# Ueber einen Satz aus der Analysis situs.

Von

**A. Schoenflies** in Göttingen.

(Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 7. März.)

Mit 7 Figuren.

In der Analysis situs pflegt man den Satz, daß eine einfache, sich nirgends durchsetzende geschlossene „Curve" die Ebene in einen „innern" und einen „äußern" Flächenteil zerlegt, als einen anschauungsmäßig gegebenen Grundsatz zu betrachten. Ist jedoch die Curve analytisch durch Gleichungen gegeben, so versteht sich dieser Satz keineswegs von selbst; ein Beweis scheint überdies um so mehr notwendig zu sein, als der Satz bekanntlich die Grundlage für die Cauchy-Riemann'sche Darstellung der Functionentheorie bildet. So viel mir zur Zeit bekannt ist, haben nur die Herren Cam. Jordan, Neumann und Thomae zu dem Satz Stellung genommen. Herr Thomae[1]) beruft sich ausdrücklich auf die Intuition, Herr Neumann[2]) begnügt sich mit einigen Andeutungen; nur der cours d'analyse des Herrn Jordan[3]) enthält eine ausführlich gehaltene Darlegung. Diese ist jedoch ziemlich umständlich und wenig durchsichtig. Aus diesem Grunde teile ich im Folgenden einen Beweis mit, der sich nur auf die einfachsten Begriffe stützt, und geometrisch nur diejenigen Sätze voraussetzt, die die Teilung der Ebene durch gerade Linien betreffen.

1. Unter einem einfachen Curvenstück $AB$ wollen wir die Gesammtheit aller Punkte verstehen, die durch zwei Gleichungen

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$
$$t_a \leqq t \leqq t_b$$

1) Theorie der Functionen eines complexen Arguments (1891) Halle. S. 5.

2) Riemann's Theorie der Abel'schen Functionen, (1884) S. 3.

3) Cours d'analyse, (2.) Bd. I, 1893.

definirt sind, in denen $\varphi$ und $\psi$ eindeutige und stetige Functionen sind, die für jeden Wert von $t$ mit Einschluß der Grenze eine bestimmte Ableitung besitzen. Wir nehmen ferner an, daß zu zwei verschiedenen Werten von $t$ nicht die gleichen Werte $x$ und $y$ gehören, und daß sich auch der Differentialquotient

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

in dem betrachteten Intervall stetig und monoton ändert, und zwar mit Einschluß der Grenzen. Das Curvenstück hat also in jedem Punkte eine bestimmte, sich stetig und monoton ändernde Tangente.

Die Curve selbst soll aus einer endlichen Anzahl solcher Curvenstücke

$$A_1 A_2, \quad A_2 A_3, \cdots\cdots A_n A_1$$

zusammengesetzt sein; das Curvenstück $A_i A_{i+1}$ ist durch die Gleichungen

$$x = \varphi_i(t), \quad y = \psi_i(t)$$
$$t_i \leqq t \leqq t_{i+1}$$

gegeben, und zwar denken wir uns die Parameterverteilung so, daß

$$t_1 < t_2 < t_3 \cdots\cdots < t_n$$

ist, und geben dem Punkt $A_1$ als Punkt des Curvenzuges $A_n A_1$ den Parameterwert $t_{n+1}$. Zum Punkt $A_i$ gehört somit der gleiche Parameterwert, ob wir ihn als Punkt von $A_{i-1} A_i$ oder von $A_i A_{i+1}$ auffassen, d. h. es ist

$$\varphi_{i-1}(t_i) = \varphi_i(t_i) \text{ und } \psi_{i-1}(t_i) = \psi_i(t_i),$$

während jedoch die Tangenten der in $A_i$ zusammenstoßenden Curvenzüge von einander verschieden sein können.

Aus diesen Festsetzungen folgt noch, daß Punkte, in denen die Curve eine der $y$-Axe parallele Tangente besitzt, unter die Punkte $A_i$ aufzunehmen sind; längs eines Curvenzuges sind daher niemals zwei parallele Tangenten vorhanden.

Endlich setzen wir noch fest, daß sich die Curve nicht selber kreuzt, d. h. es kann

$$r^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

nur dann Null sein, wenn $t' = t''$ ist; so lange also $t' - t''$ größer als die endliche Größe $\tau$ ist, giebt es auch für $r$ eine von Null verschiedene untere Grenze $\varrho$. Dies ist im besondern immer dann erfüllt, wenn $t'$ und $t''$ zu Punkten verschiedener Curvenstücke gehören, und nicht in der Nähe eines und desselben Punktes $A_\iota$ liegen.

2. Wir beweisen zunächst einige Hilfssätze über ein einzelnes Curvenstück $AB$.

a) Trifft die Gerade $g$ das Curvenstück $c$ in einem Punkt $P$, ohne jedoch zu berühren, so liegt die Curve in der Nähe von $P$ auf verschiedenen Seiten von $g$.

Ist nämlich $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die Gleichung von $g$, so folgt wegen

$$\begin{aligned} \alpha\varphi(t) + \beta\psi(t) + \gamma &= 0 \\ \alpha\psi'(t) + \beta\psi'(t) &\gtrless 0, \end{aligned}$$

daß wenn $t'$ in der Nähe von $t$ bleibt, $\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma$ für $t' < t$ und $t' > t$ verschiedenes Vorzeichen besitzt. Ebenso umgekehrt, wenn die Punkte von $c$ teils auf der einen, teils auf der andern Seite von $g$ liegen, so schneidet $g$ die Curve. Denn mit $\varphi$ und $\psi$ ist auch der Abstand $d$ des Curvenpunktes $P$ von $g$ eine stetige Function von $t$, also giebt es sicher einen Wert $t$, für den der Abstand Null ist. Dies ist im besondern für jede Gerade $g$ erfüllt, die $AB$ zwischen $A$ und $B$ trifft.

b) Ist $p_1$ die Tangente in $P_1$, so liegt die Curve ganz auf der nämlichen Seite von $p_1$. Ist nämlich wieder $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die Gleichung der Tangente, so ist

$$\begin{aligned} \alpha\varphi(t_1) + \beta\psi(t_1) + \gamma &= 0 \\ \alpha\varphi'(t_1) + \beta\psi'(t_1) &= 0. \end{aligned}$$

Liegt nun die Curve nicht auf der nämlichen Seite von $p_1$, so giebt es nach a) einen Punkt $t_2$, in dem $p_1$ die Curve schneidet, so daß

$$\alpha\varphi(t_2) + \beta\psi(t_2) + \gamma = 0.$$

Wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $t_2 > t_1$, und daß für $t > t_1$ zunächst $\alpha\varphi + \beta\psi + \gamma > 0$. Nun ist dieser Ausdruck stetige Function von $t$, also besitzt er zwischen $t_1$ und $t_2$ mindestens ein Maximum; tritt dies für $t'$ ein, so ist

$$\alpha\varphi'(t') + \beta\psi'(t') = 0,$$

also hätte $c$ in $t'$ eine zu $p_1$ parallele Tangente, was nicht der Fall ist. Es folgt noch aus a), daß die Tangente die Gerade $AB$ nicht zwischen $A$ und $B$ trifft.

Da unsere Voraussetzungen für alle Intervalle $t_\iota \cdots\cdots t_{\iota+1}$ mit Einschluß der Grenzen erfüllt sein sollen, so gilt das vorstehende auch für die Tangenten in den Endpunkten $A$ und $B$.

Aehnlich ergiebt sich, daß auch die Gerade $AB$ das Curvenstück $c$ außer in $A$ und $B$ nicht weiter schneidet. Hat daher eine Gerade $g$ zwei Punkte $P$ und $Q$ mit der Curve gemein, so sind dies die einzigen, da ja auch $PQ$ ein Curvenstück ist wie $AB$.

c) Ist $P$ wieder ein beliebiger Punkt von $c$ und $\lambda$ der Winkel, den $PA$ mit der Axe bildet, so ändert sich auch die Function

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\psi(t_a) - \psi(t)}{\varphi(t_a) - \varphi(t)}$$

stetig mit $t$ und zwar mit Einschluß der Grenzen. Sind $\lambda_a$ und $\lambda_b$ die Winkel der Tangenten in $A$ resp. $B$, so können wir unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $\lambda_a > \lambda_b$ und $\lambda_a - \lambda_b < \frac{\pi}{2}$. Man sieht sofort, daß auch $\operatorname{tg} \lambda$ eine sich monoton ändernde Function von $t$ ist. Gehörte nämlich zu zwei Werten $t_1$ und $t_2$ das nämliche $\lambda$, so sei $P_1$ der Punkt, der näher an $A$ liegt, als $P_2$. Nun liegt nach a) die Curve nur auf einer Seite der Tangente in $P_1$, und zwar auf derjenigen, auf der $A$ liegt, also ist die Existenz eines Punktes $P_2$ ausgeschlossen. Jedem $\lambda$ im Intervall $\lambda_a > \lambda > \lambda_b$ entspricht daher ein und nur ein Punkt $P$ von $c$ Also jede durch $A$ gezogene Gerade, die in den von $t_a$ und $AB$ gebildeten Winkel fällt, schneidet $c$ in noch einem von $A$ verschiedenen Punkt.

Es folgt hieraus noch beiläufig, daß $AB$ mit $t_a$ und $t_b$ ein gewöhnliches Dreieck bestimmt, das $c$ einschließt.

3. Wir beweisen nun, daß das von $c$ und $AB$ gebildete Segment $\sigma$ die Ebene in ein Aeusseres und ein Inneres teilt.

Wenn die Gerade $g$ die Strecke $AB$ zwischen $A$ und $B$ trifft, in $G$, so schneidet sie nach 2a) die Curve $c$ in einem Punkte $P$. Ein zweiter Schnittpunkt ist unmöglich, da er und $G$, also auch er und $A$ resp. $B$ auf verschiedenen Seiten der Tangente liegen würden. Wenn $g$ die Verlängerung von $AB$ trifft, und einen Punkt $P$ mit $c$ gemein hat, so ist sie entweder Tangente, oder die Curve liegt nahe bei $P$ zu verschiedenen Seiten von $g$. Ist $S$ ein Punkt, der auf der entgegengesetzten Seite von $g$ liegt, wie $A$, so gilt dies auch für $S$ und $B$, daher hat $g$ noch einen zweiten Punkt mit $c$ gemein. Andere Schnittpunkte giebt es nicht (2).

Jede nicht durch $A$ oder $B$ gehende Gerade trifft daher das Segment $\sigma$ in 0 oder zwei Punkten — ein Berührungspunkt ist doppelt zu zählen. — Ist nun $l$ eine von diesen Geraden, und schneidet sie $\sigma$ in $L_1$ und $L_2$, so wollen wir die zwischen $L_1$ und $L_2$ liegenden Punkte innere Punkte nennen. Diese Bezeichnung bezieht sich zwar zunächst nur auf $l$, wir zeigen aber sofort, daß sie von $l$ unabhängig ist, und einer Eigenschaft des Segments selbst entspricht.

Wenn nämlich (Fig. 1) zunächst $l$ die Sehne $AB$ in $G$ und die Curve $c$ in $P$ trifft, so bestimmt $P$ mit $A$ und $B$ ein Dreieck, und es liegt jeder, bezüglich $g$ innere Punkt $J$ auch innerhalb des Dreiecks. Jede durch $J$ gelegte Gerade $l_1$ schneidet daher zwei Dreieckseiten, also auch die über ihnen stehenden Bogen in je einem Punkt, es ist also $J$ auch für jede dieser Geraden ein innerer Punkt.

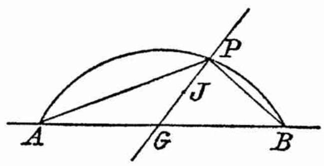

Fig. 1.

Wenn dagegen (Fig. 2) die Ausgangsgerade $l$ zwei Punkte $P$ und $Q$ von $c$ selbst trifft, so bestimmen sie mit $A$ und $B$ ein convexes Viereck, und es trifft daher jede durch einen innern Punkt $J$ von $PQ$ gelegte andere Gerade $l_1$ noch genau eine weitere Viereckseite. Man sieht üderdies leicht, daß $J$ auch für sie ein innerer Punkt ist.

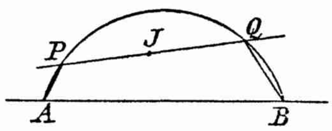

Fig. 2.

Damit sind alle Punkte der Ebene, die nicht auf dem Bogen der Sehne $AB$ selbst liegen, als innere resp. äußere Punkte des Segments characterisirt.

Wir machen noch auf folgende einfache Thatsache aufmerksam, die für das folgende wichtig ist. Durch den inneren Punkt $J$ legen wir eine Gerade $l$. Wir legen auf ihr eine Richtung fest, so wird sie (Fig. 3) entweder erst den Bogen $AB$ und dann die

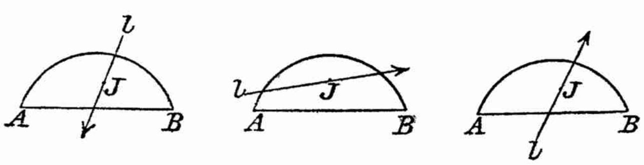

Fig. 3.

Sehne, oder erst die Sehne und dann den Bogen treffen, oder aber nur den Bogen $AB$. Drehen wir jetzt $l$ um $J$, während wir den Richtungssinn unverändert lassen, so ist klar, daß ein Uebergang aus der ersten Lage in die zweite immer nur durch die dritte Lage hindurch möglich ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Lage von $l$ zum Segment davon abhängig ist, ob $l$ die begrenzte oder die unbegrenzte Strecke $AB$ trifft.

4. Sei jetzt $k$ die Curve, die, wie oben definirt, aus einer endlichen Zahl von Curvenbögen

$$A_1 A_2, \quad A_2 A_3 \cdots\cdots A_n A_1$$

besteht, wie $AB$. Wir verbinden je zwei Punkte $A_i A_{i+1}$ mit einander und erhalten ein Polygon $\mathfrak{P}$, dessen Seiten sich beiläufig bemerkt auch kreuzen können. Wir ziehen wieder eine beliebige Gerade $l$, die wir nur der Beschränkung unterwerfen, daß sie durch keinen Punkt $A_i$ geht. Man kann nun leicht zeigen, daß jede solche Gerade $l$ das Polygon in einer geraden Anzahl von Punkten schneidet; es seien $2p$. Schneidet aber $l$ eine Polygonseite, so auch den zugehörigen Curvenbogen; dies giebt bereis $2p$ Schnittpunkte mit $k$. Ferner hat jedes Segment, dessen Sehne nicht getroffen wird, keinen oder zwei Punkte mit $l$ gemein, also hat $l$ mit der Curve eine gerade Zahl von Schnittpunkten gemein.

Wir legen wieder auf $l$ eine bestimmte Richtung fest, zählen die Schnittpunkte dieser Richtung gemäß, und wollen diejenigen Punkte von $l$, die auf einen ungeraden Schnittpunkt folgen, als innere Punkte bezeichnen. Zunächst ist ersichtlich, daß diese Definition davon unabhängig ist, in welcher Richtung wir die Schnittpunkte zählen. Wir weisen nach, daß die Bezeichnung auch von der benutzten Geraden $l$ selbst unabhängig ist.

Sei $J$ ein innerer Punkt für $l$, so trifft $l$ die Curve $k$ vor $J$ in einer ungeraden Zahl von Punkten. Wir setzen zunächst voraus, daß $J$ nicht in eine Polygonseite $A_i A_{i+1}$ fällt. Mit jedem Segment bestimmt die Gerade $l$ zwei oder Null Punkte. Es liege $J$ innerhalb von $\lambda$ Segmenten (Fig. 4). Von den beiden Schnittpunkten mit jedem dieser $\lambda$ Segmente liegt je einer vor, je einer hinter $J$; die Schnittpunkte mit den andern Segmenten, die $l$ schneidet, liegen entweder beide vor oder beide hinter $J$. Es mögen $\mu$ Segmente vor $J$, $\nu$ dagegen hinter $J$ getroffen werden, und zwar soll bei $\mu_1$ resp. $\nu_1$ Sehne und Bogen, bei $\mu_2$ resp. $\nu_2$ nur der Bogen getroffen werden. Die $\lambda$ Segmente zerfallen ihrerseits in drei Classen, je nachdem (Fig. 3) erst der Bogen und dann die Sehne, oder zuerst die Sehne und dann der Bogen, oder aber nur der Bogen geschnitten wird. Solcher Segmente mögen bezüglich $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ vorhanden sein.

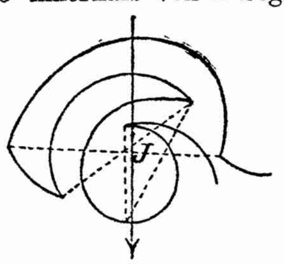

Fig.4.

Wir haben demgemäß vor $J$ folgende Schnittpunkte mit dem Polygon resp. der Curve

| | | |
|---|---|---|
| von den $\lambda_1$ Segmenten | $0$ | $\lambda_1$ |
| von den $\lambda_2$ Segmenten | $\lambda_2$ | $0$ |
| von den $\lambda_3$ Segmenten | $0$ | $\lambda_3$ |
| von den $\mu$ Segmenten | $\mu_1$ | $\mu_1 + 2\mu_2$, |

h i n t e r $J$ dagegen

| | | |
|---|---|---|
| von den $\lambda_1$ Segmenten | $\lambda_1$ | $0$ |
| von den $\lambda_2$ Segmenten | $0$ | $\lambda_2$ |
| von den $\lambda_3$ Segmenten | $0$ | $\lambda_3$ |
| von den $\nu$ Segmenten | $\nu_1$ | $\nu_1 + 2\nu_2$. |

Insgesammt also vor $J$

$$\lambda_2 + \mu_1 \text{ resp. } \lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 + 2\mu_2$$

und hinter $J$

$$\lambda_1 + \nu_1, \text{ resp. } \lambda_2 + \lambda_3 + \nu_1 + 2\nu_2$$

Schnittpunkte mit dem Polygon und der Curve.

Ist $l'$ eine andere durch $J$ gehende Gerade, so ist für sie $\lambda' = \lambda$, aber $\lambda'_1$, $\lambda'_2$, $\lambda'_3$ werden im Allgemeinen von $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ verschieden sein. In Bezug auf jedes einzelne Segment ist aber ein Uebergang aus der ersten Lage in die zweite, resp. umgekehrt nur durch die dritte Lage möglich (3). Drehen wir also $l$ um $J$, bis zum ersten Mal ein $\lambda_i$ sich ändert, so muß von dieser Aenderung notwendig $\lambda_3$ betroffen werden; die Aenderung von $\lambda_3$ um e i n e Einheit bedingt eine Aenderung von $\lambda_1$ o d e r $\lambda_2$ um eine Einheit. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir setzen

$$\lambda'_1 = \lambda_1, \qquad \lambda'_2 = \lambda_2 \pm 1, \qquad \lambda'_3 = \lambda_3 \mp 1$$

Beachten wir nun, daß der Punkt $J$ in Bezug auf das Polygon eine feste Lage hat, d. h. entweder innerer oder äußerer Punkt ist, so folgt mod. 2

$$\nu_1 + \lambda_1 \equiv \nu'_1 + \lambda'_1,$$
$$\mu_1 + \lambda_2 \equiv \mu'_1 + \lambda'_2.$$

Es ergiebt sich daher $\nu_1 \equiv \nu'_1$, $\mu_1 \equiv \mu'_1 + 1$, und daher auch

$$\lambda_1 + \lambda_3 + \mu_1 + 2\mu_2 \equiv \lambda'_1 + \lambda'_3 + \mu'_1 + 2\mu'_2,$$
$$\lambda_2 + \lambda_3 + \nu_1 + 2\nu_2 \equiv \lambda'_2 + \lambda' + \nu'_1 + 2\nu'_2,$$

d. h. es ist $J$ auch für $l'$ ein innerer Punkt; der Begriff des Innern und Aeußern ist demnach der Curve als solcher eigentümlich. Auf keiner unserer Geraden $l$ kann man von einem äußern Punkt zu einem innern Punkt gelangen, ohne die Curve zu überschreiten.

Wir wollen noch zeigen, daß sich auch die vorläufig ausgeschlossenen Punkte und Geraden in diese Begriffsbestimmungen einordnen lassen. Ausgeschlossen waren zunächst diejenigen innern Punkte $J$, die auf einer Polygonseite $A_i A_{i+1}$ liegen. Es ist nun klar, daß es auf jeder durch $J$ gehenden Geraden $l$ in unmittelbarer Nähe von $J$ Punkte $J'$ giebt, die nicht auf $A_i A_{i+1}$ liegen, aber zu jedem Curvenbogen die gleiche Lage haben, wie $J$ selbst. Daraus folgt sofort, daß man auch von $J$ selbst auf keiner Geraden $l$ zu einem äußern Punkt gelangen kann, ohne die Curve zu überschreiten. Endlich hatten wir die Geraden ausgeschlossen, auf denen irgend ein Punkt $A_i$ liegt; für einen bestimmten innern Punkt $J$ sind es diejenigen, die ihn mit einer Ecke $A_i$ verbinden. Ist $g_i$ die Gerade $JA_i$, so giebt es beliebig viele Geraden $l$ durch $J$, die die Curve in unmittelbarer Nähe von $A_i$ treffen. Diese Geraden treffen entweder beide in $A_i$ zusammenstoßende Curvenbögen oder nur einen, und da der Abstand der Curvenbogenpunkte von der Sehne eine stetige Function von $t$ ist, so ist $g_i$ entweder die Grenzlage von lauter Geraden, die beide in $A_i$ zusammenstoßende Curvenbögen treffen, oder von solchen, die nur einen dieser Curvenbögen treffen. Im letzten Fall haben wir $A_i$ als gewöhnlichen Schnittpunkt zu zählen, im ersten Fall als Vertreter von zwei Schnittpunkten, d. h. wie einen Berührungspunkt. Damit ist bewiesen:

Die Curve $k$ teilt die Ebene in ein äußeres und ein inneres Gebiet, so daß man von einem innern Punkt zu einem äußern nur gelangen kann, wenn man die Curve überschreitet.

5. An letzter Stelle geben wir noch an, wie man jeden innern Punkt $J_1$ mit jedem innern Punkt $J_2$ durch einen ganz im Curveninnern verlaufenden Curvenzug verbinden kann. Hierzu gelangen wir durch folgende Betrachtung.

Es sei $g$ eine beliebige Gerade und

$$t_\alpha t_\beta t_\gamma \cdots\cdots t_\varrho$$

seien ihre Schnittpunkte mit der Curve. Wir ziehen alle zu $g$ parallelen Geraden $g'$, die entweder durch eine Ecke $A$ gehen oder einen Curvenbogen $A_i A_{i+1}$ berühren; ihre Zahl ist endlich Wir nehmen jetzt noch an, $g$ sei so gewählt, daß keine zwei dieser Geraden $g'$ zusammenfallen. Verschieben wir $g$ bis zur nächsten Geraden $g'$ parallel mit sich selbst, so ändern sich auch die $t_\lambda$ stetig. Um dies in aller Form darzutun, verbinden wir (Fig. 5) den Punkt $P$, in dem $g$ den Curvenbogen $A_i A_{i+1}$ trifft, mit einem der Endpunkte, z. B. mit $A_i$ und ziehen in $P$ die Tangente $p$, so liegt der Bogen $A_i P$ gemäß (2) zwischen der Tangente $p$ und der Sehne $A_i P$, und es schneidet jede zu $g$ parallele Gerade $g_1$, die die Sehne in einem Punkt $G_1$ zwischen $P$ und $A_i$ trifft, den Curvenbogen in $P_1$ und die Tangente in $T_1$ so, daß $P_1$ zwischen $G_1$ und $T_1$ liegt. Der Abstand $PP_1$ ist daher sicher kleiner, als mindestens eine der Strecken $PG_1$ resp. $PT_1$, woraus die Behauptung folgt.

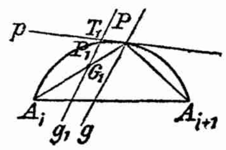


Fig. 5.

Seien nun $t_\lambda$ und $t_\mu$ zwei aufeinander folgende Schnittpunkte von $g$, so daß die Strecke $t_\lambda t_\mu$ lauter innere Curvenpunkte enthält; wir sagen kurz, $t_\lambda t_\mu$ sei eine innere Strecke $s$. Im allgemeinen werden $t_\lambda$ und $t_\mu$ verschiedenen Curvenbögen angehören. Wir verschieben nun $g$ bis zur nächsten Grenzlage $g'$, so werden im Allgemeinen auch $t'_\lambda$ und $t'_\mu$ von einander verschieden sein. Aus der Stetigkeit des Wachstums von $t_\lambda$ und $t_\mu$ folgt, daß dabei $t_\lambda t_\mu$ stets innere Strecke bleibt; $g$ und $g'$ bestimmen mit den beiden Curvenbögen eine einfache geschlossene Fläche. Besondere Fälle sind die, daß $t_\lambda$ und $t_\mu$ dem gleichen Curvenbogen angehören, und $g'$ die Tangente dieses Bogens ist, oder daß $t_\lambda$ und $t_\mu$ zwei benachbarten Curvenbögen angehören und die Grenzlage $g'$ durch den gemeinsamen Bogenendpunkt $A$ geht. In beiden Fällen bestimmt $g$ mit den bezüglichen Curvenbögen ebenfalls eine einfache geschlossene Fläche.

Ueberschreitet $g$ eine Grenzlage $g'$, so wird dabei entweder (Fig. 6) ein Curvenbogen in $T$ berührt oder (Fig. 7) eine Ecke $A$

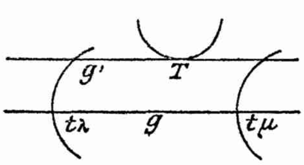


Fig. 6.

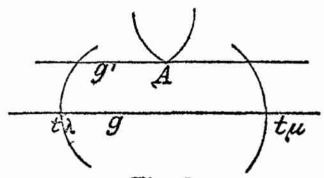


Fig. 7.

überstrichen. Entweder stellen sich dadurch zwischen $t_\lambda$ und $t_\mu$ zwei neue Schnittpunkte $t'_\lambda$ und $t'_\mu$ ein, so daß $t_\lambda t'_\lambda$ und $t'_\mu t_\mu$ innere Strecken $s'$ resp. $s''$ sind, oder es verschwinden zwei solche Schnittpunkte, resp. es treten zwei innere Strecken $s'$ und $s''$ zu einer einzigen $s$ zusammen, oder aber es tritt weder das eine noch das andere ein. Daraus folgt, daß die Geraden $g'$ die gesammte Fläche in lauter einfache Flächenstücke zerfällen, die von einer oder zwei dieser Geraden begrenzt sind, und zwar so, daß längs jeder inneren Strecke $s$ einer solchen Geraden zwei Flächenstücke an einander stoßen. Setzen wir jetzt zunächst einmal voraus, daß man in jedem derartigen von zwei Geraden $g'$, $g''$ begrenzten Flächenteil $F$ von einem Punkt von $g'$ zu einem Punkt von $g''$ einen geradlinigen Linienzug ziehen kann, der überdies durch einen beliebigen innern Punkt hindurchgeht, so läßt sich nunmehr leicht zeigen, daß man auch jeden innern Curvenpunkt $J_1$ mit jedem andern innern Punkt $J_2$ durch einen ganz im Innern verlaufenden Linienzug verbinden kann.

Seien nämlich $F_1$ und $F_2$ die Flächenteile, in den $J_1$ resp. $J$ liegen, so ziehe man von $J_1$ aus den bezüglichen Linienzug bis zu einer der $F_1$ begrenzenden Geraden $g'$. Diese Gerade $g'$ möge den Curvenbogen $A_\iota A_{\iota+1}$ in $G'_\iota$ treffen. Wir bezeichnen jetzt die durch die Reihenfolge $A_1$, $A_2$, $A_3$ gegebene Umlaufsrichtung der Curve als positive, so giebt es genau einen Flächenteil $F'$, zu dessen Curvenbogen die Fortsetzung von $A_\iota A_{\iota+1}$ über $G'_\iota$ in positiver Richtung gehört. Auf diese Weise ist eine bestimmte Reihe von Flächenteilen

$$F_1,\ F',\ F'' \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot F_2$$

definirt, in deren letztem $J_2$ liegt. Zwei anstoßende Flächenteile haben entweder eine Strecke $s'$ einer Geraden $g'$ als gemeinsame Begrenzung, oder aber zwei verschiedene Strecken $s'$ und $s''$, die jedoch aneinander stoßen, und zwischen sich einen Berührungspunkt $T$ mit einem Curvenbogen oder aber einen Punkt $A$ enthalten. Auf Grund unserer obigen Voraussetzung schließen wir daher, daß wir von $J_1$ nach $J_2$ einen geradlinigen Linienzug legen können, der in $F_1$ beginnt, $F', F'' \cdots$ durchzieht und in $F_2$ endigt, im übrigen im Innern der Curve verläuft, bis auf die dem Rande angehörigen Punkte $T$ und $A$. Zu bemerken ist nur, daß bei solchen Flächenteilen $F'$, die nur e i n e Gerade $g'$ als Grenzgerade enthalten, nur diese Gerade selbst in den Linienzug eingeht.

Die gemachte Voraussetzung erweisen wir wie folgt. Die bezüglichen Flächenteile $F$ werden von solchen Curvenbogen begrenzt, für die gemäß (1) das Quadrat des Abstandes

$$r^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2$$

niemals unter eine v o n N u l l v e r s c h i e d e n e u n t e r e Grenze $\varrho$ sinken kann. Trifft nun eine Gerade $g$ die Curvenbogen von $F$ in $G_\lambda$ und $G_\mu$, so liegt der mit dem Radius $\frac{\varrho}{2}$ um die Mitte $M$ von $G_\lambda G_\mu$ geschlagene Kreis, wie leicht zu sehen, ganz innerhalb von $F$. Zieht man daher über $F$ eine Schaar paralleler Geraden $g$, deren Abstand $\delta \leqq \frac{\varrho}{2}$, so liegt das von den Mitten $M$ auf die benachbarten

Geraden gefällte Lot ganz innerhalb von $F$, und es bilden diese Lote, zusammen mit den bezüglichen Stücken der Geraden $g$ von den Fußpunkten der Lote bis zu den Mitten $M$, den oben genannten geradlinigen Linienzug. Wir haben nur auch dafür zu sorgen, daß eine Parallele durch $J_1$ eine andere durch $J_2$ geht, was stets ausführbar. — Wir ziehen hieraus noch eine weitere Folgerung. Stoßen zwei Flächenstücke $F$ längs zweier Strecken $s'$ und $s''$ an einander, die zwischen sich einen Berührungspunkt $T$ oder einen Punkt $A$ enthalten, so kann man die zwischen ihren Mittelpunkten $M'$ und $M''$ liegende Strecke $M'TM''$ resp. $M'AM''$ durch eine andere ersetzen, die im Curveninnern liegt, ohne $T$ resp. $A$ zu enthalten. Wir ziehen zu diesem Behuf wieder diejenige Parallele zu $g'$ im Abstand $\frac{\varrho}{2}$, auf der die innern Strecken $s'$ und $s''$ in eine einzige Strecke zusammengetreten sind, und fällen von $M'$ und $M''$ die Lote auf sie.

Wir gewinnen auf diese Weise einen polygonalen Linienzug, der in $J_1$ beginnt, in $J_2$ endigt, und ganz im Innern der Curve verläuft. Dieser Linienzug kann sich möglicherweise durchsetzen. In diesem Fall braucht man aber nur die überflüssigen Schleifen zu tilgen, um zu einem sich nicht durchsetzenden von $J_1$ nach $J_2$ gehenden Linienzug zu gelangen. Hiermit ist der geforderte Beweis vollständig geliefert; jeder innere Punkt kann mit jedem andern inneren Punkt durch einen ganz im Innern verlaufenden sich nicht durchsetzenden, aus geraden Strecken bestehenden Weg verbunden werden.

---