Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.

Von

Edmund Landau.

(Vierte Abhandlung.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juli 1924.

Einleitung.

Schon in meiner dritten Abhandlung [1]) betonte ich, daß die Herleitung der Relation (47) meiner zweiten Abhandlung [2]) sich nur auf die sieben ersten Voraussetzungen des Hauptsatzes stützt. Von diesen wird aber auch die sechste, d. h. $\eta > \frac{1}{2}$, nicht gebraucht, wenn nur $\varrho = 2$ (statt des dortigen $\varrho = [\eta]+2$) im Falle $\eta \leqq \frac{1}{2}$ gewählt wird. Von ϱ wurde nämlich nur benutzt, daß es ganz, $> \eta + \frac{1}{2}$ und $\geqq 1$ ist. Im Falle $\eta < \frac{1}{2}$ kann somit bereits $\varrho = 1$ gewählt werden.

(47) gilt also, was auch η sei, für jedes positive ganze $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$. Mit jedem solchen ϱ ist auch die nur auf (47) gestützte Beweisführung der dritten Abhandlung gültig. Der Hauptsatz der dritten Abhandlung, d. i. das Nichtbestehen der Relation (1) daselbst im Falle $Z(s) \not\equiv 0$, gilt also stets, wenn die Voraussetzungen I), II), III), IV), V), VII) des Hauptsatzes der zweiten Abhandlung erfüllt sind.

Diese Bemerkung ist wichtig, weil sich leicht feststellen läßt, daß mit den c_n, l_n auch die Zahlen

$$c_n^* = e_n \lambda_n^\beta, \quad l_n^* = \lambda_n$$

jene Voraussetzungen erfüllen. Mit anderen Worten: weil jene Voraussetzungen, wenn sie für

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^s}$$

---

1) Diese Nachrichten, Jahrgang 1917, S. 96—101.

2) Diese Nachrichten, Jahrgang 1915, S. 209—243.

gelten, auch für

$$Z^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^*}{l_n^{*s}}$$

erfüllt sind. In der Tat hat man nur zu setzen:

$$\begin{aligned}
\beta^* &= \beta, \\
\mu^* &= \nu, \\
\alpha_j^* &= \gamma_j - \beta\delta_j,\ \beta_j^* = \delta_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, \mu^*, \\
\nu^* &= \mu, \\
\gamma_j^* &= \alpha_j + \beta\beta_j,\ \delta_j^* = \beta_j \qquad \text{für } j = 1, \ldots, \nu^*, \\
e_n^* &= c_n l_n^{-\beta},\ \lambda_n^* = l_n
\end{aligned}$$

und verifiziert dann jene 6 Voraussetzungen in folgender Reihenfolge.

I) $$Z^*(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n^*}{l_n^{*s}} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\beta - s}$$

konvergiert für $\sigma > \beta^* = \beta$ absolut.

III) $$\sum_{n=1}^{\infty} e_n^* \lambda_n^{*s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{\beta - s}}$$

konvergiert für $\sigma < 0$ absolut.

IV) Für $\sigma > \beta$ ist nach (5) der zweiten Abhandlung

$$\prod_{j=1}^{\mu} \Gamma(\alpha_j + \beta\beta_j - \beta_j s) \cdot Z(\beta - s) = \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(\gamma_j - \beta\delta_j + \delta_j s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\beta} \lambda_n^{-s},$$

d. h.

$$(1) \qquad \prod_{j=1}^{\mu^*} \Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^* s) \cdot Z^*(s) = \prod_{j=1}^{\nu^*} \Gamma(\gamma_j^* - \delta_j^* s) \cdot Z(\beta - s),$$

für $\sigma < 0$ also

$$\prod_{j=1}^{\mu^*} \Gamma(\alpha_j^* + \beta_j^* s) \cdot Z^*(s) = \prod_{j=1}^{\nu^*} \Gamma(\gamma_j^* - \delta_j^* s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} e_n^* \lambda_n^{*s}.$$

II) ist jetzt klar nach (1) und der alten Voraussetzung II).

V) $$\sum_{j=1}^{\mu^*} \beta_j^* = \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j = \frac{H}{2} = \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j = \sum_{j=1}^{\nu^*} \delta_j^*,$$

also

$$\sum_{j=1}^{\mu^*} \beta_j^* = \sum_{j=1}^{\nu^*} \delta_j^* = \frac{H^*}{2}$$

mit

$$H^* = H.$$

VII) ist nach (1) und der alten Voraussetzung VII) klar.

Umgekehrt führt natürlich dies Verfahren von $Z^*(s)$ wieder rückwärts zu $Z(s)$, da

$$(e_n \lambda_n^{\beta})^* = c_n l_n^{-} l_n^{\beta} = c_n, \quad \lambda_n^* = l_n.$$

VI) wurde nicht gefordert; ich brauche aber in der Folge den Wert

$$\eta^* = \sum_{j=1}^{\nu^*} (\gamma_j^* - \tfrac{1}{2}) - \sum_{j=1}^{\mu^*} (\alpha_j^* - \tfrac{1}{2})$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} (\alpha_j - \tfrac{1}{2}) + \beta \sum_{j=1}^{\mu} \beta_j - \sum_{j=1}^{\nu} (\gamma_j - \tfrac{1}{2}) + \beta \sum_{j=1}^{\nu} \delta_j = -\eta + H\beta.$$

Wegen

$$-\frac{\eta^* + \frac{1}{2}}{H^*} + \beta^* = -\frac{-\eta + H\beta + \frac{1}{2}}{H} + \beta = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$$

besagt also der Hauptsatz der dritten Abhandlung, auf $Z^*(s)$ angewendet: Es sei $Z(s) \not\equiv 0$. Dann ist für keine endliche Summe

$$(2) \qquad V(x) = \sum_{S,\,Q} b_{S,\,Q}\, x^S \log^Q x \qquad (Q \geqq 0 \text{ ganz}, \ \Re S \leqq \beta)$$

und kein $\varepsilon > 0$

$$B(x) - V(x) = O\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} - \varepsilon}\right).$$

Übrigens kann der Fall $\eta < \frac{1}{2}$ nur dann auftreten, wenn $Z(s) \equiv 0$ ist. Denn im Falle $\eta < \frac{1}{2}$ ist die rechte Seite von (47), $\varrho = 1$ genommen, für $x > 0$ differentiierbar; in der Tat konvergiert

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-1} \frac{d}{dx} L(\lambda_n x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n L'(\lambda_n x)$$

nach Formel (34) der zweiten Abhandlung gleichmäßig auf jeder positiven x-Strecke; also ist

$$\Phi(x) = \int_0^x B(y)\, dy$$

für $x > 0$ differentiierbar, so daß alle c_n verschwinden müssen.

(Dies besagt, auf $Z^*(s)$ angewendet: Ist $Z^*(s) \not\equiv 0$, d. h. $Z(s) \not\equiv 0$, so ist

$$\eta^* = -\eta + H\beta \geqq \tfrac{1}{2};$$

also kann die in der Fußnote zu S. 226 erwähnte Möglichkeit $H < \frac{2\eta+1}{2\beta}$ nur im Falle $Z(s) \equiv 0$ auftreten.)

Der Fall $\eta = \frac{1}{2}$ kommt auch ohne $Z(s) \equiv 0$ vor, z. B. für $Z(s) = \zeta(s)$.

Das Obige liefert speziell, wenn

$$P(x) = \sum \text{Res.} \frac{x^s}{s} Z(s)$$

über alle etwaigen Pole von $\frac{Z(s)}{s}$ bedeutet (es gibt deren jedenfalls nicht unendlich viele): Unter den Voraussetzungen I) bis V) nebst VII) ist, falls $Z(s) \not\equiv 0$ ist und

$$B(x) - P(x) = D(x)$$

gesetzt wird, für kein $\varepsilon > 0$

$$D(x) = O\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}-\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Das Ziel dieser vierten Abhandlung ist, (3) zu verschärfen. Bei der Formulierung des neuen Hauptsatzes sei zunächst der triviale Fall $Z(s) \equiv 0$ ausgeschlossen; alsdann werde ohne Beschränkung der Allgemeinheit $e_1 \neq 0$ angenommen und dann sogar $e_1 > 0$ $\left(\text{da sonst nur } \frac{Z(s)}{e_1} \text{ statt } Z(s) \text{ zu betrachten wäre}\right)$. Dann lautet der neue

Hauptsatz: *Es ist*

$$\Re D(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right) \tag{4}$$

$\left(\text{d. h. nicht} < o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$ *und*

$$\Re D(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right) \tag{5}$$

$\left(\text{d. h. nicht} > o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$.

Und noch schärfer: *Nicht nur gibt es* (was (4), (5) aussagen) *je eine Folge monoton ins Unendliche wachsender* x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *mit*

$$\pm \Re D(x) > p x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}$$

(jedes p dieser Abhandlung bezeichnet eine positive, nur von der Z-Funktion abhängige Zahl; Abhängigkeit von weiteren Parametern wird durch Indizes ausgedrückt); *sondern diese zwei Folgen lassen sich sogar so wählen, daß*

$$(6) \qquad x_{n+1} < x_n + p x_n^{1-\frac{1}{H}}$$

ist.

In der letzteren Fassung ist der Hauptsatz auch in den beiden Spezialfällen des Teilerproblems und Kreisproblems ($Z(s) = \zeta^2(s)$ bezw. $\zeta_{P(i)}(s)$) neu, während (4) und (5) in diesen beiden Spezialfällen seit 1915 durch Herrn Hardy und im Falle $Z(s) = \zeta_\varkappa(s)$ für jeden algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ seit 1922 durch Herrn Walfisz bekannt ist. Der Wortlaut mit der Nebenbedingung (6) ist in jedem Falle neu, von ganz trivialen Fällen wie $Z(s) = \zeta(s)$ abgesehen.

Wenn $P(x)$ durch ein beliebiges $V(x)$ der Gestalt (2) ersetzt wird, kann natürlich keiner der beiden Sätze

$$\Re\,(B(x) - V(x)) = \Omega_R\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right) \text{ oder } \Omega_L\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

bestehen; man denke nur an $Z(s) = \zeta(s)$, $V(x) = 2x$ oder 0. Aber eine entsprechende Ω-Relation

$$B(x) - V(x) = \Omega\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

$\left(\text{d. h. nicht} = o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)\right)$ ist aus der in (4) oder (5) enthaltenen Tatsache

$$(7) \qquad B(x) - P(x) = \Omega\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right)$$

leicht abzuleiten. In der Tat sei

$$(8) \qquad B(x) - V(x) = o\left(x^{\frac{\eta-\frac{1}{2}}{H}}\right).$$

Für $\sigma > \beta$ ist

$$\frac{Z(s)}{s} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u)}{u^{s+1}}\,du;$$

also wäre für $\sigma > p_v$

$$(9) \quad \frac{Z(s)}{s} - \int_1^{\infty} \frac{V(u)}{u^{s+1}}\,du = \int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u) - V(u)}{u^{s+1}}\,du - \int_1^{l_1} \frac{V(u)}{u^{s+1}}\,du.$$

Die rechte Seite von (9) wäre wegen (8) für $\sigma > \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ regulär. Sie hätte auch auf $\sigma = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ keinen Pol, da für $s = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} + \delta + t_0 i$, $\delta > 0$, $\delta \to 0$

$$\int_{l_1}^{\infty} \frac{B(u) - V(u)}{u^{s+1}}\, du = \int_{l_1}^{\infty} \frac{o\left(u^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)}{u^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H} + 1 + \delta}}\, du = o\left(\frac{1}{\delta}\right)$$

wäre. Für $\sigma > p_\nu$ ist nun

$$\int_1^{\infty} \frac{V(u)}{u^{s+1}}\, du = \sum_S \int_1^{\infty} \frac{u^S \sum_Q b_{S,Q} \log^Q u}{u^{s+1}}\, du = \sum_S \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} \frac{Q!}{(s-S)^{Q+1}}.$$

Also wäre

$$\frac{Z(s)}{s} - \sum_S \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} \frac{Q!}{(s-S)^{Q+1}}$$

für $\sigma \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}$ regulär, folglich

$$P(x) = \sum_{\sigma \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}} \text{Res.} \frac{x^s Z(s)}{s} + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right)$$

$$= \sum_{\substack{S \\ \Re S \geqq \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}} \sum_{Q=0}^{q} b_{S,Q} x^S \log^Q x + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right) = V(x) + o\left(x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}}\right),$$

so daß sich (8) und (7) widersprechen.

Weil meine gegenwärtige Abhandlung reichlich kompliziert ist, habe ich den vollständigen Beweis des neuen Hauptsatzes für den Spezialfall des Kreisproblems in einer besonderen Abhandlung vorausgeschickt; diese zwei Seiten bitte ich zunächst zu lesen. Dort fallen meine Hilfssätze 3 und 4 weg, da die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktionen zur Verfügung steht. Übrigens läßt sich aus ihr rückwärts leicht der Hilfssatz 3 ablesen; doch beweise ich diesen mit Absicht direkt und damit implizit alles beim Kreisproblem über Besselsche Funktionen Gebrauchte.

§ 1.

Hilfssätze.

Den ersten zwei Hilfssätzen sind die Voraussetzungen gemeinsam:

Es sei ϱ ganz und $\geqq 2$. Es sei $f(x)$ für $x > 0$ reell und $\varrho - 1$ mal differentiierbar. Es sei

$$f^{(\varrho-1)}(x) - f^{(\varrho-1)}(1) = \int_1^x F(y)\,dy,$$

wo $F(y)$ reell und eigentlich integrabel ist.

Hilfssatz 1: *Es sei* $A > 0$, $B > 0$, $h = \sqrt[\varrho]{\frac{B}{A}}$, $\xi - (\varrho-1)h > 0$. *Auf der Strecke* $\xi - (\varrho - 1)h \leqq x \leqq \xi$ *sei*

(10) $$F(x) \leqq A$$

und

(11) $$|f(x)| \leqq B.$$

Dann ist

$$f'(\xi) < K_\varrho \sqrt[\varrho]{AB^{\varrho-1}},$$

wo $K_\varrho > 0$ *ist und nur von* ϱ (also nicht von f, F, A, B, ξ) *abhängt.*

(Auch jedes künftige K_ϱ wird > 0 sein und nur von ϱ abhängen; Abhängigkeit von weiteren Parametern wird durch weitere Indizes ausgedrückt.)

Beweis: Für $0 \leqq y \leqq h$ ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\varrho-1} (-1)^\lambda \binom{\varrho-1}{\lambda} f'(\xi - \lambda y) = \int_{\xi-y}^{\xi} dt_1 \int_{t_1-y}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_{\varrho-2}-y}^{t_{\varrho-2}} F(t)\,dt,$$

also nach (10)

$$\leqq A y^{\varrho-1} \leqq A h^{\varrho-1}.$$

Durch Integration nach y von 0 bis h ergibt sich

$$hf'(\xi) - \sum_{\lambda=1}^{\varrho-1} (-1)^\lambda \binom{\varrho-1}{\lambda} \frac{1}{\lambda} (f(\xi - \lambda h) - f(\xi)) \leqq A h^\varrho,$$

also wegen (11)

$$hf'(\xi) < Ah^\varrho + K_\varrho B = K_\varrho B,$$

$$f'(\xi) < \frac{K_\varrho B}{h} = K_\varrho \sqrt[\varrho]{AB^{\varrho-1}}.$$

Hilfssatz 2: *Es sei* $C > 0$, $D > 0$, $\alpha \geqq 0$, $\lambda < 1$. *Dann gibt es ein* $\delta = K_{\varrho, C, D}$ *mit folgender Eigenschaft.*

Auf der Strecke

$$(12)\qquad \xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\leqq x\leqq \xi,$$

wo

$$\xi>0,\ \xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}>0,$$

sei

$$|f(x)|<Cx^{\alpha+\varrho\lambda};$$

ferner sei

$$f'(\xi)>D\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda}.$$

Dann gibt es für $\xi>K_{\varrho,\,C,\,D,\,\alpha,\,\lambda}$ *auf der Strecke* (12) *ein* x *mit*

$$(13)\qquad F(x)>\delta x^{\alpha}.$$

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $C=1$. $\left(\text{Sonst betrachte man } f^*(x)=\frac{f(x)}{C},\ F^*(x)=\frac{F(x)}{C}.\right)$

$\delta>0$ sei zunächst beliebig. Gesetzt, es sei auf (12) durchweg

$$F(x)\leqq\delta x^{\alpha}.$$

Für $\xi>K_{\delta,\,\varrho,\,\alpha,\,\lambda}$ ist (wegen $\lambda<1$)

$$\left(\xi-(\varrho-1)\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\right)^{\alpha+\varrho\lambda}<2\xi^{\alpha+\varrho\lambda},$$

also nach Hilfssatz 1 $\left(\text{mit } A=\delta\xi^{\alpha},\ B=2\xi^{\alpha+\varrho\lambda},\ h=\sqrt[\varrho]{\frac{2}{\delta}}\,\xi^{\lambda}\right)$

$$D\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda}<f'(\xi)<K_{\varrho}\sqrt[\varrho]{\delta\xi^{\alpha}2^{\varrho-1}\xi^{\alpha(\varrho-1)+\varrho(\varrho-1)\lambda}}=K_{\varrho}\sqrt[\varrho]{\delta}\,\xi^{\alpha+(\varrho-1)\lambda},$$

$$\delta>\left(\frac{D}{K_{\varrho}}\right)^{\varrho}=K_{\varrho,\,D}.$$

Für $\delta=K_{\varrho,\,D}$ hat also (13) eine Lösung auf (12), wofern $\xi>K_{\varrho,\,D,\,\alpha,\,\lambda}$.

Hilfssatz 3: *Bei* $y\to\infty$ *ist*

$$\int_1^{\infty}u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui(\log u-1-\log y)}\,du=\sqrt{2\pi}\,e^{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)i}+o(1).$$

Beweis: Das Integral konvergiert für $y>0$ nach dem zweiten Mittelwertsatz wegen

$$(14)\qquad \int u^{-\frac{1}{2}}e^{-ui(\log u-1-\log y)}\,du=i\int\frac{d\left(e^{-ui(\log u-1-\log y)}\right)}{\sqrt{u}\,(\log u-\log y)}.$$

Ich zerlege für $y > 1$

$$\int_1^\infty = \int_1^{y-y^{\frac{3}{5}}} + \int_{y-y^{\frac{3}{5}}}^{y+y^{\frac{3}{5}}} + \int_{y+y^{\frac{3}{5}}}^\infty = I_1 + I_2 + I_3.$$

Nach (14) und dem zweiten Mittelwertsatz ist $\left(\text{weil } \sqrt{u}(\log u - \log y)\right.$ für $0 < u < \frac{y}{e^2}$ fällt und für $u > \frac{y}{e^2}$ steigt$\left.\right)$

$$I_1 = O\left(\frac{1}{\log y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\log\frac{y}{y-y^{\frac{3}{5}}}}\right) = O\left(\frac{1}{\log y}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}}\right) = o(1),$$

$$I_3 = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\log\frac{y+y^{\frac{3}{5}}}{y}}\right) = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}}\right) = o(1).$$

Andererseits ist

$$I_2 = \int_{-y^{\frac{3}{5}}}^{y^{\frac{3}{5}}} (y+z)^{-\frac{1}{2}} e^{-i(y+z)(\log(y+z)-1-\log y)}\,dz$$

$$= \sqrt{y}\int_{-y^{-\frac{2}{5}}}^{y^{-\frac{2}{5}}} (1+w)^{-\frac{1}{2}} e^{-iy(1+w)(-1+\log(1+w))}\,dw.$$

Unterwegs ist gleichmäßig

$$(1+w)^{-\frac{1}{2}} = 1 + O(y^{-\frac{2}{5}}),$$

$$-y(1+w)(-1+\log(1+w)) = -y(1+w)\left(-1+w-\frac{w^2}{2}\right) + O(y^{-\frac{1}{5}})$$

$$= y - \frac{yw^2}{2} + O(y^{-\frac{1}{5}}),$$

also der Integrand

$$\left(1+O(y^{-\frac{2}{5}})\right)e^{yi-\frac{y}{2}w^2 i}\left(1+O(y^{-\frac{1}{5}})\right) = e^{yi-\frac{y}{2}w^2 i} + O(y^{-\frac{1}{5}}),$$

$$I_2 = \sqrt{y}\,e^{yi}\int_{-y^{-\frac{2}{5}}}^{y^{-\frac{2}{5}}} e^{-\frac{y}{2}w^2 i}\,dw + O\left(\sqrt{y}\,y^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{1}{5}}\right)$$

$$= e^{yi}\sqrt{2}\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{10}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}y^{\frac{1}{10}}} e^{-v^2 i}\,dv + o(1) = e^{yi}\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2 i}\,dv + o(1)$$

$$= \sqrt{2\pi}\,e^{\left(y-\frac{\pi}{4}\right)i} + o(1).$$

Hilfssatz 4: *Wird für ganzes* $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$

$$\Psi_\varrho(w) = \int\limits_{\left(\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}\right)} G(s) \frac{w^{s+\varrho}}{s \cdots (s+\varrho)} ds \qquad (w > 0)$$

gesetzt, so ist

$$(15) \quad \Psi_\varrho(w) = p_\varrho i w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho} \cos\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right) + o\left(w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right).$$

(Da $\Psi_\varrho(w)$ das $L(w)$ der zweiten Abhandlung ist, kam die in (15) enthaltene rohere Formel

$$(16) \qquad \Psi_\varrho(w) = O\left(w^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right)$$

bereits als Formel (32) daselbst vor.)

Beweis: Für $\sigma_0 = \frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}$ ist auf $\sigma = \sigma_0$ nach (19) der zweiten Abhandlung, wenn $a(\sigma) \neq 0$ beachtet wird,

$$(17) \qquad \frac{G(s)}{s \cdots (s+\varrho)} = p_\varrho e^{p_\varrho i} t^{-\frac{1}{2}} e^{-Hti\log t - Ati} + O(t^{-\frac{3}{2}}).$$

Aus Symmetriegründen ist

$$(18) \qquad \Psi_\varrho(w) = 2i\Im\int$$

über den Teil $t \geqq 0$ des Weges.

Falls σ_0 kein Pol ist, ist der Beitrag der Strecke $0 \leqq t \leqq \frac{1}{H}$ zum Integral

$$w^{\sigma_0+\varrho} i \int_0^{\frac{1}{H}} \frac{G(s)}{s \cdots (s+\varrho)} w^{ti} dt = o(w^{\sigma_0+\varrho}),$$

da $\int_0^{\frac{1}{H}}$ Fourierkonstante einer stetigen Funktion ist.

Falls σ_0 ein Pol ist, kann die Ausbuchtung durch eine gebrochene Linie

$$(\sigma_0 - \delta) \cdots \left(\sigma_0 - \delta + \frac{i}{H}\right) \cdots \left(\sigma_0 + \frac{i}{H}\right)$$

bei jedem positiven $\delta < p_\varrho$ ersetzt werden. Hierin ist

$$\left| \int_{\sigma_0 - \delta + \frac{i}{H}}^{\sigma_0 + \frac{i}{H}} \frac{G(s)}{s \cdots (s+\varrho)} w^{s+\varrho} ds \right| < p_\varrho \delta w^{\sigma_0+\varrho} \qquad \text{für } w > 1,$$

und

$$\left|\int_{\sigma_0-\delta}^{\sigma_0-\delta+p_\varrho i}\right| < p_{\varrho,\delta}\, w^{\sigma_0+\varrho-\delta} < \delta\, w^{\sigma_0+\varrho} \qquad \text{für } w > p_{\varrho,\delta}.$$

Jedenfalls ist also

$$\Psi_\varrho(w) = 2i\,\Im\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}\frac{G(s)}{s\cdots(s+\varrho)}\,w^s\,ds + o\left(w^{\sigma_0+\varrho}\right).$$

Das O-Glied in (17) liefert zu $\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}$ den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}\int_{\frac{1}{H}}^{\infty} w^{ti}\,O\left(t^{-\frac{3}{2}}\right)dt = o\left(w^{\sigma_0+\varrho}\right),$$

da dies $\int_{\frac{1}{H}}^{\infty}$ Fourierkonstante einer stetigen, absolut ins Unendliche integrabeln Funktion ist.

Das Hauptglied in (17) liefert den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_{\frac{1}{H}}^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\,e^{-Hti\log t - Ati}\,w^{ti}\,dt$$

$$= w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_{1}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}\,e^{-ui\left(\log\frac{u}{H}+\frac{A}{H}\right)}\,w^{\frac{u}{H}i}\,du,$$

also,

$$y = He^{-\frac{A}{H}-1}\,w^{\frac{1}{H}}$$

gesetzt, nach Hilfssatz 3 den Beitrag

$$w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}\int_{1}^{\infty} u^{-\frac{1}{2}}\,e^{-ui(\log u - 1 - \log y)}\,du$$

$$= w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}e^{yi} + o\left(w^{\sigma_0+\varrho}\right) = w^{\sigma_0+\varrho}p_\varrho e^{p_\varrho i}e^{p_\varrho w^{\frac{1}{H}} i} + o\left(w^{\sigma_0+\varrho}\right),$$

womit nach (18) die Behauptung (15) bewiesen ist, wegen

$$\Im\left(e^{p_\varrho i}e^{p_\varrho w^{\frac{1}{H}} i}\right) = \sin\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right) = \cos\left(p_\varrho w^{\frac{1}{H}} + p_\varrho\right).$$

Hilfssatz 5: *Es gibt ein* $\varrho = p$, *so daß,*

$$g(x) = \Re\left(\Phi(x) - \sum \mathrm{Res.}\frac{x^{s+\varrho}}{s\cdots(s+\varrho)}\,Z(s)\right)$$

gesetzt, bei passenden p *einerseits*

$$|g(x)| < p\,x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho} \qquad \textit{für } x \geqq 1$$

ist, andererseits jede der beiden Ungleichungen

$$\pm\, g'(\xi) > p\,\xi^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}$$

für je eine positive Folge ξ_n *mit* $\xi_n < \xi_{n+1} < \xi_n + p\,\xi_n^{1-\frac{1}{H}}$, $\xi_n \to \infty$ *erfüllt ist.*

Beweis: Nach (47) der zweiten Abhandlung ist für $\varrho > \eta + \frac{1}{2}$, $x > 0$

$$\Phi(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{\varrho-1}} B(y)\,dy$$

$$= \sum \mathrm{Res.}\frac{x^{s+\varrho}}{s\cdots(s+\varrho)}\,Z(s) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho}\,\Psi_\varrho(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right),$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\,\Im \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho}\,\Psi_\varrho(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}\right), \tag{19}$$

also, ϱ durch $\varrho - 1$ ersetzt, für $\varrho > \eta + \frac{3}{2}$

$$g'(x) = \frac{1}{2\pi}\,\Im \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho+1}\,\Psi_{\varrho-1}(\lambda_n x) + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\right). \tag{20}$$

Für $\varrho = p + \eta + \frac{3}{2} = p$ gilt endlich

$$\sum_{n=2}^{\infty} |e_n|\,\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}} < \tfrac{1}{2}\,e_1 \lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}. \tag{21}$$

Für dies ϱ ist, wenn $x \geqq 1$, nach (19), (16)

$$|g(x)| < p\,x^{\frac{\eta-\varrho-\frac{1}{2}}{H}+\varrho}$$

und wegen (15)

$$
(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi}\,\mathfrak{J}\sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{-\varrho+1}\,\Psi_{\varrho-1}(\lambda_n x)\\
&= p\,x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}(e_n)\,\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p\,(\lambda_n x)^{\frac{1}{H}}+p\right)\\
&\qquad + o\left(x^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}\right),
\end{aligned}\right.
$$

wobei nach (21)

$$
\left|\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}(e_n)\,\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p\,(\lambda_n x)^{\frac{1}{H}}+p\right)-e_1\lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p\,(\lambda_1 x)^{\frac{1}{H}}+p\right)\right|
< \tfrac{1}{2}\,e_1\lambda_1^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}
$$

ist. Werden die $\xi \geqq 1$ mit

$$
(23)\qquad \cos\left(p\,(\lambda_1 \xi)^{\frac{1}{H}}+p\right) = \pm 1
$$

eingesetzt, so ist für sie

$$
\pm\sum_{n=1}^{\infty}\mathfrak{R}(e_n)\,\lambda_n^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}}\cos\left(p\,(\lambda_n \xi)^{\frac{1}{H}}+p\right) > p,
$$

also nach (20) und (22), wofern $\xi > p$,

$$
\pm\, g'(\xi) > p\,\xi^{\frac{\eta-\varrho+\frac{1}{2}}{H}+\varrho-1}.
$$

Die Auflösung von (23), d. h. von

$$
p\,\xi^{\frac{1}{H}}+p = \left\{\begin{matrix} 2k\pi \\ (2k+1)\pi \end{matrix}\right\} \qquad (k \text{ ganz}),
$$

liefert aber je eine positive Folge $\xi = \xi_n\,(n = 1, 2, \ldots)$ mit $\xi_1 > p$, $\xi_n < \xi_{n+1} < \xi_n + p\,\xi_n^{1-\frac{1}{H}}$, $\xi_n \to \infty$.

§ 2.

Beweis des Hauptsatzes.

Auf die beiden durch Hilfssatz 5 gelieferten Folgen ξ_n ist Hilfssatz 2 anwendbar mit

$$\varrho = p,\ f(x) = \pm g(x),\ F(x) = \pm \Re\left(B(x) - \sum \text{Res.} \frac{x^s}{s} Z(s)\right) = \pm \Re D(x),$$

$$C = p,\ D = p,\ \alpha = \frac{\eta - \frac{1}{2}}{H},\ \lambda = 1 - \frac{1}{H}.$$

Er liefert für jedes $n > p$ auf $\xi_n - p\xi_n^\lambda \leqq x \leqq \xi_n$ ein x mit

$$\pm \Re D(x) > p x^{\frac{\eta - \frac{1}{2}}{H}};$$

die verschiedenen dieser x, in wachsender Ordnung mit $x_1, x_2, \ldots$ bezeichnet, erfüllen offenbar die verlangten Relationen

$$x_n \to \infty,\ x_{n+1} < x_n + p x_n^{1 - \frac{1}{H}}.$$