwei positive Konstanten verstanden. Dann ist $k_1 = k_2$. Die Abbildung von q auf das entsprechende Gebiet in der ζ-Ebene ist entweder eine Ähnlichkeitstransformation oder zu einer Ähnlichkeits-

---

[3]) Vgl. Carathéodory, l. c. [2]) S. 382, Satz 12.

transformation symmetrisch, d. h. die in q definierte Funktion $F(z)$ ist entweder eine lineare Funktion $F(z) = c_1 + c_2 z$, oder es ist $F(z) = c_1 + c_2 \bar{z}$, wo $\bar{z}$ die zu z konjugierte Zahl bezeichnet. Der eine oder der andere Fall tritt ein, je nachdem bei der Abbildung der Umlaufssinn erhalten bleibt oder nicht.

Aus diesem Hilfssatze ergibt sich sehr leicht die Richtigkeit des folgenden ähnlichen Hilfssatzes, in dem wir der Gleichmäßigkeit halber drei Punkte z_1, z_2, z_3 betrachten.

Hilfssatz 3: *Es sei q ein Quadrat (mit Einschluß des Randes) in der z-Ebene von der Seitenlänge s, und es sei q mittels einer Funktion $\zeta = F(z)$ eineindeutig und stetig auf ein Gebiet (mit Einschluß des Randes) in der ζ-Ebene abgebildet, und zwar so, daß bei der Abbildung der Umlaufssinn erhalten bleibt. Es mögen ferner ein Wert $\delta > 0$, drei positive Konstanten k_1, k_2, k_3 und drei feste in q gelegene Punkte z_1, z_2, z_3, welche von drei verschiedenen Eckpunkten Z_1, Z_2, Z_3 von q Abstände*

$$|Z_1 - z_1| < \frac{s}{4}, \quad |Z_2 - z_2| < \frac{s}{4}, \quad |Z_3 - z_3| < \frac{s}{4}$$

haben, existieren, so daß für jedes $i = 1, 2, 3$ die Ungleichung

$$k_i - \delta < \frac{|F(z) - F(z_i)|}{|z - z_i|} < k_i + \delta$$

für alle $z \neq z_i$ im Quadrate q besteht. Dann ist für ein sehr kleines δ die Abbildung „beinahe" eine Ähnlichkeitstransformation, d. h. genau gesprochen: zu jedem $\varepsilon_0 > 0$ gehört ein nur von ε_0 (und nicht etwa von k_1, k_2, k_3 und s) abhängiges $\delta_0 > 0$ derart, daß, wenn in den obigen Voraussetzungen $\delta \leq \delta_0$ ist, die im Quadrate q definierte Abbildungsfunktion $F(z)$ sich auf die Form bringen läßt:

$$F(z) = c_1 + c_2 z + \psi(z),$$

wo c_1 und c_2 Konstanten bezeichnen, während $\psi(z)$ für alle z in q die Ungleichung $|\psi(z)| < \varepsilon_0 s$ befriedigt.

Nach diesen Vorbereitungen läßt sich nunmehr leicht der folgende Satz beweisen:

Hilfssatz 4: *Es sei Q ein beliebiges Quadrat (inkl. Rand), welches im Gebiete G gelegen ist, und es seien $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ beliebig gegeben. Dann läßt sich eine Zerlegung des Quadrates Q in eine endliche Anzahl von kleineren Quadraten $q_1, q_2, \ldots, q_N$ derart vornehmen, daß die folgende Bedingung erfüllt ist: Die Teilquadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$ können in zwei Klassen I und II eingeteilt werden, so daß*

1. *die Summe* $\sum_{(I)} \left| \int f(z)\,dz \right|$ *der absoluten Beträge der Integrale* $\int f(z)\,dz$, *erstreckt längs der Quadrate der ersten Klasse, kleiner als* ε_1 *ist, und daß*

2. *die Summe der Flächeninhalte der zur zweiten Klasse gehörigen Quadrate kleiner als* ε_2 *ist.*

Beweis: Es sei S die Seitenlänge von Q, und es sei $\frac{\varepsilon_1}{4S^2} = \varepsilon_0$ gesetzt. Zu diesem $\varepsilon_0 > 0$ bestimmen wir ein $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon_0) = \delta_0(\varepsilon_1)$ im Sinne des Hilfssatzes 3. Ferner bestimmen wir, was nach dem Hilfssatze 1 $\left(\text{für } \lambda = \frac{\varepsilon_2}{11}\right)$ möglich ist, eine meßbare Teilmenge T von Q mit einem Maß größer als $S^2 - \frac{\varepsilon_2}{11}$ derart, daß für alle z in T die Funktion

$$F(z, h) = \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|}$$

für $h \to 0$ *gleichmäßig* gegen $g(z)$ strebt; dann können wir (wegen der Gleichmäßigkeit des Grenzüberganges) zu der obigen Zahl $\delta_0 > 0$ eine positive Zahl $\alpha = \alpha(\delta_0) = \alpha(\varepsilon_1)$ derart wählen, daß für jedes z in T und $0 < |h| < \alpha$ die Ungleichung

$$g(z) - \delta_0 < \frac{|f(z+h) - f(z)|}{|h|} < g(z) + \delta_0$$

besteht. Wir teilen nunmehr das Quadrat Q in $N = n^2$ kongruente Teilquadrate ein; die ganze Zahl n wird dabei so groß gewählt, daß die Seitenlänge $s = \frac{1}{n} S$ der Teilquadrate kleiner als $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ ausfällt. Wir werden beweisen, daß bei dieser Zerlegung von Q in Teilquadrate die Bedingung des Hilfssatzes erfüllt ist. Dies ergibt sich folgendermaßen. Es sei q (vgl. die Fig.) ein beliebiges der n^2 Teilquadrate, und es sei um jeden der vier Eckpunkte ein Kreisbogen mit dem Radius $\frac{s}{4}$ gezogen, wodurch aus q vier kleine Kreisquadranten (die vier schraffierten Gebiete) herausgeschnitten werden. Wir unterscheiden nun zwei Fälle: 1. Unter den vier kleinen Kreisquadranten gibt es *mindestens drei*, welche im Innern einen Punkt der Menge T enthalten; in diesem Falle wird das Teilquadrat q in die Klasse I geschlagen. 2. Unter den vier kleinen Kreisquadranten gibt es *höchstens zwei*, welche im Innern einen Punkt der Menge T enthalten; in diesem Falle wird das Teilquadrat q zu der Klasse II gerechnet.

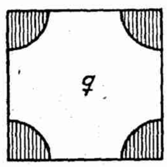

Fig. 1

Es sei zunächst q ein beliebiges Quadrat der *ersten* Klasse. Dann gibt es nach Voraussetzung drei Punkte z_1, z_2, z_3 in q, welche der Menge T

angehören und so beschaffen sind, daß ihre Abstände von drei verschiedenen Eckpunkten Z_1, Z_2, Z_3 von q kleiner als $\frac{s}{4}$ sind. Da der Punkt $z_i\,(i = 1, 2, 3)$ T angehört, und sein Abstand von jedem Punkte $z \neq z_i$ in q kleiner als die Diagonale $s\sqrt{2}$ von q, d. h. kleiner als α ist, so gelten für alle $z \neq z_i$ in q die Ungleichungen

$$k_i - \delta_0 < \frac{|f(z) - f(z_i)|}{|z - z_i|} < k_i + \delta_0,$$

unter k_i die positive Zahl $g(z_i)$ verstanden. Nach dem Hilfssatze 3 ist daher für alle z in dem betrachteten (zur ersten Klasse gehörigen) Quadrate q

$$f(z) = c_1 + c_2 z + \psi(z),$$

wo c_1 und c_2 von z unabhängig sind, während $|\psi(z)| < \varepsilon_0 s$ ist. Durch Integration längs des Umfanges von q erhalten wir somit

$$\int f(z)\,dz = \int (c_1 + c_2 z)\,dz + \int \psi(z)\,dz,$$

also, wegen

$$\int (c_1 + c_2 z)\,dz = 0,$$

$$\int f(z)\,dz = \int \psi(z)\,dz,$$

und hieraus weiter

$$\left|\int f(z)\,dz\right| \leqq \int |\psi(z)|\,|dz| < \varepsilon_0 s \cdot 4s = \frac{\varepsilon_1}{4S^2} \cdot 4s^2 = \frac{\varepsilon_1}{n^2} = \frac{\varepsilon_1}{N}.$$

Da die Anzahl der Quadrate der ersten Klasse höchstens gleich N ist, so haben wir hiermit die eine Hälfte unserer Behauptung, nämlich die Ungleichung

$$\sum_{(I)} \left|\int f(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon_1}{N} \cdot N = \varepsilon_1$$

bereits bewiesen.

Es erübrigt zu beweisen, daß die Summe der Flächeninhalte der Teilquadrate der *zweiten* Klasse kleiner als ε_2 ist. Zu diesem Zwecke bemerken wir zunächst, daß, wenn T' die Komplementärmenge zu T in bezug auf die Menge Q (d. h. die Menge, die aus allen Punkten in Q besteht, die nicht zu T gehören) bezeichnet, T' meßbar und von einem Maß kleiner als $\frac{\varepsilon_2}{11}$ ist. Nach Voraussetzung enthält jedes Teilquadrat q der zweiten Klasse mindestens zwei kleine Kreisquadranten vom Flächeninhalt $\frac{\pi}{4}\left(\frac{s}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{64}s^2$, deren innere Punkte *sämtlich* der Menge T' angehören. Die Anzahl der Teilquadrate der zweiten Klasse ist folglich kleiner als

$$\frac{\varepsilon_2}{11} : \left(2 \cdot \frac{\pi}{64} \cdot s^2\right) = \frac{\varepsilon_2}{s^2} \cdot \frac{32}{11\pi} < \frac{\varepsilon_2}{s^2},$$

d. h. die Summe der Flächeninhalte aller zu der zweiten Klasse gehörigen Teilquadrate ist kleiner als ε_2. Hiermit ist der Hilfsatz 4 bewiesen.

Es sei Q ein im Gebiete G gelegenes Quadrat, das bei vorgegebenen $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ in Teilquadrate q im Sinne des Hilfssatzes 4 zerlegt ist. Da das Integral $\int\limits_Q f(z)\,dz$ längs des Umfanges von Q gleich der Summe der Integrale erstreckt über den Umfang aller Teilquadrate $\sum \int\limits_q f(z)\,dz$ ist, so gilt

$$\left|\int\limits_Q f(z)\,dz\right| \leqq \sum \left|\int\limits_q f(z)\,dz\right| = \sum_{(I)} \left|\int f(z)\,dz\right| + \sum_{(II)} \left|\int f(z)\,dz\right|,$$

wo in $\sum\limits_{(I)}$ bzw. $\sum\limits_{(II)}$ die Summation über die Teilquadrate der ersten bzw. der zweiten Klasse zu erstrecken ist. Es ist also

$$\left|\int\limits_Q f(z)\,dz\right| < \varepsilon_1 + \sum_{(II)} \left|\int f(z)\,dz\right|.$$

Aus dieser Ungleichung folgt sofort, daß der Beweis des Hauptsatzes, d. h. der Beweis der Gleichung $\int\limits_Q f(z)\,dz = 0$, geführt ist, wenn es gelingt zu zeigen, daß bei hinreichend kleinem ε_2 die Summe $\sum\limits_{(II)} \left|\int f(z)\,dz\right|$ beliebig klein wird. Der Beweis des Hauptsatzes ist also auf den Beweis des folgenden Satzes zurückgeführt.

Satz A: *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für eine beliebige endliche Anzahl in G gelegener und nicht übereinander greifender Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, die Summe $\sum \left|\int\limits_q f(z)\,dz\right|$, erstreckt über die N Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, kleiner als δ ist.*

Bevor wir dazu übergehen, diesen Satz A (und damit den Hauptsatz) zu beweisen, werden wir in § 2 die gegebene streckentreue Abbildung von G auf Γ etwas näher studieren.

§ 2.

Wir beweisen zunächst den folgenden wichtigen Hilfssatz:

Hilfssatz 5: *Es sei M eine beliebige im Gebiete G gelegene Punktmenge vom Maße Null. Dann hat die M bei der gegebenen streckentreuen Abbildung im Gebiete Γ entsprechende Punktmenge M ebenfalls das Maß Null.*

Beweis: Es habe $g(z)$ die frühere Bedeutung, d. h. es bezeichne (wie überall im folgenden) $g(z)$ für jedes z in G den, nach Voraussetzung vorhandenen, Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z+h)-f(z)|}{|h|}.$$

Es bezeichne ferner $M(K)$ für alle festen $K > 0$ die Menge der Punkte z in M, für die $g(z) < K$ ist. Es sei $\mathsf{M}(K)$ die $M(K)$ entsprechende Teilmenge von M. Da die Vereinigungsmenge einer abzählbaren Anzahl von Mengen (mit oder ohne gemeinsame Punkte), deren jede vom Maße Null ist, bekanntlich selbst vom Maße Null ist, so genügt es offenbar den Satz für $M(K)$ (bei beliebigem festem $K > 0$) statt für die gegebene Menge M selbst zu beweisen, d. h. es genügt zu beweisen, daß $\mathsf{M}(K)$ vom Maße Null ist; denn es ist ja M die Vereinigungsmenge der abzählbar unendlich vielen Mengen $\mathsf{M}(1)$, $\mathsf{M}(2)$, $\mathsf{M}(3)$, ... Für jeden Punkt z_0 der Menge $M(K)$ ist die Zahl $g(z_0) < K$. Es läßt sich daher um jeden Punkt z_0 in $M(K)$ eine kleine Kreisfläche $|z - z_0| < r\,(= r(z_0))$ im Gebiete G beschreiben, so daß für alle $z \neq z_0$ in dieser Kreisfläche die Ungleichung

$$|\zeta - \zeta_0| = |f(z) - f(z_0)| < K\,|z - z_0|$$

gilt. Man überzeugt sich leicht durch nochmaligen Gebrauch des Satzes, daß die Vereinigungsmenge von abzählbar unendlich vielen Mengen, deren jede vom Maße Null ist, selbst vom Maße Null ist wie vorhin, daß es beim Beweise unseres Satzes genügt, statt $M(K)$ eine Teilmenge L von $M(K)$ zu betrachten, deren Punkten z_0 eine *feste* (d. h. von z_0 unabhängige) positive Zahl R als Radius der vorerwähnten kleinen Kreisfläche um z_0 zugeordnet werden kann. Wir betrachten also (statt der ursprünglichen Menge M) eine in G gelegene Menge L *vom Maße Null* mit folgender Eigenschaft: *Es existieren zwei positive Zahlen K und R derart, daß für jedes z_0 in L die Ungleichung*

$$|f(z) - f(z_0)| < K\,|z - z_0|$$

für alle $z \neq z_0$ im Kreise $|z - z_0| < R$ besteht; zu beweisen ist, *daß die im Gebiete Γ gelegene Menge Λ, die L entspricht, ebenfalls vom Maße Null ist.* Der Beweis hierfür ist erbracht, wenn es gelingt zu zeigen, daß zu jedem $\varepsilon > 0$ eine meßbare Punktmenge ϱ vom Maße kleiner als ε existiert, welche Λ als Teilmenge enthält. Zu diesem Zwecke bestimmen wir zunächst zu der gegebenen Menge L vom Maße Null eine abzählbare Folge im Gebiete G gelegener Quadraten $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, deren Seitenlängen $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ sämtlich kleiner als $\frac{R}{\sqrt{2}}$ sind, und die folgende Eigenschaften haben: 1. Jeder Punkt von L ist ein innerer Punkt eines dieser Quadrate. Jedes Quadrat enthält mindestens einen Punkt von L. 2. Die Summe Σs_n^2 der Flächeninhalte der Quadrate ist kleiner als $\frac{\varepsilon}{2\pi K^2}$. Wir bezeichnen diejenige Punktmenge im Gebiete Γ, welche bei der Abbildung dem Innern des Quadrates q_n entspricht, mit ϱ_n; die Menge ϱ_n ist meßbar, weil sie aus lauter inneren Punkten besteht. Es sei nunmehr z_0, ein Punkt von L im Innern des Quadrates q_n und ζ_0 der entsprechende Punkt von Λ im Gebiete ϱ_n. Dann ist das Quadrat q_n ganz im Kreise $|z - z_0| < \sqrt{2}\, s_n < R$ gelegen, woraus folgt, daß die entsprechende Punktmenge ϱ_n ganz im Kreise $|\zeta - \zeta_0| < K\sqrt{2}\, s_n$ liegt. Ist μ_n das Maß der Menge ϱ_n, so ist also $\mu_n \leqq \pi\,(K\sqrt{2}\, s_n)^2 = 2\pi K^2 s_n^2$. Wir bilden schließlich die Vereinigungsmenge ϱ der abzählbar vielen Mengen $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$. Die Menge ϱ enthält offenbar die Menge Λ als Teilmenge. Da ϱ_n meßbar ist und ihr Maß $\mu_n \leqq 2\pi K^2 s_n^2$ ist, so ist die Vereinigungsmenge ϱ ebenfalls meßbar und ihr Maß

$$\mu \leqq \sum 2\pi K^2 s_n^2 = 2\pi K^2 \sum s_n^2 < 2\pi K^2 \frac{\varepsilon}{2\pi K^2} = \varepsilon.$$

Hiermit ist der Beweis, daß Λ vom Maße Null ist, und damit der Beweis des Hilfssatzes vollendet.

Aus dem Hilfssatze 5 schließen wir zunächst, *daß, wenn M eine beliebige meßbare Menge im Gebiete G ist, die entsprechende Menge* M *im Gebiete* Γ *ebenfalls meßbar ist*[4]). Dies ergibt sich folgendermaßen: Weil M meßbar ist, können wir eine Folge von Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ in G, deren jede aus lauter inneren Punkten besteht und M als Teilmenge enthält, derart wählen, daß für $n \to \infty$ das Maß von M_n gegen das Maß von M konvergiert. Es sei M' der Durchschnitt der Mengen $M_1, M_2, \ldots$, d. h. es bestehe M' aus denjenigen Punkten, welche sämtlichen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ angehören; dann ist M' meßbar, und es ist das Maß von M' mindestens gleich dem Maß von M (weil M Teilmenge von M' ist) und zugleich höchstens gleich dem Maß von M_n (weil M' Teilmenge in M_n ist). Es ist also (weil das Maß von M_n für $n \to \infty$ gegen das Maß von M konvergiert) das Maß von M' gleich dem Maße von M. Hieraus folgt, daß die Differenzmenge $M_0 = M' - M$ vom Maße Null ist. Wir betrachten nunmehr die im Gebiete Γ gelegenen Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots, \mathsf{M}_n, \ldots$, welche den Mengen $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ in G entsprechen; alle diese Mengen sind meßbar, weil sie aus lauter inneren Punkten bestehen. Folglich ist die Menge M', welche M' entspricht, gleichfalls meßbar, weil sie der Durchschnitt der meßbaren Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ ist. Ferner ist die Menge M_0, welche M_0 entspricht, meßbar, nämlich (nach dem Hilfssatze 5) vom Maße Null. Nachdem hiermit die Meßbarkeit von M' und M_0 bewiesen ist, folgt sofort aus der Gleichung $\mathsf{M} = \mathsf{M}' - \mathsf{M}_0$, daß M ebenfalls meßbar ist, womit die obige Behauptung bewiesen ist.

---

[4]) Vergleiche Carathéodory, l. c.[2]) S. 355, Satz 2.

Hilfssatz 6: *Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß, wenn M eine im Gebiet G gelegene meßbare Menge vom Maße kleiner als δ ist, die entsprechende (nach dem vorhergehenden ebenfalls meßbare) Menge M im Gebiete Γ vom Maße kleiner als ε ist.*

Beweis: Wir führen den Beweis indirekt, d. h. wir nehmen an, daß der Satz unrichtig sei, daß es also ein $\varepsilon_0 > 0$ gibt, so daß jedem $\delta > 0$ eine in G gelegene Menge M vom Maße kleiner als δ zugeordnet werden kann, deren entsprechende Menge M in Γ vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ ist. Wir werden zeigen, daß diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Zu diesem Zwecke bestimmen wir (unter Benutzung der zu widerlegenden Annahme) eine Folge von meßbaren, im Gebiete G gelegenen Mengen $M_1, M_2, \ldots$ derart, daß bei jedem $n \geqq 1$ das Maß von M_n kleiner als $\frac{1}{n^2}$ ist, während die entsprechenden, in Γ gelegenen, meßbaren Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ sämtlich vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ sind. Es sei M' der „Limes superior" der Folge $M_1, M_2, \ldots$, d. h. diejenige Menge, deren Punkte unendlich vielen der Mengen $M_1, M_2, \ldots$ angehören, und es sei M' der Limes superior der Folge $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$. Dann sind sowohl M' als M' meßbare Mengen, und es ist offenbar M' diejenige Menge in Γ, welche der Menge M' in G entspricht. Da jede der Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ vom Maße $\geqq \varepsilon_0$ ist, und außerdem die sämtlichen Mengen $\mathsf{M}_1, \mathsf{M}_2, \ldots$ in einem beschränkten Teil der Ebene (nämlich im Gebiete Γ) liegen, so ist bekanntlich auch der Limes superior M' vom Maße $\geqq \varepsilon_0$[5]. Dagegen ist M' vom Maße Null; denn die Menge M' ist für alle $n \geqq 1$ eine Teilmenge der Vereinigungsmenge $M^{(n)}$ der abzählbar vielen Mengen $M_{n+1}, M_{n+2}, \ldots$, welche Vereinigungsmenge $M^{(n)}$ meßbar ist mit einem Maß kleiner als $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots < \frac{1}{n}$, so daß auch das Maß von M' für alle n kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Die beiden soeben erhaltenen Resultate: 1. M' ist vom Maße Null, 2. die entsprechende Menge M' ist von einem Maße größer als Null, widersprechen aber nach dem Hilfssatze 5 einander, womit der Hilfssatz 6 bewiesen ist.

Es sei M eine beliebige meßbare Menge im Gebiete G und M die entsprechende meßbare Menge im Gebiete Γ. Ihr Maß bezeichnen wir mit μ. Diese Zahl μ können wir alsdann als *eine Funktion der Menge M* auffassen; diese „Mengenfunktion", welche für alle meßbaren Mengen M im Gebiete G definiert ist, und die wir mit $\mu = \omega(M)$ bezeichnen werden, besitzt offenbar die beiden folgenden Eigenschaften:

I. Sie ist *additiv*, d. h., wenn M_1 und M_2 zwei in G gelegene meß-

---

[5]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 255, Satz 11.

bare Mengen *ohne gemeinsame Punkte* sind, und M die Vereinigungsmenge von M_1 und M_2 bedeutet, so gilt die Gleichung

$$\omega(M) = \omega(M_1) + \omega(M_2).$$

II. Sie ist *totalstetig*, d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gehört ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ derart, daß für jede im Gebiete G gelegene meßbare Menge M, deren Maß kleiner als δ ist, die Ungleichung $\omega(M) < \varepsilon$ besteht. (Dies ist eine andere Form des Hilfssatzes 6.)

Eine derartige additive und totalstetige Mengenfunktion $\omega(M)$ besitzt aber nach einem bekannten Satz der Lebesgueschen Theorie die beiden wichtigen Eigenschaften[6]):

I. Sie besitzt „fast überall" in G, d. h. in jedem Punkte z_0 von G, höchstens mit Ausnahme der Punkte einer Menge vom Maße Null, einen endlichen „Differentialquotienten" $D(z_0)$. Dies besagt, daß, wenn $M = M(z_0, r)$ das Innere eines kleinen in G gelegenen Kreises um z_0 mit dem Radius r bedeutet, der positive Bruch

$$\frac{\omega(M)}{\pi r^2}$$

sich für $r \to 0$ einem bestimmten endlichen Grenzwert $D(z_0)$ nähert. — Für unsere spezielle Mengenfunktion $\omega(M)$ läßt sich übrigens unmittelbar direkt beweisen, daß sie sogar in *jedem* Punkte z_0 des Gebietes G (und nicht nur mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null) einen Differentialquotienten $D(z_0)$ besitzt, nämlich den Differentialquotienten $D(z_0) = \big(g(z_0)\big)^2$, wo $g(z_0)$ wie immer den Grenzwert

$$g(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0)|}{|h|}$$

bedeutet. Es sei z_0 irgendein fester Punkt im Gebiete G, und es sei $\varepsilon > 0$ ein beliebig kleiner Wert. Für hinreichend kleine r wird jeder Punkt z auf der Kreisperipherie $|z - z_0| = r$ in einen Punkt ζ des Gebietes Γ abgebildet, welcher im Kreisringe

$$(1 - \varepsilon) r g(z_0) < |\zeta - \zeta_0| < (1 + \varepsilon) r g(z_0)$$

gelegen ist. Die Jordansche Kurve in Γ, welche dem Kreise $|z - z_0| = r$ in G entspricht, verläuft also ganz in diesem Kreisringe. Hieraus folgt aber sofort, daß die meßbare Punktmenge M, welche der Kreisfläche $|z - z_0| < r$ entspricht, also die Menge M, die aus den sämtlichen Punkten im Innern der erwähnten Jordanschen Kurve besteht, ein Maß $\omega(M)$ besitzt, das die Ungleichungen

$$\pi\big\{(1 - \varepsilon) r g(z_0)\big\}^2 \leqq \omega(M) \leqq \pi\big\{(1 + \varepsilon) r g(z_0)\big\}^2$$

[6]) Carathéodory, l. c. [2]) S. 496, Satz 1, 2.

befriedigt; es gelten also für alle hinreichend kleinen positiven r die Ungleichungen

$$(1-\varepsilon)^2\left(g(z_0)\right)^2 \leqq \frac{\omega(M)}{\pi r^2} \leqq (1+\varepsilon)^2\left(g(z_0)\right)^2,$$

und es existiert somit der Grenzwert

$$\lim_{r\to 0}\frac{\omega(M)}{\pi r^2}$$

und ist gleich $\left(g(z_0)\right)^2$.

II. Der Differentialquotient $D(z) = D(x+iy)$ ist eine (im Lebesgueschen Sinne) im zweidimensionalen Gebiete G summierbare Punktfunktion, und es gilt für jede meßbare Menge M in G die Relation

$$\omega(M) = \iint_M D(z)\,d\sigma.$$

Mit anderen Worten, *eine additive totalstetige Mengenfunktion $\omega(M)$ ist gleich dem „Flächenintegral" ihres Differentialquotienten, erstreckt über die Menge M.*

Für unsere Mengenfunktion $\omega(M)$, wo der Differentialquotient $D(z)$ sogar überall in G (und nicht nur mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null) existiert und gleich $\left(g(z)\right)^2$ ist, erhalten wir also die Gleichung

$$\omega(M) = \iint_M \left(g(z)\right)^2 d\sigma,$$

d. h. es gilt der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz 7: *Es sei M eine beliebige meßbare Menge in G und M die entsprechende (ebenfalls meßbare) Menge in Γ. Dann ist das Maß μ von M durch das Flächenintegral*

$$\mu = \iint_M \left(g(z)\right)^2 d\sigma$$

gegeben.

Wir beweisen schließlich den folgenden Satz, welcher das Ziel dieses Paragraphen bildet.

Hilfssatz 8: *Es sei q ein Quadrat, das (mit Einschluß des Randes) ganz in G liegt, und es bezeichne m den Flächeninhalt dieses Quadrates, während μ das Maß derjenigen Punktmenge im Gebiete Γ bezeichnet, welche dem Innern des Quadrates q entspricht. Dann ist der absolute Wert des komplexen Integrals $\int f(z)\,dz$ längs des Umfanges von q höchstens gleich $m+\mu$.*

Beweis: Wir dürfen offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit beim Beweise annehmen, daß die Seiten von q der reellen bzw. der imaginären Achse parallel sind, also daß die Punkte $z = x+iy$ des Quadrates q durch Ungleichungen der Form $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ charakterisiert sind, wobei $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$ ist. Dann lautet die zu beweisende Ungleichung

$$\left|\int_{x_1}^{x_2}\{f(x+iy_1)-f(x+iy_2)\}dx + i\int_{y_1}^{y_2}\{f(x_2+iy)-f(x_1+iy)\}dy\right|$$
$$\leqq m+\mu.$$

Aus Symmetriegründen genügt es offenbar nachzuweisen, daß

$$\left|\int_{y_1}^{y_2}\{f(x_2+iy)-f(x_1+iy)\}dy\right| \leqq \frac{m+\mu}{2}$$

ist. Wir werden sogar beweisen, daß

$$\int_{y_1}^{y_2}|f(x_2+iy)-f(x_1+iy)|\,dy \leqq \frac{m+\mu}{2}$$

ist. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Differenz $f(x_2+iy)-f(x_1+iy)$, wo $y_1 \leqq y \leqq y_2$ ist, und werden zunächst beweisen, *daß, wenn für ein* $y = y'$ *im Intervalle* $y_1 \leqq y \leqq y_2$ *die Funktion* $g(x+iy')$ *eine für* $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *(im Lebesgueschen Sinne) summierbare Funktion von* x *ist, die Ungleichung*

$$|f(x_2+iy')-f(x_1+iy')| \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy')\,dx$$

gilt; mit anderen Worten, diese Ungleichung gilt für jedes $y = y'$ im Intervalle $y_1 \leqq y \leqq y_2$, für welches die rechte Seite einen Sinn hat. Wir betrachten hierzu (unter der Annahme, daß $g(x+iy')$ für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ summierbar ist) die Funktion

$$h(x) = |f(x+iy')-f(x_1+iy')| \qquad (x_1 \leqq x \leqq x_2),$$

und bilden für einen kleinen (positiven oder negativen) Zuwachs $\varDelta x$ die Differenz $h(x+\varDelta x)-h(x)$. Es ist hierbei (weil $||b-a|-|c-a|| \leqq |b-c|$ ist)

$$|h(x+\varDelta x)-h(x)| \leqq |f(x+\varDelta x+iy')-f(x+iy')|,$$

also

$$\left|\frac{h(x+\varDelta x)-h(x)}{\varDelta x}\right| \leqq \frac{|f(x+\varDelta x+iy')-f(x+iy')|}{|\varDelta x|}.$$

Diese Ungleichung lehrt sofort, daß in einem beliebigen Punkt x des Intervalles $x_1 \leqq x \leqq x_2$ jede der vier Hauptderivierten der Funktion $h(x)$ (d. h. der obere und untere Differentialquotient von rechts und links) absolut genommen $\leqq g(x+iy')$ ist; denn es strebt ja für $|\varDelta x| \to 0$ die rechte Seite der letzten Ungleichung gegen $g(x+iy')$. Es werde eine (beliebig ausgewählte) der vier Hauptderivierten von $h(x)$, etwa der obere rechte Differentialquotient, mit $h'(x)$ bezeichnet. Dieser Differentialquotient $h'(x)$ ist in jedem Punkte x des Intervalles $x_1 \leqq x \leqq x_2$ *endlich*, nämlich absolut genommen $\leqq g(x + iy')$, also (wie jede endliche Hauptderivierte) eine *meßbare* Funktion von x im Intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$, und weil er dem absoluten Werte nach nicht größer ist als die positive *nach Voraussetzung* für $x_1 \leqq x \leqq x_2$ summierbare Funktion $g(x + iy')$, ist er selbst *summierbar*. Hieraus folgt aber nach einem bekannten Satze der Lebesgueschen Theorie[7]), daß

$$h(x_2) = h(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} h'(x)\,dx,$$

also, weil $h(x_1) = 0$ ist, daß

$$h(x_2) = |f(x_2 + iy') - f(x_1 + iy')| = \int_{x_1}^{x_2} h'(x)\,dx$$

ist. Aus dieser Darstellung von $|f(x_2 + iy') - f(x_1 + iy')|$ durch ein Lebesguesches Integral folgt nunmehr sofort die Richtigkeit der obigen Ungleichung

$$|f(x_2 + iy') - f(x_1 + iy')| \leqq \int_{x_1}^{x_2} g(x + iy')\,dx;$$

denn es gilt ja im ganzen Intervalle $x_1 \leqq x \leqq x_2$ die Ungleichung $h'(x) \leqq g(x + iy')$. Wir wenden uns nunmehr zum Beweise des Hilfssatzes 8, d. h. zum Beweise der Ungleichung

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x_2 + iy) - f(x_1 + iy)|\,dy \leqq \frac{m + \mu}{2}.$$

Es ist

$$m = \iint_q d\sigma, \qquad \mu = \iint_q \big(g(x + iy)\big)^2 d\sigma;$$

die erste Gleichung ist trivial, die zweite ist im Hilfssatze 7 bewiesen. Hieraus folgt

$$\frac{m + \mu}{2} = \iint_q \tfrac{1}{2}\left\{\big(g(x + iy)\big)^2 + 1\right\} d\sigma,$$

also a fortiori, weil

$$0 < g(x + iy) \leqq \tfrac{1}{2}\left\{\big(g(x + iy)\big)^2 + 1\right\}$$

ist und $g(x + iy)$, als Wurzel der im Gebiete G meßbaren Funktion $\big(g(x + iy)\big)^2$, selbst in G *meßbar* ist,

$$\iint_q g(x + iy)\,d\sigma \leqq \frac{m + \mu}{2}.$$

Nun gilt aber, weil $g(x + iy)$ eine im Quadrate $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$ summierbare Funktion des reellen Wertepaares (x, y) ist, nach einem

---

[7]) Carathéodory, l. c.[2]) S. 597, Satz 4.

fundamentalen Satz über die Reduktion eines Flächenintegrals auf ein Doppelintegral[4]) die Gleichung

$$\iint_q g(x+iy)\,d\sigma = \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx.$$

Diese Gleichung ist folgendermaßen zu verstehen. Es existiert für jedes y im Intervalle $y_1 \leq y \leq y_2$, höchstens mit Ausnahme einer Punktmenge vom Maße Null, das Integral $\int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx$, und es ist die durch dieses Integral gegebene Funktion $J(y)$ (die also für $y_1 \leq y \leq y_2$, höchstens mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, definiert ist) eine summierbare Funktion von y, deren Integral $\int_{y_1}^{y_2} J(y)\,dy$ gleich dem Flächenintegral $\iint_q g(x+iy)\,d\sigma$ ist. Hieraus folgt nun die zu beweisende Ungleichung; denn aus der für jedes y im Intervalle $y_1 \leq y \leq y_2$, für welches das Integral $\int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx$ existiert, giltigen Ungleichung

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} g(x+iy)\,dx \geqq |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|$$

ergibt sich sofort durch Integration nach y

$$\frac{m+\mu}{2} \geqq \iint_q g(x+iy)\,d\sigma = \int_{y_1}^{y_2} J(y)\,dy \geqq \int_{y_1}^{y_2} |f(x_2+iy) - f(x_1+iy)|\,dy.$$

Hiermit ist der Hilfssatz 8 bewiesen.

§ 3.

In § 1 haben wir den Beweis des Hauptsatzes auf den folgenden Satz zurückgeführt.

Satz A: *Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für eine beliebige endliche Anzahl in G gelegener und nicht übereinander greifender Quadrate $q_1, q_2, \ldots, q_N$, deren Gesamtflächeninhalt kleiner als ε ist, die Ungleichung*

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| < \delta$$

besteht.

Mit Hilfe der Resultate des § 2 gelingt es nun unmittelbar den Satz A zu beweisen. Zu der gegebenen Zahl $\delta > 0$ bestimmen wir, was nach dem Hilfssatze 6 möglich ist, eine positive Zahl $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ derart, daß

[4]) Carathéodory, l. c.[2]) S. 632, Satz 4.

für jede in G gelegene meßbare Menge M vom Maße kleiner als ε die entsprechende Menge M im Gebiete Γ vom Maße $\omega(M) < \frac{\delta}{2}$ ist. Für dieses ε ist alsdann die Bedingung des Satzes A erfüllt. In der Tat ist nach dem Hilfssatze 8

$$\left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| \leqq m_n + \mu_n,$$

wo m_n den Flächeninhalt von q_n bezeichnet, während μ_n das Maß derjenigen Punktmenge im Gebiete Γ angibt, welche dem Innern des Quadrates q_n entspricht, und hieraus folgt durch Summation

$$\sum_{n=1}^{N} \left| \int_{q_n} f(z)\,dz \right| \leqq \sum_{n=1}^{N} (m_n + \mu_n) = \sum_{n=1}^{N} m_n + \sum_{n=1}^{N} \mu_n < \varepsilon + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Hiermit ist der Satz A und damit der Hauptsatz bewiesen.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiten Grades.

Von

Rudolf Sturm in Breslau.

1. Für eine Fläche zweiten Grades:

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) = 0,$$

worin

$$\varphi(x, y, z) = a_{00}x^2 + a_{11}y^2 + a_{22}z^2 + 2a_{12}yz + 2a_{20}zx + 2a_{01}xy,$$
$$\psi(x, y, z) = 2a_{03}x + 2a_{13}y + 2a_{23}z + a_{33}$$

ist und rechtwinklige Koordinaten zugrunde liegen, ist bekanntlich:

$$\Lambda(\varrho) = \begin{vmatrix} a_{00} - \varrho, & a_{01}, & a_{02} \\ a_{10}, & a_{11} - \varrho, & a_{12} \\ a_{20}, & a_{21}, & a_{22} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

die für die Transformation auf die Achsen (bzw. in den Spezialfällen auf eine andere kanonische Form) wichtige kubische Gleichung mit drei stets reellen Wurzeln α_0, α_1, α_2, welche bei den Mittelpunktsflächen den reziproken Halbachsenquadraten proportional sind.

Besitzt sie eine *Doppelwurzel*, $\alpha_0 = \alpha_1$, so handelt es sich, wofern die Flächengleichung reell vorausgesetzt wird, im allgemeinen um *eine Rotationsfläche* oder, falls diese Wurzel 0 ist, um *einen parabolischen Zylinder*. Diese letztere Möglichkeit einer *Nicht-Rotationsfläche* wird von Hesse[1]) nicht erwähnt; auch Gundelfinger, der Herausgeber der dritten Auflage, tut es nicht. Für eine Doppelwurzel ist — bei reellen Koeffizienten a_{00}, ... — notwendig, daß die *zweifache* Bedingung

$$\frac{b_{12}}{a_{12}} = \frac{b_{20}}{a_{20}} = \frac{b_{01}}{a_{01}} \tag{1}$$

erfüllt wird; b_{12}, b_{20}, b_{01} sind die Adjunkten der a_{12}, a_{20}, a_{01} in der

[1]) Analytische Geometrie des Raumes, 3. Aufl., 19. Vorlesung.

Diskriminante $\Lambda(0)$ von φ; aber dafür ist vorausgesetzt, daß *keiner von diesen drei Koeffizienten gleich null ist*, was auch von Hesse und Gundelfinger nicht erwähnt wird. Ist einer null, so gelten zwei andere Bedingungen: die eine ist, daß noch ein zweiter null ist; und ist etwa $a_{12} = a_{20} = 0$, so ist die andere Bedingung: $(a_{00} - a_{22})(a_{11} - a_{22}) = a_{01}^2$. Damit hat man z. B. zu tun bei der Aufsuchung von Tangentialkegeln einer Fläche zweiten Grades, welche Rotationskegel sind.

2. Im Grunde ist das Vorhandensein einer Doppelwurzel eine einfache Bedingung: Verschwinden der Diskriminante der kubischen Gleichung $\Lambda(\varrho) = 0$; sie wird zweifach, weil Realität der Flächengleichung verlangt wird. Kummer zerlegt bekanntlich dazu diese Diskriminante in Quadrate, die einzeln null werden müssen, und Hesse gibt diese Untersuchung wieder[2]). Aber Kummer erhält statt zweier Quadrate, wie es erwünscht wäre, *sieben* Quadrate:

$$15\{a_{300}^2 + a_{030}^2 + a_{003}^2\} + a_{111}^2 + (a_{120} - a_{102})^2 + (a_{012} - a_{210})^2 + (a_{201} - a_{021})^2;$$

die sieben Gleichungen folgen aus der obigen Doppelgleichung (1) und sind also mit zwei Gleichungen äquivalent.

Für $a_{300} = 0$, $a_{030} = 0$, $a_{003} = 0$ ist das unmittelbar ersichtlich, denn $a_{300} = a_{20} b_{10} - a_{10} b_{20} = 0, \ldots$; das sind die drei in (1) enthaltenen Gleichungen. Für die vier übrigen erwähnt Hesse die Möglichkeit ihrer Ableitung aus (1), ohne sie jedoch auszuführen. Ich halte die Ausführung derselben nicht für überflüssig.

Es sei γ der gemeinsame Wert der drei gleichen Brüche in (1), so daß

$$\frac{a_{01} a_{20}}{a_{12}} - a_{00} = \frac{a_{12} a_{01}}{a_{20}} - a_{11} = \frac{a_{20} a_{12}}{a_{01}} - a_{22} = \gamma.$$

Dann ist

$$a_{00} - a_{11} = \frac{a_{01}(a_{20}^2 - a_{12}^2)}{a_{20} a_{12}},$$

$$a_{20}^2 - a_{12}^2 = \frac{a_{20} a_{12}}{a_{01}} (a_{00} - a_{11}) = (\gamma + a_{22})(a_{00} - a_{11});$$

$$\begin{aligned} b_{00} - b_{11} &= a_{11} a_{22} - a_{12}^2 - a_{00} a_{22} + a_{20}^2 \\ &= -a_{22}(a_{00} - a_{11}) + a_{20}^2 - a_{12}^2 = (a_{00} - a_{11})\gamma, \end{aligned}$$

$$b_{11} - b_{22} = (a_{11} - a_{22})\gamma, \quad b_{22} - b_{00} = (a_{22} - a_{00})\gamma.$$

Nun ist die Kummersche Größe

$$\begin{aligned} a_{120} - a_{102} &= a_{12}(b_{11} - b_{00}) + b_{12}(a_{00} - a_{11}) \\ &+ b_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12}(b_{22} - b_{00}) = a_{12}\gamma(a_{11} - a_{00}) + \gamma a_{12}(a_{00} - a_{11}) \\ &+ \gamma a_{12}(a_{00} - a_{22}) + a_{12} \cdot \gamma (a_{22} - a_{00}) = 0. \end{aligned}$$

[2]) Kummer, Journal für Mathematik, Bd. 26 (1843), S. 268; Hesse, a. a. O., 27. Vorlesung.

Ebenso ist

$$a_{012} - a_{210} = 0, \ldots;$$

$$a_{111} = a_{00}(b_{22} - b_{11}) + a_{11}(b_{00} - b_{22}) + a_{22}(b_{11} - b_{00}) =$$
$$= \gamma \{a_{00}(a_{22} - a_{11}) + a_{11}(a_{00} - a_{22}) + a_{22}(a_{11} - a_{00})\} = 0$$ [3].

Die beiden Bedingungen des obigen Spezialfalls bewirken dasselbe.

3. Die transformierte Gleichung der Fläche ist:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 + \psi_1(x, y, z) = 0;$$

der Kegel, der ihre unendlich ferne Kurve aus dem Anfangspunkte projiziert:

$$a_0(x^2 + y^2) + a_2 z^2 = 0$$

oder

$$a_0(x^2 + y^2 + z^2) + (a_2 - a_0) z^2 = 0;$$

er berührt also den konzentrischen isotropen Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ nach der absoluten Kurve (dem unendlich fernen Kugelkreis) doppelt: längs der Kanten in $z = 0$; folglich berühren sich auch die beiden unendlich fernen Kurven doppelt: in ihren in $z = 0$ gelegenen Punkten.

Der unendlich ferne Schnitt eines parabolischen Zylinders, bei dem $\gamma = 0$ ist, besteht aus zwei unendlich nahen Kanten, und die zweimal zwei unendlich nahen gemeinsamen Punkte kommen nicht durch eigentliche Berührung zustande.

4. Was bedeutet aber, wenn die Realität der Flächengleichung nicht verlangt wird, das Vorhandensein einer Doppelwurzel oder das Verschwinden der Diskriminante von $\Lambda(\varrho) = 0$ als *einfache Bedingung?*

Diese kubische Gleichung ergibt sich auch folgendermaßen mit anderer Bedeutung der Wurzeln. Auf unendlich ferne Punkte $(x, y, z, 0)$ beschränkt, sind $\varphi(x, y, z) = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ die Gleichungen der unendlich fernen Kurve der Fläche und der absoluten Kurve; folglich liefert $\Lambda(\varrho) = 0$ die Parameter der drei Geradenpaare ihres Büschels. Ihre Doppelpunkte bilden das gemeinsame Polardreieck desselben. Es ist vollständig reell, wenn es sich um reelle Gleichungen handelt, weil mindestens die eine eine reell-imaginäre Kurve darstellt, also die vier Schnitte imaginär sind [4]. Bei einer Fläche mit (endlichem) Mittelpunkte sind die Durchmesser nach ihnen zugleich konjugiert und rechtwinklig, also die Achsen der Fläche. Bei einer Rotationsfläche haben die Kurven ∞^1 gemeinsame Polardreiecke, eine Ecke fest im Berührungspol der doppelten Berührung,

---

[3]) Anschließend sei eine Vereinfachung zu Hesses Buch erwähnt. Die Formeln 28) auf S. 306 sind zu umständlich abgeleitet; sie ergeben sich durch einfache Subtraktion der linken Formeln 7) von 23).

[4]) Steiner-Schröter, *Vorlesungen*, 3. Aufl., Nr. 272; Sturm, Geometrische Verwandtschaften, Bd. II, Nr. 326.

die andern in zwei gemeinsam konjugierten Punkten auf der Berührungssehne; es gibt ∞^1 Tripel von Achsen, denen allen die Rotationsachse, nach dem Berührungspol gehend, gemeinsam ist.

Hat nun die kubische Gleichung eine Doppelwurzel, so haben zwei der Geradenpaare sich vereinigt; dazu ist Berührung der beiden Kurven erforderlich, und das doppelte Geradenpaar geht vom Berührungspunkte nach den beiden weiteren Schnittpunkten. Wenn nur Berührung in *einem* Punkte statthat, so muß, weil die absolute Kurve — mit reeller Gleichung — keine reellen Punkte besitzt, die andere Kurve und die Fläche eine imaginäre Gleichung haben, nicht etwa reell-imaginär mit reeller Gleichung sein. Zwei Kurven, welche beide reelle Gleichungen haben, haben mit einem imaginären Punkte auch den konjugiert imaginären gemein, und Berührung in dem einen zieht Berührung in dem andern nach sich. So ergibt sich *doppelte* Berührung; und die *Zweifachheit der Bedingung* im Falle der Realität der Flächengleichung ist für mich so anschaulicher dargetan als durch die algebraischen Überlegungen.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Einfacherer Beweis für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung.

Von

Rudolf Sturm in Breslau.

1. Für diesen Satz von den acht Schnittpunkten, der doch mehr den Elementen der analytischen Geometrie des Raumes angehört, ist die Heranziehung des allgemeinen Satzes der Algebra über die mnp Lösungssysteme von drei (unhomogenen) Gleichungen mit drei Unbekannten, von den Graden m, n, p, zu umständlich; zumal der Beweis desselben[1]) wohl nicht in jeder Beziehung befriedigend genannt werden kann.

Die Darstellung der (ganzen) symmetrischen Funktionen der Wurzel*paare* von zwei Gleichungen ist noch ein wunder Punkt. Salmon z. B. konstruiert die Gleichung mn^{ten} Grades in t, deren Wurzeln aus jenen Paaren x_i, y_i durch $t_i = \lambda x_i + \mu y_i$ entstehen, bildet für deren symmetrische Funktionen die Koeffizientenausdrücke und vergleicht die Faktoren der Potenzprodukte von λ, μ links und rechts. Aber ein solches Produkt hat sehr häufig nicht bloß eine symmetrische Funktion zum Faktor, sondern eine Summe von solchen Funktionen, und die Vergleichung gibt nur für diese, nicht für die einzelnen Funktionen den Koeffizientenausdruck.

Ferner, diese Ausdrücke haben Nenner; wenn λ, μ auch in diese eingehen — vermutlich nicht —, wie geschieht dann die Vergleichung, und welche Koeffizienten gehen in diese Nenner ein? Wahrscheinlich nur die der höchsten Aggregate der Gleichungen. Das sind Fragen, die vorher erledigt werden müssen, aber, soviel ich sehe, es noch nicht sind.

Besitzt man auch nur für eine dieser symmetrischen Funktionen der Wurzelpaare, selbst im einfachsten Falle, wo beide Gleichungen vom zweiten Grade sind, den Koeffizientenausdruck? Bei der Herstellung der

[1]) Salmon, Modern higher Algebra, 4. Auflage, Vorlesung VIII; H. Weber, Lehrbuch der Algebra, 2. Auflage, Bd. I, Neuer Abdruck § 57; Kleine Ausgabe § 28; Serret-Wertheim, Handbuch der Algebra, Bd. I, 2. Teil, Kap. 5.

Resultante von drei Kegelschnittsgleichungen durch Einsetzung der Wurzelpaare von zweien in die dritte hat man es mit 125 symmetrischen Funktionen zu tun[2]); also ist das praktisch unausführbar.

2. Den Wunsch, den Satz von den acht Schnittpunkten einfacher zu beweisen, hat schon Hesse[3]) erfüllt, wenn auch auf einem Umwege, indem er zu den drei Flächengleichungen noch die einer Ebene hinzufügt, die Bedingung für diese Ebene aufsucht, daß sie mit den drei Flächen einen Punkt gemeinsam hat; die Fläche achter Klasse für die Ebene, deren Gleichung er erhält, besteht aus den acht Ebenenbündeln um die gesuchten Schnittpunkte. Aus der Theorie der Funktionaldeterminante (Vorlesung 8) benutzt er einen Satz für den Fall, daß von den k Funktionen mit k homogenen Veränderlichen $k-1$ im Grade übereinstimmen.

Ich werde im folgenden den einfacheren, auch von Hesse bewiesenen Satz für den Fall benutzen, daß alle denselben Grad haben:

Ein (nicht aus lauter Nullen bestehendes) Wertsystem, das alle k Funktionen zum Verschwinden bringt, bringt immer die Funktionaldeterminante, im genannten Falle aber auch ihre k Ableitungen zum Verschwinden. Damit erhält man die Resultante von drei Kegelschnittsgleichungen, *ohne symmetrische Funktionen*, weil die verschwindenden Ableitungen ebenfalls zweiten Grades sind — ein Vorzug dieses einfachen Falles; man kann aus den sechs Gleichungen zweiten Grades *linear* die Größen x^2, xy, y^2, xz, yz, z^2 durch eine verschwindende Determinante R sechsten Grades eliminieren. Auch Hesse eliminiert ähnlich, aber aus elf Gleichungen.

3. Ich führe nun für diese — bekannte — Elimination noch eine wesentliche Vereinfachung ein, indem ich den Begriff der *Dimension* der Koeffizienten in einer Kurven- oder Flächengleichung als *Maßgrößen* benutze, der in unserer Zeit, glaube ich, nicht ausgiebig genug verwertet wird, während er vom Altertum bis Vieta eine große Rolle gespielt hat. Alle Glieder einer Gleichung (n^{ten} Grades) müssen dieselbe Dimension haben, daher die Koeffizienten der Glieder, die in den veränderlichen Koordinaten die Dimension i haben, die Dimension $n-i$, wofern die des höchsten Aggregats dimensionslos sind. Als „Gewicht" tritt diese Zahl in der Algebra auf; aber bei dieser rein algebraischen Auffassung ist die Konstanz dieser Zahl in allen Gliedern eines Koeffizientenausdrucks nicht selbstverständlich, wohl aber bei der Auffassung als geometrische Dimension.

[2]) Ein symbolischer Ausdruck für die Resultante, für unsern Zweck wohl nicht verwendbar und auch nicht elementar genug erhalten, findet sich in Clebsch-Lindemanns Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, S. 526, Formel (22).

[3]) Analytische Geometrie des Raumes, 3. Auflage, 9. Vorlesung.

Von der Resultante R brauche ich nicht die ausführliche Darstellung, sondern *nur ihre Dimension.*

Um sie noch besser hervorzuheben, nehme ich aus den Koeffizienten, welche die Dimension i haben, einen Dimensionsfaktor, die Potenz c^i der Maßeinheit c, heraus, schreibe also in einer Kegelschnittsgleichung $a_{13}c$, $a_{23}c$, $a_{33}c^2$ statt a_{13}, a_{23}, a_{33} (so daß a_{13}, a_{23}, a_{33} nun auch dimensionslos sind).

So geschrieben, lautet die Funktionaldeterminante von drei Kegelschnittsgleichungen:

$$J = \begin{vmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}cz, & a_{21}x + a_{22}y + a_{23}cz, & a_{31}cx + a_{32}cy + a_{33}c^2z \\ b_{11}x + b_{12}y + b_{13}cz, & \dots & \dots \\ c_{11}x + c_{12}y + c_{13}cz, & \dots & \dots \end{vmatrix};$$

die Glieder mit x^3, y^3, x^2y, xy^2; x^2z, y^2z, xyz; xz^2, yz^2; z^3 haben ersichtlich die Dimensionsfaktoren c, c^2, c^3, c^4, und die Glieder mit x^2, y^2, xy; xz, yz; z^2 in $\frac{\partial J}{\partial x}, \frac{\partial J}{\partial y}$ die Faktoren c, c^2, c^3, in $\frac{\partial J}{\partial z}$ aber c^2, c^3, c^4.

Nun genügt es, in die Determinante R bloß diese Faktoren einzusetzen:

$$\begin{vmatrix} . & . & . & c, & c, & c^2 \\ . & . & . & c, & c, & c^2 \\ . & . & . & c, & c, & c^2 \\ c, & c, & c, & c^2, & c^2, & c^3 \\ c, & c, & c, & c^2, & c^2, & c^3 \\ c^2, & c^2, & c^2, & c^3, & c^3, & c^4 \end{vmatrix};$$

die drei letzten Kolonnen und dann die drei letzten Zeilen zeigen, daß *alle* Glieder den Faktor $c \cdot c \cdot c^2 \times c \cdot c \cdot c^2 = c^8$ haben, ***die Resultante ist achter Dimension.***

4. Nun seien drei Flächen zweiter Ordnung gegeben, mit unhomogenen Gleichungen; wir schneiden mit $z = h$, z. B. die erste in dem Kegelschnitte:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2(a_{13}h + a_{14})x + 2(a_{23}h + a_{24})y + (a_{33}h^2 + 2a_{34}h + a_{44}) = 0;$$

die Koeffizienten erster und zweiter Dimension haben den Grad 1, 2 in h; also ist $R = 0$ achten Grades in h.

Es gibt acht Parallelebenen zur xy-Ebene, in denen die ausgeschnittenen Kegelschnitte einen gemeinsamen Punkt haben, der dann gemeinsamer Punkt der drei Flächen ist.

Ähnlich erhält man die vier Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten aus der Resultante von zwei quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten, diese als Längengröße auffassend.

(Eingegangen am 28. Februar 1918.)

Berichtigung.

Zu meiner Arbeit, „Über harmonische Funktionen und L-Formen", Bd. 1, S. 149—162.

S. 150, Z. 12 von unten ist statt $\sum\limits_{\nu, \mu=1}^{n}$ zu setzen $\sum\limits_{\nu, \mu=0}^{n}$,

S. 161, Z. 7 von oben ist statt $(g^{(n)}, G^{(n)})$ zu setzen $(2g^{(n)}, 2G^{(n)})$.

Zu dem von Herrn Fejér herrührenden Satz A ist zu bemerken, daß sich ein gleichfalls einfacher Beweis des Satzes aus einer von Stieltjes (De la transformation de la fonction périodique $A_0 + A_1 \cos\varphi + B_1 \sin\varphi + \ldots + A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi$, Nieuw Archief voor Wiskunde IX (1882), S. 111 bis 116; Werke 1, S. 99—104) gegebenen Faktorenzerlegung der trigonometrischen Polynome sehr leicht ergibt. Auf die Stieltjessche Arbeit hat mich Herr Landau freundlichst aufmerksam gemacht.

Zu Satz VI vergleiche man: O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, Math. Annalen 70 (1911), S. 351—376; F. Riesz, Les systèmes d'équations linéaires a une infinité d'inconnues, Paris 1913 (insb. S. 175—178).

Zu meiner Arbeit, „Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe", Bd. 1, S. 163—183.

S. 174, Z. 8. Die Angabe, Herr Landau habe die voranstehende Abschätzung von $|s_n^{(2k-1)}|$ für $\frac{1}{2} < k < 1$ bewiesen, muß dahin ergänzt werden, daß er sie, wie ich, für alle $k > \frac{1}{2}$ bewiesen hat (loc. cit. S. 252).

S. 176, in Formel (18) ist statt $\sin(n+1)\psi$ zu setzen: $\sin(n+1)\varphi$.

O. Szász.

(Eingegangen am 22. Mai 1918.)

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.