## Werk

**Titel:** Zahlbegriff und Algebra bei Gauß. Mit einem Anhang von A. Ostrowski in Göttingen:...

**Autor:** Fraenkel, A.

**Jahr:** 1920

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?252457811_1920|log35


## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.

Gesammelt von **F. Klein, M. Brendel** und **L. Schlesinger.**

## VIII. Zahlbegriff und Algebra bei Gauss.

Von

**A. Fraenkel** in Marburg a. d. Lahn.

Erster Teil.

**Mit einem Anhang von A. Ostrowski in Göttingen:**
**Zum ersten und vierten Gaußschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.**

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. Oktober 1919 durch Herrn F. Klein.

### Verzeichnis der Abkürzungen.

W. für C. F. Gauß, Werke I—XI.
T. für das Wissenschaftliche Tagebuch, W. X 1, S. 488—572.
Selbstanzeige für die Selbstanzeige der Theoria residuorum biquadraticorum, Commentatio secunda, W. II, S. 169—178.
Br. G.-Sch. für Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und H. C. Schumacher I—VI Altona 1860—1865.
Br. G.-Bessel für Briefwechsel zwischen Gauß und Bessel, Leipzig 1880.
Br. G.-Bolyai für Briefwechsel zwischen C. F. Gauß und W. Bolyai, Leipzig 1899.
Sartorius für W. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, Leipzig 1856.
Bachmann für P. Bachmann, Über Gauß' zahlentheoretische Arbeiten (diese Materialien, Heft I, 1911), W. X 2, S. 1—75.
Schlesinger für L. Schlesinger, Über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie, diese Materialien, Heft III, 1912; (W. X 2, S. 76 ff.).
Stäckel für P. Stäckel, C. F. Gauß als Geometer, diese Materialien, Heft V, 1918.
Hankel für H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1867.
Tentamen für W. Bolyai, Tentamen iuventutem in elementa matheseos ... introducendi, T. I (Maros Vàsàrhely 1832; editio secunda, Budapest 1897).
Bol. für W. und J. Bolyai, Geometrische Untersuchungen, herausgegeben von P. Stäckel; I. Leben und Schriften der beiden Bolyai, II. Stücke aus den Schriften der beiden Bolyai; Leipzig und Berlin 1913.

## Abschnitt I[1]).

# Der Zahlbegriff und die Zahlenlehre.

## A. Einleitung.

### 1. Gauß' Anteilnahme an den Grundlagen der Mathematik überhaupt.

Wer an die Würdigung dessen herantritt, was Gauß zu der Entwickelung und Erweiterung des Zahlbegriffs und zu dessen Verschärfung beigetragen hat, der muß zunächst seine Aufmerksamkeit auf Gauß' Anteilnahme an grundsätzlichen Fragen der Mathematik überhaupt richten. Erst ein Blick auf diese Teilnahme im allgemeinen ermöglicht an Hand des von Gauß in Bezug auf den Zahlbegriff Geleisteten und Geäußerten ein Urteil darüber, aus welchen Gründen er wohl manch einer Frage erhebliche Aufmerksamkeit zugewandt, manch andere nur flüchtig gestreift oder ganz übergangen haben mag, und inwieweit er in dem einen Punkt die Schwierigkeiten durch seine eigenen Arbeiten oder durch solche seiner Vorgänger und Zeitgenossen als beseitigt betrachtet, in einem anderen noch die endgültige Klarstellung vermißt haben dürfte.

Gauß erwidert auf eine Bemerkung Schumachers (in Bezug auf Gauß' Streben nach solcher Vollendung seiner Arbeiten, „ut nihil amplius desiderari possit") in seinem Brief vom 12. Februar 1826 u. a. folgendes: „... so werden Sie es doch nicht verstehen, als ob ich mehr für die Wissenschaft leisten würde, wenn ich mich mehr damit begnügte, einzelne Mauersteine, Ziegel etc. zu liefern, anstatt eines Gebäudes ... Aber ungern stelle ich ein Gebäude auf, worin Hauptteile fehlen ..." (Br. G.-Sch., II, S. 46). Dieses Gleichnis ist für Gauß nicht nur auf die „Hauptteile" im allgemeinen, sondern speziell auf das Fundament zu beziehen. Wie sorglos man seit dem Ende der Blütezeit der griechischen Mathematik bis zum Ausgang des 18. Jahrhunderts mit den Grundlagen der Mathematik umgegangen war[2]), wie wenig man die Beschäftigung mit diesen Dingen als lohnend und auch wohl als des

1) Die weiteren Abschnitte dieses Aufsatzes werden zusammen mit der Gesamteinleitung zu ihm später (als zweiter Teil) veröffentlicht werden.

2) Nur die Beschäftigung mit den Voraussetzungen des Euklid, die durch die Jahrhunderte geht, bildet eine Ausnahme.

schöpferischen Mathematikers überhaupt würdig betrachtet hatte, das muß man sich im jetzigen Zeitalter der Axiomatik vergegenwärtigen, um zu erkennen, welche Umwälzung Gauß' Interesse an grundsätzlichen Fragen und seine erfolgreiche Beschäftigung mit solchen zu seiner Zeit bedeutet hat und wie erheblich die Wirkung auf Zeitgenossen und Nachwelt sein mußte.

Ist von Gauß' Interesse an den Grundlagen der Mathematik die Rede, so denkt man zunächst an die Grundlagen der Geometrie. Hier handelt es sich vor allem um die Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie, aus denen letzten Endes die moderne Axiomatik erwachsen ist. Doch ist mit der nichteuklidischen Geometrie die Anteilnahme von Gauß an den Grundlagen der Geometrie noch keineswegs erschöpft: eine Reihe von geometrischen Grundbegriffen und grundlegenden Problemstellungen gehen auf ihn zurück oder verdanken ihm nähere Erörterung und Klärung [1]), und auch sein in zahlreichen Untersuchungen hervortretendes außerordentliches Interesse an Fragen der Analysis Situs [2]), deren spätere Entwicklung er nach dem Zeugnis von Sartorius [3]) vorausgeahnt hat, ist in diesem Zusammenhang zu erwähnen.

Weiter sind hier — jedoch als aus einem nicht nur geometrischen, sondern auch spezifisch philosophischen Interesse erwachsen — die Bemerkungen in Bezug auf den Unterschied zwischen „rechts" und „links" [4]) hervorzuheben, gelegentlich deren er gegen Kants Behauptung, „daß der Raum nur Form unserer äußern Anschauung sei", polemisiert und demgegenüber betont, daß „der Raum unabhängig von unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung haben" müsse. Wie sehr ihm diese Polemik gegen Kant am Herzen lag, zeigt ihre Wiederholung an einigen Briefstellen (W. VIII, S. 224 u. 247). Die philosophische Überzeugung, die ihn bei dieser Polemik leitete, drückt er noch deutlicher aus in dem Brief an Olbers vom 28. April 1817 (W. VIII, S. 177) und in

---

1) Vgl. Stäckel, S. 63—66.

2) Ebenda, S. 67—76.

3) „Eine außerordentliche Hoffnung setzte er aber auf die Ausbildung der Geometria situs, in der weite gänzlich unangebaute Felder sich befänden, die durch unsern gegenwärtigen Kalkül noch so gut wie gar nicht beherrscht werden könnten." Sartorius, S. 88.

4) In der Selbstanzeige (S. 177), ferner W. X1, S. 408 f. Fußnote, sowie W. VIII, S. 247—249, wo Gauß übrigens mit den Worten schließt (in einem Brief an Gerling vom 23. Juni 1846): „Daß, was ich oben über Links und Rechts angeführt habe, nur ein Kernstück eines viel ausgedehntern Systems ist, brauche ich wohl nicht zu erinnern".

dem Brief an Bessel vom 9. April 1830 (W. VIII, S. 201): er nimmt hier gegenüber der Geometrie als einer Lehre, die von den (unserer Gewalt nicht unterworfenen) Eigenschaften des Raumes abhänge, eine prinzipiell andere Stellung ein als gegenüber der Arithmetik und Analysis, die es mit den vom Menschen frei erschaffenen Zahlen zu tun habe[1]). Ein äußerliches Kennzeichen des nicht nur rein mathematischen, sondern auch erkenntniskritisch gefärbten Interesses, das Gauß an den geometrischen Grundfragen wie auch an einem folgerichtigen Aufbau der Grundlagen der Arithmetik genommen hat, ist der von ihm in solchem Zusammenhang oft gebrauchte Ausdruck „Metaphysik" an Stellen, wo wir „(mathematische) Theorie" oder „(mathematische) Begründung" sagen würden[2]). In der Tat hat er denn auch gewünscht, daß solche Klärung der Grundlagen der Mathematik nicht allein von mathematischer, sondern auch von philosophischer Seite aus erfolge (vgl. Sartorius, S. 98), ohne freilich großes Vertrauen auf die Beiträge der Fachphilosophen zur „Aufklärung der Metaphysik der Mathematik" zu setzen (W. X 1, S. 106).

Es existiert übrigens eine (im Gaußarchiv befindliche und in W. XI 1 noch zu veröffentlichende) Aufzeichnung, in der Gauß selbst „in früherer Zeit, als seine Lebensrichtung noch nicht entschieden war und er daran denken mußte, daß er vielleicht als Lehrer der Mathematik irgendwo aufzutreten habe, ... die Anfänge der Mathematik philosophisch entwickelt hatte" (vgl. Sartorius, S. 81, 98; W. VIII, S. 268). Jene Darstellung, über deren Entstehungszeit sich Näheres nicht feststellen läßt, beginnt in Nr. 1 mit der Unterscheidung zwischen extensiven Größen (solchen, „bei denen sich Teile denken lassen", wie der Raum, die geometrischen Größen, die Zeit, die Zahl) und intensiven Größen (allen nichtextensiven; so z. B. „Geschwindigkeit, Dichtigkeit, Härte, Höhe und Tiefe der Töne, Stärke der Töne und des Lichts, Wahrscheinlichkeit usw."). Gegenstand der Mathematik seien alle extensiven Größen, dagegen die intensiven „nur in sofern, als sie von extensiven abhängen". In den folgenden Nrn. 2—6 untersucht Gauß in eigenartiger Weise den Charakter der Mathematik als Lehre von den

1) Man vergleiche damit das (allerdings nur auf die Arithmetik sich beziehende) bekannte Wort Kroneckers: „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk" (vgl. Jahresber. d. D. Math.-Ver., Bd. 2 (1893), S. 19).

2) Z. B. „Fragen zur Metaphysik der Mathematik" (W. X 1, S. 396), „konzentrierte Metaphysik der komplexen Größen" (ebenda, S. 436); ähnlich an vielen anderen Stellen.

Relationen zwischen (arithmetischen oder geometrischen) Größen und hebt dabei die Bedeutung der (ganzen und gebrochenen) Zahlen gebührend hervor; er stellt bei dieser Gelegenheit die antike Methode, arithmetische Fragen auf geometrischem Weg zu behandeln, der umgekehrten modernen Art gegenüber, dabei den Vorzug der letzteren anerkennend. Bemerkenswert ist ferner die (nicht weiter ausgeführte oder benutzte) Unterscheidung der beiden Fälle, daß bei den arithmetischen Beziehungen der Größen aufeinander „der Begriff des Unendlichen vorausgesetzt werden muß oder nicht; der erste Fall gehört in die Rechnung des Unendlichen oder die höhere Mathematik, der letztere in die gemeine oder niedere Mathematik".

Aus späterer Zeit finden sich bei Gauß keine so zusammenhängenden Betrachtungen aus dem Grenzgebiet zwischen Philosophie und Mathematik, vielmehr nur gelegentliche, den Gegenstand streifende Bemerkungen; unter ihnen seien einige Sätze aus den in W. X 1, S. 396f. abgedruckten Aufzeichnungen hervorgehoben, die allerdings in einem ganz bestimmten mathematischen Zusammenhang (komplexe Zahlen) stehen.

Die Gedanken, die wir Gauß in bezug auf den Zahlbegriff und die Zahlenlehre und zwar für die Theorie der reellen, der gewöhnlichen komplexen und der höheren komplexen Zahlen verdanken, sollen im folgenden in drei gesonderten Teilen ausführlich behandelt werden und können daher in dieser einleitenden Zusammenstellung der grundsätzlichen Interessen von Gauß außer Acht bleiben. Nur von zwei besonderen, zwar der Arithmetik, nicht aber der eigentlichen Zahlenlehre zugehörigen Punkten soll hier noch kurz die Rede sein.

Einmal werde erinnert an die berühmt gewordene Stelle aus einem Briefe von Gauß an Schumacher vom 12. Juli 1831, worin er gegenüber einem von Schumacher vorgebrachten Beweisversuch des Parallelenaxioms, der von einem Halbkreis mit unendlichgroßem Radius wesentlichen Gebrauch macht, folgendes bemerkt: „Was ... Ihren Beweis ... betrifft, so protestiere ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Größe als einer vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen, als man will, während andern ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist." (W. VIII, S. 216.) Bekanntlich hat man G. Cantor gegenüber unter Berufung auf dieses Gaußsche Urteil geltend gemacht, der Gebrauch einer unendlichen Menge — oder richtiger einer unend-

lichen Größe[1]) — als eines abgeschlossenen Begriffs sei unzulässig. Es wird aber kaum zweifelhaft sein können, daß Gauß sein Urteil nicht in dem allgemeinen Sinn verstanden wissen wollte, zu dem die Fassung rein äußerlich berechtigt, sondern daß er nur den unzulässigen, nicht erst methodisch geprüften Gebrauch des aktualen Unendlichgroßen in Beweisen wie dem ihm vorgelegten treffen wollte[2]); hierfür spricht namentlich die Bemerkung am Schluß jenes Briefes: „... Hierin [nämlich in der Tatsache, daß „in der Bildersprache des Unendlichen ... die Peripherien zweier unendlicher Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Größe verschieden sind, selbst um eine Größe verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältnis hat"] ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermißt, etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen. Sie sehen, daß hier in der Tat der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift." (Ebenda, S. 218.) In der Cantorschen Betrachtungsweise, die dem aktualen Unendlich nicht von vorneherein gewohnte Bedingungen und Gesetze aufzwingt, sondern im Gegenteil untersucht, welchen Bedingungen sich das Unendliche (nach Aufstellung zweckmäßiger Definitionen) fügt und welchen nicht, würde Gauß demnach kaum etwas Anstößiges gesehen haben.

Endlich werde in diesem Zusammenhang auch hier darauf hingewiesen, welche Erweiterung grundsätzlicher und kühner Art Gauß dem Bereich der ganzen rationalen Zahlen als Gegenstand der Zahlentheorie durch die Ausdehnung der zahlentheoretischen Betrachtungen auf die Gesamtheit der ganzen komplexen Zahlen gegeben hat, eine Erweiterung, die gedanklich noch weit darüber hinaus gegangen ist, wenn die Bemerkung in Gauß' Brief an Olbers vom 21. März 1816 (W. X 1, S. 75) etwa auf die Theorie der algebraischen Zahlen überhaupt zu beziehen sein sollte; der Gedanke der Ausdehnung auf die allgemeine Theorie der Kreiskörper ist in der zweiten Abhandlung zur Theorie der biquadratischen Reste (W. II, S. 102, Fußnote) hinreichend deutlich ausgesprochen. Ein Schritt ähnlicher prinzipieller Natur liegt

1) Unendliche Mengen werden ja und wurden in der Mathematik, von gewissen eng umgrenzten Gebieten abgesehen, von jeher auf Schritt und Tritt in Betracht gezogen; vgl. auch den dritten Absatz von Nr. 4, S. 10. Es handelt sich vielmehr um den aus den unendlichen Mengen durch Abstraktion gebildeten Begriff aktual-unendlicher Zahlen und Größen.

2) Vgl. A. Voß, Über das Wesen der Mathematik (2. Aufl., Leipzig und Berlin 1913), S. 67, Fußnote.

in der Schöpfung des Begriffs der Galoisschen Imaginären in der Analysis residuorum (W. II, S. 217f.); die dort in Aussicht gestellte nähere Erörterung dieses Gegenstands ist freilich unterblieben.

Diese einleitende Übersicht über Gauß' Denken und Schaffen in grundsätzlicher Richtung möge abgeschlossen werden mit einer Bemerkung von Gauß, die sich zwar zunächst auf Funktionen bezieht, aber in ihrer Allgemeinheit erkennen läßt, von welchem durchaus modernen Gesichtspunkt aus Gauß auch den Zahlbegriff und seine Erweiterung letzten Endes betrachtet haben dürfte. In einem Brief an Bessel vom 21. November 1811 äußert er nämlich: „Man sollte überhaupt nie vergessen, daß die Funktionen, wie alle mathematischen Begriffszusammensetzungen, nur unsere eignen Geschöpfe sind, und daß, wo die Definition, von der man ausging, aufhört einen Sinn zu haben, man eigentlich nicht fragen soll was ist? sondern was konveniert anzunehmen? damit ich immer konsequent bleiben kann" (W. X 1, S. 363).

## B. Die Theorie der reellen Zahlen.

### 2. Natürliche Zahlen.

In den Nummern 3 und 6 der auf S. 4 erwähnten, aus früher Zeit stammenden Aufzeichnung gibt Gauß eine Erklärung der natürlichen und der (positiven) rationalen Zahlen, die sich auf das Messen von Größen durch Größeneinheiten oder durch Teile von solchen gründet. Ausgehend von dieser Erklärung entwickelt er in den fünf letzten Nummern (7—11) Definitionen der Addition und der Multiplikation der natürlichen Zahlen und kurze Begründungen der für diese Operationen gültigen formalen Rechengesetze; die inversen Operationen der Subtraktion und der Division werden lediglich insoweit behandelt, als sie im Bereich der natürlichen Zahlen ausführbar sind; auf die Möglichkeit entsprechender Definitionen und Beweise für Bruchzahlen wird nur in einer Fußnote andeutungsweise hingewiesen. Die Addition erklärt Gauß hierbei als die Rechnungsart, die lehrt „aus den Teilen das Ganze zu finden"; das kommutative Gesetz, in dessen loser Formulierung man das assoziative als miteinbegriffen erblicken mag, wird als ein Lehrsatz bezeichnet, „den man als Grundsatz ansehen kann". Es folgt die Definition der Multiplikation als der Operation, die lehrt, daß Vielfache zu finden aus dem Einfachen und der Zahl, „welche angibt, was für ein Vielfaches es

sei"; aus dieser Erklärung werden die kommutativen, assoziativen und distributiven Gesetze unmittelbar gefolgert. Das (Bruchstück gebliebene) Manuskript schließt mit dem Hinweis darauf, daß die beiden an sich möglichen Umkehrungen der Multiplikation untereinander nicht verschieden sind.

Der Bemerkung von Sartorius (s. o. S. 4), wonach Gauß bei der Ausarbeitung dieser Überlegungen ihre Verwendung für den elementaren Unterricht im Auge gehabt haben soll, würde nicht nur der skizzierte Inhalt, sondern auch die teilweise breite und nicht besonders scharfe Form der Darstellung sehr wohl entsprechen. Es wird hiernach schwer zu entscheiden sein, ob Gauß mit seiner Ausarbeitung eine eigentliche, logisch-mathematische Begründung des Rechnens mit den natürlichen Zahlen geben oder vielmehr nur die einschlägigen Definitionen und Gesetze psychologisch plausibel machen wollte; das letztere dürfte nach der Anlage der Aufzeichnung das Wahrscheinlichere sein.

### 3. Negative Zahlen.

Ganz anders verhält es sich mit den grundsätzlichen Bemerkungen zum Begriff der negativen Zahlen, die Gauß in der Selbstanzeige (S. 175f.) macht, um davon ausgehend zu den komplexen Zahlen weiterzuschreiten. Gauß nimmt zwar auch hier zunächst einen ausgeprägt realistischen Standpunkt ein, auf den bei der Besprechung der komplexen Zahlen ausführlicher zurückzukommen sein wird (Nr. 8) und der eine Erweiterung eines gegebenen Zahlbereiches nur dann gerechtfertigt wissen will, wenn den neu aufzunehmenden Gebilden andere Dinge oder Begriffe anschaulich zugeordnet werden können, die ohnehin — etwa auf Grund der Erfahrung oder der räumlichen Anschauung — allgemeine Anerkennung genießen[1]). So sagt er: „so wenig man in der Allgemeinen Arithmetik Bedenken hat, die gebrochenen Zahlen mit aufzunehmen, obgleich es so viele zählbare Dinge gibt, wobei eine Bruchzahl ohne Sinn ist, ebenso wenig durften in jener den negativen Zahlen gleiche Rechte mit den positiven deshalb versagt werden, weil unzählige Dinge kein Entgegengesetztes zulassen: die Realität der negativen Zahlen ist hinreichend gerechtfertigt, da sie in unzähligen andern Fällen ein adäquates Substrat finden . . . . wobei den imaginären Größen ebensogut ein Gegenstand untergelegt

1) Der Gesichtspunkt, daß diese Zuordnung auf die Operationen mit den neuen Zahlgebilden ausdehnbar sein muß, m. a. W. daß die Zuordnung isomorph sein muß, kommt hierbei nicht explizit zum Ausdruck.

werden kann wie den negativen .... Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht der Vernichtung gleichzustellen ist." Dieser Auffassung gibt Gauß aber nun sofort eine merkliche Verschiebung nach der idealistischen Seite hin durch die Bemerkung, daß das adäquate Substrat für die ganzen Zahlen nicht durch „Substanzen (für sich denkbare Gegenstände)" gegeben sei, sondern durch gleichartige und umkehrbare „Relationen zwischen je zweien Gegenständen" aus einer einfachen unbegrenzten Reihe. Er erblickt also den Grundpfeiler der Zahlenreihe in der umkehrbaren Beziehung einer ganzen Zahl zu ihrem Nachfolger und präzisiert damit den Grundgedanken, den nicht nur die an Graßmann und Peano anknüpfende moderne Axiomatik der Zahlenreihe [1]) in den Mittelpunkt rückt, sondern der auch in modernen philosophischen Untersuchungen [2]) als den Kern des Wesens der Zahlenreihe ausdrückend betrachtet wird. Andererseits vermißt man freilich vom mathematischen Standpunkt aus den Hinweis auf die — mittels vollständiger Induktion ohne weitere Voraussetzungen nachweisbare — entscheidende Tatsache, daß die Eigenschaften der Addition und Multiplikation (formale Gesetze), wie sie den natürlichen Zahlen zukommen, mittels geeigneter Definitionen auch für den erweiterten Bereich gesichert werden können, der durch Adjunktion der Null und der negativen Zahlen entsteht.

### 4. Folgen reeller Zahlen. Kleinste obere und größte untere Schranke.

Schon 1791 [3]) hat Gauß Folgen reeller Zahlen untersucht, wie solche bei der Bildung des arithmetisch-geometrischen Mittels aus zwei reellen positiven Zahlen $p$ und $q$ auftreten, und auch im weiteren Verlauf des letzten Jahrzehnts des 18. Jahrhunderts hat er sich vielfach mit unendlichen Zahlenreihen und Potenzreihen sowie mit unendlichen Produkten beschäftigt [4]). Andererseits hat er um jene Zeit auch Veranlassung gehabt, gewisse Fragen der Stetigkeit im Bereich der reellen Zahlen näher zu untersuchen; auf Überlegungen dieser Art wurde er gelegent-

1) Vgl. A. Padoa, C. R. du 2$^{me}$ congrès international des mathématiciens Paris 1900 (Paris 1902), S. 249—256; A. Fraenkel, Journ. f. Math., Bd. 141 (1912), S. 48—51; A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, I. Teil (Leipzig 1915), S. 5—9.

2) P. Natorp, Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften (Leipzig und Berlin 1910), S. 136—140.

3) Vgl. Br. G.-Sch. I, S. 125.

4) Vgl. hierzu die Darstellung bei Schlesinger, ferner auch das Tagebuch.

lich seiner (in der Hauptsache 1797 entstandenen[1]) Inauguraldissertation geführt, und zwar nicht nur bei seinem eigenen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra, sondern namentlich auch bei den vorangehenden kritischen Bemerkungen zu den Beweisversuchen seiner Vorgänger.

So liegt die Vermutung nahe, daß es Gauß nicht unterlassen haben wird, sich solide Grundlagen für seine hierher gehörigen Untersuchungen zu verschaffen und zu diesem Zweck allgemeine Betrachtungen aus der Theorie der reellen Zahlen anzustellen. In der Tat dürfte eine erst jüngst von Schlesinger veröffentlichte und erläuterte Handschrift mit dem Titel „Grundbegriffe der Lehre von den Reihen“[2]) aus der Zeit der Jahrhundertwende stammen. Der Umstand, daß jene Handschrift einen erstaunlich modernen Gedankengang aufweist und daß sie Begriffe und Tatsachen enthält, deren Ursprung bisher in erheblich spätere Zeit verlegt wurde, wird es rechtfertigen, daß hier etwas genauer auf ihren Inhalt eingegangen wird[3]).

Den Gegenstand der Betrachtung bilden Folgen reeller Zahlen (in moderner Bezeichnungsweise; Gauß spricht von Reihen[4]). Gauß bemerkt übrigens einleitend, die Ausdehnung des Begriffs der „Reihe“ auf den „Inbegriff einer jeden Anzahl beliebiger Größen“ würde „wenig Nutzen“ haben; in der Tat lassen sich indes die Überlegungen unverändert auf beliebige (weder abgezählte noch auch nur abzählbare) Mengen reeller Zahlen übertragen, doch betrachtet Gauß eben eine solche Verallgemeinerung offenbar nicht als hinreichend anwendungsfähig. Er sieht eine „Reihe“ als gegeben an, „sobald man das Prinzip, nach welchem die Reihe gebildet wird, (ihr Gesetz) kennt“, und es ist bemerkenswert, daß er von der Möglichkeit spricht, auch in diesem allgemeinen Fall die Folge $(a_n)$ als Funktion des Index $n$ aufzufassen, womit man „den Ausdruck Funktion in einer ausgedehnteren Bedeutung nehmen“ würde, „als bisher geschehen ist“.

Gauß unterscheidet zunächst diejenigen Arten von Folgen, die man in moderner Ausdrucksweise als „nach oben (bezw. unten)

---

1) T. Nr. [80] vom Oktober 1797.

2) Schlesinger, S. 89, 136—140; W. X1, S. 390—394, 395.

3) Es sei hier bemerkt, daß in Nr. 4 jenes Aufsatzes zwei Schreibfehler aus der Handschrift stehen geblieben sind: im zweiten Satz des zweiten Absatzes muß es heißen „die größer als 1“ (statt „kleiner“) und gleich darnach „der größten“ (statt „kleinsten“).

4) Über die wechselnde Bedeutung des Wortes „Reihe“ bei Gauß vgl. Schlesinger, S. 88f.

beschränkt" oder als „nicht beschränkt" bezeichnet, und teilt gemäß der Gesamtheit der hiernach sich ergebenden Möglichkeiten die Folgen in vier Klassen ein. Er beweist ferner, daß eine nach oben (unten) beschränkte Folge eine kleinste obere (größte untere) Schranke[1]) $L$ ($L'$) besitzt, d. h. daß es (für den Fall der Beschränktheit nach oben) eine Zahl $L$ gibt, die von keinem Glied der Folge überschritten wird, während es zu jedem $\bar{L} < L$ Glieder der Folge gibt, die größer als $\bar{L}$ sind (entsprechend die größte untere Schranke für nach unten beschränkte Folgen). Der — im übrigen sehr kurze und elegante, im Vergleich zu Bolzano (s. u.) durchaus moderne — Beweis ist naturgemäß insofern lückenhaft, als die Tatsache, daß jeder Schnitt im Bereich der reellen Zahlen durch eine reelle Zahl erzeugt wird, als selbstverständlich angesehen wird; dies entspricht der vor einer (arithmetischen) Definition der Irrationalzahlen naheliegenden Auffassung, die ja Gauß auch sonst vertritt, so z. B. wenn er am Schluß seines zweiten Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra die Existenz einer reellen Wurzel jeder algebraischen Gleichung ungeraden Grades mit einem „constat" als gegeben hinnimmt (W. III, S. 56). Aber natürlich findet sich der nämliche Mangel auch bei Bolzano[2]), der bisher als der erste Entdecker des Satzes von der Existenz der kleinsten oberen (größten unteren) Schranke einer nach oben (unten) beschränkten Zahlenmenge gegolten hatte, und ebenso bei seinen Nachfolgern bis zu Weierstraß, Meray, Cantor und Dedekind.

Hier ist der Ort, um mit kurzer Unterbrechung der Behandlung der in Frage stehenden Handschrift auf eine Bemerkung

1) Es handelt sich um den Begriff, der häufiger — aber mit mehr Anlaß zu Mißverständnissen — schlechthin als „obere Schranke" bezw. als „obere Grenze" (Weierstraß), ferner auch als „reales oder ideales Maximum" (A. Pringsheim) bezeichnet worden ist; vgl. Enzykl. d. math. Wiss. I 1, S. 72 und Schlesinger in W. X 1, S. 395. Gauß verwendet zunächst für jede obere (untere) Schranke (d. h. für jede Zahl, die von keinem Glied der Folge überschritten (unterschritten) wird) die Bezeichnung „obere (untere) Grenze" und beschränkt diese dann auf die kleinste obere (größte untere) Schranke.

2) B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege (ursprünglich 1817 in d. Abh. d. Ges. d. Wiss. zu Prag erschienen); Wissenschaftl. Klassiker in Facsimile-Drucken, Bd. VIII (Berlin 1894), S. 41 ff.; Ostwalds Klass. Nr. 153, S. 25 ff. — Bolzano nimmt übrigens in dieser Arbeit (Beginn und Nr. V. der Vorrede) auf die drei ersten Gaußschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra ausdrücklich bezug; im Zusammenhang mit der an letzterer Stelle ausgesprochenen Kritik gegen Gauß ist die hier besprochene Gaußsche Handschrift von besonderem Interesse, zeigt sie doch, wie weit Gauß den Gedankengang Bolzanos selbst durchgedacht hatte.

in der (wohl ein wenig früher entstandenen) Gaußschen Inauguraldissertation hinzuweisen. Gelegentlich der Kritik des d'Alembertschen Beweises der Wurzelexistenz kommt schon hier — ebenso wie auch in dem besprochenen d'Alembertschen Beweise selbst — in Nr. 4 des Art. 6 (W. III, S. 10) implizit der Begriff der kleinsten oberen Schranke einer Funktion vor, ohne daß auf den Beweis ihrer Existenz näher eingegangen wird; daß hierbei im komplexen Gebiet operiert wird, ändert sachlich nichts Wesentliches, da nur von reellen Funktionswerten die Rede ist. Dagegen weist Gauß unter Andeutung von Beispielen gegenüber d'Alembert auf das Unrichtige der Annahme hin, daß eine reellwertige Funktion einer komplexen Variablen stets die kleinste obere (größte untere) Schranke, die ihr in einem Beschränktheitsgebiet zukommt, dort auch wirklich erreiche; er bemerkt vielmehr, eine solche Eigenschaft komme allerdings beliebigen ganzen algebraischen Funktionen zu[1]). Dieser letztere Satz, dessen Beweis — mit der auch hier ohne arithmetische Theorie der Irrationalzahlen unvermeidlichen Lücke — Gauß offensichtlich besessen hat[2]), ohne ihn aber zu veröffentlichen, ist ein Spezialfall des zuerst von Weierstraß (in seinen Vorlesungen) bewiesenen Theorems, wonach jede stetige Funktion die nämliche Eigenschaft besitzt[3]); ob Gauß zugleich mit dem Spezialfall auch die (erheblich tiefer liegende) allgemeine Tatsache erkannt hatte, wird dahingestellt bleiben müssen, da er sich über die Art seines Beweises nicht ausgesprochen hat.

Es ist übrigens merkwürdig, daß Gauß die nämliche Lücke, die er bei d'Alembert und bei Clausen (s. Fußnote [2])) rügt, in dem Cauchyschen Beweis des Fundamentalsatzes[4]), dem er in einem Brief an Drobisch vom 14. August 1834 sogar den Vorzug vor seinen drei eigenen Beweisen gibt (W. X1, S. 107), anscheinend nicht bemerkt hat; dieser Beweis macht wesentlichen Gebrauch von der bei d'Alembert gerügten Annahme. In der im Gauß-Archiv vorhandenen, von E. Heine stammenden Ausarbeitung einer

1) Vgl. hierzu auch den Art. 24 der Dissertation (W. III, S. 29 f.).

2) In einem Brief an Schumacher vom 20. Juni 1840 äußert sich Gauß (gelegentlich eines ihm übersandten Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra von Th. Clausen [abgedruckt in den Astron. Nachr., Bd. 17 (1840), Spalte 325 ff.], der gleichfalls die von Gauß zurückgewiesene Annahme benutzt) dahin, dieser Mangel lasse sich zwar (nämlich bei ganzen algebraischen Funktionen) heben, aber er habe den bezüglichen Beweis im Art. 24 seiner Dissertation darum nicht ausgeführt, „weil dies, im Geiste des Rigor antiquus, nicht ohne einige Umständlichkeit geschehen kann“ (W. X1, S. 108).

3) Vgl. Journ. f. Math., Bd. 72 (1870), S. 141 Fußnote.

4) Vgl. Schlesingers Literaturangaben in W. X1, S. 110.

Vorlesung von Gauß über die Theorie der imaginären Größen aus dem Winter 1839/40 (s. u. S. 31) finden sich Darstellungen des ersten und dritten Gaußschen, sowie des Cauchyschen Beweises; in der letzteren kehrt die fragliche Lücke abermals und zwar auffallenderweise in der folgenden ganz offen zu Tage tretenden Form wieder: „Wir können dies [daß nämlich, falls $f(x+iy) = P+iQ$ gesetzt wird, $l = \sqrt{P^2+Q^2}$ das Minimum 0 erreicht] so beweisen, daß wir zeigen, wenn wir annehmen, der Modulus $l$ sei ein Minimum, aber noch positiv, sich noch ein kleinerer Modulus finden lasse."

Auf die hiermit nahe verwandte Lücke, die sich in der Gaußschen „demonstratio tertia" des Fundamentalsatzes (W. III, S. 57—64) findet, wird in einem späteren Abschnitte dieses Aufsatzes (im zweiten Teil) eingegangen werden.

## 5. Limesbegriff.

Wir kehren wieder zur Besprechung des Nachlaßstückes zurück. Gauß entwickelt dort weiter den Begriff und die Existenz des limes superior (limes inferior) einer nach oben (unten) beschränkten Zahlenfolge, dem er die Bezeichnung „letzte obere (untere) Grenze" beilegt. Er gelangt zum Begriff des limes superior, indem er sukzessive das erste, die ersten zwei, die ersten drei, ... Glieder der nach oben beschränkten Folge wegläßt und die kleinsten oberen Schranken der so entstehenden Folgen betrachtet; diese Schranken bilden ihrerseits eine nicht aufsteigende Folge. Ist die Folge gleichzeitig nach unten beschränkt, so gewinnt man auf analoge Weise eine nicht absteigende Folge, und kein Glied der ersteren Folge wird kleiner sein als irgend ein Glied der letzteren. Endlich besitzt die erstere Folge eine größte untere, die letztere eine kleinste obere Schranke, die eben den limes superior bezw. inferior der ursprünglich gegebenen Folge darstellt. Limes superior und limes inferior werden also bei Gauß durch Bildung kleinster oberer und größter unterer Schranken gewonnen, nicht auf dem heute üblichen und auch wohl sachlich näherliegenden Weg der Aufsuchung der Häufungsstellen; der allgemeine Begriff der Häufungsstelle tritt hier überhaupt nicht auf, auch nicht implizit (die kleinste obere Schranke braucht ja, wenn sie das Maximum der Folge ist, keine Häufungsstelle zu bilden).

Ist endlich der limes superior, der den limes inferior keinesfalls unterschreiten kann, diesem im besonderen gleich, so führt Gauß für den gemeinsamen Wert die Bezeichnung „absolute Grenze" der ursprünglichen Folge ein. Er schließt den (Fragment ge-

bliebenen) Aufsatz mit der Bemerkung, daß die Summe $(a_n + b_n)$ zweier Folgen, die je eine absolute Grenze besitzen, die Summe dieser absoluten Grenzen zur absoluten Grenze hat.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß sich Gauß hier in seinen Jugendjahren im Besitz der kleinsten oberen (größten unteren) Schranke vor Bolzano, in dem des limes superior (inferior) vor Cauchy[1]) befindet und daß er, gestützt auf beide Begriffe, in voller Allgemeinheit und in einer (bis auf die durch den Mangel einer arithmetischen Theorie der Irrationalzahlen bewirkte Lücke völlig strengen) arithmetischen Darstellung vor Cauchy den Begriff des Grenzwerts einer Zahlenfolge, die einen solchen besitzt, entwickelt. Er hat damit das von J. Wallis[2]) begonnene Unternehmen der rein arithmetischen Klärung dieses Grenzwertbegriffs als erster zu völligem Abschluß gebracht. Da das besprochene Nachlaßstück erst vor wenigen Jahren, als sein Inhalt längst überholt — wenn auch noch ganz unerwartet modern — war, von Schlesinger veröffentlicht worden ist, so mußte ihm die bei den anderen grundsätzlichen Ideen von Gauß so lebhaft gewesene Wirkung auf die mathematische Mit- und Nachwelt versagt bleiben; erst Weierstraß war es vorbehalten, Gedankengänge ähnlicher Allgemeinheit anzugreifen und zu vollständigem Abschluß zu bringen.

Es liegt nahe zu bedauern, daß Gauß diese Betrachtungen so unvermittelt abbricht (nicht einmal mehr auf die Konvergenz des Produkts konvergenter Folgen wird eingegangen) und daß er insbesondere nicht diese Überlegungen als Ausgangspunkt zur Entwicklung einer arithmetischen Theorie der irrationalen Zahlen gewählt hat. Der hierfür entscheidende Gedanke, die Definition neuer Zahlen durch Folgen (oder Mengen) bekannter[3]), läßt sich

---

1) Übrigens findet sich dieser Begriff bei Cauchy (Analyse algébrique (Paris 1821), S. 132; Œuvres, (2) t. 3, S. 121) nur ganz gelegentlich und keineswegs in der Allgemeinheit wie bei Gauß.

2) Opera, Bd. 1 (Oxford 1693), S. 357; über das zeitliche und sachliche Verhältnis von Gregorius a St. Vincentio und seinen Schülern zu Wallis in bezug auf den Limesbegriff vergleiche man die Bemerkungen von J. Timtchenko und C. R. Wallner in der Biblioth. Math., (3) Bd. 1 (1900), S. 511 u. (3) Bd. 4 (1903), S. 250—259. Es sei als bemerkenswert hervorgehoben, daß in der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen ein zweites Beispiel einer grundsätzlichen Frage vorliegt, die von Wallis zuerst ernstlich in Angriff genommen, von Gauß zum Abschluß gebracht worden ist (vgl. unten Nr. 10).

3) Vor der Schöpfung der modernen arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen scheint namentlich Dirichlet den fraglichen Grundgedanken scharf erfaßt zu haben; vgl. eine hierauf bezügliche Mitteilung Dedekinds im Vorwort zu seiner Schrift „Was sind und was sollen die Zahlen?“ (Braunschweig 1888), S. XI.

nirgends bei Gauß nachweisen[1]). Vielleicht hat wesentlichen Anteil am Unterbleiben der Fortführung dieser wie weiterer in die nämliche Periode fallender Überlegungen die damals besonders starke Inanspruchnahme von Gauß durch andere Arbeiten (namentlich durch die Schlußredaktion der Disquisitiones arithmeticae, erneute Studien über die Grundlagen der Geometrie und die bald einsetzenden astronomischen Untersuchungen).

### 6. Weitere Bemerkungen. Zusammenfassung.

Im Zusammenhang mit dem zuletzt behandelten Gegenstand sind zunächst zu der bereits berührten Inauguraldissertation noch einige weitere Bemerkungen zu machen. In ihr wird bekanntlich das algebraische Problem auf gewisse geometrische Betrachtungen zurückgeführt; aber am Schluß des Beweises (in Art. 23; W. III, S. 29) bezeichnet Gauß die Arithmetisierung des Beweises als sehr wohl möglich, er habe nur im Interesse größerer Anschaulichkeit und Durchsichtigkeit die geometrische Beweismethode gewählt.

Die fragliche Arithmetisierung des ersten (und vierten) Gaußschen Beweises für den Fundamentalsatz der Algebra sowie namentlich die Ausfüllung einer bei Gauß noch vorhandenen und von ihm selbst bereits hervorgehobenen Lücke ist erst kürzlich von A. Ostrowski durchgeführt worden; die fragliche Untersuchung folgt unten als Anhang, doch wird erst im zweiten Teil dieses Aufsatzes auf den Gegenstand näher eingegangen werden. Das wesentliche Hilfsmittel aus der Theorie der reellen Zahlen und Funktionen bildet bei Ostrowski, neben der Existenz der kleinsten oberen Schranke einer beschränkten Zahlenmenge (vgl. oben Nr. 4), die Tatsache, daß eine ganze rationale Funktion der reellen Variabeln $x$ und $y$ für jeden Wert von $x$ gleichmäßig stetig ist inbezug auf jedes endliche Intervall der Variabeln $y$ (s. u. S. 54); der Beweis dieser Tatsache bereitet für ganze rationale Funktionen keinerlei Schwierigkeiten. Ob Gauß bei seiner angeführten Bemerkung ein Gang des Beweises in dieser Richtung (wenn auch nicht auf moderne Art herausgearbeitet) vorgeschwebt

---

1) Auch bei der Bildung des arithmetisch-geometrischen Mittels wird die Existenz der reellen Zahl, gegen die die auftretenden Zahlenfolgen konvergieren, im Sinne der Stetigkeit des Zahlenkontinuums vorausgesetzt und nicht etwa, wie es der modernen Auffassung entsprechen würde, eine definitionsgemäße Zuordnung neuer Zahlgebilde zu den Zahlenfolgen vorgenommen, auf Grund deren sich dann die Stetigkeit beweisen läßt.

hat oder ob er sich die Arithmetisierung auf eine wesentlich andere Art gedacht haben mag, wird wohl eine offene Frage bleiben. Übrigens ist Gauß gelegentlich des (in der Hauptsache gleichgerichteten) vierten Beweises nicht mehr auf die Arithmetisierung im eigentlichen Sinn zurückgekommen, sondern er bemerkt hier nur, der Inhalt seiner Argumentation gehöre „einem höhern von Räumlichem unabhängigen Gebiete der allgemeinen abstrakten Größenlehre an, dessen Gegenstand die nach der Stetigkeit zusammenhängenden Größenkombinationen sind ... und in welchem man sich auch nicht bewegen kann ohne eine von räumlichen Bildern entlehnte Sprache“ (W. III, S. 79); daß es sich hierbei um Gedankengänge der Analysis Situs handelt, in denen Gauß die rein arithmetischen und mengentheoretischen Gesichtspunkte nicht in erster Linie am Herzen lagen, zeigt das W. X 1, S. 407—416 abgedruckte Nachlaßstück, in dessen Eingang (Nr. 2) sich Gauß ausdrücklich auf die soeben angeführte Stelle bezieht und deren fünf erste Nummern wohl als Eingang in jene „abstrakte Größenlehre“ gedacht sind.

Entsprechend der chronologischen Reihenfolge werde weiter eine gelegentliche Bemerkung von Gauß aus der Selbstanzeige berührt. Dort bezeichnet Gauß das ganzzahlige Punktgitter in der Ebene als ein System von Gegenständen, die (im Gegensatz zu den ganzzahligen Punkten einer Geraden) „nicht in eine, wenngleich unbegrenzte, Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen“, die also „eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen“ bilden (W. II, S. 176). Diese Bemerkung legt die Vermutung nahe, daß Gauß die Tatsache entgangen sei, wonach eine Doppelfolge sich auch als einfache Folge schreiben läßt (in der Sprache der Mengenlehre ausgedrückt: daß $\aleph_0 . \aleph_0 = \aleph_0$ ist). Ob dem in der Tat so ist oder ob Gauß die Umordnung der Gitterpunkte zu einer einfachen Folge deshalb ausgeschlossen hat, weil dabei benachbarte Punkte notwendig voneinander gerissen werden, wird kaum zweifelsfrei zu entscheiden sein.

Auf Fragen der reellen Zahlenlehre ist Gauß nochmals gegen Ende seines Lebens zurückgekommen in dem Nachlaßstück „Konvergenz der Reihen, in welche die periodischen Funktionen einer veränderlichen Größe entwickelt werden“ (vgl. W. X 1, S. 400—419), für dessen Entstehungszeit und Anlage auf Schlesingers Bemerkungen W. X 1, S. 437 ff. verwiesen sei. In den vorhandenen Fassungen des Nachlaßstückes sind die der reellen Zahlenlehre zugehörigen Partien sehr in den Hintergrund getreten; sie beschränken sich im wesentlichen auf eine Klassifikation von Zahlenfolgen in bezug auf ihre Konvergenz sowie auf gewisse Be-

merkungen zu denjenigen Fragen, die in dem Infinitärkalkül von P. du Bois-Reymond[1]) auftreten.

Endlich sei noch hervorgehoben, wie wesentliche Verdienste sich Gauß, ständig die Rückkehr zum „rigor antiquus" anstrebend, um die Aufstellung und Durchführung der Forderung erworben hat, beim Gebrauch unendlicher Reihen sich auf konvergente zu beschränken. In dieser Beziehung genügt der Verweis einerseits auf den Art. 6 (Nr. 3) seiner Dissertation (W. III, S. 9f.) und namentlich auf eine Stelle in dem Brief an Schumacher vom 1. September 1850 (W. X 1, S. 435), andererseits auf die „Disquisitiones generales" über die hypergeometrische Reihe (W. III, S. 123ff., namentlich S. 139ff.)[2]). Dagegen ist in bezug auf ein allgemeines Kriterium der Konvergenz nur eine gelegentliche Bemerkung in dem Brief an Wolfgang Bolyai vom 20. April 1848 (Br. G.-Bolyai, S. 133f.) nachzuweisen, wo er ein von W. Bolyai aufgestelltes Konvergenzkriterium unter Angabe eines Gegenbeispiels zurückweist und ihm selbst ein (irrigerweise als notwendig und hinreichend vermutetes) Kriterium gegenüberstellt[3]).

Überblickt man im Zusammenhang das, was die Theorie der reellen Zahlen Gauß an Bereicherung verdankt, so ergibt sich im Vergleich zu anderen Gebieten ein etwas dürftiges Bild. Daran hat sicherlich zu einem wesentlichen Teile die Ungunst der Verhältnisse schuld; zweimal — um 1800 und um 1850 — können wir ihn als wesentlich beschäftigt mit Fragen dieses Gebiets nachweisen; das erstemal sehen wir ihn durch dringendere anderweitige Arbeiten abgelenkt, das zweitemal durch die im hohen Alter abnehmende Arbeitsfähigkeit und Arbeitsfreudigkeit[4]) an weiterer

1) Für die Literatur vgl. Schlesingers Angaben W. X 1, S. 437. Es ist bemerkenswert, daß Gauß, wie der Titel des fraglichen Nachlaßstückes zeigt, mit diesen Untersuchungen ein ähnliches Ziel verfolgte wie P. du Bois-Reymond, der von seinen Betrachtungen äußert, sie seien „fast in allen ihren Teilen aus dem Bedürfnis entsprungen, gewisse Sätze über Konvergenz und Divergenz von Fourierschen Reihen allgemein und unter genauer Feststellung ihres Gültigkeitsbereiches zu beweisen" (Math. Ann., Bd. 8 (1875), S. 367).

2) Diese früheste verhältnismäßig strenge Konvergenzuntersuchung (vgl. A. Pringsheims Bemerkung in der Enzykl. d. math. Wiss. I 1, S. 79, Fußn. 159) entstammt also der nämlichen Zeit (1811/12), da Fourier den ersten ernsthaften Versuch einer strengen Definition der Reihenkonvergenz machte (Mém. de l'Acad. des sc. de l'Institut de France, (2) t. 4, Années 1819/20 (Paris 1824), S. 315; Œuvres, t. 1 (Paris 1888), S. 221).

3) Vgl. Stäckels Bemerkungen dazu, ebd., S. 195f.

4) Vgl. Sartorius, S. 69.

Ausführung gehindert. Andererseits aber hat Gauß offenbar in der Tat diesem Gebiet im Vergleich zu anderen eine verhältnismäßig geringe Beachtung geschenkt. Wohl hat er sich den Ansichten der Vergangenheit da entgegengestellt, wo sie — wie bei der Benutzung divergenter Reihen — zu tatsächlichen Fehlern führen konnten; aber die Verschärfung der alten Begriffsbildungen und die Schöpfung neuer lag ihm hier ersichtlich unvergleichlich viel weniger am Herzen als z. B. in der Lehre von den komplexen Zahlen. Die Eigenschaften reeller Zahlenfolgen haben ihn nur in beschränktem Maß, die Frage eines allgemeinen Konvergenzkriteriums nur ganz gelegentlich beschäftigt, und der Mangel einer arithmetischen Theorie der Irrationalzahlen, der allen damaligen Untersuchungen derartiger Gegenstände den vollen rigor antiquus versagen mußte, scheint ihm nicht bewußt geworden zu sein[1]).

Es ist übrigens erwähnenswert, daß auch auf diesem sein Interesse verhältnismäßig wenig fesselnden Gebiete sich ganz wie vielfach sonst (freilich keineswegs überall) die Erscheinung zeigt, daß das Wesentliche und Grundsätzliche aller seiner einschlägigen Überlegungen und Resultate bereits in der frühen Jugend vorliegt und von einer merklichen Entwicklung keinerlei Anzeichen zu finden sind.

So beiläufig aber diese Überlegungen von Gauß angestellt sein mögen, auch sie tragen des Meisters Stempel; enthalten sie

---

1) Die einzige, freilich ganz unbestimmt gehaltene Andeutung in dieser Richtung könnte man allenfalls in der auf S. 12, Fußn. 2) angeführten Stelle aus einem Brief an Schumacher vom 20. Juni 1840 („nicht ohne einige Umständlichkeit") erblicken.

Bei dieser Gelegenheit sei hingewiesen auf die W. II, S. 181 abgedruckte, 1809 in den Gött. Gelehrten Anzeigen erschienene Gaußsche Rezension einer anonym veröffentlichten Schrift „Recherches sur l'irréductibilité Arithmétique et Géométrique des nombres et de leurs puissances. 1808" (ohne Druckort), deren Zweck, wie sich Gauß ausdrückt, „dahin geht, die irrationalen Wurzelgrößen in Gestalt von rationalen Größen darzustellen". Diese Schrift stellt offenbar den mathematisch wertlosen Versuch eines Dilettanten dar, und es ist zunächst auffallend, daß Gauß jede kritische Bemerkung vermeidet. Der Grund hiervon liegt höchstwahrscheinlich in folgendem: der Verfasser der Schrift scheint C. v. Dalberg, Fürstprimas von Frankfurt a. M., gewesen zu sein, der um eben jene Zeit Gauß in der Angelegenheit der Napoleonischen Kriegskontribution in zartestfühlender Weise aus finanzieller Verlegenheit befreit hatte (vgl. zwei Briefe von Gauß an Olbers aus dem Januar/Februar 1808; s. W. Olbers, Sein Leben und seine Werke (herausg. v. C. Schilling), II 1 (Berlin 1900), S. 404f. und 408). So wird Gauß aus persönlichen Gründen den Wunsch gehabt haben, eine wissenschaftliche Wertung der Schrift zu vermeiden. Der Wortlaut der Rezension stimmt mit dieser Annahme sehr gut überein.

doch Ergebnisse, die teilweise erst erheblich später in der mathematischen Literatur auftauchen und einen ganz überraschend modernen Charakter tragen.

## C. Die Theorie der komplexen Zahlen.

Kein Gegenstand axiomatischen Charakters, ausgenommen die nichteuklidische Geometrie, hat Gauß' Interesse in ähnlicher Weise von seinen Jugendjahren an erregt und dauernd wachgehalten wie die auf die gewöhnlichen komplexen Zahlen[1]) bezüglichen Fragen: diejenige nach der Notwendigkeit bezw. Zweckmäßigkeit der Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen zu dem der komplexen, und die weitere nach einer einwandfreien Begründung, die den neuen Mitgliedern des Zahlenreichs die Gleichberechtigung mit dessen ursprünglichen Bürgern gewährleisten kann.

Es soll hier zunächst eine chronologisch geordnete Übersicht folgen, die den Gang der Gedankenentwicklung bei Gauß nach Maßgabe des vorhandenen Materials anzudeuten versucht, und hieran ein zusammenfassender Überblick unter Berücksichtigung von Gauß' Vorgängern und Zeitgenossen sowie der neueren Entwicklung der einschlägigen Ideen angeschlossen werden. Daß dabei, namentlich im ersten Teil, manche Ausführungen von Bachmann, Schlesinger und Stäckel wieder aufgenommen werden müssen, ist unvermeidlich; es handelte sich eben für Gauß bei den komplexen Zahlen keineswegs ausschließlich, ja nicht einmal in erster Linie, um die Erweiterung des Reichs der Zahlen an und für sich, sondern gleichzeitig um die Ausnutzung dieser Erweiterung für Zahlentheorie, Analysis (Funktionentheorie) und Geometrie. Unter Zurückstellung dieser Anwendungen ist der Zweck der folgenden Ausführungen die zusammenhängende Darstellung und Würdigung dessen, was die einschlägigen Überlegungen von Gauß für die Grundlegung der Arithmetik bedeuten.

### a) Die Aufeinanderfolge und Entwicklung der Ideen bei Gauss.

#### 7. Die Frühzeit (bis etwa 1825).

Schon in den frühesten Jahren, jedenfalls von 1796 an, hat sich Gauß der komplexen Zahlen bedient. Während das Tagebuch unter dem 30. März 1796 mit der Entdeckung der Prinzipien der Kreisteilung beginnt, zeigt ihn (vgl. Schlesinger, S. 18) die Tage-

1) Die Bezeichnung „komplexe Zahl" führt Gauß erst 1831 ein, s. u. Nr. 8.

buchnotiz vom 19. März 1797 im Besitz der imaginären Periode der lemniskatischen Funktionen, deren Entdeckung ihn anregt, die komplexen ganzen rationalen Zahlen den reellen ganzen rationalen Zahlen an die Seite zu stellen (vgl. Schlesinger, S. 30). Doch sind diese Tatsachen an sich vom Standpunkt der Zahlenlehre aus noch wenig verwunderlich, da ja der durch das Bedürfnis gebotene und von der grundsätzlichen Frage der Berechtigung ganz absehende Gebrauch des Imaginären auch schon bei den Gauß vorangehenden Mathematikern durchaus gang und gäbe war; gehört doch sogar die Erkenntnis der Beziehung der Gleichung $x^n = 1$ zur Kreisteilung (vgl. Stäckel, S. 78) und die gelegentliche Untersuchung gewisser Funktionen für komplexe Argumentwerte [1]) schon früheren Perioden des 18. Jahrhunderts an. Als gewichtiger ist die von Gauß vielleicht schon zu dieser Zeit allgemein ins Auge gefaßte Verwendung der komplexen Zahlen als unabhängiger Veränderlicher in der Funktionentheorie einzuschätzen; für die lemniskatischen Funktionen ist sie gesichert, aber auch für die Betrachtung der allgemeinen Fragen kommt die vom 15. April 1797 datierte Notiz auf dem (nicht zu den Tagebuchaufzeichnungen selbst gehörigen) letzten Blatte des Tagebuchs (vgl. W. X 1, S. 515) in Betracht, während es fraglich ist, ob auch die aus dem Oktober 1798 stammende Tagebuchnotiz Nr. 95 [2]) hierher gehört.

Eine erhebliche Bedeutung nach der uns hier interessierenden Richtung erhalten aber all diese Tatsachen durch zwei Bemerkungen von Gauß, von denen die eine aus dieser frühen Periode selbst stammt, während die andere einen Rückblick aus einem um mehrere Jahrzehnte späteren Zeitpunkt darstellt; aus beiden zusammengenommen scheint hervorzugehen, daß Gauß schon um jene Zeit im Besitz der wesentlichsten Bestandteile jener grundsätzlichen Anschauungen über das Wesen der komplexen Zahlen gewesen ist, die er in der Öffentlichkeit erst 1831 ausgesprochen hat. Im Art. 91 der Disqu. arithm. (im 3. Abschnitt, der, wie Bachmann ausführt, seiner Entstehung nach spätestens auf das Jahr 1796, der endgültigen Niederschrift nach wohl auf das folgende Jahr zurückgeht, vgl. W. X 2, S. 5 ff.) schreibt Gauß: „... numeris formarum $8n+3$, $8n+7$ positive acceptis indices quasi imaginarii tribuendi forent. Quos introducendo calculus indicum ad algorithmum perquam simplicem re-

1) Vgl. Stäckel in Bibl. Math., (3) Bd. 1 (1900), S. 109—128.

2) „Novus in analysi campus se nobis aperuit, scilicet investigatio functionum etc.“; vgl. die dazu gehörigen Bemerkungen Schlesingers (W. X 1, S. 536—538) und die Bemerkung Bachmanns W. X 2, S. 55.

duci potest. . . . hoc negotium ad aliam occasionem nobis reservamus, quando forsan fusius quantitatum imaginariarum theoriam, quae nostro quidem iudicio a nemine hactenus ad notiones claras est reducta, pertractare suscipiemus." [1]) Andererseits bezeugt Gauß in einem vom 14. August 1834 datierten Briefe an Drobisch seine Freude darüber, daß dieser in einer damals erschienenen algebraischen Schrift auf die von Gauß „vor einigen Jahren zuerst in nuce bekanntgemachten, obwohl schon seit fast 40 Jahren gehegten Grundansichten über die imaginären Größen eingegangen" sei [2]).

Läßt sich so höchstwahrscheinlich die Entstehung von Gauß' grundsätzlichen Ansichten über das Wesen der komplexen Größen in den Umrissen auf (spätestens) das Jahr 1796 ansetzen, ohne daß aus diesem Jahre bereits eine diesen Gegenstand betreffende Niederschrift nachweisbar wäre, so enthält die Inauguraldissertation (W. III, S. 1—30), die 1797 entstanden ist (vgl. T. Nr. 80), bereits ausdrückliche Bemerkungen, bei denen wir eingehender verweilen müssen.

Vor allem ist in negativer Richtung allgemein hervorzuheben, daß hier Gauß eine auffallende Scheu vor der Verwendung der komplexen Zahlen zeigt, eine Scheu, die sich auch schon im Titel der Abhandlung ausspricht. Es handelt sich dabei zunächst um das Bestreben, dem Operieren mit komplexen Zahlen und ihrer geometrischen Versinnlichung aus dem Wege zu gehen, was außer im Schluß des Art. 2 (und im Beginn des Art. 15) vor allem darin hervor-

---

1) W. I, S. 71. Es ist also anzunehmen, daß Gauß diese Sätze in dem nämlichen Jahre (1797) niedergeschrieben hat, in dem die Wesselsche Abhandlung (s. u. Nr. 10) der Dänischen Akademie vorgelegt worden ist. — Um die Bedeutung einer derartigen, mehr beiläufig von Gauß gemachten Bemerkung zu würdigen, vergleiche man die bezügliche Stelle aus dem Brief an Encke vom 18. August 1832, wo Gauß schreibt: „Es ist von jeher mein gewissenhaft befolgter Grundsatz gewesen, solche Andeutungen, die aufmerksame Leser in jeder meiner Schriften in großer Menge finden (sehen Sie z. B. meine Disquisit. Arithmet. pag. 593 [Art. 335; W. I, S. 412 f.]) stets dann erst zu machen, wenn ich den Gegenstand für mich selbst ganz abgemacht habe" (W. XI 1, S. 84).

2) W. X 1, S. 106. Vgl. dazu auch die unten (S. 30) angeführte Stelle aus dem Brief an Graßmann vom 14. Dezember 1844 („seit fast einem halben Jahrhundert"). — Dafür, daß die Angabe „seit fast 40 Jahren" zutrifft, spricht auch der Umstand, daß von der Entdeckung der geometrischen Versinnlichung der komplexen Größen im Tagebuch nicht die Rede ist, der Gedanke also noch auf die Zeit vor Beginn des Tagebuchs (1796) zurückgehen dürfte. In bezug auf die Klarheit der Gedankenfolge freilich hat im Laufe des fraglichen Zeitraums, wie im folgenden noch zu zeigen sein wird, bei Gauß unzweifelhaft eine Entwicklung stattgefunden.

tritt, daß Gauß die ganze geometrische Überlegung tatsächlich in der komplexen Zahlenebene durchführt[1]), ohne dies irgendwie hervorzuheben. Über diese mehr formale Zurückhaltung hinaus, bei der vor allem die Scheu vor dem „Geschrei der Böoter" mit maßgebend gewesen sein mag[2]), zeigt sich seine Bedenklichkeit gegenüber den komplexen Zahlen auch in dem folgenden Satz der Fußnote zu Art. 3 (von den hier genannten [quantitates] impossibiles wird sogleich noch zu sprechen sein): „Ceterum haud negaverim, ea quae hic contra impossibilium abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obiici posse". Übrigens zielt Gauß mit dieser an und für sich freilich etwas skeptisch klingenden Ausdrucksweise offenbar nur auf vorläufige Einwände gegen die mangelhaft begründeten imaginären Größen.

Andererseits aber wendet sich Gauß im Eingang der Dissertation und im ersten Teil, der der Kritik an den Beweisversuchen seiner Vorgänger gewidmet ist, gegen falsche Vorstellungen über die komplexen Zahlen (und über den Zahlbegriff überhaupt) mit einer Deutlichkeit und gedanklichen Schärfe, wie sie auf dem Gebiet der Grundlagen der Arithmetik in jener Zeit nicht wieder gefunden wird. Er rügt namentlich (Art. 3 und 8) die Auffassung, wonach die Existenz irgend welcher Wurzeln einer gegebenen algebraischen Gleichung ein Postulat wäre und die Gleichung daher, falls ihr durch reelle oder komplexe Zahlen nicht genügt werden könnte, jedenfalls durch andere „quantitates impossibiles" befriedigt werden müßte[3]); weiter äußert er sich scharf dagegen, daß mit derartigen postulierten unmöglichen Größen, „wahren Schatten von Schatten", sogar in gewöhnlicher Weise gerechnet werde.

Neben dieser Ablehnung hypothetischer Gleichungswurzeln außerhalb des Bereichs der komplexen Zahlen[4]) enthalten endlich

---

1) Daß dies an sich noch nicht beweisen würde, daß Gauß damals über die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen verfügte, wird bei Stäckel, S. 83 hervorgehoben. Vgl. auch die Fußnote 1) bei Schlesinger, S. 32.

2) Diese Zurückhaltung ist es wohl auch, die ihn veranlaßt, das von Euler zuerst im Geburtsjahr von Gauß (vgl. Stäckel in der Ztschr. f. math. u. naturwiss. Unterricht, Jhrg. 38 (1907), S. 302) gebrauchte und durch Gauß selbst später zum Gemeingut der Mathematiker gewordene Zeichen $i$ (das Cauchy erst von 1847 an verwendet) in der Dissertation (nicht mehr aber in den Disquisitiones arithmeticae) noch zu vermeiden.

3) Man vergleiche demgegenüber jedoch die moderne, von Kronecker und seinen Nachfolgern angebahnte arithmetische Auffassung, s. u. S. 40 oben.

4) Für den Zusammenhang mit der Frage der höheren komplexen Zahlen vergleiche unten Nr. 13.

die Artikel 2 und 3 und die besonders interessante Fußnote zu letzterem auch kritische Bemerkungen zur Theorie der komplexen Zahlen selbst. Gauß schildert zunächst den Hergang der Einführung der komplexen Zahlen historisch mit verhaltener Kritik, die nur in der Ausdrucksweise von der „libertas, qua omnes recentiores analystae usi sunt" deutlicher durchklingt: man habe eine Größe $\sqrt{-1}$ ersonnen, weil sich mit ihrer Hilfe augenscheinlich die Wurzelexistenz für die Gleichungen 2., 3. und 4. Grades sichern ließ, und habe auf Grund dieser Tatsache die Größen der Form $a+b\sqrt{-1}$ als eine ganz besondere Größenart in die Analysis eingeführt; mit welchem Rechte, wolle er an dieser Stelle nicht erörtern. Weiter wendet er sich gegen die Bezeichnung „unmögliche", die nur solchen Größen zukomme, deren Definition einen Widerspruch enthält; die Betrachtung von Größen, deren Möglichkeit noch nicht gesichert ist, müsse entgegen vielfacher Übung auch hervorragender Mathematiker grundsätzlich ausgeschlossen bleiben, während die Beibehaltung der komplexen Größen aus mehreren Gründen richtiger erscheine als ihre Verwerfung, wenn sie nur „satis solide stabiliantur". Das (der Publikationszeit nach früheste) Versprechen einer diese Bedingung befriedigenden Begründung der komplexen Zahlen bildet den Abschluß dieser Bemerkungen.

Während der Zeitraumes 1799—1811 hat Gauß zwar die komplexen Zahlen und ihre räumliche Versinnlichung sowohl für Algebra (Kreisteilung) und Geometrie wie namentlich für seine funktionentheoretischen Untersuchungen ausgiebig benutzt, nicht aber Betrachtungen grundsätzlicher Art angestellt. In unserem Zusammenhang ist höchstens erwähnenswert die W. VIII, S. 103 wiedergegebene, offenbar aus dem Jahre 1805 stammende Zeichnung[1]) als früheste nachweisbare tatsächliche Benutzung der komplexen Zahlenebene sowie der Gebrauch des Ausdrucks „Zug komplexer Werte" (W. X 1, S. 427) in einer wahrscheinlich[2]) gleichfalls aus dem Anfang des 19. Jahrhunderts stammenden Aufzeichnung; dieser Ausdruck, für Fragen der Analysis Situs in der Zahlenebene gebraucht, wirft helles Licht auf seine damalige Vertrautheit mit dieser Betrachtungsweise. Weiter zeigt uns der W. X 1, S. 546 abgedruckte und jedenfalls vor dem 6. Mai 1800

1) Vgl. die dortigen Bemerkungen Frickes und die Darstellung bei Schlesinger, S. 64—66.

2) Vgl. Schlesingers Bemerkungen in W. X 1, S. 443.

niedergeschriebene Zettel[1]) Gauß im Besitz einer Versinnlichung der komplexen Zahlen auf der Kugelfläche; in seinen grundsätzlichen Betrachtungen ist Gauß auf diese Art der räumlichen Versinnlichung nicht mehr zurückgekommen[2]), offenbar weil ihm die Darstellung in der Ebene als „reineres Beispiel" erschienen ist (vgl. seinen Brief an Drobisch vom 14. August 1834, W. X 1, S. 106). Endlich stammt auch die „erlösende Eingebung" für die vollberechtigte Aufnahme der komplexen Zahlen in die Zahlentheorie wahrscheinlich (Bachmann, S. 55) aus dem fraglichen Zeitraum; wie schon Jacobi[3]) bemerkt hat, dürfte er auf diesen tiefliegenden und weittragenden Gedanken, der bei Gauß den letzten Ausschlag für die gleichberechtigte Einbürgerung der komplexen Zahlen im Zahlenreich gegeben hat, durch seine erfolgreichen Untersuchungen über die lemniskatischen Funktionen geführt worden sein.

Damit kommen wir zu dem berühmten Brief an Bessel vom 18. Dezember 1811[4]), der uns Gauß — freilich nicht erst seit dieser Zeit (vgl. die Bemerkung bei Stäckel, S. 81) — im Besitz der Grundlagen der allgemeinen Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln zeigt. Für unsere Zwecke seien nur die zwei folgenden Stellen aus diesem Brief angeführt: „Zuvörderst würde ich jemand, der eine neue Funktion in die Analyse einführen will, um eine Erklärung bitten, ob er sie schlechterdings bloß auf reelle Größen (reelle Werte des Arguments der Funktion) angewandt wissen will und die imaginären Werte des Arguments gleichsam nur als ein Überbein ansieht, oder ob er meinem Grundsatz beitrete, daß man in dem Reiche der Größen die imaginären $a + b\sqrt{-1} = a + bi$ als gleiche Rechte mit den reellen genießend ansehen müsse. Es ist hier nicht von praktischem Nutzen die Rede, sondern die Analyse ist mir eine selbständige Wissenschaft, die durch Zurücksetzung jener fingierten Größen außerordentlich an Schönheit und Rundung verlieren und

1) Vgl. die dortigen Bemerkungen von Klein und Schlesinger sowie Schlesinger, S. 40.

2) Wohl aber benutzt Gauß bei gelegentlicher Beschäftigung mit der stereographischen und der zentralen Projektion komplexe Zahlen; vgl. die W. VIII, S. 351—355 abgedruckten Nachlaßstücke.

3) Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1839, S. 86 f.; Journ. f. Math., Bd. 19 (1839), S. 314 f.; Jacobis Werke, Bd. VI (Berlin 1891), S. 275 f.

4) W. X 1, S. 365—371; vgl. auch eine Stelle in dem Brief v. 5. Mai 1812, ebd., S. 375 f. Die hier in Betracht kommenden Teile des ersteren Briefes sind auch schon in W. VIII, S. 90—92 abgedruckt.

alle Augenblick Wahrheiten, die sonst allgemein gelten, höchst lästige Beschränkungen beizufügen genötigt sein würde." Und weiter: „so wie man sich das ganze Reich aller reellen Größen durch eine unendliche gerade Linie [dargestellt] denken kann, so kann man das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen, sich durch eine unendliche Ebne sinnlich machen, worin jeder Punkt, durch Abszisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Größe $a + bi$ gleichsam repräsentiert. Der stetige Übergang von einem Werte von $x$ zu einem andern $a + bi$ geschieht demnach durch eine Linie und ist mithin auf unendlich viele Arten möglich." In diesen Worten an Bessel sehen wir Gauß zum erstenmal sich deutlich und allgemein aussprechen über die geometrische Versinnlichung der komplexen Zahlen und über die Notwendigkeit, in der Funktionentheorie den komplexen Argumentwerten die volle Gleichberechtigung mit den reellen zuzuerkennen. In der Öffentlichkeit dagegen scheut er vorläufig noch die Bekundung dieser Anschauungen und ihre funktionentheoretische Verwertung. Das zeigt die um die gleiche Zeit (1813) erschienene Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (W. III, S. 123—162); und auch noch die Ende 1822 verfaßte Preisschrift über die in den kleinsten Teilen ähnlichen Abbildungen (W. IV, S. 189—216) enthält, wie Gauß selbst in der Selbstanzeige bemerkt, nur die „Spuren" seiner Auffassung.

## 8. Die Selbstanzeige von 1831.

Erst 1831 finden endlich die in Frage stehenden Ideen ihre systematische Darstellung in der Öffentlichkeit; für den damaligen Abschluß dieser wie anderer Untersuchungen mag von ausschlaggebender Bedeutung Gauß' Wunch gewesen sein, möglichst viele der ihn damals noch beschäftigenden Gedankengänge der Reinen Mathematik abzuschließen, bevor er in die Periode der physikalischen (namentlich magnetischen) Arbeiten eintrat, die zwar erst mit Webers Berufung nach Göttingen (1831) einsetzte, aber wohl schon auf Anregungen aus dem Jahre 1828 — Zusammensein mit A. v. Humboldt bei der Naturforscherversammlung in Berlin — zurückging. (vgl. Sartorius, S. 61). Wie sehr sich Gauß innerlich zu einer systematischen Darstellung der Lehre von den komplexen Zahlen gedrängt fühlte, wie er aber auch mit der Schwierigkeit gerungen hat, seiner inneren Anschauung vom Wesen der komplexen Zahlen einen adäquaten Ausdruck zu verleihen, das zeigt die

folgende Stelle[1]) aus einem im Gauß-Archiv befindlichen Brief an Hansen vom 11. Dezember 1825: „Jene Untersuchungen [über die Theorie der krummen Flächen] greifen tief in vieles Andere, ich möchte sogar sagen in die Metaphysik des Räumlichen ein, und nur mit Mühe kann ich mich von solchen daraus entspringenden Folgen, wie z. B. die wahre Metaphysik der negativen und imaginären Größen ist, losreißen. Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir dabei mit großer Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können."

Es bedurfte noch einer ganz andersartigen und anderen Zwecken dienenden Beschäftigung mit demselben Gegenstand, damit sich Gauß zu einer endgültigen Darstellung entschloß; diesen letzten Anstoß bildete die 1831 der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegte Commentatio secunda über die biquadratischen Reste (W. II, S. 93—148), in der Gauß (nach schon vorangegangener Andeutung in der Commentatio prima, ebenda S. 67) die Bedeutung darlegte, die der Erweiterung des Bereichs der Zahlentheorie durch Aufnahme der ganzen komplexen Zahlen zukommt. Erst in dieser Abhandlung (Art. 30) führt er die Bezeichnung „(ganze) komplexe Zahlen" ein, „ita quidem, ut reales complexis non opponantur, sed tamquam species sub his contineri censeantur", und gebraucht hier auch zum erstenmale den Ausdruck „imaginäre Einheit"[2]). Weiter wird im Artikel 38 in Kürze die Versinnlichung der komplexen Zahlen (nicht nur der ganzzahligen) und die geometrische Deutung ihrer Addition und Multiplikation auseinandergesetzt, woran sich im nächsten Artikel die Anwendung auf die anschauliche Deutung der zahlentheoretischen, auf die ganzen komplexen Zahlen bezüglichen Begriffsbildungen anschließt.

Doch erst die Selbstanzeige dieser Commentatio secunda (W. II, S. 169—178) benutzt er als Gelegenheit, um in aller Ausführlichkeit seine grundsätzlichen Anschauungen vom Wesen der komplexen Zahlen der mathematischen Öffentlichkeit mitzuteilen; auf diese Selbstanzeige muß hier genauer eingegangen werden, da

1) In der Hauptsache schon bei Stäckel, S. 80, publiziert.

2) Wie großes Gewicht Gauß speziell auf diesem Gebiet auf die Wahl geeigneter Bezeichnungen legte, zeigen besonders die zwei letzten Sätze des Art. 38 (S. 110), von denen hier der erste angeführt werde: „Difficultates, quibus theoria quantitatum imaginariarum involuta putatur, ad magnam partem a denominationibus parum idoneis originem traxerunt (quum adeo quidam usi sint nomine absono quantitatum impossibilium)." Ebenso im letzten Absatz der Selbstanzeige (S. 177 f.).

wesentlich aus ihr zu beurteilen ist, welcher Art Gauß' Auffassung war und worin sie sich von zeitgenössischen und modernen Anschauungen unterscheidet.

Die Selbstanzeige zerfällt in zwei verschieden große Hauptteile, deren erster und größerer (S. 169—174) die eigentliche Anzeige darstellt und daher wesentlich zahlentheoretischen Inhalts ist, während im zweiten Teil (S. 175—178) die „Metaphysik der imaginären Größen" an und für sich beleuchtet wird. Im ersten Teil findet sich, vom Schlußabsatz abgesehen, nichts Neues, was sich auf den Zahlbegriff bezöge; in dem Satz, in dem er die vier Einheiten der komplexen Arithmetik den beiden der reellen gegenüberstellt, wie überhaupt bei der ursprünglichen Wahl der Bezeichnung „Einheit" dürfte Gauß vielmehr an die zahlentheoretische Bedeutung des Wortes gedacht haben als an die Rolle, die dann diese Einheiten in der geometrischen Darstellung spielen. Im vorliegenden Zusammenhang ist nur noch der letzte Absatz erwähnenswert, in dem Gauß etwaige Einwendungen gegen die Hereinziehung der komplexen Zahlen in die Zahlentheorie bezeichnenderweise mit der Berufung auf ihre anschauliche Darstellbarkeit zurückweist.

Der Gedankengang des zweiten, ganz und gar der Zahlenlehre an sich gewidmeten Hauptteils ist wiederum in zwei Abschnitte zu zerlegen; von ihnen enthält der erste wesentlich die Problemstellung und ist insofern für die Beurteilung von Gauß' grundsätzlicher Anschauung am wichtigsten, während der zweite die Lösung des Problems auseinandersetzt. Im ersten Abschnitt entwickelt Gauß eine Auffassung, deren wesentliche Züge sich etwa folgendermaßen charakterisieren lassen (vgl. oben Nr. 3): bei der schrittweisen Erweiterung des Zahlbegriffs von den natürlichen Zahlen zu den gebrochenen, irrationalen, negativen[1]) und imaginären ist man zunächst stets „mit furchtsam zögerndem Schritt" vorgegangen, weil man zwar wohl den natürlichen Zahlen, nicht aber den Zahlen des erweiterten Bereichs ausnahmslos ein „adäquates Substrat" zuordnen konnte. Diese Bedenken wurden allmählich deshalb fallen gelassen, weil es wenigstens gewisse Zuordnungen zwischen Zahlen und Gegenständen gibt, die auch noch bei Erweiterung des Zahlbegriffs von den natürlichen zu den positiven rationalen bezw. zu den positiven und negativen Zahlen ihren Sinn behalten. Dagegen erschienen die komplexen Zahlen zwar wegen ihres großen Nutzens

1) Bei dieser Reihenfolge dürften Gauß nicht nur historische, sondern auch sachliche Erwägungen geleitet haben. Vgl. z. B. die Darstellung Weyls in Kap. II, § 2 seiner Schrift „Das Kontinuum" (Leipzig 1918).

in der Mathematik als geduldet, aber als nur unzureichend legitimiert, als ein „an sich inhaltleeres Zeichenspiel“ um deswillen, weil man ihnen keinerlei „denkbares Substrat“ zuordnen zu können glaubte. Es kommt also darauf an zu zeigen, daß die letztere Aufgabe dennoch lösbar ist[1]); die Grundzüge einer solchen Lösung soll angegeben und damit für „diesen hochwichtigen Teil der Mathematik“ die einwandfreie Klärung herbeigeführt werden.

Bei der Entwicklung dieser Lösung verfährt Gauß — eine Seltenheit bei ihm, der sonst „geradezu mit Fleiß jede Spur der Gedankengänge verwischt, die ihn zu seinen Resultaten geführt haben“ — derart, daß er zunächst die Richtung der Behandlung angibt, auf die die Natur der Aufgabe aus sich selbst hinweise, und dann die wirkliche Durchführung entwickelt. In ersterer Beziehung bemerkt er zunächst, als Substrat für die zu rechtfertigenden Größen könnten (bei den negativen wie bei den komplexen Zahlen) „nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zweien Gegenständen“ in Betracht kommen; dies ist ein für die Beurteilung der ganzen Betrachtungsweise sehr wesentlicher und auch von Gauß selbst an anderen Stellen wiederholt hervorgehobener Punkt, der besonders deutlich hervortritt in einer wohl aus dem Jahre 1825 stammenden, in W. X 1, S. 396 abgedruckten nachgelassenen Bemerkung. Bei den ganzen reellen Zahlen sei nun das Substrat durch eine einzige fundamentale Relation zwischen zwei „Gegenständen“ (etwa $A$ und $B$) gegeben, der, je nachdem die Relation von $A$ zu $B$ oder von $B$ zu $A$ betrachtet wird, die Einheit $+1$ oder $-1$ (bezw. umgekehrt) und allgemeiner der Fortschritt von einer beliebigen ganzen reellen Zahl zur nächstgrößeren oder nächstkleineren entspricht. Bei Gegenständen (wie den komplexen Zahlen), die nicht wie die reellen Zahlen „in eine ... Reihe geordnet werden können“, sondern nur „in Reihen von Reihen“ (vgl. oben Nr. 6), bedürfe man entsprechend nicht nur eines, sondern zweier Paare von Einheiten ($\pm 1$, $\pm i$)[2]), deren eines (etwa $\pm 1$) dem Fortgang innerhalb einer einzigen Reihe entspricht, während das andere ($\pm i$) dem Übergang von einer Reihe zur nachfolgenden bezw. vorangehenden zugeordnet wird. Andererseits lasse sich das System auf eine zweite Art, nämlich unter Bevorzugung des dem Paar $\pm i$ entsprechenden Übergangs, in Reihen von Reihen anordnen; daher

1) Für diesen Standpunkt vgl. z. B. Hankel, S. 6 f.

2) Hier ist $i$ zunächst noch als willkürliches Symbol, nicht etwa als $\sqrt{-1}$ aufzufassen.

seien die vier durch $\pm 1$, $\pm i$ bezeichneten Relationen als untereinander gleichartig zu betrachten.

Und hieran erst schließt sich als „Darstellung im Raume" die geometrische Versinnlichung unter Annahme des einfachsten Falles, „wo kein Grund vorhanden ist, die Symbole der Gegenstände anders als quadratisch anzuordnen". Für diesen Fall muß, wenn $\pm 1$ die gewöhnliche Bedeutung haben, unter $i$ eine Quadratwurzel $\sqrt{-1}$ verstanden werden, wie Gauß durch die folgende Überlegung erhärtet: den Relationen eines Punktes $A$ zu seinen vier Nachbargitterpunkten entsprechen die Einheiten $+1$, $+i$, $-1$, $-i$, wobei außer der Vertauschung von $+i$ mit $-i$ (oder von $+1$ mit $-1$) der Anschauung gemäß auch noch eine Drehung zulässig ist, durch die die Bevorzugung des einen Paares von Einheiten auf das andere übertragen wird; eine solche Drehung drückt z. B. die Ersetzung von $+i$ durch $+1$, von $-1$ durch $+i$ aus. „Das heißt aber, in der Sprache der Mathematiker, $+i$ ist mittlere Proportionalgröße zwischen $+1$ und $-1$ oder entspricht dem Zeichen $\sqrt{-1}$ ...". Der Absatz endigt mit der (dem Schluß des ersten Hauptteils parallelen) Bemerkung: „Hier ist also die Nachweisbarkeit einer anschaulichen Bedeutung von $\sqrt{-1}$ vollkommen gerechtfertigt, und mehr bedarf es nicht, um diese Größe in das Gebiet der Gegenstände der Arithmetik zuzulassen."

## 9. Die weitere Entwicklung nach 1831.

Gauß schließt seine Selbstanzeige mit den (in Teil D in anderem Zusammenhang nochmals zu besprechenden) Worten: „Der Verfasser hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist, künftig vollständiger zu bearbeiten ...". (Er hat dieses Versprechen übrigens niemals eingelöst.) Hiernach könnte zunächst die Annahme als naheliegend erscheinen, er habe seine Darstellung nicht als endgültig und vielleicht seine Begründung nicht als völlig stichhaltig angesehen und sich deshalb eine entsprechende Vervollständigung vorbehalten [1]). Demgegenüber soll an Hand einigen Materials aus späterer Zeit nachgewiesen werden, daß Gauß weiterhin die Rechtfertigung der komplexen Zahlen in der Selbstanzeige als endgültig und einwandfrei angesehen hat; daß er je-

1) Vgl. Wolfgang Bolyais Bemerkungen in der Vorrede zu seinem Tentamen, wo er (auf Grund dieses Schlusses der Selbstanzeige) die Erwartung der angekündigten Gaußschen Untersuchung ausspricht, während er bis zu ihrem Erscheinen seinen Schülern seine eigenen Anschauungen vortragen müsse.

mals anders hierüber gedacht haben sollte, ist (mit einer auf S. 32f. zu erwähnenden Einschränkung) nicht wahrscheinlich. Mit dem angeführten Satz hat demnach Gauß wohl nur das Versprechen einer eingehenderen, aber im nämlichen Sinn verlaufenden Erörterung des in der Selbstanzeige nur „im Vorbeigehen" behandelten Gegenstands geben wollen.

Am 6. März 1832 schreibt Gauß an Wolfgang Bolyai: „Vielleicht wird es Dich nicht gereuen, wenn Du Dich bemühest Dir diesen Band der G[öttinger] G[elehrten] A[nzeigen, Jahrg. 1831] zu verschaffen . . ., da darin u. a. auch die Quintessenz meiner Ansicht von den imaginären Größen auf ein paar Seiten dargelegt ist . . ." (W. VIII, S. 224). Weiter in einem Brief an H. G. Graßmann vom 14. Dezember 1844: „. . . hernach . . . glaube ich zu bemerken, daß die Tendenzen desselben [der Graßmannschen „Ausdehnungslehre" von 1844] teilweise denjenigen Wegen begegnen, auf denen ich selbst nun seit fast einem halben Jahrhundert gewandelt bin und wovon freilich nur ein kleiner Teil 1831 in den Comment. der Göttingischen Sozietät und noch mehr in den Göttingischen Gelehrten Anzeigen (1831, Stück 64) gleichsam im Vorbeigehen erwähnt ist; nämlich die konzentrierte Metaphysik der komplexen Größen . . ." (W. X1, S. 436). Ferner in einem Brief an Schumacher vom 1. September 1850: „Auch die Art, wie H. Pr[ehn] über die imaginären Größen spricht, zeigt, daß er sich noch ganz auf dem Standpunkte befindet, auf dem man sich vor 1831 befand, und die gänzlich veränderte Gestalt dieser Lehre, die ich ihr gegeben habe, nur auf ein paar Seiten, aber den Kern der Sache erschöpfend, gar nicht kennt . . ." (W. X1, S. 435f.).

In Nr. 2 der vierten Fassung des wahrscheinlich gleichfalls aus dem Jahre 1850[1]) stammenden Nachlaßstückes „Konvergenz der Reihen usw." gibt Gauß eine Darstellung der historischen Entwicklung des Gebrauchs der imaginären Größen, die im wesentlichen übereinstimmt mit der Schilderung in Nr. 2 der Inauguraldissertation, nur erheblich ausführlicher und deutlicher ist als dort; diese historische Darstellung schließt Gauß mit den Sätzen: „Bei allem dem sind die imaginären Größen, solange ihre Grundlage immer nur in einer Fiktion bestand, in der Mathematik nicht sowohl wie eingebürgert als vielmehr nur wie geduldet betrachtet und weit davon entfernt geblieben, mit den reellen Größen auf gleiche Linie gestellt zu werden. Zu einer solchen Zurücksetzung ist aber jetzt kein Grund mehr, nachdem die Metaphysik der ima-

1) Vgl. Schlesingers Bemerkungen, W. X1, S. 445.

ginären Größen in ihr wahres Licht gesetzt und nachgewiesen ist, daß diese ebensogut wie die negativen ihre reale gegenständliche Bedeutung haben" (W. X 1, S. 404 f.). An dieser Stelle steht als Fußnote die Verweisung auf die Selbstanzeige. Ähnlich in der fünften Fassung der nämlichen Untersuchung (ebd., S. 407).

Endlich seien noch die folgenden, bisher nicht veröffentlichten Sätze aus einer (im Gauß-Archiv befindlichen) von Heine stammenden Ausarbeitung einer Gaußschen Vorlesung über die Theorie der imaginären Größen (gehalten von Neujahr bis Ostern 1840) wiedergegeben, die ganz die in der Selbstanzeige enthaltene Auffassung wiederspiegeln und dabei den Kern der Betrachtungsweise, der dem letzten Teil der Selbstanzeige zu Grunde liegt, wesentlich schärfer hervortreten lassen:

„§ 1. ... Im nachfolgenden wird bewiesen werden, daß die Imaginären in einer bestimmten Darstellungsweise Bedeutung haben; folglich — schließen wir weiter — werden sie als in der Mathematik legitimierte Größen zu betrachten sein.

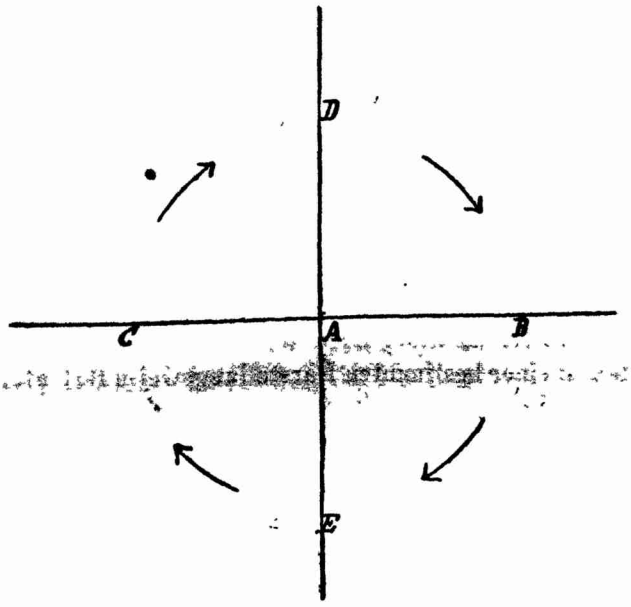
§ 2. ... (Verallgemeinerung der Definition der Proportion). Wenn man gewöhnlich sagt, die vier Glieder $a$, $b$, $c$, $d$ stehen in geometrischer Proportion, wenn $b$ so oft in $a$ enthalten ist wie $d$ in $c$, so definieren wir: Wenn $d$ aus $c$ durch reine Verstandesoperationen so entstanden ist wie $b$ aus $a$, so sagen wir, $a$, $b$, $c$, $d$ stehen in geometrischer Proportion. Anmerkung. Daß sich die gewöhnlichen Sätze über die Proportionen, z. B. daß $ad = bc$ sei, hieraus beweisen lassen, davon kann man sich leicht überzeugen[1])].

---

1) In dieser Form trifft die Behauptung sicher nicht allgemein zu. Soll nämlich aus $b = f(a)$, $d = f(c)$ (wo $f$ die Verstandesoperation bezeichnet) allgemein, d. h. für beliebige $a$ und $c$, folgen $a \cdot f(c) = c \cdot f(a)$, so ist insbesondere für $a = 1 : f(c) = f(1) \cdot c = \alpha \cdot c$. Versteht man hier unter der Konstanten $\alpha$ eine komplexe Zahl, so erweist sich die allgemeinste „Verstandesoperation" mit der fraglichen Eigenschaft bei Benutzung der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen als eine beliebige Drehstreckung in der Ebene. Dieser Schluß, der zur Folgerung des § 3 hinreichen würde, darf aber in diesem Zusammenhang nicht gezogen werden, da er, zur Begründung der üblichen räumlichen Versinnlichung der komplexen Zahlen verwandt, eine petitio principii bedeuten würde.

Ob der zwiefache Irrtum an dem Hörer (Heine) gelegen ist oder wirklich, wie es das Folgende nahezulegen scheint, von Gauß selbst stammt, wird schwerlich zu entscheiden sein. Daß Gauß seine Worte in dem ganz allgemeinen Sinn, wie sie hier wiedergegeben sind, wirklich gemeint haben sollte, erscheint schon deshalb als ausgeschlossen, weil ja zwischen den (möglicherweise obendrein unter einander ungleichartigen) Größen $a$ und $d$ bezw. $b$ und $c$ eine Multiplikation gar nicht definiert zu sein braucht.

§ 3. ... Denke ich mir nun das ganze System im Sinne von $D$ nach $B$ um 90° gedreht, so wird $D$ nach $B$ kommen und $C$ nach $D$, sodaß ich habe: der Übergang von $A$ nach $B$ ist aus dem




von $A$ nach $D$ so entstanden wie der von $A$ nach $D$ aus dem von $A$ nach $C$. Setze ich also für die Übergänge die Werte $+1$, $-1$, $+i$, $-i$, so habe ich: $+1$ ist aus $+i$ so entstanden wie $+i$ aus $-1$, oder die Proportion (§ 2):

$$+1 : +i = +i : -1 \text{ oder } i^2 = -1.\text{“ }^{1})$$

Gegenüber all diesen Stellen, die eine rückhaltlose Bestätigung bezw. Bekräftigung der in der Selbstanzeige vertretenen Auffassung zeigen, muß allerdings gesagt werden, daß in einigen anderen Bemerkungen von Gauß doch eine gewisse Ergänzung oder sogar Modifikation des Bisherigen zu erblicken sein dürfte. In einem Brief an Drobisch vom 14. August 1834 (also nur wenige Jahre nach der Darstellung in der Selbstanzeige) schreibt Gauß nämlich: „... Nur ist die Darstellung der imaginären Größen in den Relationen der Punkte in plano nicht sowohl ihr Wesen selbst, welches höher und allgemeiner aufgefaßt werden muß, als vielmehr das uns Menschen reinste oder vielleicht einzig ganz reine Beispiel ihrer Anwendung“ (W. X 1, S. 106). Ferner bemerkt er in dem

1) Die Figur ist gegen die Handschrift etwas vereinfacht.

mehr als 15 Jahre später geschriebenen Nachlaßstück „Konvergenz der Reihen usw.“: „Es wird damit, wie schon an einem anderen Orte bemerkt ist, nur bezweckt, die Bewegung in dem an sich vom Räumlichen unabhängigen Felde der abstrakten komplexen Größen zu erleichtern und eine Sprache für dasselbe zu vermitteln“ (W. X 1, S. 408; vgl. auch den Schlußsatz der dortigen Fußnote); ähnlich in der Bemerkung „an einem anderen Orte“, nämlich im Art. 5 der Jubiläumsschrift von 1849 (W. III, S. 79). Man gewinnt hiernach den Eindruck, daß der innere Kampf mit dem Gegenstand, von dem die zu Beginn von Nr. 8 (S. 26) angeführte Stelle aus einem Brief an Hansen zeugt, auch nach 1831 nicht ganz aufgehört hat, und daß Gauß im Verlauf dieser inneren Entwicklung sich von seiner Darstellung doch nicht restlos befriedigt fühlte: er scheint dabei namentlich allgemeine Bedenken nach der Richtung hin empfunden zu haben, daß zur Rechtfertigung der an sich der reinen Zahlenlehre angehörigen komplexen Zahlen doch eigentlich nicht die Heranziehung räumlicher Vorstellungen erforderlich sein sollte. Sein schließlicher Standpunkt hat sich aber offenbar, soweit dies wenigstens das vorhandene Material beurteilen läßt, in mathematischer Beziehung nicht wesentlich von dem 1831 innegehabten unterschieden; an und für sich seien die komplexen Zahlen freilich unabhängig von räumlichen Vorstellungen, aber rein arithmetisch nicht faßbar; nicht nur zu ihrer Veranschaulichung, sondern auch zu ihrer Begründung bedürfe man der in der Selbstanzeige vertretenen Auffassung. Daß Gauß auch nach Empfang der Graßmannschen Ausdehnungslehre (vgl. den Brief vom 14. Dezember 1844, s. o. S. 30) und später diese Anschauung nicht verändert hat, dürfte beweisen, daß er nicht mehr dazu gekommen ist, dieses Werks „eigentlichen Kern herauszufinden“.

Unter den späteren Untersuchungen von Gauß, die sich auf komplexe Zahlen beziehen oder mit solchen arbeiten[1]), ist hier nur noch das mehrfach erwähnte Nachlaßstück „Konvergenz der Reihen usw.“ hervorzuheben; in der vierten und namentlich der fünften Fassung dieser Untersuchung (W. X 1, S. 403—405, 414—416) betont Gauß mit Nachdruck die Notwendigkeit der Gleichstellung der komplexen Zahlen mit den reellen vom

1) Solcher Untersuchungen ist eine ziemlich große Anzahl vorhanden, da Gauß besondere Vorliebe für die Verwendung komplexer Zahlen (namentlich auch bei geometrischen Aufgaben) zeigt und geradezu solcher Verwendung zu Liebe die eine oder andere Untersuchung überhaupt angestellt zu haben scheint (vgl. den Brief an Gerling vom 14. Januar 1842, W. VIII, S. 315). Man vergleiche hierzu namentlich Stäckel, IV. Abschnitt.

funktionentheoretischen Standpunkt aus (namentlich auch zwecks einer allgemeinen Begründung des Integralbegriffs); hervorgehoben seien die folgenden Schlußsätze von Nr. 2 der vierten Fassung: „Die vollständige Erkenntnis der Natur einer analytischen Funktion muß auch die Einsicht in ihr Verhalten bei den imaginären Werten des Arguments in sich schließen, und oft ist sogar letztere unentbehrlich zu einer richtigen Beurteilung der Gebarung der Funktion im Gebiete der reellen Argumente. Unerläßlich ist es daher auch, daß die ursprüngliche Festsetzung des Begriffs der Funktion sich mit gleicher Bündigkeit über das ganze Größengebiet erstrecke, welches die reellen und die imaginären Größen unter dem gemeinschaftlichen Namen der komplexen Größen in sich begreift“ (ebenda, S. 405). Im übrigen finden sich Bemerkungen, die die grundsätzliche Seite des Wesens der komplexen Zahlen betreffen, nicht mehr vor.

Gauß hat sich ursprünglich, wie er in der Inauguraldissertation und später wiederholt bemerkt hat, zur Rechtfertigung der komplexen Zahlen veranlaßt gesehen durch die Rolle, die sie in der Algebra spielen, namentlich durch die schon von seinen Vorgängern gemachte (wenn auch noch nicht streng bewiesene) Bemerkung, daß die Zulassung der Zahlen von der Form $a + bi$ jeder algebraischen Gleichung so viele Wurzeln sichert, als ihr Grad angibt. Eine zweite Quelle, aus der er gleichfalls schon in seiner frühen Jugend Interesse für die Beschäftigung mit den komplexen Zahlen geschöpft hat, war die Untersuchung spezieller Funktionen, die er nicht nur für die reellen, sondern gleichzeitig auch für die komplexen Argumentwerte betrachtete; doch hat er diese Untersuchungen nicht veröffentlicht und deshalb auch die Rolle nicht hervorgehoben, die sie für ihn im Hinblick auf den vorliegenden Gegenstand spielten. Weiter trat zu diesen beiden Gesichtspunkten, mit dem letzteren in der Entwicklung wohl enge verknüpft (vgl. oben S. 24), spätestens vom Jahre 1807 an ein dritter, der die Gleichberechtigung der komplexen Zahlen forderte, nämlich die Erkenntnis der Bedeutung, die ihre Zulassung in der Zahlentheorie (Theorie der biquadratischen Reste) besitzt; diese Erwägung ist es, die schließlich nach langem Zögern die systematische Rechtfertigung der komplexen Zahlen in der Selbstanzeige von 1831 auslöst. Endlich zeigt er — mit bemerkenswerter Kühnheit schon in dem Brief an Bessel von 1811, in völliger Bestimmtheit in seinen letzten Lebensjahren — für das Gebiet der allgemeinen Funktionentheorie, wie auch hier die völlig gleichberechtigte Einbürgerung

der komplexen Zahlen eine unerläßliche Forderung sei, der nur nach selbständiger Rechtfertigung der neuen Bürger des Zahlenreiches (wie er eine solche in seiner Selbstanzeige erblickt) Rechnung getragen werden könne. Berücksichtigen wir endlich den ausgiebigen Gebrauch, den Gauß auch für geometrische Zwecke von den komplexen Zahlen gemacht hat, so sehen wir: Schon ihm ist ihre Unentbehrlichkeit in der Mathematik und damit die Wichtigkeit ihrer theoretischen Begründung in dem gleichen vielseitigen Lichte erschienen, wie sie sich uns auch heute noch unverändert zeigt.

## b) Vergleichende historische und kritische Betrachtung.

### 10. Die räumliche Versinnlichung der komplexen Zahlen bei Gauß' Vorgängern und Zeitgenossen.

Haben die bisherigen Ausführungen des Teiles C in einer wesentlich chronologischen Anordnung darzustellen versucht, wie sich Gauß' Anschauungen über die Notwendigkeit und die Art einer prinzipiellen Begründung der komplexen Zahlen entwickelt haben, so erübrigt es noch, einen Überblick über die bezüglichen Ansichten seiner Vorgänger und Zeitgenossen sowie über die Richtung zu geben, nach der sich der Standpunkt der Mathematiker seither gewandelt hat. Es wird genügen, eine solche Darstellung auf das Maß zu beschränken, das zur schärferen Beleuchtung der Gaußschen Auffassung, ihrer Vorzüge und ihrer Mängel, wünschenswert ist; namentlich kann völlig abgesehen werden von dem (mit Cardano beginnenden) älteren rein formalen Gebrauch des Imaginären, mit dem weder ein Versuch systematischer Begründung noch der einer geometrischen Versinnlichung verbunden war.

Der erste, der sich bemüht hat zu einer räumlichen Veranschaulichung der komplexen Zahlen zu gelangen, scheint J. Wallis gewesen zu sein, der die Kapitel 67—69 seiner Algebra[1]) diesem Gegenstand gewidmet hat. Wallis versucht komplexe Größen vektoriell darzustellen; er geht aus von der reellen Zahlengeraden und stellt die rein imaginären Größen $bi$, für die $b$ positiv ist, in der jetzt üblichen Art auf der durch den Nullpunkt gehenden, zur reellen Axe senkrechten Geraden dar (während er seltsamerweise ein negatives

1) A treatise of algebra both historical and practical (London 1685), S. 266—273; J. Wallis, Opera mathematica, II (Oxford 1693), S. 287—295. Eine Darstellung und Würdigung der Versuche von Wallis hat G. Eneström in der Bibl. Math., (3) Bd. 7 (1906), S. 263—269 gegeben.

$b$ in seiner auf die obere Halbebene beschränkten Betrachtung ausschließt). Es findet sich bei ihm auch schon die Auffassung der rein imaginären Zahlen als mittlerer Proportionalen zwischen positiven und negativen. Dagegen gelingt es ihm nicht, die allgemeinen komplexen Zahlen $a + bi$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) als Vektoren in der durch reelle und imaginäre Axe bestimmten Ebene darzustellen; dazu benutzt er vielmehr die auf ihr senkrechte, durch die reelle Axe gehende Ebene. Dieses Verfahren ist nicht wesentlich verschieden von dem jetzt üblichen und enthält im Grunde dessen weittragende Bedeutung; doch ist sich Wallis ihrer keineswegs bewußt, er erwähnt das Verfahren vielmehr nur gelegentlich, ohne es weiter zu benutzen.

Erst in der Mitte des 18. Jahrhunderts findet sich ein weiterer, übrigens noch weniger erfolgreicher Vorstoß in der nämlichen Richtung, der von H. Kuehn[1]) unternommen wurde und ebensowenig wie Wallis' Versuche[2]) irgend welchen Einfluß ausgeübt zu haben scheint. Überhaupt nichts Näheres ist bekannt von dem „savant modeste" H. D. Truel, der nach Cauchys Angabe[3]) bereits seit 1786 die geometrische Versinnlichung der imaginären Größen entdeckt haben soll.

Gegen Ende des 18. Jahrhunderts beginnt die Reihe der Arbeiten, die einerseits von C. Wessel, andererseits von J. R. Argand und den an ihn anknüpfenden französischen Gelehrten sowie von einigen weiteren englischen und französischen Autoren zwar vor dem Erscheinen der Gaußschen Selbstanzeige, nicht aber vor dem Ursprung

---

1) Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis (Novi Comm. Acad. sc. Petropol., t. 3 (1753), S. 170—223). Vgl. hierzu M. Cantors Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. 3 (2. Aufl., Leipzig 1901), S. 726—728. — Für den Standpunkt von d'Alembert und denjenigen Eulers vergleiche man Stäckels Hinweise in der Biblioth. math., (3) Bd. 1 (1900), S. 124 sowie Stäckel, S. 83 und Eneströms Bemerkung in der Encyclop. des sc. math. I 1s, S. 340, Fußn. 55; an letzterer Stelle muß es heißen: Opusc. anal. 2, St. Pétersbourg 1785 (statt O. a. 1, St. P. 1783).

2) Anscheinend auf diese anspielend, wendet sich Foncenex in einem Aufsatz: „Réflexions sur les quantités imaginaires (Miscell. philosophico-mathem. soc. priv. Taurinensis, t. 1 (Turin 1759), S. 122 f. der zweiten Paginierung) ausdrücklich gegen den Versuch, den „unmöglichen" Größen eine anschauliche Deutung, die sie als möglich erscheinen ließen, zu geben, und bemerkt schließlich: „Les racines imaginaires n'admettent donc pas une construction géométrique, et on ne peut en tirer aucun avantage dans la résolution des problèmes ..." (vgl. Enström in der Encycl. des sc. math., I 1s, S. 341, Fußn. 56).

3) Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. 4 (Paris 1847), S. 157. C. R. Acad. sc. Paris, t. 29 (1849), S. 250; Œuvres, (1) t. 11 (Paris 1899), S. 152.

seiner bezüglichen Ideen veröffentlicht worden sind. Wessel und Argand teilten miteinander das Los, daß ihre Schriften zunächst unbeachtet blieben; während aber die (am 10. März 1797 der Kopenhagener Akademie vorgelegte, 1798 gedruckte und 1799 im 5. Band der 2. Serie der Abhandlungen der Akademie erschienene) Schrift Wessels fast ein Jahrhundert lang unbeachtet geblieben ist, bis sie 1895 durch einen Zufall entdeckt und neu veröffentlicht wurde[1]), ist die 1806 erschienene Arbeit Argands[2]) nach sieben Jahren der Vergessenheit entrissen worden durch die Aufsätze, die Français, Gergonne, Servois und Argand selbst in den Jahren 1813—15 im 4. und 5. Band der Annales de math. pures et appl. veröffentlicht haben. Wenn auch Argands Arbeiten zweifellos unabhängig von Wessel entstanden sind, so gebührt doch diesem neben der Priorität auch der sachliche Vorrang. Während nämlich Argand sich 1806 teilweise noch mit einer gewissen Unsicherheit äußert[3]), die freilich später unter dem Einfluß von Français' Ansichten wesentlich abnimmt[4]), findet man bei Wessel von vorneherein mit voller Klarheit das Ziel sowohl wie die Methode auseinandergesetzt: das Ziel, die „unmöglichen" Operationen zu vermeiden[5]), und die Methode, sie zu ersetzen durch die einwandfrei und ganz in der heute

---

1) C. Wessel, Essai sur la représentation analytique de la direction, Copenhague 1897 (französische Übertragung des dänischen Originals); vgl. auch die Vorrede von H. Valentiner. Das Original ist neu abgedruckt im Arch. for Math. og Naturv., Bd. 18 (1896), S. 5 ff.

2) Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques (Paris. Anonym erschienen). Ferner Argands Aufsätze im 4. u. 5. Bd. der Ann. de math. pures et appl. Argands Schrift ist (zusammen mit den einschlägigen Aufsätzen im 4. und 5. Bd. der Annales) neu herausgegeben worden von J. Hoüel (Paris 1874).

3) „La méthode dont on vient d'exposer l'essai, repose sur deux principes de construction, l'un pour la multiplication, l'autre pour l'addition des lignes dirigées, et il a été observé que, ces principes résultant d'inductions qui ne possèdent pas un degré suffisant d'évidence, ils ne pouvaient, quant à présent, être admis que comme des hypothèses . . ." (S. 60).

4) 1813 drückt sich Argand folgendermaßen aus: „. . . mettant de côté la question si ces notions [les notions nouvelles sur les quantités imaginaires] sont vraies ou fausses, on peut se borner à regarder cette théorie comme un moyen de recherches, n'adopter les lignes en direction que comme signes des quantités réelles ou imaginaires, et ne voir, dans l'usage que nous en avons fait, que le simple emploi d'une notation particulière" (Ann. de math. pures et appl., t. 4, S. 143).

5) Am Ende der Einleitung (S. 5 der französischen Übersetzung) sagt er in bezug auf seine Schrift: „Ce qui m'a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais une méthode qui permît d'éviter les opérations impossibles."

üblichen Weise definierte Addition und Multiplikation von Vektoren in der Ebene [1]).

Wenn man davon absieht, daß bei Gauß in höherem Maß als in diesen Schriften die Trennung zwischen der prinzipiellen Seite des Problems und der geometrischen Bedeutung und Anwendungsfähigkeit der neuen Theorie hervortritt, so fällt dem vergleichenden Betrachter vor allem der folgende Umstand auf: Gauß verzichtet darauf, auf die (in der Commentatio secunda gelehrte) Addition und Multiplikation der Punkte (bezw. Vektoren) in der komplexen Zahlenebene ausdrücklich in der Selbstanzeige hinzuweisen, obgleich ja die Art der Ausführung dieser Operationen für die prinzipielle Begründung gerade von seinem Standpunkt aus wesentlich sein muß: es kann zur Rechtfertigung der komplexen Zahlen nicht genügen, ihnen umkehrbar eindeutig die Punkte (oder Vektoren) der Ebene zuzuordnen, sondern es ist, um die Widerspruchslosigkeit des Rechnens mit den komplexen Zahlen nachzuweisen, darüber hinaus erforderlich, den Isomorphismus [2]) zwischen diesem Rechnen und gewissen (widerspruchslosen) geometrischen Operationen mit Punkten oder Vektoren aufzuzeigen.

Weniger wichtig ist der Umstand, daß Gauß in der Selbstanzeige nur die Punkte der Zahlenebene und nicht die Vektoren ins Auge faßt; daß die letzteren es sind, denen auch er vom grundsätzlichen Standpunkt aus die größere Bedeutung zuerkennt, geht klar aus der Tatsache hervor, daß er, wie er wiederholt hervorhebt, den komplexen Zahlen nicht sowohl die Punkte selbst als vielmehr die „Übergänge" zwischen den Punkten zugeordnet wissen will (vgl. o. S. 28 und 32).

Während die einschlägigen Arbeiten von A. Q. Buée, B. Gompertz, J. Warren und C. V. Mourey hier keiner besonderen Besprechung bedürfen [3]), sei als Gegenstück zu Gauß noch die merk-

1) Zu der von den älteren Autoren gar nicht aufgeworfenen Frage, aus welchen Gründen man die Operationen gerade so und nicht anders erklärt, vergleiche man z. B. Hankel, S. 76 f. u. 79 f.

2) Der Begriff des Isormorphismus und daher der logische Kern dieser Gedankenreihe hat allerdings Gauß noch fern gelegen; vgl. den zweiten Teil dieses Aufsatzes. Aber unbewußt war es auch bei Gauß der Begriff des Isomorphismus, der seiner Rechtfertigung der komplexen Zahlen (wie auch den allgemeineren Betrachtungen in der Selbstanzeige S. 175 f.) erst ihre volle Bedeutung verlieh.

3) Ausführliche Literaturangaben in der Encycl. des sc. math. I 1 a, S. 337 f. und 340. Auch Bellavitis' Äquipollenzenrechnung gehört hierher, vgl. Hoüels Aufsatz in den Nouv. Ann. de Math., (2) t. 8 (1869), S. 289 ff. u. 337 ff. — Für eine vergleichende Würdigung der wichtigeren Arbeiten über unseren Gegenstand von

würdige Entwicklung erwähnt, die Cauchys Anschauungen über das Wesen der komplexen Zahlen durchgemacht haben. Im Cours d'analyse [1]) vertritt er 1821 noch völlig die von ihm selbst scharf akzentuierten alten Vorstellungen, die von Gauß bereits in seiner Inauguraldissertation kritisiert worden waren. Er betrachtet eine imaginäre Zahl als einen symbolischen Ausdruck „qui ne signifie rien par elle-même ou à laquelle on attribue une valeur différente de celle qu'elle doit naturellement avoir", sodaß die Formulierung einer Gleichheit zwischen solchen Ausdrücken eigentlich unexakt oder ohne Sinn sei; diese Ausdrücke seien daher nur als Hilfsmittel zur Aufstellung von Relationen zwischen reellen Zahlen zuzulassen und fänden ihre Berechtigung als solches Hilfsmittel in der — ohne Beweis behaupteten — Tatsache, daß die betreffenden Relationen sich, wiewohl umständlicher, auch ohne Zuhilfenahme der komplexen Zahlen herleiten lassen. Dieser Standpunkt ließ sich, nachdem ihm die Arbeiten von Argand und Français bekannt geworden waren, nicht mehr aufrecht erhalten. In der Tat nimmt er, während er noch 1844 [2]) seine Anschauungen von 1821 unverändert vertritt, 3 Jahre später [3]) seine Auffassung zurück und will unter gänzlicher Ausschaltung des Zeichens $\sqrt{-1}$ das Rechnen mit komplexen Zahlen durch das Rechnen mit den ihnen entsprechenden Vektoren (unter geeigneter Definition der Operationen) ersetzt wissen; er folgt im wesentlichen Argand und geht grundsätzlich keineswegs über Gauß hinaus. Gleichzeitig gibt er andererseits einen weiteren, rein arithmetischen Weg an [4]), den er zur Vermeidung der komplexen Zahlen vorschlägt, der aber auch als zu ihrer Rechtfertigung dienend aufgefaßt werden kann (wenngleich eine Rechtfertigung dieser Art den Anschauungen der damaligen Zeit freilich ganz und gar fern lag):

---

Wallis bis Cauchy vergleiche man die Darstellung von Beman (Proc. Americ. assoc. advanc. sc., vol. 46, Detroit 1897 (Salem 1898), S. 33 ff.; in französischer Übersetzung im Enseignem. math., année 1 (1899), S. 162—184).

1) Cours d'analyse 1, Analyse algébrique (Paris 1821), S. 173; Œuvres, (2) t. 3 (Paris 1897), S. 153.

2) Exercices d'analyse et de physique math., t. 3 (1844), S. 361 f.

3) Exercices d'anal. et de phys. math., t. 4 (1847), S. 157 ff. C. R. Acad. sc. Paris, t. 29 (1849), S. 250 ff.; Œuvres, (1) t. 11 (Paris 1899), S. 152 ff. — Über die (ihrem Ursprung nach unaufgeklärte) funktionentheoretische Verwendung der räumlichen Versinnlichung durch Cauchy, die aus viel früherer Zeit (1825) stammt, vergleiche man Stäckel in der Bibl. math., (3) Bd. 1 (1900), S. 123—125.

4) Exercices d'anal. et de phys. math., t. 4 (1847), S. 87 ff. C. R. Acad. sc. Paris, t. 24 (1847), S. 1120 ff.; t. 25 (1847), S. 129 ff.; Œuvres, (1) t. 10 (Paris 1897), S. 312 ff. u. 351 ff.

er will $i$ nicht als $\sqrt{-1}$, sondern als eine Unbestimmte betrachtet und die Gleichungen zwischen komplexen Ausdrücken durch Kongruenzen zwischen den entstehenden Funktionen von $i$ modulo $i^2+1$ ersetzt wissen. Diese arithmetische, vom modernen Standpunkt aus der Gaußschen Auffassung vorzuziehende Methode ist bekanntlich von Kronecker weitgehend verallgemeinert worden, einmal zu einer das Irrationale formal vermeidenden Einführung beliebiger algebraischer Zahlen[1]), andererseits auch zur Behandlung der höheren komplexen Zahlen und der Modulsysteme[2]).

## 11. Arithmetische Theorieen der komplexen Zahlen. Zusammenfassung.

Die früheste einwandfreie rein arithmetische Begründung der komplexen Zahlen wurde nur zwei Jahre nach dem Erscheinen der Gaußschen Selbstanzeige — unabhängig von Gauß' Arbeiten — von Hamilton[3]) geliefert; er erweitert den Bereich der reellen Zahlen, in dem das Symbol $\sqrt{-1}$ sinnlos ist, zum Bereich der Paare reeller Zahlen, in dem das entsprechende Symbol einen Sinn besitzt, da sich in diesem Bereich die Quadratwurzel aus dem Paar $(-1,0)$ ausziehen läßt. Gegen Hamiltons Begründung läßt sich nur der eine Einwurf vorbringen, sie sei dogmatisch, insoferne die Definitionen der Gleichheit, der Addition und (trotz eines zunächst eingeführten allgemeineren Ansatzes) auch der Multiplikation willkürlich gewählt scheinen; diese Lücke ist durch den Nachweis, daß kein wesentlich verschiedenes System komplexer Zahlen mit zwei (oder mehr) Haupteinheiten die formalen Gesetze der Arithmetik erfüllt, von Weierstraß[4]), in einem erheblich allgemeineren

---

1) Journ. f. Math., Bd. 100 (1887), S. 490 ff. Zu dieser sich als sehr nützlich erweisenden Methode vgl. J. König, Einleitung in die allgemeine Theorie der algebraischen Größen (Leipzig 1903), namentlich S. 108 ff. und 137 ff., sowie Steinitz' Untersuchung über die Algebraische Theorie der Körper, J. f. Math., Bd. 137 (1910), S. 167—309, namentlich S. 192 ff.

2) Z. B. Sitzungsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin, Jahrg. 1888, 1. Halbbd., S. 429 ff.

3) Theory of conjugate functions, or algebraic couples; Trans. Irish Acad., vol. 17 (1837), S. 293 ff. (gelesen am 4. Nov. 1833 und 1. Juni 1835). Diese Abhandlung ist jedoch zunächst völlig unbeachtet geblieben; ihr Inhalt wurde weiteren Kreisen erst bekannt durch Hamiltons Vorrede zu seinen Lectures on quaternions (Dublin 1853).

4) In seinen Vorlesungen vom Jahre 1863 an. Vgl. E. Kossak, Die Elemente der Arithmetik (Programm des Friedrichs-Werderschen Gymnas., Berlin 1872), S. 21—27.

Sinn aber (nach Vorarbeiten von F. Schur [1]) und M. Pasch [2])) vor kurzem von L. Bieberbach [3]) ausgefüllt worden. Jedoch handelt es sich hierbei nur um die Beseitigung eines Schönheitsfehlers, während die Hamiltonsche Theorie an sich einwandfrei ist; sie hat zum erstenmal die Unrichtigkeit der Meinung von Gauß gezeigt, wonach die volle Rechtfertigung der komplexen Zahlen nicht ohne Zuhilfenahme geometrischer Betrachtungen zu erbringen sei (vgl. z. B. die auf Seite 32 unten angeführte Briefstelle). Gauß hat, um Georg Cantors charakteristische Bezeichnungsweise (Math. Ann., Bd. 21 (1883), S. 562) zu benutzen, die transiente Begründung der komplexen Zahlen nicht an sich, aus mathematischen oder metaphysischen Erwägungen, für notwendig gehalten, als vielmehr geglaubt sich mit ihr begnügen zu müssen, weil er keinen Weg zu einer immanenten Begründung vor sich sah; daß ein solcher und zwar verhältnismäßig bequemer Weg vorhanden sei, hat demgegenüber Hamilton als erster dargetan.

Gegen die gekennzeichnete Anschauung von Gauß hat sich übrigens schon bald nach dem Erscheinen der Selbstanzeige (1837, also in dem nämlichen Jahre, in dem Hamiltons Abhandlung erschienen ist) Johann Bolyai [4]) in seiner (erst 1899 veröffentlichten) Preisschrift „Responsio ad quaestionem usw." [5]) ausdrücklich gewandt. Obgleich die Preisaufgabe sich auf die Konstruktion der imaginären Größen bezog, entwickelt Bolyai in den §§ 2—7 seiner Arbeit eine (allerdings etwas umständliche und nicht besonders klare) arithmetische Theorie. Der Schlußparagraph bringt fünf Einwände gegen Gauß' Darstellung von 1831 vor, von denen der zweite und dritte die folgenden, vom modernen Standpunkt aus als berechtigt anzuerkennenden Gesichtspunkte enthalten: einmal tadelt Bolyai allgemein die Benutzung des Raumes als Beweishilfs-

1) Math. Annalen, Bd. 33 (1889), S. 49—60.

2) Archiv d. Math. u. Phys., (3) Bd. 7 (1904), S. 102—08; M. Pasch, Veränderliche und Funktion (Leipzig und Berlin 1914), S. 158—178.

3) Math. Zeitschrift, Bd. 2 (1918), S. 171—179.

4) Die weniger bedeutungsvollen Anschauungen Wolfgang Bolyais können hier außer Erörterung bleiben. Vgl. dazu Stäckels Aufsatz in den Math. und nat. Ber. aus Ungarn, Bd. 16 (Budapest 1899), S. 270 ff., sowie Bol. I, S. 34 f. und 124 ff.

5) Abgedruckt Math. u. nat. Ber. a. Ung., a. a. O., S. 281—292; in deutscher Übertragung Bol. II, S. 221—233. In Bol. I, S. 124—133, gibt Stäckel eine zusammenhängende Darstellung der Arbeiten von (W. und namentlich) J. Bolyai über die imaginären Größen.

mittel, die in der Arithmetik vermieden werden müsse[1]); zweitens wendet er sich gegen die unbegründete und ohne vorbereitende Definition geschehene Einführung von $+i$ als mittlerer Proportionalen zwischen $+1$ und $-1$ und gegen die quadratische Gittereinteilung, die ebensogut durch eine rhombische[2]) ersetzt werden könne. Johann Bolyai ist so der erste, der gegenüber dem Gedankengang von Gauß und seinen Vorgängern die Forderung der Arithmetisierung erhoben hat, und seine Ausführungen stellen auch nächst der (freilich nicht nur zeitlich vorangehenden, sondern auch sachlich weit überlegenen) Darstellung Hamiltons[3]) die früheste auf räumliche Vorstellungen Verzicht leistende Behandlung unseres Gegenstandes dar.

Die vorangegangenen Bemerkungen wiesen zunächst darauf hin, daß Gauß keineswegs als der erste betrachtet werden kann, der die übliche Methode zur räumlichen Versinnlichung der komplexen Zahlen in der Ebene klar entwickelt hat. Ferner wird man auf Grund der Einwände, die gegen seine Auffassung dieser Versinnlichung als der „reinsten" grundsätzlichen Rechtfertigung des Gebrauchs der komplexen Zahlen erhoben werden können, vom prinzipiellen, auf den Zahlbegriff gerichteten Gesichtspunkt aus den arithmetischen Theorieen Hamiltons und J. Bolyais, mit denen die moderne Betrachtungsweise dieses Gegenstandes anhebt, den Vorzug vor den Gaußschen Überlegungen geben.

Diese beiden rein theoretisch bemerkenswerten Tatsachen dürfen aber nicht dazu führen, das historische Verdienst nun etwa geringer einzuschätzen, das sich Gauß um die Einbürgerung der komplexen Zahlen in der Mathematik als nicht nur geduldeter sondern vollberechtigter Bürger des Zahlenreichs erworben hat. Ganz abgesehen von der Abhandlung Wessels (1799), die bis gegen

---

1) Den nämlichen Einwand in bezug auf die Gaußsche Inauguraldissertation hatte in verhüllter Form schon Wolfgang Bolyai erhoben: Tentamen I, S. 425 (ed. sec., S. 461).

2) Bei einer solchen Einteilung würde, wie R. Baltzer (Journ. f. Math., Bd. 94 (1883), S. 89) bemerkt hat, eine willkürliche Konstante $\gamma$ (die bei rechtwinkliger Einteilung gleich $\frac{\pi}{2}$ ist) in die Rechnung eingehen und $a+ib$ würde sich statt in der Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ vielmehr in der Form $r\frac{\sin(\gamma-\varphi)+i\sin\varphi}{\sin\gamma}$ darstellen.

3) Gemeinsam ist beiden Autoren das Hereinziehen des Zeitbegriffs, der aber in beiden Darstellungen kein wesentliches Moment bildet und unschwer eliminiert werden kann.

Ende des 19. Jahrhunderts fast unbekannt geblieben ist, sind auch die nächsten Arbeiten aus dem Anfang des 19. Jahrhunderts, namentlich diejenige Argands, trotz der Hinweise und Ergänzungen in Gergonnes Annales de mathématiques zunächst wenig bekannt geworden und namentlich außerhalb ihrer Ursprungsländer fast unbeachtet geblieben; es sei nur erinnert, daß Cauchy noch 1844 die Arbeiten Argands und seiner Nachfolger anscheinend nicht kannte (vgl. o. S. 39) und daß ferner in der Preisaufgabe der Jablonowskischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig vom Jahre 1834, deren eine Bearbeitung J. Bolyais Responsio darstellt, zwar auf die keineswegs einwandfreie Untersuchung Buées und auf die erst 1828 erschienenen Arbeiten Moureys und Warrens verwiesen wird, aber von ihrem Vorgänger Argand keine Rede ist[1]). Andererseits ist Hamiltons Auffassung erst 1853 weiteren Kreisen bekannt geworden und auch Cauchys arithmetische Theorie datiert aus den letzten Lebensjahren von Gauß, während J. Bolyais Preisschrift erst 1899 veröffentlicht worden ist.

Daß Gauß selbst der Gegenstand in jüngeren Jahren als nicht völlig geklärt erschien, geht namentlich aus seinen zurückhaltenden Äußerungen in der Inauguraldissertation (und aus der auf S. 26 zitierten Äußerung an Hansen) hervor; und daß er sogar noch nach seiner Darstellung von 1831 die Theorie keineswegs als ganz einfach und naheliegend betrachtet hat, zeigt sein Brief an Drobisch vom 14. August 1834, wo er es ausdrücklich hervorhebenswert findet, er habe bei öfterem mündlichem Vortrag seiner Theorie gefunden, daß sie „sehr leicht aufgefaßt wird und gar nichts Abstruses behält“ (W. X 1, S. 106). Vergleicht man damit die Bemerkung in der Jubiläumsschrift von 1849 „Gegenwärtig, wo der Begriff der komplexen Größen jedermann geläufig ist“ (W. III, S. 74) und die auf S. 30 angeführte Stelle aus einem Brief an Schumacher von 1850 (sowie entsprechende aus dem um die nämliche Zeit entstandenen Nachlaßstück „Konvergenz der Reihen . . .“), und bedenkt man weiter auf Grund der vorangegangenen historischen Bemerkungen, wie wenig Einfluß die einschlägigen Arbeiten der französischen und englischen Mathematiker in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts ausgeübt hatten, so wird man sagen müssen: Es ist — mindestens auf dem Kontinent — in erster Linie Gauß gewesen, der tatsächlich den komplexen Zahlen die gleichberechtigte Anerkennung in der Mathematik verschafft hat, einmal durch

1) Der Text der Preisaufgabe ist abgedruckt in den Math. u. nat. Ber. a. Ungarn, a. a. O., S. 264 f.

den grundsätzlichen Hinweis auf ihre anschauliche Darstellbarkeit in der Ebene, weiter aber auch — und hierin teilt er freilich sein Verdienst mit Männern wie Abel, Jacobi, Cauchy — durch die ausgedehnten und fruchtbaren Anwendungen, die er auf den Gebieten der Algebra, Funktionentheorie [1]), Zahlentheorie und Geometrie von den komplexen Zahlen gemacht hat.

## D. Die Theorie der höheren komplexen Zahlen.

### 12. Die Quaternionen.

Der Gedanke an eine besondere Theorie der komplexen Zahlen mit mehr als zwei Haupteinheiten scheint Gauß ferngelegen zu haben. Dennoch hat er sich, und zwar nach zwei Richtungen hin, tatsächlich an den Anfängen dieser Theorie beteiligt, durch eine (im Nachlaß vorgefundene) Entdeckung und durch eine beiläufige, aber nicht ohne Wirkung gebliebene Anregung. Es handelt sich das einemal um die erste sachliche, wenn auch nicht formale Verwendung der Quaternionen, das anderemal um die (freilich recht unbestimmt hingeworfene) Bemerkung am Schluß der Selbstanzeige von 1831, deren versprochene Ausführung unterblieben ist.

Bei den Untersuchungen über Drehungen im Raum, die Wessel als Anwendung seiner Theorie der Vektoren in der in Nr. 10 (S. 37) angeführten Schrift anstellte, gelangte er zu einem Ansatz von Ausdrücken mit drei Haupteinheiten, von denen eine gleich 1 ist, die zwei anderen beide quadriert $-1$ ergeben; er kommt in den weiteren Ausführungen dem Begriff der Quaternionen sehr nahe [2]) und macht im Grund erfolgreiche Anwendungen von ihm, ohne doch theoretisch die entscheidenden Schritte zu tun und namentlich das Multiplikationsgesetz zu erkennen. Von den an Argand anknüpfenden französischen Mathematikern sei nur Servois erwähnt, der ganz allgemein schließt, zur Ausdehnung der Argand-Gergonneschen Betrachtungen von der Ebene auf den Raum bedürfe man dreier Einheiten statt der beiden 1 und $i$ [3]); er aber wie seine Zeitgenossen scheitern an dem vergeblichen Versuch, die neuen

1) Gauß' Erkenntnis der Bedeutung des Imaginären für die Funktionentheorie kann allerdings nur durch seine mündliche und briefliche Einwirkung auf befreundete Mathematiker (und gelegentliche Bemerkungen im Druck) von Bedeutung gewesen sein, da er seine einschlägigen Arbeiten nicht veröffentlicht hat.

2) Vgl. die zweite Vorrede zur Neuausgabe der Wesselschen Schrift von T. N. Thiele, S. XIII f.

3) Ann. de math. pures et appl., t. 4, S. 235.

Ausdrücke wiederum auf die Form $a + bi$ zu bringen[1]) oder sie sonstwie ihrer „Absurdität" zu entkleiden. Entsprechende Versuche wurden in England (von Hamilton und anderen Autoren) erst seit 1831, und zwar zunächst ebenfalls vergeblich, angestellt[2]).

Demgegenüber hat Gauß in einer vermutlich schon aus dem Jahre 1819 stammenden nachgelassenen Untersuchung (W. VIII, S. 357 ff.. namentlich S. 359 unten bis S. 360 oben) sachlich vollkommen den Gegenstand beherrscht. Er führt die uns als Quaternionen bekannten Ausdrücke als Komplexe („Scalen" oder „Combinationen") von vier reellen Zahlen $(a, b, c, d)$ ein, gibt ihr Multiplikationsgesetz an und weist ausdrücklich darauf hin, daß diese Multiplikation nicht kommutativ sei. Freilich wird dieser Gegenstand keineswegs etwa als eine Frage der Arithmetik berührt, sondern die Komplexe scheinen lediglich ersonnen als Hilfsmittel, um die Zusammensetzung der „Mutationen des Raumes" zu beherrschen[3]).

Die tatsächliche historische Bedeutung dieser (allerdings erst 1900 veröffentlichten) Überlegungen erhellt aus dem Umstand, daß Hamilton erst 1843 seine Quaternionen entdeckt und damit das erste Beispiel eines Addition und Multiplikation gestattenden Systems von komplexen Zahlen mit mehr als zwei Haupteinheiten den Mathematikern vorgelegt hat, während um die gleiche Zeit Graßmanns Ideenbildungen in der „Linealen Ausdehnungslehre" von 1844 veröffentlicht wurden. Die Aufmerksamkeit weiterer Kreise wurde übrigens auf diese Arbeiten und fernere Untersuchungen englischer und französischer Forscher über höhere komplexe Zahlen — wenigstens auf dem Kontinent — erst durch H. Hankels 1867 erschienene „Theorie der complexen Zahlensysteme" gelenkt, die gleichzeitig durch die Allgemeinheit ihres Standpunktes (wenigstens im Vergleich zu Hamilton) eine neue Epoche einleitet.

---

1) Argand selbst glaubte übrigens, man könne in der gleichen Weise, wie man den Übergang von den eindimensionalen (reellen) Größen zu den zweidimensionalen der Form $a + bi$ bewerkstellige, auch weiter zu mehrdimensionalen Ausdrücken gelangen; als einfachsten nicht in der Form $a + bi$ darstellbaren Ausdruck („aussi hétérogène par rapport à $\sqrt{-1}$ que l'est celle-ci par rapport à $+1$") vermutete er $i^i$ (Ann. de math. pures et appl., t. 4, S. 146 und t. 5, S. 199); vgl. die darauf bezüglichen Bemerkungen von Servois und Gergonne, ebenda, t. 4, S. 231 f.).

2) Vgl. die Vorrede zu Hamiltons Lectures on quaternions, S. (35) ff.

3) Auch von „trikomplexen Zahlen" als der Verallgemeinerung der gewöhnlichen komplexen („bikomplexen") für räumliche Betrachtungen macht Gauß gelegentlich Gebrauch, ohne jedoch ein Multiplikationsgesetz für diese Zahlen aufzustellen; vgl. Stäckel, S. 88.

## 13. Die allgemeine Frage der Möglichkeit höherer komplexer Zahlen.

Scheint Gauß durch diese Untersuchungen nicht auf den allgemeinen Begriff der höheren komplexen Zahlen geführt worden zu sein, so dürfte aus dem Schlußsatz der Selbstanzeige zu entnehmen sein, daß er zu einer — wenn auch anscheinend nicht ganz deutlichen — Vorstellung eines derartigen Begriffs auf einem anderen Wege gelangt sei. Es war oben im Beginn von Nr. 8 (S. 25f.) die Rede von der inneren Entwicklung, die er im Bestreben nach einer einfachen und zusammenhängenden Darstellung seiner grundsätzlichen Anschauungen über das Wesen der komplexen Zahlen (namentlich in den Jahren 1825—1831) durchgemacht hat; eben diese Entwicklung scheint auch für den vorliegenden Gegenstand von Wichtigkeit geworden zu sein. Die Bedeutung der Schlußbemerkung in der Selbstanzeige von 1831 tritt schärfer hervor, wenn man ihr die folgenden Bemerkungen aus der Inauguraldissertation gegenüber stellt: „... reales et imaginarias sub denominatione communi quantitatum possibilium complecti mallem; contra, impossibilem dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, ut phrasis haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudinum ambitu non dari. Hinc vero genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem“ (W. III, S. 6 Fußnote). Ähnlich bei der Kritik des Eulerschen Beweises (ebenda, S. 14). Namentlich aus der ersteren Stelle, wo er derartige, außerhalb des Bereichs der komplexen Zahlen gedachte Größen durch den Vergleich mit einem gleichseitigen rechtwinkligen Dreieck als in sich widerspruchsvoll kennzeichnet, ist zu ersehen, daß er solche Größen von vorneherein als absurd angesehen und es gar nicht etwa der Mühe wert gefunden hat, durch eine methodische Untersuchung die Absurdität nachzuweisen. Hier zeigt sich in der Beurteilung der Größen, die „Bedingungen zu erfüllen hätten, welche auch bei Zulassung der komplexen Zahlen nicht befriedigt werden können“, ein weiter Abstand gegenüber der Auffassung in der gleichzeitigen Abhandlung Wessels, wo an der Vorstellung von Größen, durch deren Zulassung eine quadratische Gleichung mehr als zwei Wurzeln erhält, kein Anstoß genommen wird (vgl. o. S. 44).

Demgegenüber schließt Gauß seine Selbstanzeige mit dem Satze: „Der Verf. hat sich vorbehalten, den Gegenstand, welcher in der vorliegenden Abhandlung eigentlich nur gelegentlich berührt ist,

künftig vollständiger zu bearbeiten, wo dann auch die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Größen liefern können, ihre Beantwortung finden wird." Er hat es also 1831 jedenfalls nicht mehr als von vorneherein selbstverständlich angesehen, daß solche weitere Arten von Größen in sich widerspruchsvoll seien, sondern hat diese Frage als eines eingehenden Beweises würdig erachtet. (Vielleicht hängt es mit seinen hierauf bezüglichen Überlegungen, die damals komplexe Zahlen mit mehr als zwei Haupteinheiten in den Vordergrund seines Interesses rücken mochten, auch zusammen, daß er in einer aus dem Juli 1831 stammenden nachgelassenen Notiz (W. II, S. 305—307; W. VIII, S. 348—350) bei der Behandlung einer geometrischen Frage implizit gleichfalls höhere komplexe Zahlen benutzt.)

Man wird jedenfalls angesichts derartiger sowie der mit Quaternionen arbeitenden Untersuchungen den angeführten Schlußsatz nicht dahin verstehen dürfen, als habe Gauß Größen anderer Art als widerspruchsvoll nachweisen wollen, er, der sie, wenn auch nur implizit, ja selbst erfolgreich benutzt hatte. Es dürfte vielmehr die Auffassung naheliegen, Gauß habe andere Ausdrücke als die reellen und komplexen Größen nicht als der Arithmetik zugehörig, also nicht als Zahlen betrachten wollen, weil sie sich den für die (reellen wie komplexen) Zahlen gültigen Rechenregeln nicht fügten[1]). Versteht man Gauß in diesem Sinne, so muß man voraussetzen, daß er den Satz, wonach die Ersetzung des Bereichs der gewöhnlichen komplexen Zahlen durch einen Bereich komplexer Zahlen mit mehr als zwei Haupteinheiten die Aufgabe eines Teils der formalen Gesetze der Arithmetik[2]) nach sich zieht, entweder bewiesen oder intuitiv geahnt hat; diese Vermutung liegt um so näher, als er sich ja schon lange zuvor von der Eigenschaft der Quaternionen, eine nichtkommutative Multiplikation zu besitzen, überzeugt hatte. Den Beweis jener Tatsache hätte dann (neben der endgültigen Rechtfertigung der komplexen Zahlen) die in dem Schlußsatz der Selbstanzeige angekündigte Untersuchung enthalten sollen.

Zum Abschluß noch einige Worte über das spätere Schicksal jener spätestens 1831 von Gauß gewonnenen Erkenntnis! J. Bolyai

1) Vgl. die mit dieser Auffassung sich im wesentlichen deckende Bemerkung bei Hankel, S. 108.

2) Es handelt sich bekanntlich um die assoziativen, kommutativen und distributiven Gesetze und um den Satz, wonach ein Produkt nur zugleich mit einem der Faktoren verschwinden kann.

erhebt am Schluß seiner Preisschreift von 1837 (s. o. S. 41) Einspruch gegen die Gaußsche Behauptung, man könne andere Arten von Größen als die reellen und komplexen in der Größenlehre nicht zulassen, und beruft sicht demgegenüber auf die einschlägige Betrachtung in seiner Preisschrift, die jedoch nach dieser Richtung keineswegs einen Fortschritt gegenüber Gauß darstellt. Es ist übrigens von Interesse, das J. Bolyai, wie Stäckel[1]) bemerkt hat, auf einem wahrscheinlich aus dem Jahre 1830 stammenden Zettel sich um ein Multiplikationsgesetz für ein System komplexer Zahlen mit sechs Haupteinheiten bemüht. Er äußert auf diesem Zettel: wenn man ein solches System mit sechs Einheiten betrachte, so hörten die ganzen Schlußfolgen auf, obwohl es keine Ungereimtheiten enthielte; diese skeptische Erwägung, die nach Stäckel (auf Grund einer weiteren Bemerkung Bolyais) vor allem auf die in einem solchen System mehr als zweifache Wertigkeit der Quadratwurzel zu beziehen ist, scheint denn auch für ihn die Veranlassung gewesen zu sein, von der Betrachtung höherer komplexer Zahlen generell abzusehen (ähnlich wie auch wohl für Gauß, aber im Gegensatz zu Wessel und Hamilton).

Die ersten Beweise der Gaußschen Behauptung gaben in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts unabhängig von einander Weierstraß (s. o. S. 40) und H. Hankel[2]), ersterer in dem allgemeineren Sinn, daß auch ein System komplexer Zahlen mit zwei Haupteinheiten, das alle formalen Gesetze befriedigt, nicht möglich ist, ausgenommen das System der gewöhnlichen komplexen Zahlen und die aus ihm durch lineare Transformation hervorgehenden Systeme. Die Verallgemeinerung dieses Satzes, wonach selbst der Verzicht auf das kommutative Gesetz der Multiplikation nur noch das System der Quaternionen ermöglicht, stammt bekanntlich von Frobenius[3]).

Übrigens ist die Gaußsche Behauptung nur mit einer Einschränkung richtig, nämlich nur so lange, als nicht unendlich viele Haupteinheiten (Dimensionen) zugelassen werden. Daß Systeme mit unendlich vielen Haupteinheiten existieren, in denen alle formalen Gesetze erfüllt sind, lehren triviale Beispiele (z. B. das System aller rationalen Funktionen einer Variabeln in einem

---

1) Bol. I. S. 132f.

2) Hankel, S. 106—108.

3) Journ. f. Math., Bd. 84 (1878), S. 59ff. Vgl. auch C. S. Peirce im Amer. Journal of math., vol. 4 (1881), S. 225—229.

beliebigen Zahlkörper) und ist z. B. von H. G. Graßmann[1]) und Hankel[2]) ausdrücklich bemerkt worden. Solche Systeme sind aber (nach Einführung einer Anordnungsvorschrift) nichtarchimedisch; sehr allgemeine Typen solcher Systeme haben H. Hahn[3]) und K. Th. Vahlen[4]) näher untersucht.

1) Ausdehnungslehre von 1862, S. 240; Graßmanns Werke I 1 (Leipzig 1896), S. 239.

2) Hankel, S. 110—112.

3) Sitzungsber. d. Math.-nat. Klasse d. Akad. d. Wissensch. Wien, Bd. 116 IIa (1907). S. 601—655.

4) Jahresbericht d. D. Math.-Vereinig., Bd. 16 (1907), S. 409 ff.

# Anhang.

## Zum ersten und vierten Gaussschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra.

Von

**Alexander Ostrowski** in Göttingen.

In den folgenden Ausführungen soll versucht werden, den ersten Gaußschen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra in einer vollständig strengen Form darzustellen, ihn zu „arithmetisieren". Gegen diesen Beweis ist bekanntlich wiederholt der Einwand erhoben worden, daß in ihm über den Verlauf gewisser algebraischer Kurven Annahmen gemacht werden, deren strenge Begründung ohne Benutzung des Fundamentalsatzes der Algebra sehr schwer sein dürfte [1]). Daß der Gaußsche Beweis in diesem Punkte einer Ergänzung bedarf, hat ja bereits Gauß selbst zugegeben, indem er sich bereit erklärte [2]), die in Frage kommenden Eigenschaften algebraischer Kurven auf Wunsch streng zu beweisen. Indessen hat Gauß diesen Punkt nie ausgeführt [3]). Es wird sich im Folgenden hauptsächlich darum handeln, für die algebraischen Kurven, auf deren Verlauf es ankommt, zu zeigen, daß sie sich in endlich viele reguläre Bogen zerlegen lassen. Ich möchte gleich hier hervorheben, daß die Überlegung, durch die dies gezeigt wird, für beliebige algebraische Kurven ausreicht. Dabei werden einige einfache Sätze der Analysis benutzt, außer-

1) Vgl. z. B. F. Rudio, Über den Cauchyschen Fundamentalsatz in der Theorie der algebraischen Gleichungen. Vierteljahrschrift d. Zürich. Naturforsch. Ges. XXXIX (1894).

2) Dissertation (1799), Art. 21 Fußnote, W. III, S. 27.

3) Eine eingehende Analyse der Gaußschen Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra wird im 2. Teile des Aufsatzes von A. Fraenkel gegeben werden.

dem noch die folgende algebraische Tatsache: Hat ein Polynom in zwei Veränderlichen unendlich viele gemeinsame Nullstellen mit seiner Ableitung nach einer von diesen Veränderlichen, so besitzt es einen mehrfachen Faktor. Diese Tatsache ist leicht zu beweisen, etwa mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus, wobei dann allerdings die für alle Sätze über die Teilbarkeit von Polynomen fundamentale Erweiterung des Gaußschen Satzes über die Teiler ganzzahliger Polynome heranzuziehen ist[1]).

Mit dieser Note hoffe ich auch ein Desideratum zu erfüllen, das L. Schlesinger in seiner Monographie über Gauß' Arbeiten zur Funktionentheorie ausgesprochen hat[2]).

1. Es sei

$$f(z) \equiv z^n + Az^{n-1} + \cdots + C \equiv T(r,\varphi) + iU(r,\varphi) \equiv T(x,y) + iU(x,y) = 0$$

die vorgegebene algebraische Gleichung, wo $r, \varphi$ Polarkoordinaten, $x, y$ kartesische Koordinaten sind. Um zu beweisen, daß $T = 0$, $U = 0$ sich in $n$ Punkten schneiden, ist es nötig, den Verlauf der beiden Kurven zu untersuchen[3]). Wir benutzen dabei zuerst Polarkoordinaten.

Es sei $\omega = \frac{45^0}{n}$. Teilen wir durch $4n$ Halbstrahlen $\varphi = -\omega$, $\varphi = \omega$, $\varphi = 3\omega$ usw. die ganze Ebene in $4n$ Winkelräume und bezeichnen wir sie durch (1), (2), ... $(4n)$, so gibt es, wie wir jetzt beweisen werden, eine Zahl $R$ mit folgender Eigenschaft: 1) $f(z)$ hat keine Wurzel vom absoluten Betrage $\geqq R$. 2) Man beschreibe um den Nullpunkt einen Kreis $(Q)$ mit dem Halbmesser $\bar{R} \geqq R$. Dann ist auf dem letzten Kreise im Intervalle (1) $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$ positiv, $U$ hingegen zuerst $< 0$, dann $> 0$, hat also eine Wurzel innerhalb des Intervalls (1) und zwar nur eine, wegen $\frac{\partial U}{\partial \varphi} > 0$. Im Intervall (2) ist $U > 0$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} < 0$, $T$ zuerst $> 0$, dann $< 0$, also innerhalb des Intervalls einmal und nur einmal $= 0$. In (3) ist

---

1) S. z. B. Weber, Lehrbuch der Algebra, Bd. I, (2. Aufl.) S. 25—27.

2) Schlesinger, S. 33, Fußnote 2.

3) Bei der Ausführung einiger Einzelheiten werden wir uns mehr an die Bezeichnungen und die Beweisanordnung des 4. Gaußschen Beweises halten. W. III, S. 73—85.

$T<0$, $\frac{\partial U}{\partial \varrho}<0$, $U$ einmal $=0$; in (4) $U<0$, $\frac{\partial T}{\partial \varrho}>0$, $T$ einmal $=0$ usw.

Um ein solches $R$ zu finden, bezeichnen wir die absoluten Beträge der Koeffizienten $A, \ldots, C$ von $f(z)$ durch $a, \ldots, c$ und die Summe dieser absoluten Beträge durch $S$. Dann besitzt $R = \sqrt{2}\ S+1$ die geforderte Eigenschaft. In der Tat gilt für $\bar{R} \geqq R$

$$|T - \bar{R}^n \cos n\varrho| \leqq a\bar{R}^{n-1} + \cdots + c < \bar{R}^{n-1} S$$

$$\left|\frac{\partial U}{\partial \varrho} - n\bar{R}^n \cos n\varrho\right| \leqq (n-1)\, a\bar{R}^{n-1} + \cdots < n\bar{R}^{n-1} S.$$

Daher haben dann für jedes $\varrho$, für das $|\cos n\varrho| \geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varrho}$ das Vorzeichen von $\cos n\varrho$. Dies findet also für alle $\varrho$ statt, die für ganze $k$ zwischen $(8k-1)\omega$ und $(8k+1)\omega$, oder zwischen $(8k+3)\omega$ und $(8k+5)\omega$ liegen, d. h. in den Intervallen (1), (3), (5) ... Und zwar sind in (1), (5), ... $T$ und $\frac{\partial U}{\partial \varrho}$ positiv, in (3), (7), ... negativ. Ganz analog sehen wir, daß, sobald $|\sin n\varrho| \geqq \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, $U$ für $\bar{R} \geqq R$ das Vorzeichen von $\sin n\varrho$ und $\frac{\partial T}{\partial \varrho}$ das Vorzeichen von $-\sin n\varrho$ hat. Dies findet also für alle $\varrho$ statt, die für ganze $k$ zwischen $(8k+1)\omega$ und $(8k+3)\omega$ oder zwischen $(8k+5)\omega$ und $(8k+7)\omega$ liegen, d. h. in (2), (4), (6), ... Und zwar ist in (2), (6), ... $U$ positiv, $\frac{\partial T}{\partial \varrho}$ negativ, in (4), (8), ... aber $U$ negativ, $\frac{\partial T}{\partial \varrho}$ positiv. — Daraus ergeben sich unsere obigen Behauptungen sofort.

2. Danach ist es leicht, den Verlauf etwa der Kurve $U=0$ für $r \geqq R$ zu beschreiben. Sie zerfällt außerhalb des Kreises $(R)$ mit dem Halbmesser $R$ in $2n$ Zweige, die in den Intervallen (1), (3), ... getrennt verlaufen. Fassen wir etwa die Nullstellen von $U$ außerhalb $(R)$ in (1) ins Auge, so liegt auf jedem Kreise $r = \bar{R}\,(\bar{R} \geqq R)$ genau eine. Alle diese Nullstellen bilden aber eine stetige Kurve. Um dies zu beweisen, brauchen wir nur folgendes zu zeigen: Ist $w > R$ und $(w, \vartheta)$ die Nullstelle von $U$, die in (1) auf dem Kreise $r = w$ liegt, so kann man jedem $\varepsilon$ ein solches $\delta$ zuordnen, daß, wenn $w' \geqq R$, $w - \delta < w' < w + \delta$ ist und die auf dem Kreise $r = w'$ in (1) liegende Wurzel durch $(w', \vartheta(w'))$ bezeichnet wird, $|\vartheta - \vartheta(w')| < \varepsilon$ bleibt. Da aber $U$ in $(w, \vartheta)$ auf dem Kreise $r = w$ von negativen zu positiven Werten übergeht, so ist für ein hinreichend kleines $\varepsilon' < \varepsilon$

$$U(w, \vartheta - \varepsilon') < 0, \quad U(w, \vartheta + \varepsilon') > 0,$$

und sowohl $(w, \vartheta - \varepsilon')$ als auch $(w, \vartheta + \varepsilon')$ bleiben innerhalb (1). Da $U$ stetig in den Variabeln $r, \varrho$ ist, so hat man für ein hinreichend kleines $\delta$

$$U(w', \vartheta - \varepsilon') < 0, \quad U(w', \vartheta + \varepsilon') > 0,$$

solange $w - \delta < w' < w + \delta$ bleibt. Daher befindet sich auf dem Kreise $r = w'$ in (1) eine Nullstelle von $U$, deren Argument zwischen $\vartheta - \varepsilon'$ und $\vartheta + \varepsilon'$ liegt, für die also $|\vartheta(w') - \vartheta| < \varepsilon$ ist. —

**3.** Um den Verlauf von $U = 0$ innerhalb des Kreises $(R)$ zu studieren, benutzen wir kartesische Koordinaten $x, y$. Ist $U$ identisch $= 0$ für irgend ein $x = x_1$, so ist $U$ durch $x - x_1$ teilbar; die Kurve $U = 0$ enthält also eine Gerade. Dann dividieren wir $U$ durch $x - x_1$ und studieren den Verlauf der so entstehenden Kurve. Wir können daher annehmen, daß für jedes $x$ die Gleichung $U = 0$ nicht mehr, als $n$ Wurzeln in $y$ hat. Wir notieren nun alle Werte von $x$, falls es solche gibt, für die zugleich $U$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$, oder $U$ und $\frac{\partial U}{\partial x}$ verschwinden kann. Gibt es deren unendlich viele, so muß $U$ mehrfache Faktoren besitzen, die wir dann von vornherein entfernt denken [1]). Andererseits notieren wir die Werte von $x$, für die $U = 0$ den Kreis $(R)$ schneidet.

Sind die so notierten Werte $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, so legen wir die Schar der Parallelen $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$, durch die das Innere des Kreises in endlich viele Streifen eingeteilt wird. Wir betrachten das Innere eines solchen Streifens, etwa zwischen $x = x_1$ und $x = x_2$. Es habe nun $U(x, y)$ für irgend ein $\bar{x}$ zwischen $x_1$ und $x_2$ genau $m$ Nullstellen $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta_m$. Dann hat $U$, behaupten wir, für jedes $x$ zwischen $x_1$ und $x_2$ genau $m$ Nullstellen. Zum Beweise bemerken wir vor allem, daß $U$ auf der Geraden $x = \bar{x}$ beim Durchgang durch eine Nullstelle $\eta$ das Vorzeichen ändert, da auf dieser Geraden $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$ ist.

Zuerst zeigen wir nun, daß jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta$ entspricht, daß es für jedes $x$ zwischen $\bar{x} + \delta$ und $\bar{x} - \delta$ $m$ Nullstellen von $U$ gibt, die bezw. innerhalb der mit dem Halbmesser $2\varepsilon$ um $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ beschriebenen Kreise liegen. Es sei für ein hinreichend kleines $\bar{\delta} < \varepsilon$ etwa

---

1) Es ist übrigens leicht zu zeigen, daß $U$ keine mehrfache Faktoren haben kann. Denn entfernt man einen solchen Faktor, so wird der Grad von $U$ verkleinert, und $U$ kann nicht auf jedem Kreise von hinreichend großem Halbmesser $2n$ verschiedene Nullpunkte haben.

$$U(\bar{x}, \eta_1 - \bar{\delta}) < 0, \quad U(\bar{x}, \eta_1 + \bar{\delta}) > 0$$
$$U(\bar{x}, \eta_2 - \bar{\delta}) > 0, \quad U(\bar{x}, \eta_2 + \bar{\delta}) < 0$$

usw. Da $U$ stetig in $x$ ist, gibt es ein solches $\delta < \varepsilon$ (für das überdies $x_1 < \bar{x} - \delta < \bar{x} + \delta < x_2$ bleibt), daß

$$U(x, \eta_1 - \bar{\delta}) < 0, \quad U(x, \eta_1 + \bar{\delta}) > 0,$$
$$U(x, \eta_2 - \bar{\delta}) > 0, \quad U(x, \eta_2 + \bar{\delta}) < 0$$

usw. für $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$ ist. Dann liegt für jedes solche $x$ wenigstens eine Wurzel von $U$ zwischen $\eta_1 - \bar{\delta}$ und $\eta_1 + \bar{\delta}$, ihre Entfernung von $(\bar{x}, \eta_1)$ ist also $< \delta + \bar{\delta} < 2\varepsilon$ und dasselbe gilt auch für $\eta_2, \eta_3, \ldots \eta_m$.

Es seien $t'$ und $t''$ $(t' < t'')$ die Ordinaten der Punkte, in denen die Gerade $x = \bar{x}$ den Kreis $(R)$ schneidet. Da $\frac{\partial U}{\partial y}$ in $\eta_1, \ldots, \eta_m$ von 0 verschieden ist, so kann man $\varepsilon$ wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial U}{\partial y}$ so klein gewählt denken, daß $\frac{\partial U}{\partial y}$ in jedem der obigen um $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ beschriebenen Kreise $\neq 0$ bleibt. Dann kann nach dem Rolleschen Satze in jedem dieser Kreise für jedes $x$ zwischen $\bar{x} - \delta$ und $\bar{x} + \delta$ nur eine Wurzel von $U$ liegen. Es sei $2M$ die untere Grenze von $U$ in den auf der Geraden $x = \bar{x}$ gelegenen Intervallen

$$t' \leqq y \leqq \eta_1 - \varepsilon, \ \eta_1 + \varepsilon \leqq y \leqq \eta_2 - \varepsilon, \ldots, \ \eta_m + \varepsilon \leqq y \leqq t''.$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $U$ als Funktion der Variabeln $x$ und des Parameters $y$ kann man $\delta$ so klein wählen, daß die Änderung von $U$, wenn $x$ sich zwischen $\bar{x} - \delta$ und $\bar{x} + \delta$ bewegt, $y$ aber in den obigen Intervallen bleibt, nicht größer als $M$ ist, und $U$ selbst daher von 0 verschieden bleibt. Es mögen ferner in den Kreisen um $(\bar{x}, t')$, $(\bar{x}, t'')$ mit den Halbmessern $\varepsilon$ keine Nullstellen von $U$ liegen. Wählen wir dann $\delta$ so klein, daß die Schnittpunkte der Geraden $x = \bar{x} + \delta$ und $x = \bar{x} - \delta$ mit dem Kreise $(R)$ von den entsprechenden Punkten $(\bar{x}, t')$, $(\bar{x}, t'')$ um weniger als $\varepsilon$ entfernt sind, so sind wir sicher, daß für kein $x$ zwischen $\bar{x} - \delta$ und $\bar{x} + \delta$ die Funktion $U$ Wurzeln außerhalb der um $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ mit dem Halbmesser $\varepsilon$ beschriebenen Kreise besitzt, d. h., daß $U$ für diese $x$ genau $m$ Wurzeln hat, die in beliebige Nähe bezw. von $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_m$ gebracht werden können, wenn man $\delta$ hinreichend klein wählt. Gibt es nun zwischen $x_1$ und $x_2$ solche $x$, für die die Anzahl der Wurzeln der Funktion $U$ von $m$ verschieden ist, und gibt es solche $x$ insbesondere auch zwischen $x_1$ und $\bar{x}$, so sei $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze aller der letzten

Bedingung genügenden $x$. Ist die Anzahl der Wurzeln von $U$ für $\bar{\bar{x}}$ gleich $m_1$, so gilt nach dem oben bewiesenen dasselbe auch in einer gewissen Umgebung von $\bar{\bar{x}}$ nach rechts. Da aber $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze aller $x$ zwischen $x_1$ und $\bar{x}$ ist, für die die Anzahl der Wurzeln von $m$ verschieden ist, so muß $m_1 = m$ sein. Dann ist aber auch in einer gewissen Umgebung von $\bar{\bar{x}}$ nach links die Anzahl der Wurzeln von $U$ gleich $m$, nach dem oben bewiesenen, und dies widerspricht der Annahme, daß $\bar{\bar{x}}$ die obere Grenze der $x$ ist, denen eine von $m$ verschiedene Anzahl der Wurzeln von $U$ entspricht. Folglich gibt es keine solchen $x$ zwischen $x_1$ und $\bar{x}$. Und ebenso beweist man, daß es keine solchen $x$ zwischen $\bar{x}$ und $x_2$ gibt. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

**4.** Für ein $x$ zwischen $x_1$ und $x_2$ bezeichnen wir die innerhalb $(R)$ liegende Wurzel von $U$ mit der kleinsten Ordinate durch $W_1(x)$, diejenige mit der zweitkleinsten Ordinate durch $W_2(x)$ und so weiter. So erhalten wir $m$ eindeutige Funktionen $W_1(x)$, $W_2(x), \ldots, W_m(x)$, von denen nun aber sofort folgt, daß sie für $x_1 < x < x_2$ **stetig** sind. Um dies etwa für $W_i(x)$ zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß für jedes $\bar{x}$ zwischen $x_1$ und $x_2$ sich jedem hinreichend klein vorgegebenen $\varepsilon$ ein solches $\delta$ zuordnen läßt, daß die der Größe nach $i$-te Wurzel von $U$, die $x$ entspricht, sich von $W_i(\bar{x})$ um weniger als $\varepsilon$ unterscheidet, solange $\bar{x} - \delta < x < \bar{x} + \delta$ bleibt. Dies haben wir aber im vorigen nachgewiesen. Wir bemerken endlich, daß genau dieselben Überlegungen auch für die beiden Kreissegmente gilt, die eventuell nach links von $x_1$, bezw. nach rechts von $x_k$ liegen. — Jetzt folgt weiter, daß $W_i(x)$ **differenzierbar, und daß**

$$\frac{\partial W_i(x)}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}}$$

ist, also immer dasselbe Vorzeichen behält. Folglich sind die $W_i$ **monoton**. Nähert sich $x$ etwa dem Werte $x_1$, so strebt $W_i(x)$ einem ganz bestimmten Grenzwerte zu. — **Damit ist die ganze Kurve $U = 0$ innerhalb von $(R)$ in eine endliche Anzahl regulärer Kurvenbogen zerlegt** (wir werden sie gelegentlich als **Elementarbogen** bezeichnen), zu denen noch isolierte Punkte auf den Geraden $x = x_1$, $x = x_2, \ldots$ in endlicher Anzahl (höchstens $n$) hinzukommen können. (Man kann zwar zeigen, daß solche isolierte Punkte nicht vorkommen, doch dies ist jetzt ohne Belang).

Innerhalb des von den Parallelen $x = x_1$, $x = x_2$ und den Elementarbogen $y = W_i(x)$, $y = W_{i+1}(x)$ begrenzten Bereiches (in

besonderen Fällen muß einer oder beide Bogen durch die Bogen des Kreises ($R$) ersetzt werden) hat $U$ stets dasselbe Vorzeichen und dieses Vorzeichen wechselt längs eines Bogens $y = W_i(x)$, da auf ihm $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$ ist.

Es sei nun $(x_1, w)$ ein Punkt auf der Geraden $x = x_1$, der nicht auf dem Kreise ($R$) liegt, und in dem von links und von rechts mehrere Elementarbogen zusammenkommen, etwa

$$y = W_i(x), \ldots, y = W_{i+k}(x)$$

von rechts und

$$y = \overline{W}_\nu(x), \; y = \overline{W}_{\nu+1}(x), \ldots, y = \overline{W}_{\nu+k}(x)$$

von links. Wir grenzen auf $x = x_1$ um $(x_1, w)$ zwei Intervalle $J_+(w + \varepsilon > y > w)$ und $J_-(w - \varepsilon < y < w)$ ab, in denen keine weitere Wurzel von $U$ liegt. Dann grenzt längst $J_+$ das Gebiet zwischen $y = W_{i+k}(x)$ und $y = W_{i+k+1}(x)$ an das Gebiet zwischen $y = \overline{W}_{\nu+k}(x)$ und $y = \overline{W}_{\nu+k+1}(x)$, und das Vorzeichen von $U$ ist in den beiden Gebieten dasselbe, wie in $J_+$. Diese beiden Gebiete bilden daher ein Gebiet. Dasselbe gilt auch für die Gebiete, die längst $J_-$ an einander grenzen. Da daher $U$ in den an den Punkt $(x_1, w)$ anstoßenden Gebieten abwechselndes Vorzeichen hat, so ist die Anzahl dieser Gebiete gerade. Daher ist auch die Anzahl der in diesem Punkt zusammenkommenden Bogen gerade. Und diese Anzahl bleibt auch dann gerade, wenn man nachträglich die durch $(x_1, w)$ gehende Gerade $x = x_1$ hinzufügen muß. Was aber die auf dem Kreise ($R$) liegenden Punkte von $U = 0$ betrifft, so können wir annehmen, daß sich in ihnen an den außerhalb des Kreises verlaufenden Zweig von $U = 0$ genau ein Elementarbogen anschließt. Denn dies ist nach dem eingangs über diese Zweige bewiesenen stets zu erreichen, indem man $R$ etwas größer annimmt.

**5.** Um nun die Existenz von Schnittpunkten von $U = 0$ und $T = 0$ zu beweisen, definieren wir auf jedem Elementarbogen von $U = 0$ eine Fortschreitungsrichtung durch die Festsetzung, daß beim Fortschreiten längs eines solchen Bogens das Gebiet mit $U > 0$ zur rechten Hand bleiben soll. — Dies ist möglich, da ja jeder Elementarbogen von $U = 0$ ein Gebiet mit $U > 0$ von einem Gebiet mit $U < 0$ trennt. Gelangen wir aber so zu einem Punkte, in dem mehrere Elementarbogen zusammentreffen, so sei festgesetzt, daß wir von jedem Elementarbogen auf den nächsten von rechts hinübergehen. Dabei hat man stets ein Gebiet mit $U > 0$ zur rechten Hand. Treten wir nun in irgend einem Intervall

$(4k+1)$ längs der Kurve $U=0$ in den Kreis $(R)$ ein, so werden wir nach unserer Festsetzung des Fortschreitungssinnes keinen Elementarbogen zweimal durchlaufen können und werden daher in irgend einem Intervall $(4k+3)$ aus dem Kreise austreten. Wir erhalten daher im ganzen $n$ sich ins Unendliche erstreckende Zweige der Kurve $U=0$, die in den Intervallen $(4k+1)$ in den Kreis eintreten und in den Intervallen $(4k+3)$ aus ihm austreten. Wir wollen einen Zweig, der im Intervalle $(4k+1)$ in den Kreis eintritt, durch $[k]$ bezeichnen. Nach unseren Festsetzungen über den Fortschreitungssinn können zwei von diesen Zweigen nie einen Elementarbogen gemeinsam haben, sondern höchstens einzelne Punkte. (Aber auch in solchen Punkten schneiden sich, wie aus unseren Festsetzungen folgt, solche Zweige nie, sondern stoßen nur an einander an.)

Durch das vorhergehende ist es noch nicht ausgeschlossen, daß es Elementarbogen gibt, die keinem der sich ins Unendliche erstreckenden Zweige angehören. Wir werden bald zeigen, daß es solche Bogen nicht geben kann. Für unseren Zweck ist dies aber sogar unnötig. Denn in dem Punkte im Intervall $(4k+1)$, in dem ein Zweig $[k]$ in den Kreis eintritt, ist das Vorzeichen von $T$ positiv, im Austrittspunkte in einem Intervalle $(4k'+3)$ aber negativ. Daher verschwindet $T$ auf dem Zweige $[k]$ von $U=0$ in wenigstens einem Punkte, und damit ist gezeigt, daß auf jedem der $n$ Zweige $[k]$ wenigstens eine Wurzel von $f(z)=0$ liegt. Es ist sogar die Existenz von $n$ Wurzeln von $f(z)$ nachgewiesen, allerdings unter der Annahme, daß die $n$ Zweige $[k]$ keinen Punkt gemeinsam haben. Um auch für den Fall, daß gewisse Zweige $[k]$ an einander stoßen, die Existenz von genau $n$ Wurzeln von $f(z)$ nachzuweisen, hat man nur zu zeigen, daß wenn in einem Punkte, in dem $i$ Zweige von $U=0$ an einander stoßen, wenigstens eine Wurzel von $f(z)$ liegt, in ihm genau $i$ Wurzeln von $f(z)$ liegen. Doch darauf wollen wir nicht näher eingehen [1]).

**6.** Wir wollen noch der Vollständigkeit wegen zeigen, daß jeder Elementarbogen von $U=0$ zu einem der Zweige $[k]$ gehört. Denn gehörte ein Elementarbogen $E$ keinem der $n$ Zweige $[k]$ an, so könnten wir eine solche reelle Konstante $j$ finden, daß $f(z)+j$ auf $E$ eine Nullstelle hätte, dagegen in keinem der Punkte, in denen die Zweige $[k]$ von $U=0$ eventuell an einander stoßen, verschwände. Da die $U$-Kurve von $f(z)+j$ mit der von $f(z)$ übereinstimmt, so hätte $f(z)+j$ auf jedem der $n$ Zweige $[k]$ eine Wurzel,

1) Vgl. W. Bd. III, S. 83—84.

also im ganzen $n$ Wurzeln, außerdem aber noch eine Wurzel auf $E$, also im ganzen wenigstens $n+1$ Wurzeln, $f(z)$ ist aber vom Grade $n$.

Aus der damit bewiesenen Tatsache können wir in einfacher Weise eine weitere Tatsache folgern, durch die der Verlauf der Kurve $U = 0$ im Sinne der Analysis Situs vollständig festgelegt wird. Es ist nämlich unmöglich, aus den Elementarbogen von $U = 0$ einen geschlossenen Zug zu bilden. Die Kurve $U = 0$ zerfällt also, topologisch gesprochen, in eine Anzahl von Bäumen, die mit einander keinen Punkt gemeinsam haben. Dies läßt sich sofort aus der Potentialeigenschaft von $U$ erschließen, da eine Potentialfunktion, die auf der ganzen Berandung eines ganz im Endlichen liegenden abgeschlossenen Bereiches gleich 0 ist, in der ganzen Ebene verschwinden muß. Es läßt sich dies aber auch elementar wie folgt zeigen:

Wäre es möglich, aus den Elementarbogen von $U = 0$ einen geschlossenen Zug zu bilden, so könnte man, wie man leicht einsieht, auch einen solchen doppelpunktlosen geschlossenen Zug $E_1 E_2 \dots E_s$ bilden, in dessen Inneren kein Elementarbogen von $U = 0$ verläuft. Wir wollen annehmen, daß beim Durchlaufen von $E_1 E_2 \dots E_s$ dessen Innere zur rechten Hand bleibt, was durch Umnumerieren der Bogen $E_1 \dots E_s$ jedenfalls zu erreichen ist. Ist nun $U \geqq 0$, im Inneren von $E_1 \dots E_s$ und schreiten wir längs eines Bogens $E_1$ gemäß dem früher festgesetzten Fortschreitungssinn, so werden wir nach diesen Festsetzungen stets auf dem Zuge $E_1 \dots E_s$ bleiben, so daß $E_1$ keinem der $n$ Züge $[k]$ angehört. Dies widerspricht aber der oben bewiesenen Tatsache. — Ist aber im Innern $U \leqq 0$, von $E_1 \dots E_s$ so ändern wir unsere Festsetzung des Fortschreitungssinnes in 5. dahin ab, daß beim Fortschreiten $U$ zur rechten Hand negativ sein soll. Dann bleiben alle unsere Überlegungen mutatis mutandis in Kraft. —

Wir haben oben anstatt $U > 0$, $U < 0$ geschrieben $U \geqq 0$, $U \leqq 0$, um dem Vorkommen von isolierten Nullstellen von $U$ Rechnung zu tragen. Es ist aber leicht nach derselben Methode zu zeigen, daß es isolierte Nullstellen von $U$ nicht gibt. Denn wäre $(x_0, y_0)$ eine solche, so gäbe es eine reelle Konstante $j$ der Art, daß $f(z) + j$ in $(x_0, y_0)$ eine Wurzel hätte. Ändern wir die reelle Konstante $j$ beliebig wenig ab, so folgte aus der Stetigkeit der Wurzeln als Funktionen der Koeffizienten, daß die Nullstelle $(x_0, y_0)$ in eine andere übergeht, die von $(x_0, y_0)$ beliebig wenig entfernt bliebe. Daher müßte $U$ in beliebiger Nähe von $(x_0, y_0)$ Nullstellen haben, so daß $(x_0, y_0)$ nicht isoliert sein kann. —