Werk

Titel: Zur Elektronentheorie. I. Allgemeine Untersuchung des Feldes eines belibig bewegt...

Autor: Sommerfeld, A.

Jahr: 1904

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?252457811_1904|log17

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Elektronentheorie.

I. Allgemeine Untersuchung des Feldes eines beliebig bewegten Elektrons.

Von

A. Sommerfeld in Aachen.

Vorgelegt in der Sitzung vom 5. März 1904 durch W. Voigt.

§ 1. *Einleitung. Die Differentialgleichung des skalaren Potentials.*

Von den Bewegungen eines Elektrons beherrschen wir bisher nur die gleichförmig-geradlinige Bewegung und ihre Nachbarbewegungen oder, wie man sagt, die stationäre und quasistationäre Bewegung. Ueber die wirklich beschleunigten Bewegungen kennen wir die Potentialgesetze von Liénard und Wiechert, welche das Feld eines Elektrons in hinreichender Entfernung von demselben beschreiben, für die Umgebung des Elektrons aber und für das Innere desselben nicht zureichen. Dementsprechend können diese Gesetze zur Beantwortung dynamischer Fragen, bei denen es auf das Feld im Innern des Elektrons ankommt, nicht herangezogen werden.

Im Folgenden gebe ich explicite, überraschend einfache Formeln für das Feld eines in beliebiger Weise bewegten Elektrons, welche innerhalb und außerhalb desselben strenge Gültigkeit haben. Aus ihnen lassen sich alle bisher bekannten und viele neue Ergebnisse der Elektronentheorie, soweit sie sich auf ein einzelnes Elektron bezieht, auf direktestem Wege herleiten, wie ich in einigen folgenden Noten zu zeigen gedenke. Ich teile hier den Weg mit, auf dem ich meine Formeln ursprünglich gefunden habe, da mir derselbe nicht ohne Interesse und Verallgemeinerungs-

fähigkeit zu sein scheint. Ein einfacherer Weg, der zu demselben Ziel führt, wird in § 7 angedeutet werden.

Die Differentialgleichung des skalaren Potentiales φ lautet bekanntlich für ein im Raume festes Coordinatensystem bei Benutzung der sog. rationellen (Heaviside'schen) Einheiten[1]):

$$1) \qquad \ddot{\varphi} - c^2 \Delta \varphi = c^2 \varrho,$$

wo ϱ die Dichte, c die Lichtgeschwindigkeit und ein Punkt die Differentiation nach t in einem festen Raumpunkte bedeutet. Ob das Elektron in Rotation befindlich ist, macht für die Aufstellung des skalaren Potentials nichts aus, wenn nur, was wir voraussetzen wollen, die elektrische Dichte symmetrisch um die Rotationsaxe verteilt ist, so daß immer Stellen gleicher Dichte durch die Rotation in einander übergeführt werden. Benutzen wir dagegen ein Coordinatensystem, welches die Translationsbewegung $\mathfrak{v}$ des Elektrons mitmacht, an der ev. vorhandenen Rotationsbewegung aber nicht teilnimmt, und bezeichnen wir mit $\partial/\partial t$ die Differentiation nach der Zeit in einem mit diesem Coordinatensystem fest verbundenen Punkte, so gilt:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathfrak{v}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \mathfrak{v}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \mathfrak{v}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

oder kürzer geschrieben, wenn grad φ den Anstieg des Potentiales, d. h. den Vektor mit den Componenten $\partial\varphi/\partial x$, $\partial\varphi/\partial y$, $\partial\varphi/\partial z$ und ( ) das skalare Produkt der eingeklammerten Größen bedeutet:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi);$$

daraus folgt:

$$\ddot{\varphi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \operatorname{grad} \varphi\right) - 2\left(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi)).$$

Die Differentialgleichung des Potentials lautet daher, bezogen auf ein derart mitbewegtes Coordinatensystem:

$$2) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt} \operatorname{grad} \varphi\right) - 2\left(\mathfrak{v} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) + (\mathfrak{v} \operatorname{grad} (\mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi)) - c^2 \Delta \varphi = c^2 \varrho.$$

Den Anfangspunkt des Coordinatensystems werden wir im Falle eines kugelförmigen Elektrons naturgemäß in den Mittel-

1) Näheres hierüber s. Enc. d. Math. Wiss. Bd. V Art. 12 (H. A. Lorentz: Maxwell'sche Theorie) Nr. 7. Bei Benutzung der gewöhnlichen Einheiten wäre ϱ durch $4\pi\varrho$ zu ersetzen.

punkt der Kugel legen; er soll daher schon jetzt der „Mittelpunkt des Elektrons“ heißen.

Die Dichte ϱ ist nach Einführung unseres mitbewegten Coordinatensystems für jeden mit diesem Coordinatensystem fest verbundenen Punkt $x\,y\,z$ zeitlich unveränderlich und zwar außerhalb des Elektrons gleich Null. Wegen dieses Umstandes ist die scheinbar complicirtere Gl. (2) für das bewegte Coordinatensystem in Wirklichkeit einfacher, wie die Gl. (1), in welcher ϱ zeitlich veränderlich ist, so bald das Elektron über den betrachteten Raumpunkt hinweggeht.

§ 2. *Auflösung der unstetigen Dichte ϱ in stetig-harmonische Verteilungen ϱ'.*

Es ist für alles Folgende sehr bequem, die einigermaßen gesetzlose und an der Grenze des Elektrons unstetig wechselnde wirkliche Dichtigkeitsverteilung ϱ durch eine Summe von durchaus stetigen Verteilungen ϱ' zu ersetzen. Das Mittel hierzu bietet die Theorie des Fourier'schen Integrals. Nach dieser gilt (unter bekannten für das Folgende belanglosen Einschränkungen) für eine beliebige im ganzen Raum definirte Funktion $f(x\,y\,z)$ die Formel:

$$f(x\,y\,z) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm\,dx\,d\lambda\,d\mu\, f(x\,\lambda\,\mu)\, e^{ik(x-x)+il(y-\lambda)+im(z-\mu)}.$$

Die sämtlichen Integrationen nach $k\,l\,m$ und $x\,\lambda\,\mu$ sind dabei von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken und zwar sind die Integrationen nach $x\,\lambda\,\mu$ vor denen nach $k\,l\,m$ auszuführen. Wir wenden diese Formel auf unsere Funktion ϱ an und führen die Abkürzungen ein:

3) $$\varrho' = e^{i(kx+ly+mz)}$$

4) $$\mathrm{P} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\,d\lambda\,d\mu\,\varrho(x\,\lambda\,\mu)\, e^{-i(kx+l\lambda+m\mu)}.$$

Es gilt dann nach der vorausgeschickten Formel die folgende Darstellung für ϱ:

5) $$\varrho = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm\,\mathrm{P}\,\varrho'.$$

Die Dichteverteilung ϱ' ist eine im ganzen Raum stetige und, wie wir sagen können, harmonisch variable, da sie durch eine Exponentialfunktion mit imaginärem Exponenten dargestellt wird. Die Hülfsgröße P ist von $x\,y\,z$ unabhängig und als Funktion von $k\,l\,m$ aufzufassen. Gl. (5) zeigt nun, daß die wirkliche Dichteverteilung

ϱ gewissermaßen durch Ueberlagerung der harmonischen Verteilungen ϱ' erhalten wird, nachdem wir jede dieser Verteilungen mit dem Faktor $dk\,dl\,dm\,\mathrm{P}$ multiplicirt haben.

Wir führen nun ein Hülfspotential φ' ein, welches in derselben Beziehung zu ϱ' steht, wie φ zu ϱ. Wir definiren nämlich φ' durch die zu 2) analoge Gleichung:

$$2')\quad \frac{\partial^2\varphi'}{\partial t^2}-\left(\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\operatorname{grad}\varphi'\right)-2\left(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi'}{\partial t}\right)+(\mathfrak{v}\operatorname{grad}(\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varphi'))-c^2\Delta\varphi'=c^2\varrho'.$$

Aus φ' berechnet sich φ durch ganz dieselbe Ueberlagerung wie ϱ aus ϱ' nämlich durch die zu (5) analoge Gleichung:

$$5')\qquad \varphi=\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm\,\varphi'\mathrm{P}.$$

In der That genügt das so berechnete φ der Gl. (2), wie man erkennt, wenn man auf jedes Glied der Gl. (2') die Operation $\int dk\,dl\,dm\,\mathrm{P}$ anwendet.

Gl. (2') ist aber wegen des gesetzmäßigen Charakters der rechten Seite sehr viel einfacher als Gl. (2). Es ergiebt sich gleichzeitig der weitere Vorteil, daß man sich um die Stetigkeitsbedingungen, die φ an der Oberfläche des Elektrons erfüllen muß, nicht zu kümmern braucht. Diese werden nämlich von selbst erfüllt, sofern man ursprünglich mit den stetigen Dichtigkeitsverteilungen ϱ' und den zu ihnen gehörigen Potentialen φ' rechnet.

§ 3. *Bestimmung des Hülfspotentiales φ'.*

Nach der Bedeutung von ϱ' liegt es nahe φ' in der folgenden Form versuchsweise anzusetzen:

$$6)\qquad \varphi'=e^{i(kx+ly+mz)}F(t).$$

Tragen wir in (2') ein, so folgt nach Forthebung des allen Gliedern gemeinsamen Exponentialfaktors, wenn man mit $\mathfrak{s}$ den aus den Componenten $k\,l\,m$ gebildeten Vektor und mit s seine Länge bezeichnet, für F die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2F}{dt^2}-2i(\mathfrak{s}\,\mathfrak{v})\frac{dF}{dt}+\left\{c^2s^2-i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)-(\mathfrak{v}\,\mathfrak{s})^2\right\}F=c^2.$$

Wir vereinfachen diese Gleichung, indem wir

$$F=\alpha f$$

setzen und α so bestimmen, daß das Glied mit df/dt fortfällt.

Zunächst kommt

$$7)\quad \left\{ \begin{array}{c} \alpha\frac{d^2f}{dt^2}+2\left(\frac{d\alpha}{dt}-i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\alpha\right)\frac{df}{dt}+ \\ \left\{\frac{d^2\alpha}{dt^2}-2i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt}+c^2s^2\alpha-(\mathfrak{s}\mathfrak{v})^2\alpha-i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha\right\}f=c^2. \end{array} \right.$$

Wir wählen also α so, daß

$$8)\quad \frac{d\alpha}{dt}=i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\alpha$$

wird; dies liefert für α den Wert:

$$8')\quad \alpha=e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_t)},\quad \text{wobei } \mathfrak{B}_t=\int^t \mathfrak{v}\,dt.$$

Da uns mit jedem partikulären Integral von 8) gedient ist, können wir die untere Grenze in dem Ausdruck für $\mathfrak{B}$, welche die Integrationsconstante vertritt, ganz beliebig wählen. Die Bedeutung des hier eingeführten Vektors $\mathfrak{B}(t)$ ist die des Fahrstrahls von einer beliebig zu wählenden Anfangslage nach dem Orte des Mittelpunktes des Elektrons zur Zeit t. Aus 8) und 8') folgt noch:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}=i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha+i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt}=i\left(\mathfrak{s}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right)\alpha+2i(\mathfrak{s}\mathfrak{v})\frac{d\alpha}{dt}+(\mathfrak{s}\mathfrak{v})^2\alpha.$$

Der Wert der $\{\ \}$ in Gl. (7) wird daraufhin einfach $c^2s^2\alpha$, indem sich alle übrigen Glieder zerstören. Man erhält also die folgende vereinfachte Differentialgleichung für f:

$$9)\quad \frac{d^2f}{dt^2}+c^2s^2f=c^2e^{-i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_t)}.$$

Wir schreiben ein partikuläres Integral dieser Differentialgleichung in der folgenden Form an:

$$10)\quad f=\frac{c}{s}\int_{-\omega}^{t}e^{-i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_u)}\sin cs\,(t-u)\,du.$$

In der That genügt es, diesen Ausdruck in die Gl. (9) einzutragen um einzusehen, daß dieselbe befriedigt wird. Dabei ist zu beachten, daß in (10) t sowohl in der oberen Grenze des Integrals wie unter dem Integralzeichen vorkommt.

Aus unserem partikulären würde das allgemeine Integral der Differentialgleichung (9) durch Hinzufügung von Gliedern der Form $A\cos cst+B\sin cst$ entstehen. Man erkennt aber aus der Betrachtung der stationären Bewegung, daß in diesem speciellen Falle $A=B=0$ zu nehmen ist, vorausgesetzt, daß man die untere Grenze ω in (10) dazu bestimmt, in's Unendliche zu wachsen.

Allerdings ist in dem Ausdrucke (10) der Grenzübergang $\omega = \infty$ unerlaubt, weil dabei das Integral divergent werden würde. Er soll daher erst nach Ausführung der in dem Ausdruck von φ vorgesehenen Integrationen vorgenommen werden.

Indem wir diesen einfachsten Ansatz von dem speciellen Falle der stationären Bewegung auf den allgemeinen Fall übertragen, was natürlich nur durch den Erfolg gerechtfertigt werden kann, wollen wir allgemein

$$A = B = 0, \quad \omega = \infty$$

setzen, letzteres aber erst in dem integrirten Ausdrucke φ, wobei die Zulässigkeit des Grenzüberganges $\omega = \infty$ erst später geprüft werden kann.

Den mutmaßlichen Wert unserer Funktion $F = \alpha f$ schreiben wir daher mit Benutzung der Integrationsvariabeln $\tau = t - u$ und der Abkürzung $\Omega = \omega + t$:

$$F = \frac{c}{s}\int_0^{\Omega} e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_t) - i(\mathfrak{s}\mathfrak{B}_{t-\tau})} \sin cs\tau \, d\tau.$$

Wir führen noch die Abkürzungen ein

$$11) \quad \mathfrak{T} = \mathfrak{B}_t - \mathfrak{B}_{t-\tau} \quad \xi = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_x dt, \quad \eta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_y dt, \quad \zeta = \int_{t-\tau}^{t} \mathfrak{v}_z dt;$$

dabei sind $\xi\eta\zeta$ die Componenten des Fahrstrahls $\mathfrak{T}$ vom Orte des Elektronen-Mittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ nach seinem Orte zur Zeit t, welch letzterer jeweils mit dem Anfangspunkte unseres beweglichen Coordinatensystems zusammenfällt. Die Exponentialfunktion in dem Ausdrucke von F kann danach auch geschrieben werden:

$$e^{i(k\xi + l\eta + m\zeta)}.$$

Aus F ergiebt sich nach (6) der Wert von φ' durch Multiplikation mit

$$e^{i(kx + ly + mz)}.$$

Dementsprechend tritt in dem Ausdrucke von φ' die Exponentialfunktion auf

$$e^{i\{k(x+\xi) + l(y+\eta) + m(z+\zeta)\}} = e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})},$$

wobei die Componenten

$$11') \qquad x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta$$

zu dem Vektor $\mathfrak{R}$ zusammengefaßt sind. Dieser neue Vektor $\mathfrak{R}$ bedeutet alsdann den Fahrstrahl vom Orte des Elektronenmittelpunktes zur Zeit $t-\tau$ nach dem Orte des Aufpunktes zur Zeit t.

Der Ausdruck unseres Hülfspotentiales φ' lautet nun einfach folgendermaßen:

$$12) \qquad \varphi' = \frac{c}{s}\int_0^{\Omega} e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})} \sin cs\tau \, d\tau.$$

§ 4. *Berechnung der Größe* P.

Unsere Hülfsgröße P ist durch 4) definirt. Um sie zu berechnen, müssen wir specielle Annahmen über Gestalt und Ladung des Elektrons machen. Am nächsten liegt es, das Elektron als Kugel (Radius a) vorauszusetzen und es mit gleichförmiger Volum- oder Oberflächenladung (Gesamtbetrag ε) auszustatten.

Bezeichnen wir den Abstand des Integrationspunktes $(\varkappa, \lambda, \mu)$ vom Anfangspunkte der Coordinaten $\varkappa\lambda\mu$ mit σ, so wird bei gleichförmiger Volumladung

$$\text{für } \sigma < a \ldots\ldots \varrho = \text{const} = \frac{3\varepsilon}{4\pi a^3}$$
$$\text{„ } a < \sigma \ldots\ldots \varrho = 0.$$

Andrerseits gelangen wir zu einer gleichförmigen Oberflächenladung, indem wir von einer gleichförmig geladenen Kugelschale von der Dicke δ ausgehen und im Endresultat $\delta = 0$ machen. In diesem Falle haben wir

$$\text{für } \sigma < a-\delta \quad \ldots\ldots \varrho = 0,$$
$$\text{„ } a-\delta < \sigma < a \ldots\ldots \varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi a^2\delta},$$
$$\text{„ } a < \sigma \quad \ldots\ldots \varrho = 0.$$

Um nun im einen und anderen Falle die Größe P auszuwerten, führen wir statt der „rechtwinkligen Integrationsvariabeln" $\varkappa\lambda\mu$ Polarcoordinaten ein. Die eine derselben sei der Abstand σ; zwei zugehörige Winkel ϑ und ψ definiren wir folgendermaßen: Wir denken uns im Raume der $\varkappa\lambda\mu$ den Punkt $P = (k\,l\,m)$ markirt, der vom Anfangspunkt O den Abstand s hat. Seine Verbindungslinie mit O sei die ausgezeichnete Axe des Polarcoordinatensystems, von welcher aus bez. um welche herum wir die Winkel ϑ und ψ messen. Nennen wir also den variabeln Integrationspunkt $Q = (\varkappa\lambda\mu)$, so bedeutet ϑ den Winkel POQ und es wird:

$$\cos\vartheta = \frac{k\varkappa + l\lambda + m\mu}{s\sigma}.$$

Der Exponent in dem Ausdrucke von P, Gl. (4), kann daher ge-

schrieben werden $-is\sigma\cos\vartheta$ und es wird, je nachdem es sich um Volum- oder Oberflächenladung handelt

$$P = \frac{3\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{2\pi a}\right)^3 \int_0^a \sigma^2 d\sigma \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-is\sigma\cos\vartheta}$$

bez.

$$P = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{2\pi a}\right)^3 \frac{a}{\delta}\int_{a-\delta}^a \sigma^2 d\sigma \int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\psi\, e^{-is\sigma\cos\vartheta}.$$

Hier lassen sich die Integrationen nach ϑ und ψ unmittelbar ausführen. Die Integration nach ψ liefert den Faktor 2π, die nach ϑ führt auf

$$\left[\frac{e^{-is\sigma\cos\vartheta}}{is\sigma}\right]_0^\pi = \frac{2\sin s\sigma}{s\sigma}.$$

Man erhält daher bei gleichförmiger Volumladung

$$P = \frac{3\varepsilon}{(2\pi a)^3}\int_0^a \frac{\sin s\sigma}{s}\sigma d\sigma$$

und bei gleichförmiger Oberflächenladung:

$$P = \frac{\varepsilon}{(2\pi a)^3}\frac{a}{\delta}\int_{a-\delta}^a \frac{\sin\sigma s}{s}\sigma\, d\sigma.$$

Im zweiten Fall ist der Grenzwert des Integrales für $\delta = 0$ unmittelbar hinzuschreiben, er lautet:

$$13) \qquad P = \frac{\varepsilon}{(2\pi)^3}\frac{\sin as}{as}.$$

Auch im ersten Fall hat die Ausführung der Integration keine Schwierigkeit, sie ergiebt:

$$13') \qquad P = \frac{3\varepsilon}{(2\pi)^3}\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^3}.$$

Die beiden Werte (13) und (13') haben das Gemeinsame, daß sie Funktionen von $s = \sqrt{h^2+k^2+l^2}$ sind, die für $s = 0$ den endlichen Wert $\varepsilon/(2\pi)^3$ haben, bei wachsendem s mit abnehmender Amplitude oscilliren und für $s = \infty$ verschwinden. Wir dürfen hiernach wohl annehmen, daß ein ähnliches Verhalten von P auch bei einer ganz beliebigen Dichtigkeitsverteilung im Elektron gelten wird.

§ 5. *Allgemeiner Ausdruck des skalaren Potentials* φ.

Um zu φ überzugehen haben wir nach 5') das Produkt $P\varphi'$ nach $k\,l\,m$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integriren, wobei wir der Einfachheit wegen zunächst Oberflächenladung voraussetzen, also die bequemere Formel (13) anwenden wollen. Wir erhalten so bei Vertauschung der Integrationsfolgen nach τ und $k\,l\,m$:

$$\varphi = \frac{\varepsilon c}{(2\pi)^3}\int_0^{\Omega} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\,k\,d\,l\,d\,m\; e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})}\,\frac{\sin as}{as^2}\sin cs\tau.$$

Um nun die Integrationen nach $k\,l\,m$ auszuführen, definiren wir abermals statt der rechtwinkligen Integrationsvariabeln geeignete Polarcoordinaten. Als solche wählen wir erstens den Abstand s des Integrationspunktes $Q = (k\,l\,m)$ vom Anfangspunkte O; ferner denken wir uns im Raume der $k\,l\,m$ den Vektor $\mathfrak{R}$ von O aus gezogen, dessen Länge beträgt

$$14) \qquad R = \sqrt{(x+\xi)^2+(y+\eta)^2+(z+\zeta)^2}.$$

Von $\mathfrak{R}$ aus zählen wir den Winkel Θ, der den Winkel zwischen $\mathfrak{R}$ und dem Strahle OQ bedeuten soll; ferner zählen wir um $\mathfrak{R}$ herum den Winkel Ψ. Es wird dann $(\mathfrak{s}\mathfrak{R}) = sR\cos\Theta$ und

$$15) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon c}{(2\pi)^3 a}\int_0^{\Omega} d\tau \int_0^{\infty} ds \sin as \sin cs\tau \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\Psi\, e^{isR\cos\Theta}.$$

Die Integrationen nach Ψ und Θ lassen sich ebenso wie im vorigen § diejenigen nach ψ und ϑ ausführen.

Demnach erhalten wir für φ:

$$16) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^{\Omega} \frac{S d\tau}{R}$$

$$16') \qquad S = \int_0^{\infty} \sin as \sin cs\tau \sin Rs \frac{ds}{s}.$$

Auch das Integral S läßt sich ausführen u. zw. liefert dasselbe (vgl. § 8 unter (a)) den Wert $\pi/4$ oder 0, je nachdem sich die drei Längen a, $c\tau$ und R zu einem Dreieck zusammensetzen lassen oder nicht. Schreiben wir

$$S = \frac{\pi}{4}\lambda,$$

so bedeutet λ die Zahl 1 oder 0, je nachdem ein Dreieck aus den Seiten a, $c\tau$ und R möglich oder unmöglich ist. Der Wert unse-

res Potentials wird alsdann einfach:

$$\varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^{\Omega} \lambda \frac{d\tau}{R}.$$

Die Größe λ ist dabei unter das Integralzeichen gesetzt, weil vorauszusehen ist, daß λ in verschiedenen Intervallen des Integrationsgebietes verschiedene Werte haben wird. Insbesondere ist klar, daß λ bei sehr großen Werten der Variabeln τ gleich Null wird, weil alsdann die Strecke $c\tau$ die beiden anderen Strecken a und R so sehr überwiegt, daß die Bildung eines Dreiecks $(a, c\tau, R)$ unmöglich wird[1]). Hieraus geht unmittelbar hervor, daß die obere Grenze unseres Integrals ohne Weiteres durch ∞ ersetzt werden darf oder (vgl. pag. 6) daß der Grenzübergang $\omega = \infty$, an dem integrirten Ausdruck φ vorgenommen, zulässig ist, wofür wir den Nachweis früher schuldig blieben.

Wir haben daher den folgenden allgemeinen Ausdruck von φ bei gleichförmiger Oberflächenladung gewonnen:

$$17) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^{\infty} \frac{\lambda d\tau}{R}, \qquad (\lambda = 0 \text{ oder } 1).$$

Einen entsprechenden Ausdruck wollen wir für den Fall gleichförmiger Volumladung herleiten. Wir haben dabei statt mit (13) mit dem Werte (13′) von P zu rechnen. Es kommt dies darauf hinaus, daß wir in (15) ersetzen:

$$\sin as \text{ durch } 3\frac{\sin as - as\cos as}{(as)^2},$$

so daß

$$18) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon c}{2\pi^2 a}\int_0^{\Omega} \frac{S d\tau}{R}$$

$$18') \qquad S = 3\int_0^{\infty} \frac{\sin as - as\cos as}{(as)^2} \sin cs\tau \sin Rs \frac{ds}{s}.$$

Das Integral S wird im § 8 unter (b) berechnet werden; dasselbe

1) Hierbei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß die Bewegung mit „Unterlichtgeschwindigkeit“ vor sich geht. Findet die Bewegung mit „Ueberlichtgeschwindigkeit“ statt, so würde umgekehrt die Strecke R für $\tau = \infty$ die beiden anderen Strecken a und $c\tau$ überwiegen und ein Dreieck ebenfalls unmöglich sein. Nur wenn die Geschwindigkeit der Bewegung zur Zeit $t - \tau$ im Limes $\tau = \infty$ gleich der Lichtgeschwindigkeit war, kann eine Ausnahme eintreten und, indem λ für wachsende Werte von τ nicht verschwindet, unser Integral (17) seinen Sinn verlieren.

ist, wenn sich die drei Längen a, $c\tau$ und R zu einem Dreieck zusammensetzen lassen, gleich

$$\frac{3\pi}{8}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right),$$

dagegen, wenn dies nicht möglich ist, gleich

$$\frac{3\pi}{2}\frac{c\tau R}{a^2} \text{ oder } 0,$$

je nachdem a die größte der drei Längen a, $c\tau$, R ist oder nicht. Wir wollen allgemein schreiben

$$S = \frac{\pi}{4}\varkappa,$$

wobei

$$19)\begin{cases} \varkappa = \frac{3}{2}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right) \ldots \text{Dreiecksbildung möglich} \\ \varkappa = 6\frac{c\tau R}{a^2} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{„ „ unmöglich, } a > c\tau \text{ und } a > R \\ \varkappa = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{„ „ „ „ , } a < c\tau \text{ oder } a < R. \end{cases}$$

Alsdann ergiebt sich aus (18) die einfache Formel als allgemeiner Ausdruck von φ bei gleichförmiger Volumladung:

$$20) \qquad \varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\varkappa d\tau}{R}.$$

Auch hier ist es nämlich offenbar erlaubt, die obere Grenze des Integrals gleich ∞ zu setzen, weil bei sehr großem τ ein Dreieck aus den Seiten $a, c\tau$ und R sicherlich nicht gebildet werden kann und überdies $c\tau > a$ ist, so daß dann für $\varkappa$ der letzte der Werte (19), nämlich $\varkappa = 0$ gilt.

§ 6. *Allgemeiner Ausdruck des Vektorpotentials* $\mathfrak{A}$.

Bei der Bestimmung des Vektorpotentials ist zu unterscheiden, ob das Elektron lediglich die bisher betrachtete Translationsgeschwindigkeit hat, oder ob es außerdem noch Rotationen ausführt, deren Vorhandensein bei der Bestimmung des skalaren Potentials belanglos war:

1. Sehen wir zunächst von der Rotation ab und nennen wir $\mathfrak{A}_1$ den allein von der Translation herrührenden Bestandteil von $\mathfrak{A}$, so werden die Formeln für das Vektorpotential $\mathfrak{A}_1$ fast genau mit denen für das skalare Potential φ identisch.

Beim Uebergange von φ zu $\mathfrak{A}_1$ haben wir in Gl. (1) und daher auch in (2), (2') etc. ϱ zu ersetzen durch $\mathfrak{v}\varrho/c$. Ferner haben wir wegen des Vektorcharakters von $\mathfrak{A}_1$ den Term ($\mathfrak{v}$ grad φ) zu ersetzen durch

$$(\mathfrak{v} \text{ grad})\ \mathfrak{A}_1,$$

wobei also der Vektor $\mathfrak{v}$ mit der Vektoroperation grad skalar zu multipliciren und die so entstehende Operation auf den Vektor $\mathfrak{A}_1$ anzuwenden ist. Die weiteren Rechnungen bleiben durch diese Abänderung unberührt.

Darauf definiren wir ein Vektor-Hülfspotential $\mathfrak{A}_1'$, welches der Gl. (2') genügt mit der Modifikation, daß darin ϱ' ersetzt ist durch

$$\frac{\mathfrak{v}\varrho'}{c}.$$

Dieses Hilfspotential bestimmt sich wieder genau durch die Formeln des § 3, wenn man nur in (10) unter dem Integralzeichen den Faktor $\mathfrak{v}_u/c$ und dementsprechend in (12) unter dem Integralzeichen den Faktor $\mathfrak{v}_{t-\tau}/c$ hinzufügt wobei u und $t-\tau$ den Zeitpunkt angeben, für welchen der Wert der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ zu bilden ist. Die weiteren Rechnungen verlaufen genau so wie früher. Infolge dessen erhält man statt der Endformeln 17) und 20) die folgende allgemeine Darstellung des Translationsbestandteils des Vektorpotentials bei gleichförmiger Oberflächenladung

$$21) \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\lambda \mathfrak{v}_{t-\tau}\, d\tau}{R},$$

bei gleichförmiger Volumladung

$$22) \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty \frac{\varkappa \mathfrak{v}_{t-\tau}\, d\tau}{R}$$

mit der im vorigen § angegebenen Bedeutung von λ und $\varkappa$.

2. Das Elektron führe außer der Translation $\mathfrak{v}$ eine Rotation $\mathfrak{w}$ um einen beliebigen Durchmesser aus, wobei die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ nach Größe und Axe als gegebene Funktion der Zeit anzusehen ist. Da sich die von der Translation und der Rotation herrührenden Bestandteile glatt überlagern, soll jetzt lediglich der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials betrachtet und mit $\mathfrak{A}_2$ bezeichnet werden. Mit ihm ist der Translationsbestandteil nachträglich durch vektorielle Addition zu vereinigen. Wegen der Ortsveränderung des Elektrons ist aber $\mathfrak{A}_2$ auch jetzt

auf das bewegliche Coordinatensystem zu beziehen und durch die Differentialgleichung (2) zu bestimmen, in welcher ϱ zu ersetzen ist, durch

$$\varrho\frac{[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]}{c};$$

es giebt nämlich das Vektorprodukt $[\mathfrak{w}\mathfrak{r}]$ nach Richtung und Größe die im Abstande r vom Mittelpunkte wegen der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ vorhandene Lineargeschwindigkeit an.

Wir definiren jetzt statt der früheren skalaren Größe P einen Vektor P mit den drei Componenten

$$P_x\ P_y\ P_z;$$

die letzteren sollen sich aus der früheren Gl. (4) ergeben, wenn wir darin unter dem Integralzeichen bez. die Faktoren

$$\varkappa\ \lambda\ \mu$$

hinzufügen.

Ferner definiren wir statt φ' ein Vektorhilfspotential $\mathfrak{A}_2'$, welches, ebenso wie früher φ', durch Gl. (2′) definirt sein soll, nachdem darin ϱ' durch $\varrho'\mathfrak{w}/c$ ersetzt ist.

Man übersieht dann leicht, daß zur Bestimmung von $\mathfrak{A}_2$ an Stelle von 5′) die Gleichung dient:

$$23)\qquad \mathfrak{A}_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk\,dl\,dm\,[\mathfrak{A}_2'\mathrm{P}].$$

Um $\mathfrak{A}_2$ zu finden haben wir uns also zunächst mit der Bestimmung von $\mathfrak{A}_2'$ und P zu befassen.

Die Bestimmung von $\mathfrak{A}_2'$ geschieht ebenso wie die von φ' durch Gl. (12), nachdem darin unter dem Integralzeichen der Faktor $\mathfrak{w}_{t-\tau}/c$ hinzugefügt ist, wo $t-\tau$ das Argument von $\mathfrak{w}$ angiebt:

$$24)\qquad \mathfrak{A}_2' = \frac{1}{s}\int_0^{\Omega} e^{i(\mathfrak{s}\mathfrak{R})}\mathfrak{w}_{t-\tau}\sin cs\tau\,d\tau.$$

Dagegen erfordert die Berechnung des Vektors P einige Vorbereitungen. In § 4 benutzten wir statt der $\varkappa\,\lambda\,\mu$ Polarcoordinaten $\sigma\,\vartheta\,\psi$, die uns auch jetzt dienen werden. Es ist aber jetzt übersichtlicher, den Uebergang von den $\varkappa\,\lambda\,\mu$ zu den Polarcoordinaten $\sigma\,\vartheta\,\psi$ in zwei Schritte zu zerlegen, indem man noch ein rechtwinkliges Coordinatensystem $K\Lambda M$ dazwischenschaltet, dessen erste Axe ebenso wie die ausgezeichnete Polaraxe ($\vartheta = 0$) durch den Punkt mit den Coordinaten $k\,l\,m$ hindurchgehen, d. h. mit dem Vektor $\mathfrak{s}$ zusammenfallen soll. Die Richtungscosinus dieser Axe

gegen die Axen $\varkappa\,\lambda\,\mu$ sind dann ersichtlich k/s, l/s, m/s und die Transformationsformeln von den $\varkappa\,\lambda\,\mu$ zu den $K\,\Lambda\,M$ werden:

$$\varkappa = \frac{k}{s}K + \cdots = \frac{k}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

$$\lambda = \frac{l}{s}K + \cdots = \frac{l}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

$$\mu = \frac{m}{s}K + \cdots = \frac{m}{s}\sigma\cos\vartheta + \cdots$$

Die nicht hingeschriebenen mit Λ oder M proportionalen Glieder enthalten beim Uebergang zu den Polarcoordinaten sämtlich einen der beiden Faktoren $\sin\psi$ oder $\cos\psi$. Denken wir uns nun in dem Ausdruck 4) von P verabredetermaßen die Faktoren $\varkappa$ bez. $\lambda\,\mu$ hinzugefügt, so fallen diese Glieder bei der Integration nach ψ fort, während dieselbe Integration in den hingeschriebenen ersten Gliedern den Faktor 2π ergiebt. Bei der Integration nach ϑ ferner haben wir es in allen drei Componenten von P mit dem Ausdrucke

$$25)\qquad \int_0^\pi e^{-is\sigma\cos\vartheta}\cos\vartheta\sin\vartheta d\vartheta = -2i\frac{\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma}{(s\sigma)^2}$$

zu thun. Infolgedessen ergiebt sich, wenn wir alle drei Componenten vektoriell zusammenfassen, für P der Wert

$$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{F}}{(2\pi as)^3}3\int_0^a(\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma)\,\sigma\,d\sigma$$

im Falle gleichförmiger Volumladung und

$$\mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{F}}{(2\pi as)^3}\frac{a}{\delta}\int_{a-\delta}^a(\sin s\sigma - s\sigma\cos s\sigma)\,\sigma\,d\sigma$$

im Falle gleichförmiger Oberflächenladung.

Beide Integrale lassen sich leicht ausführen; insbesondere findet man im letzteren Falle unmittelbar:

$$26)\qquad \mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{F}}{(2\pi)^3}\frac{\sin as - as\cos as}{as^3},$$

im ersteren Falle dagegen

$$26')\qquad \mathrm{P} = \frac{-\varepsilon i\mathfrak{F}}{(2\pi)^3}3\frac{3\sin as - 3as\cos as - (as)^2\sin as}{a^3s^5}.$$

Wir setzen jetzt die Werte von $\mathfrak{A}_2'$ und P in die Gl. (23) ein, um $\mathfrak{A}$ zu finden. Dabei führen wir statt der Integrationsvariabeln $k\,l\,m$ die früheren Polarcoordinaten $s\,\Theta\,\Psi$ ein unter Zwischen-

schaltung eines rechtwinkligen Systems $K\,L\,M$, dessen erste Axe mit der Polaraxe $\Theta = 0$ zusammenfallen, also wie früher mit dem Vektor $\mathfrak{R}$ (s. Gl. (11')) übereistimmen soll. Ihre Richtungscosinus gegen die Axen $k\,l\,m$ sind bez.

$$\frac{x+\xi}{R},\quad \frac{y+\eta}{R},\quad \frac{z+\zeta}{R}.$$

Die Transformationsformeln zwischen den $k\,l\,m$ und den $K\,L\,M$ lauten daher:

$$k = \frac{x+\xi}{R}K + \cdots = \frac{x+\xi}{R}s\cos\Theta + \cdots$$

$$l = \frac{y+\eta}{R}K + \cdots = \frac{y+\eta}{R}s\cos\Theta + \cdots$$

$$m = \frac{z+\zeta}{R}M + \cdots = \frac{z+\zeta}{R}s\cos\Theta + \cdots$$

Da sich der Wert von P proportional mit ε ergab, so ist jeder der Terme, aus denen sich $[\mathfrak{A}_2' \mathrm{P}]$ zusammensetzt, mit einem der Faktoren $k\,l\,m$ behaftet. Führen wir nun die vorgeschriebenen Integrationen in Polarcoordinaten aus, so fallen wieder die nicht hingeschriebenen Glieder der $h\,k\,l$ bei der Integration nach Ψ fort. Bei der Integration nach Θ tritt abermals der Ausdruck (25) auf, wenn wir darin $-i$ mit $+i$ und σ mit R vertauschen.

Für $\mathfrak{A}_2$ erhält man so

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi^2}\int_0^{\Omega}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\,\frac{S d\tau}{R^2};$$

dabei hat S bei gleichförmiger Oberflächen- bez. Volumladung die Bedeutung:

$$27)\qquad S = \int_0^{\infty}\frac{\sin as - as\cos as}{as}\,\frac{\sin Rs - Rs\cos Rs}{Rs}\sin c s\tau\,\frac{ds}{s}$$

bezw.

$$27')\quad S = 3\int_0^{\infty}\frac{3\sin as - as\cos as - (as)^2\sin as}{(as)^3}\,\frac{\sin Rs - Rs\cos Rs}{Rs}\sin c s\tau\,\frac{ds}{s}.$$

Wir setzen noch im ersten oder zweiten Falle

$$S = \frac{\pi}{4}\lambda'\frac{R}{a}\ \text{oder}\ S = \frac{\pi}{4}\varkappa'\frac{R}{a};$$

ferner bemerken wir, daß auf Grund der sogleich anzugebenden

Werte von λ' und $\varkappa'$ diese für sehr große Werte von τ verschwinden, so daß wir die obere Grenze unseres Integrals $\Omega = \infty$ setzen dürfen.

Die definitiven Werte des Rotationsbestandteiles des Vektorpotentials lauten daraufhin bei Oberflächenladung

$$28) \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{R}]\frac{\lambda'\,d\tau}{R}$$

und bei Volumladung

$$29) \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_0^\infty [\mathfrak{w}_{t-\tau}\,\mathfrak{R}]\frac{\varkappa'\,d\tau}{R}.$$

Was die Bedeutung von λ' und $\varkappa'$ angeht, so wird in § 8 gezeigt werden, daß

$$30) \qquad \lambda' = \frac{a^2+R^2-c^2\tau^2}{2R^2} \text{ bez. } = 0$$

ist, je nachdem aus den drei Strecken a, R und $c\tau$ ein Dreieck gebildet werden kann oder nicht. Ebenda wird gezeigt, daß unsere Größe $\varkappa'$ den Wert hat

$$31) \qquad \varkappa' = \frac{3}{2}\left(\frac{a^2+2R^2-2(c\tau)^2}{4R^2} - \frac{(R-c\tau)^3(3R+c\tau)}{4a^2R^2}\right)$$

wenn sich die Strecken $a, R, c\tau$ zu einem Dreieck vereinigen lassen; daß dagegen wenn dies nicht der Fall ist, gilt:

$$31') \qquad \varkappa' = 6\frac{Rc\tau}{a^2} \text{ bez. } 0$$

je nachdem a die größte der drei Seiten $a, R, c\tau$ ist oder nicht.

Beiläufig berechnet man leicht, daß $\operatorname{div}\mathfrak{A}_2 = 0$, daß also der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials quellenfrei verteilt ist; ferner verificirt man an unseren Formeln einen allgemeingültigen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{A}_1$ und φ, nämlich

$$\operatorname{div}\mathfrak{A}_1 = -\frac{1}{c}\dot{\varphi} = -\frac{1}{c}\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial t} - (\mathfrak{v}\operatorname{grad}\varphi)\right\}.$$

§ 7. *Deutung der gefundenen Ausdrücke und Vergleich mit den bisher bekannten Darstellunyen.*

Wir stellen uns die Lage des Elektrons zur Zeit t vor (Fig. 1) und ziehen von seinem Mittelpunkte O aus den Vektor $\mathfrak{r}$, dessen Componenten x, y, z die Coordinaten des Aufpunktes A sind. Ferner markiren wir die Bahn, die der Mittelpunkt des Elektrons in der vorangehenden Zeit beschrieben hat, sowie seine Lage P in dem um das Zeitintervall τ zurückliegenden Zeitpunkte $t-\tau$. Um P herum beschreiben wir die Kugel vom Radius a, die der Oberfläche des Elektrons zur Zeit $t-\tau$ entspricht. Verbinden wir P mit O, so erhalten wir den Vektor $\mathfrak{T}$ mit den Componenten ξ, η, ζ (Gl. 11) und es ist $\mathfrak{T}+\mathfrak{r}$ unser früherer Vektor $\mathfrak{R}$ (Gl. 11').

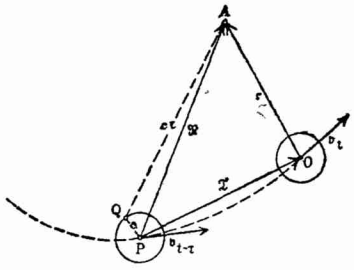

Fig. 1.

Die Bedingung nun, daß sich aus den Strecken R, $c\tau$ und a ein Dreieck bilden lassen solle, kommt darauf hinaus, daß es auf der Oberfläche des Elektrons in seiner dem Zeitpunkt $t-\tau$ entsprechenden Lage solche Punkte Q gebe, von denen ein mit Lichtgeschwindigkeit auslaufender Potentialwert den Aufpunkt gerade zur Zeit t erreicht. Das in diesem Falle vorhandene Dreieck mit den Seiten $QA = c\tau$, $QP = a$ und $PA = R$ ist aus der Figur zu ersehen. Zumal im Falle von Oberflächenladung gestatten die Ausdrücke φ und $\mathfrak{A}$ eine einfache Deutung. Sie besagen gleichmäßig, daß sich der Potentialwert zur Zeit t aus allen früher ausgesandten Potentialwerten (algebraisch oder vektoriell) zusammensetzt, wobei aber nur diejenigen Zeitpunkte in Betracht kommen und als „wirksame Zeitpunkte" bezeichnet werden sollen, für welche die in der Fig. verdeutlichte Bedingung der Dreiecksmöglichkeit erfüllt ist. Der Beitrag jedes wirksamen Zeitelementes $d\tau$ zu dem Werte des skalaren Potentials, des Translations- oder Rotationsbestandteiles des Vektorpotentials beläuft sich nun nach Gl. (17), (21) oder (28) auf:

$$\frac{\varepsilon c}{8\pi a R}\,d\tau,\quad \frac{\varepsilon \mathfrak{v}}{8\pi a R}\,d\tau \quad \text{bez.} \quad \frac{\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{8\pi a R}\,\frac{a^2+R^2-c^2\tau^2}{R^2}\,d\tau.$$

Dabei sind für $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{R}$ und R diejenigen Werte zu nehmen, die jene Größen in dem wirksamen Zeitpunkte hatten. Beispiels-

weise besagt die letzte der drei angeschriebenen Formeln u. A., daß der Beitrag zum Rotationsbestandteil des Vektorpotentials senkrecht steht auf der Richtung von $\mathfrak{R}$ und der Drehaxe des Elektrons zur Zeit $t-\tau$.

Auch im Falle gleichförmiger Volumladung gestaltet sich unsere Deutung für äußere Aufpunkte, d. h. für solche, die in dem wirksamen Zeitpunkte außerhalb des Elektrons lagen, ebenso. Der Beitrag, den jedes wirksame Zeitelement $d\tau$ zu den fraglichen drei Potentialwerten leistet, ist hier

$$\frac{3\varepsilon c}{16\pi a R}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)d\tau,\quad \frac{3\varepsilon \mathfrak{v}}{16\pi a R}\left(1-\left(\frac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)d\tau \text{ bez.}$$

$$\frac{3\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{16\pi a R}\left(\frac{a^2+2R^2-2c^2\tau^2}{4R^2}-\frac{(R-c\tau)^3(3R+c\tau)}{4a^2R^2}\right)d\tau.$$

Handelt es sich dagegen um einen inneren Aufpunkt, d. h. einen Punkt, der zur Zeit $t-\tau$ im Inneren des Elektrons lag, so daß $R<a$, und ist auch $c\tau<a$, so ist die Definition der wirksamen Zeitpunkte dahin abzuändern, daß auch Zeitpunkte, für die ein Dreieck aus den Seiten R, $c\tau$ und a unmöglich ist, bei den Potentialwerten mitwirken, und zwar mit den Beiträgen:

$$\frac{3\varepsilon c}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau,\quad \frac{3\varepsilon \mathfrak{v}}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau,\quad \frac{3\varepsilon[\mathfrak{w}\mathfrak{R}]}{4\pi a}\frac{c\tau}{a^2}d\tau.$$

Die besondere Leistung unserer Formeln besteht darin, daß sie die Zusammenwirkung der verschiedenen Potentialwerte, die im Aufpunkte von den verschiedenen Lagen des Elektrons her zusammentreffen, durch ein einfaches Integral nach der Zeit über die vom Mittelpunkte des Elektrons gerechnete Entfernung R darstellen.

Wohlbekannt als sog. „verzögerte Potentialwerte“ sind andere Formeln[1]), in denen φ und $\mathfrak{A}$ (je nach der Art der Ladung) durch ein Integral über die Oberfläche oder über das Volumen des Elektrons dargestellt werden. Abgesehen davon aber, daß sie im Gegensatz zu unsern Formeln noch die Auswertung eines doppelten oder dreifachen Integrals erfordern, enthalten sie die Entfernung des Aufpunktes von den Oberflächen- oder Volumelementen des Elektrons, und zwar die Entfernung von derjenigen Lage dieser Elemente, die sie in dem wirksamen Augenblicke $t-\tau$ einnahmen. Man kann dieses so ausdrücken, daß in den Formeln jener ver-

1) Vgl. z. B. Encykl. d. Math. Wiss. V Art. 13 (H. A. Lorentz: Elektronentheorie) Nr. 5.

zögerten Potentiale nicht über die wirkliche Gestalt des Elektrons, sondern über eine nach Maaßgabe der vorangehenden Bewegung deformirte Gestalt zu integriren ist. Jede besondere Bewegung würde von diesem Standpunkt aus die Betrachtung einer besonderen und complicirten Deformation des Elektrons nötig machen, während bei der Aufstellung unserer Formeln von einer solchen Deformation nirgends die Rede war.

Meinem Freunde von Mangoldt verdanke ich indessen eine Interpretation meiner Formeln, durch die die hier betonte Gegensätzlichkeit beider Methoden gehoben wird. Man kann nämlich meine Formeln direkt aus der Vorstellung des deformirten Elektrons ableiten, wenn man um den Aufpunkt Kugeln von dem veränderlichen Radius $c\tau$ beschreibt, durch diese das deformirte Elektron in Schichten von der Dicke $c\,d\tau$ zerlegt und den Beitrag jeder Schicht zum Potentialwerte auf elementarem Wege bestimmt. Am einfachsten gelingt dieses bei gleichförmiger Volumladung; der Fall gleichförmiger Oberflächenladung läßt sich darauf zurückführen, indem man die Oberfläche durch eine dünne Kugelschale ersetzt. Die Bestimmung des Rotationsbestandteiles $\mathfrak{A}_2$ macht auch bei dieser Betrachtung etwas mehr Umstände als die von φ und $\mathfrak{A}_1$ und erfordert Coordinatentransformationen wie sie in § 6 unter 2) angegeben wurden.

Ersichtlich ordnet man bei dem zuletzt angegebenen Verfahren die Integration über das Volumen des Elektrons nach der zeitlichen Reihenfolge der Wirksamkeit seiner einzelnen Schichten an und verwandelt so das dreifache (oder zweifache) räumliche in ein einfaches nach der Zeit genommenes Integral.

Gegenüber diesem sehr viel kürzeren Verfahren hat unser ursprünglicher Weg den Vorteil, daß er uns nicht nur mit den ausgerechneten Werten der $\varkappa, \lambda, \varkappa', \lambda'$ sondern auch mit den zugehörigen, durch ein einheitliches analytisches Gesetz definirten Integralen S ausstattet, welche für die dynamischen Betrachtungen der folgenden Note bequemer sind, wie die in den verschiedenen Integrationsintervallen durch verschiedene Ausdrücke gegebenen Werte der $\varkappa\,\lambda$ selbst.

§ 8. *Nachträglicher Beweis einiger Integralformeln.*

a) Wir gehen aus von der bekannten Formel:

$$\int_0^\infty \sin xy \frac{dx}{x} = \pm \frac{\pi}{2} \cdots \text{ je nach dem } y \gtrless 0;$$

auf diese führen wir das folgende Integral (*a*) zurück, das mit der ersten der in § 5 betrachteten Größen S bis auf die Bezeichnung übereinstimmt:

$$(a) = \int_0^\infty \sin xy \sin xz \sin xt \frac{dx}{x}.$$

Die drei Größen y, z, t setzen wir als positiv voraus; außerdem dürfen wir, da keine derselben in unserer Formel vor der anderen ausgezeichnet ist, ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$y > z > t.$$

Wir benutzen darauf die bekannten Formeln:

$$\sin xz \sin xt = \frac{1}{2}(\cos x(z-t) - \cos x(z+t))$$

$$\sin xy \cos x(z-t) = \frac{1}{2}(\sin x(y+z-t) + \sin x(y-z+t))$$

etc. und erhalten statt (*a*):

$$(a) = \frac{1}{4}\int_0^\infty \Big\{ \sin x(y+z-t) + \sin x(y-z+t) - \sin x(y+z+t) - \sin x(y-z-t) \Big\} \frac{dx}{x}.$$

Nun sind die drei Größen

$$y+z-t,\ y-z+t,\ y+z+t$$

wegen unserer Ungleichung $y > z > t$ sicher positiv; dagegen ist

$$y-z-t$$

positiv oder negativ, je nachdem ein Dreieck mit den drei Seiten y, z, t unmöglich oder möglich ist. Nach der vorangeschickten Integralformel wird daher

$$(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

wenn die drei Längen y, z, t sich nicht zu einem Dreieck vereinigen lassen, dagegen

$$(a) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

wenn ein Dreieck mit den Seiten y, z, t möglich ist.

b) Auf das Integral (*a*) führen wir das folgende Integral (*b*) zurück, welches bis auf die Bezeichnung und den Faktor 3 mit

der zweiten der in § 5 betrachteten Größen S übereinstimmt:

$$(b) = \int_0^\infty \frac{\sin xy - xy\cos xy}{(xy)^2} \sin xz \sin xt \frac{dx}{x}.$$

Ersichtlich darf darin $z > t$ und y, z, t als positiv vorausgesetzt werden. Indem man y unter dem Integralzeichen von (a) durch eine neue Integrationsvariable η ersetzt, überzeugt man sich, daß zwischen (b) und (a) der Zusammenhang besteht

$$(b) = \frac{1}{y^2}\int_0^y (a)\,\eta\, d\eta.$$

Ist nun das Dreieck (y, z, t) möglich, so ist am oberen Ende des Integrationsintervalles $(a) = \pi/4$, am unteren Ende jedenfalls $(a) = 0$. Die Grenze zwischen beiden Teilen des Integrationsvalles bildet der Wert

$$\eta = z - t$$

der Integrationsvariabeln, für den die Dreiecksbildung aus η, z und t eben möglich zu werden beginnt. Es ist also

$$(b) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{y^2}\int_{z-t}^{y} \eta\, d\eta = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(z-t)^2}{y^2}\right).$$

Ist die Dreiecksbildung (y, z, t) unmöglich und zwar deshalb, weil y zu groß (nämlich größer als $z+t$) ist, so ist am oberen und unteren Ende des Integrationsintervalles $(a) = 0$, dagegen für einen gewissen mittleren Teil desselben $(a) = \pi/4$, nämlich für das Gebiet $z - t < \eta < z + t$. Man hat dann

$$(b) = \frac{\pi}{4}\frac{1}{y^2}\int_{z-t}^{z+t} \eta\, d\eta = \frac{\pi}{8}\frac{(z+t)^2 - (z-t)^2}{y^2} = \frac{\pi}{2}\frac{zt}{y^2}.$$

Ist die Dreiecksbildung (y, z, t) unmöglich und zwar deshalb, weil einer der beiden anderen Werte (z oder t) zu groß ist, so ist sie um so mehr unmöglich, wenn man y durch einen kleineren Wert η ersetzt. Es ist deshalb für das ganze Integrationsintervall $(a) = 0$ und daher auch

$$(b) = 0.$$

c) Wir gehen zu dem Integral

$$(c) = \int_0^\infty \frac{\sin xy - xy\cos xy}{xy} \frac{\sin xz - xz\cos xz}{xz} \sin xt \frac{dx}{x}$$

über, welches bis auf die Bezeichnung mit dem ersten der in § 6 betrachteten Integrale S übereinstimmt. Dabei darf ersichtlich

ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß $y > z$; es sind dann noch zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $y < t$ und $y > t$. Indem man z unter dem Integralzeichen von (b) durch eine Integrationsvariable ζ ersetzt und nach dieser von 0 bis z integrirt, erkennt man, daß

$$(c) = -\frac{y}{z}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z (b)\,\xi\,d\xi.$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist möglich und es ist $y < t$. Dann ist auch das Dreieck (y, ξ, t) möglich, solange $\xi > \xi_1$, $\xi_1 = t - y$. Ist dagegen $\xi < \xi_1$, so wird das Dreieck (y, ξ, t) unmöglich, wobei gleichzeitig y wegen $y < t$ nicht die größte der drei fraglichen Zahlen y, ξ, t bedeutet. Infolgedessen ist

$$\text{für } z > \xi > \xi_1 \quad (b) = \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{(\xi - t)^2}{y^2}\right)$$

$$\text{„ } \xi_1 > \xi > 0 \quad (b) = 0.$$

Daraus folgt

$$\int_0^z (b)\,\xi\,d\xi = \frac{\pi}{8}\int_{t-y}^z \left(1 - \frac{(\xi - t)^2}{y^2}\right)\xi\,d\xi$$

und durch Differentiation nach t

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^z (b)\,\xi\,d\xi = \frac{\pi}{4}\int_{t-y}^z \frac{(\xi - t)\,\xi}{y^2}\,d\xi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^z (b)\,\xi\,d\xi = \frac{\pi}{4y^2}\left(yt - y^2 - \int_{t-y}^z \xi\,d\xi\right) = \frac{\pi}{8}\frac{t^2 - y^2 - z^2}{y^2}.$$

Somit endlich

$$(c) = \frac{\pi}{8}\frac{y^2 + z^2 - t^2}{yz}.$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist möglich und es ist $y > t$. Wir haben jetzt $\zeta_1 = y - t$ zu definiren und zu unterscheiden ob $\xi > \xi_1$ oder $\xi < \xi_1$. Da jetzt y die größte der drei Zahlen y, ξ, t ist, so haben wir für $0 < \xi < \xi_1$ die Formel

$$(b) = \frac{\pi}{2}\frac{\xi t}{y^2}$$

anzuwenden. Infolge dessen wird jetzt

$$\int_0^z (b)\,\xi\,d\xi = \frac{\pi}{2}\int_0^{y-t}\frac{\xi^2 t}{y^2}\,d\xi + \frac{\pi}{8}\int_{y-t}^z \left(1 - \frac{(\xi - t)^2}{y^2}\right)\xi\,d\xi.$$

Durch zweimalige Differentiation nach t ergiebt sich von hieraus gerade derselbe Wert wie vorher; es wird daher auch jetzt:

$$(c) = \frac{\pi}{8}\frac{y^2+z^2-t^2}{yz}.$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist unmöglich, und es ist $y<t$. Dann ist es um so mehr unmöglich, wenn wir z durch den kleineren Wert ζ ersetzen. Es wird daher im ganzen Integrationsintervall $(b) = 0$ und daher auch

$$(c) = 0.$$

Ist aber die Dreiecksbildung $(y\,z\,t)$ unmöglich, und $y>t$, so ergiebt sich

$$\int_0^z (b)\,\zeta\,d\zeta = \frac{\pi}{2}\int_0^z \frac{\zeta^2 t}{y^2}\,d\zeta$$

Dieser Ausdruck verschwindet bei zweimaler Differentiation nach t. Es ergiebt sich also auch jetzt:

$$(c) = 0.$$

d) Wir betrachten schließlich das Integral

$$(d) = \int_0^\infty \frac{3\sin xy - 3xy\cos xy - (xy)^2\sin xy}{(xy)^3}\,\frac{\sin xz - xz\cos xz}{xz}\sin xt\,\frac{dx}{x},$$

welches bis auf die Bezeichnung und bis auf den Faktor 3 mit dem zweiten der Integrale S des § 6 übereinstimmt. Indem man in (c) y unter dem Integralzeichen durch eine Integrationsvariable η ersetzt und $\eta^2(c)$ von 0 bis y integrirt, erkennt man leicht, daß

$$(d) = \frac{1}{y^3}\int_0^y (c)\,\eta^2\,d\eta.$$

Ist das Dreieck (y, z, t) möglich, so ist auch das Dreieck (η, z, t) möglich für alle Werte von η, die der Bedingung genügen $y>\eta>|z-t|$, dagegen unmöglich für alle Werte von η, für die $|z-t|>\eta>0$. Man hat daher

$$(d) = \frac{\pi}{8y^3}\int_{|z-t|}^y \frac{\eta^2+z^2-t^2}{z}\,\eta\,d\eta.$$

Die Ausrechnung ergiebt:

$$\begin{aligned}(d) &= \frac{\pi}{16\,y^3 z}\left\{\frac{y^4-(z-t)^4}{2} + (z^2-t^2)\left(y^2-(z-t)^2\right)\right\}\\ &= \frac{\pi}{16}\left\{\frac{y^2+2z^2-2t^2}{2yz} - \frac{(z-t)^3(3z+t)}{2y^3 z}\right\}.\end{aligned}$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist unmöglich, weil y zu groß, nämlich $> z+t$ ist. Dann ist das Dreieck $(\eta\,z\,t)$ möglich für alle Werte $z+t > \eta > |z-t|$, dagegen unmöglich für alle Werte $\eta > z+t$ und $\eta < |z-t|$. Daher ergiebt sich in diesem Falle

$$
\begin{aligned}
(d) &= \frac{\pi}{8y^3}\int_{|z-t|}^{z+t}\frac{\eta^2+z^2-t^2}{z}\,\eta\,d\eta \\
&= \frac{\pi}{32\,y^3 z}\Big\{(z+t)^4-(z-t)^4+2\,(z^2-t^2)\,((z+t)^2-(z-t)^2)\Big\} \\
&= \frac{\pi}{32\,y^3 z}\Big\{(z+t)^2-(z-t)^2\Big\}\Big\{(z+t)^2+(z-t)^2+2\,(z^2-t^2)\Big\} \\
&= \frac{\pi}{2}\frac{z^2 t}{y^3}.
\end{aligned}
$$

Das Dreieck $(y\,z\,t)$ ist unmöglich, weil y zu klein, nämlich $< |z-t|$ ist. Dann ist auch das Dreieck $(\eta\,z\,t)$ für alle Werte $\eta < y$ unmöglich und man erhält unmittelbar

$$(d) = 0.$$

§ 9. *Näherungsformeln für das Feld. Die Potentialgesetze von Liénard und Wiechert.*

Indem wir alle speciellen Anwendungen für eine spätere Note zurückstellen, wollen wir hier nur die allgemeinen Näherungswerte der Potentiale φ und $\mathfrak{A}$ ableiten, die sich bei hinreichender Entfernung des Aufpunktes vom Elektron von selbst darbieten. Die Bedingung ihrer näherungsweisen Gültigkeit besteht im Wesentlichen darin, daß der Abstand R des Aufpunktes vom Elektron (genauer gesagt von der in Betracht kommenden früheren Lage des Elektrons) groß sein muß gegenüber dem Radius a. Die Formeln versagen daher für das Innere oder für die unmittelbare Nähe des Elektrons. Die Rechnung ist für Oberflächen- und Volumladung gesondert zu führen.

1. Oberflächenladung. a) Die Potentiale φ und $\mathfrak{A}_1$. In Gl. (17) sei die Größe λ für das Intervall zwischen τ_1 und τ_2 gleich 1, außerhalb desselben gleich Null. Nach der Bedingung der Dreiecksmöglichkeit bestimmen sich τ_1 und τ_2 aus den Gleichungen:

32) $$R_2 = c\tau_2 - a, \quad R_1 = c\tau_1 + a;$$

R_1, R_2 sind dabei die den Zeitpunkten $t-\tau_1$, $t-\tau_2$ zugehörigen Längen des Vektors $\mathfrak{R}$. Ferner sei

$$\tau_0 = \frac{\tau_1+\tau_2}{2},$$

R_0 die zugehörige Länge von $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_{t-\tau_0}$ die zugehörige Geschwindigkeit. Für den Fall nun, daß sich R im Integrationsintervalle $\tau_1 \ldots \tau_2$ relativ nur wenig ändert, d. h. für den Fall, daß

$$\frac{R_2-R_1}{R_0}$$

eine kleine Zahl ist, können wir die Integration in (17) ersetzen durch die Mittelwertbildung:

33) $$\varphi = \frac{\varepsilon c}{8\pi a}\frac{|\tau_2-\tau_1|}{R_0}.$$

Wenn sich ferner auch $\frac{\partial R}{\partial \tau}$ im Integrationsintervalle nur wenig ändert, wenn also

$$\frac{\partial R_2}{\partial \tau}-\frac{\partial R_1}{\partial \tau}$$

eine z. B. gegen c kleine Geschwindigkeit ist, so können wir nach dem Mittelwertsatze der Differentialrechnung schreiben

34) $$\begin{cases} R_2 = R_0+(\tau_2-\tau_0)\frac{\partial R_0}{\partial \tau} = R_0+(\tau_2-\tau_0)\frac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0} \\ R_1 = R_0+(\tau_1-\tau_0)\frac{\partial R_0}{\partial \tau} = R_0+(\tau_1-\tau_0)\frac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0}. \end{cases}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (32):

34′) $$R_2-R_1 = (\tau_2-\tau_1)\frac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0} = c(\tau_2-\tau_1)-2a,$$

d. h.

35) $$\tau_2-\tau_1 = \frac{2a}{c-\frac{(\mathfrak{R}_0\mathfrak{v}_0)}{R_0}} = \frac{2a}{c-v_0\cos(R_0,v_0)}.$$

Nach (33) ergiebt sich daher

33′) $$\varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\left|\frac{1}{1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0,v_0)}\right|.$$

Betrachtet man nur Bewegungen mit Unterlichtgeschwindigkeit, so kann das Zeichen | | des absoluten Betrages auch fortbleiben, weil alsdann $\tau_2 > \tau_1$ ist.

In genau derselben Weise berechnet sich der Translationsbestandteil $\mathfrak{A}_1$ des Vektorpotentials, dessen Ausdruck (21) sich ja nur um den Faktor $\mathfrak{v}_{t-\tau}/c$ von dem Ausdrucke von φ unterscheidet. Man findet nach derselben Methode:

$$33'') \qquad \mathfrak{A}_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{\mathfrak{v}_0}{c}\left|\frac{1}{1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)}\right|.$$

Wir haben noch die Gültigkeitsgrenzen unseres Verfahrens anzugeben. Wir bilden zu dem Zweck nach zwei obigen Bemerkung mit Rücksicht auf (34) und (35):

$$\frac{R_2 - R_1}{R_0} = (\tau_2 - \tau_1)\frac{v_0\cos(R_0, v_0)}{R_0} = \frac{2a}{R_0}\frac{v_0\cos(R_0, v_0)}{c - v_0\cos(R_0, v_0)}.$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \tau} - \frac{\partial R_1}{\partial \tau}\right) = \frac{\tau_2 - \tau_1}{c}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} = \frac{2a}{c - v_0\cos(R_0 v_0)}\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial \tau}\{v_0\cos(R_0, v_0)\}$$

Der erste dieser Ausdrücke ist der Größenordnung nach gleich a/R_0, außer wenn v der Lichtgeschwindigkeit zu nahe kommt; der zweite Ausdruck ist allemal dann klein, wenn während der Zeitdauer, in welcher ein Lichtstrahl das bewegte Elektron in der Richtung nach dem Aufpunkte hin überstreichen würde, die Geschwindigkeitsänderung klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, was nur bei ganz außerordentlichen, stoßartigen Beschleunigungen nicht der Fall sein wird. Unser Verfahren erweist sich also als berechtigt in allen Fällen, wo der Abstand R groß gegen den Radius des Elektrons ist, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit nicht zu nahe kommt und die Beschleunigung nicht einen stoßartigen Charakter annimmt. Dieselbe Bemerkung überträgt sich ohne Weiteres auf die folgenden Fälle.

b) Das Potential $\mathfrak{A}_2$. Der Rotationsbestandteil des Vektorpotentials ist nach (28) und (30) gegeben durch:

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_{\tau_1}^{\tau_2}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\frac{a^2 + R^2 - c^2\tau^2}{2R^3}\,d\tau,$$

wobei τ_1, τ_2 dieselbe Bedeutung wie oben haben und die Stellung von τ_1 und τ_2 zu vertauschen ist, falls $\tau_1 > \tau_2$ (Ueberlichtgeschwindigkeit). Ferner benutzen wir die Zeichen τ_0, R_0, $\mathfrak{w}_0$, $\mathfrak{R}_0$ in

derselben oder in entsprechender Bedeutung wie unter a). Man erkennt nun unmittelbar, daß man hier, um den vollständigen asymptotischen Ausdruck von $\mathfrak{A}_2$ zu erhalten, nicht einfach im Integranden $\tau = \tau_0$ setzen darf, wie vorher, daß man vielmehr diesen entwickeln muß bis zu den Gliedern $(\tau - \tau_0)^2$ incl. Die Entwickelung lautet, wenn J abkürzend den Integranden bezeichnet:

$$36) \qquad J = J_0 + (\tau - \tau_0)\frac{\partial J_0}{\partial \tau} + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2}\frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2}.$$

Bei der Integration nach τ verschwindet das Glied mit $\tau - \tau_0$, weil τ_0 das arithmetische Mittel der Integrationsgrenzen bedeutet. Das Glied mit $(\tau - \tau_0)^2$ wird gleichzeitig

$$36') \qquad \int \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2}\, d\tau = \frac{(\tau_2 - \tau_1)^2}{24}|\tau_2 - \tau_1|$$

und es zeigt sich, daß von derselben Größenordnung auch das Glied nullter Ordnung

$$J_0 = [\mathfrak{w}_0\, \mathfrak{R}_0]\frac{1}{2R_0^3}(a^2 + R_0^2 - c^2\tau_0^2)$$

wird. Nach den Gl. (32) und (34) haben wir nämlich, wenn wir die letzteren durch die Glieder zweiter Ordnung vervollständigen:

$$c\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = c\tau_0 = \frac{R_1 + R_2}{2} = R_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\frac{(\tau_2 - \tau_0)^2 + (\tau_1 - \tau_0)^2}{2}.$$

Wegen der Definition von τ_0 als arithmetischen Mittels zwischen τ_1, τ_2 wird aber

$$(\tau_2 - \tau_0)^2 = (\tau_1 - \tau_0)^2 = \frac{1}{4}(\tau_2 - \tau_1)^2,$$

also

$$37) \qquad \begin{cases} c\tau_0 = R_0 + \dfrac{1}{8}\dfrac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \\ R_0^2 - c^2\tau_0^2 = -\dfrac{1}{4}R_0\dfrac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2 \end{cases}$$

$$36'') \qquad \int J_0\, d\tau = [\mathfrak{w}_0\, \mathfrak{R}_0]\frac{1}{2R_0^3}\left(a^2 - \frac{1}{4}R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2 - \tau_1)^2\right)|\tau_2 - \tau_1|,$$

was in der That wegen der Bedeutung von $\tau_2 - \tau_1$ (Gl. 35) von derselben Größenordnung wie (36') ist.

Tragen wir nun die Entwickelung (36) mit dem Werte (35) von $\tau_2 - \tau_1$ in die Definitionsgleichung von $\mathfrak{A}_2$ ein, so ergiebt sich

$$38) \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{a^2}{R_0^2}\frac{1}{|c - v_0\cos(R_0, v_0)|}\mathfrak{B}$$

mit der Abkürzung:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}[\mathfrak{w}_0\mathfrak{R}_0]\left(1 - R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial\tau^2}\frac{1}{(c - v_0\cos(R_0, v_0))^2}\right)$$

$$+\frac{1}{6}R_0^3\frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2}\frac{1}{((c - v_0\cos(R_0, v_0))^2}.$$

Beschränkt man sich consequenter Weise bei der Ausrechnung von $\partial^2 J_0/\partial\tau^2$ auf die Glieder nullter Ordnung in a, so findet man leicht

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial\tau^2} = \frac{[\mathfrak{w}_0\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2(R_0^2)}{\partial\tau^2} - c^2\right) - 2R_0\frac{\partial}{\partial\tau}\left\{\frac{[\mathfrak{w}_0\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}(c - v_0\cos(R_0, v_0))$$

und daher

$$38') \qquad \begin{cases} \mathfrak{B} = [\mathfrak{w}_0\mathfrak{R}_0]\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{-\frac{1}{2}R_0^4\frac{\partial^2 R_0}{\partial\tau^2} + \frac{1}{12}\frac{\partial^2(R_0^2)}{\partial\tau^2} - \frac{c^2}{6}}{(c - v_0\cos(R_0, v_0))^2}\right) \\ \qquad -\dfrac{1}{3}R_0^4\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left\{\dfrac{[\mathfrak{w}_0\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}\dfrac{1}{c - v_0\cos(R_0, v_0)}. \end{cases}$$

Wie man sieht verschwindet $\mathfrak{A}_2$ mit wachsendem R von höherer Ordnung als $\mathfrak{A}_1$ oder φ, da es gegenüber jenen mit dem Faktor $(a/R)^2$ behaftet ist. Der Einfluß der Rotationsbewegung auf das Feld reicht also, was verständlich ist, nicht so weit wie der der Translationsbewegung.

2. Volumladung. a) Die Potentiale φ und $\mathfrak{A}_1$. Bedeuten wieder τ_1, τ_2 die Grenzen, innerhalb deren ein Dreieck aus den Strecken a, R, $c\tau$ gebildet werden kann, so ist außerhalb des Intervalles $(\tau_1\ \tau_2)$ nach (19) $\varkappa = 0$, da sicherlich a nicht die größte der drei Strecken a, R, $c\tau$ ist, vielmehr $R > a$ vorausgesetzt wird. Innerhalb dieses Intervalles ist

$$\varkappa = \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{c\tau - R}{a}\right)^2\right).$$

Wir schreiben daher nach (20) und (22), indem wir die nur wenig veränderlichen Faktoren durch ihre zum Werte $\tau = \tau_0$ ge-

hörigen Mittelwerte ersetzen:

$$39)\qquad \begin{cases} \varphi = \dfrac{\varepsilon}{8\pi a R_0}\dfrac{3}{2}\int\left(1-\left(\dfrac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)c\,d\tau, \\ \mathfrak{A}_1 = \dfrac{\varepsilon}{8\pi a R_0}\dfrac{\mathfrak{v}_0}{c}\dfrac{3}{2}\int\left(1-\left(\dfrac{c\tau-R}{a}\right)^2\right)c\,d\tau. \end{cases}$$

In dem hier noch auszuwertenden Integral führen wir die Integrationsvariable

$$u = \frac{c\tau - R}{a}$$

ein; dieselbe wird für $\tau = \tau_2$ oder $\tau = \tau_1$ nach (32) gleich ± 1, und es ist

$$du = \frac{1}{a}\left(c - \frac{\partial R}{\partial \tau}\right)d\tau = \frac{1}{a}\left(c - \frac{(\mathfrak{R}\,\mathfrak{v}_{t-\tau})}{R}\right)d\tau.$$

Indem wir abermals einen Mittelwert einführen, können wir schreiben

$$c\,d\tau = \frac{a\,du}{\left|1 - \frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)\right|},$$

wobei nach Hinzufügung des Zeichens | |, auch wenn $\tau_1 > \tau_2$ sein sollte, die Integration nach u in der Richtung von -1 bis $+1$ zu erstrecken ist. Es ist aber

$$\frac{3}{2}\int_{-1}^{+1}(1-u^2)\,du = 2.$$

Mit Rücksicht hierauf und den angegebenen Wert von $c\,d\tau$ gehen die Gleichungen (39) unmittelbar in die früheren Ausdrücke (33′) und (33″) über. Für die Fernwirkung macht es also bei dem skalaren Potential und dem Translationsterm des Vektorpotentials nichts aus, in welcher Weise die Ladung im Elektron verteilt ist.

b) Das Potential $\mathfrak{A}_2$. Bei Volumladung ergeben die Gl. (29) und (31) für den Rotationsbestandteil des Vektorpotentials mit der früheren Bedeutung der Grenzen τ_1, τ_2 (vorbehaltlich einer ev. Vertauschung derselben):

$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{8\pi a}\int_{\tau_1}^{\tau_2}[\mathfrak{w}_{t-\tau}\mathfrak{R}]\frac{3}{8R^3}\left\{a^2 + 2R^2 - 2c^2\tau^2 - \frac{(R-c\tau)^3}{a^2}(3R+c\tau)\right\}d\tau.$$

Bezeichnen wir den Integranden mit J und entwickeln denselben ähnlich wie in (36), so müssen wir jetzt bis zum Gliede

mit $(\tau-\tau_0)^4$ gehn, um sicher zu sein, alle der Größenordnung nach maaßgebenden Terme beizubehalten. Wir schreiben also:

$$J = J_0 + (\tau-\tau_0)\frac{\partial J_0}{\partial \tau} + \frac{(\tau-\tau_0)^2}{2!}\frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2} + \frac{(\tau-\tau_0)^3}{3!}\frac{\partial^3 J_0}{\partial \tau^3} + \frac{(\tau-\tau_0)^4}{4!}\frac{\partial^4 J_0}{\partial \tau^4}.$$

Bei der Integration nach τ fallen die Glieder mit $\tau-\tau_0$ und $(\tau-\tau_0)^3$ fort, weil τ_0 das arithmetische Mittel der Integrationsgrenzen ist. Wegen (36′) und der Formel

$$\int \frac{(\tau-\tau_0)^4}{4!}\,d\tau = \frac{(\tau_2-\tau_1)^4}{2^4\,5!}\,|\tau_2-\tau_1|$$

erhält man dann:

$$\int J\,d\tau = \left(J_0 + \frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2}\frac{(\tau_2-\tau_1)^2}{24} + \frac{\partial^4 J_0}{\partial \tau^4}\frac{(\tau_2-\tau_1)^4}{2^4\,5!}\right)|\tau_2-\tau_1|.$$

Vernachlässigt man alles, was in a von höherer als der zweiten Ordnung ist, so ergiebt sich

$$J_0 = [\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]\frac{3}{8R_0^3}\left(a^2 - \frac{1}{2}R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}(\tau_2-\tau_1)^2\right)$$

und es wird

40)
$$\mathfrak{A}_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi R_0}\frac{a^2}{R_0^2}\frac{1}{|c - v_0\cos(R\,,\,v_0)|}\mathfrak{B},$$

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{8}[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]\left(1 - 2R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\frac{1}{(c - v_0\cos(R_0, v_0))^2}\right)$$

$$+\frac{1}{6}R_0^3\frac{\partial^3 J_0}{\partial \tau^2}\frac{1}{(c - v_0\cos(R_0, v_0))^2}$$

$$+\frac{a^2}{120}R_0^3\frac{\partial^4 J_0}{\partial \tau^4}\frac{1}{(c - v_0\cos(R_0, v_0))^4}.$$

Es ist aber mit der hier erforderlichen Genauigkeit:

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial \tau^2} = \frac{3}{4}\frac{[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\left\{\frac{\partial^2 (R_0^2)}{\partial \tau^2} - 2c^2 + 6R_0\frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2}\right\}$$

$$-3R_0\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{\frac{[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{R}_0]}{R_0^3}\right\}(c - v_0\cos(R_0, v_0))$$

$$a^2 \frac{\partial^4 J_0}{\partial \tau^4} = -54 \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2$$

$$+ 36 R_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \right\} (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^3$$

$$+ 9 \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \left(3 \frac{\partial R_0}{\partial \tau} + c \right) (c - v_0 \cos(R_0, v_0))^3.$$

Trägt man diese Werte in den Ausdruck von $\mathfrak{B}$ ein, so zieht sich derselbe zusammen zu:

40′) $$\mathfrak{B} = [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0] \left(\frac{3}{8} + \frac{-\frac{9}{20} R_0 \frac{\partial^2 R_0}{\partial \tau^2} + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 (R_0^2)}{\partial \tau^2} - \frac{c^2}{4}}{(c - v_0 \cos(R_0, v_0))^2} \right)$$

$$+ \frac{-\frac{1}{5} R_0^4 \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{[\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0]}{R_0^3} \right\} + \frac{3}{40} [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{R}_0] \left(3 \frac{\partial R_0}{\partial \tau} + c \right)}{c - v_0 \cos(R_0, v_0)}.$$

Ueber die Größenordnung von $\mathfrak{A}_2$ im Verhältnis zu der von φ und $\mathfrak{A}_1$ ist dasselbe zu sagen wie oben unter 1 b). Wollen wir uns mit derselben Näherung wie bei der Berechnung von φ und $\mathfrak{A}_1$ begnügen und Größen von der Ordnung a^2/R^2 schlechtweg vernachlässigen, so könnten wir einfach den für Volum- und Oberflächenladung gemeinsamen Wert

$$\mathfrak{A}_2 = 0$$

angeben. Unter Beibehaltung der Größen von der Ordnung a^2/R^2 dagegen unterscheiden sich Oberflächen- und Volumladung, sowohl in dem Ausdrucke von $\mathfrak{A}_2$ wie in denen von φ und $\mathfrak{A}_1$, wofern wir die letzteren durch Glieder höherer Ordnung ergänzen wollten.

Die Potentialgesetze (33′) und (33″) sind von Liénard[1]) und Wiechert[2]) gefunden worden; der Faktor 4π, durch den sich unsere Ausdrücke von denen jener Forscher unterscheiden, rührt von der Wahl der Einheiten her. Diese Potentialgesetze gestatten die folgende Deutung: Das Potential φ in hinreichend entfernten Aufpunkten zur Zeit t kann so berechnet werden, wie wenn sich das Elektron dauernd an derjenigen Stelle befände, die es zur Zeit $t - \tau_0$ inne

1) A. Liénard, L'Eclairage électrique 1898, p. 5, 53, 106.

2) E. Wiechert, Archives néerlandaises 5 (1900) p. 549, (Lorentz-Jubelband).

hatte, wobei jedoch seine Ladung ε im Verhältnis $1:|1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)|$ zu reduciren ist. Ferner: Das Vektorpotential $\mathfrak{A}_1$ kann berechnet werden wie dasjenige eines Stromelementes, welches nach Lage und Richtung übereinstimmt mit dem Orte und der Bewegungsrichtung des Elektrons zur Zeit $t-\tau_0$; die im Elemente fließende (elektrostatisch gemessene) Stromstärke ist dabei jedoch nicht gleich $\varepsilon v_0/c$ zu setzen, sondern abermals im Verhältnis $1:|1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)|$ zu reduciren.

Das Vektorpotential $\mathfrak{A}_2$ endlich und das ihm entsprechende Magnetfeld können wir vergleichen mit dem Felde eines Elementarmagneten, der sich am Orte des Elektrons zur Zeit $t-\tau_0$ befindet; und zwar ist die magnetische Axe dieses äquivalenten Elementarmagneten durch den oben eingeführten Vektor $\mathfrak{B}$ bestimmt; sein magnetisches Moment hängt dabei noch von der Lage des Aufpunktes ab und wird im Uebrigen gegeben durch Ladung, Radius und Winkelgeschwindigkeit des Elektrons, wobei die Ladung abermals im Verhältnis $1:|1-\frac{v_0}{c}\cos(R_0, v_0)|$ zu reduciren ist.

In allen drei Fällen bedeutet die genannte Reduktion eine scheinbare Vergrößerung von Ladung, Stromstärke und magnetischem Moment, wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{v}_0$ ein spitzer ist, d. h. wenn die Bewegung des Elektrons nach dem Aufpunkte hin gerichtet ist (allgemeiner gesagt, eine nach dem Aufpunkte hin gerichtete Componente besitzt), dagegen eine scheinbare Verkleinerung von Ladung etc., wenn der Winkel zwischen $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{v}_0$ stumpf ist die Bewegung also von dem Aufpunkte fort gerichtet ist (eine vom Aufpunkte abgewandte Componente besitzt). Diese Reduktion entspricht also völlig dem sog. Doppler'schen Prinzip.