Nachrichten

von der

Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg - Augusts - Universität

zu Göttingen.

10. März. №. 2. 1887.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung vom 8. Januar.

Ueber das Doppler'sche Princip.

Von

W. Voigt.

Die Differentialgleichungen für die Oscillationen eines elastischen incompressibeln Mediums sind bekanntlich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta w \end{aligned} \qquad 1)$$

worin ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oscillationen — genauer die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen mit constanter Amplitude — bezeichnet. Dabei ist vorausgesetzt, daß u, v, w die Relation erfüllen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad 1')$$

Es seien nun $u = U$, $v = V$, $w = W$ Lösungen dieser Gleichungen, welche an einer gegebenen Oberfläche $f(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = 0$ gegebene von der Zeit abhängige Werthe $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ annehmen, so kann man sagen, daß diese Functionen U, V, W das Gesetz darstellen, nach welchem die Oberfläche $f = 0$ leuchtet.

Vertauscht man in U, V, W resp.

$$
\begin{aligned}
&x \text{ mit } \xi = xm_1 + yn_1 + zp_1 - \alpha t \\
&y \text{ mit } \eta = xm_2 + yn_2 + zp_2 - \beta t \\
&z \text{ mit } \zeta = xm_3 + yn_3 + zp_3 - \gamma t \\
&t \text{ mit } \tau = t - (ax + by + cz)
\end{aligned} \tag{2}
$$

und bezeichnet die so erhaltenen Functionen resp. mit (U), (V), (W), so läßt sich durch $u = (U)$, $v = (V)$, $w = (W)$ ebenfalls den Gleichungen (1) genügen.

Denn man erhält z. B. für die erste von ihnen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2}\left(1 - \omega^2 (a^2 + b^2 + c^2)\right) = \omega^2 \Bigg\{ & \frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2}\left(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2}\right) \\
& + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2}\left(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2}\right) + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2}\left(m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}\right) \\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta \, \partial \zeta}\left(m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 - \frac{\beta\gamma}{\omega^2}\right) \\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta \, \partial \xi}\left(m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 - \frac{\gamma\alpha}{\omega^2}\right) \\
& + 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi \, \partial \eta}\left(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 - \frac{\alpha\beta}{\omega^2}\right) \\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau \, \partial \xi}\left(am_1 + bn_1 + cp_1 - \frac{\alpha}{\omega^2}\right) \\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau \, \partial \eta}\left(am_2 + bn_2 + cp_2 - \frac{\beta}{\omega^2}\right) \\
& - 2\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau \, \partial \zeta}\left(am_3 + bn_3 + cp_3 - \frac{\gamma}{\omega^2}\right) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

und diese ist, da ja sein muß:

$$
\frac{\partial^2 (U)}{\partial \tau^2} = \omega^2 \left(\frac{\partial^2 (U)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 (U)}{\partial \zeta^2}\right)
$$

erfüllt, wenn folgende neue Gleichungen bestehen:

$$
\begin{aligned}
1 - \omega^2 (a^2 + b^2 + c^2) &= m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 - \frac{\alpha^2}{\omega^2} \\
&= m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 - \frac{\beta^2}{\omega^2} \\
&= m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 - \frac{\gamma^2}{\omega^2}
\end{aligned} \tag{3}
$$

$$\begin{aligned} \frac{\beta\gamma}{\omega^2} &= m_2 m_3 + n_2 n_3 + p_2 p_3 \\ \frac{\gamma\alpha}{\omega^2} &= m_3 m_1 + n_3 n_1 + p_3 p_1 \\ \frac{\alpha\beta}{\omega^2} &= m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\omega^2} &= am_1 + bn_1 + cp_1 \\ \frac{\beta}{\omega^2} &= am_2 + bn_2 + cp_2 \\ \frac{\gamma}{\omega^2} &= am_3 + bn_3 + cp_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Nimmt man $\alpha\beta\gamma$ als gegeben an, so hat man 12 verfügbare Constanten, kann also über drei von ihnen willkürlich verfügen.

Die Auflösung erfolgt am bequemsten, wenn man vorübergehend ein Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 benutzt, für welches in den Gleichungen (2) β und γ verschwinden, α gleich $\varkappa$ wird; d. h. ein solches, dessen X_1-Axe in die Richtung fällt, deren Richtungscosinus gegen X, Y, Z mit α, β, γ proportional sind.

Es sei ferner gesetzt

$$\begin{aligned} m_h^2 + n_h^2 + p_h^2 &= q_h^2, \quad m_h/q_h = \mu_h, \quad n_h/q_h = \nu_h, \quad p_h/q_h = \pi_h \\ a^2 + b^2 + c^2 &= d^2, \quad a/d = \mu, \quad b/d = \nu, \quad c/d = \pi, \end{aligned}$$

dann sind μ, ν, π die Richtungscosinus von 4 Richtungen, die wir durch δ_1, δ_2, δ_3 und δ bezeichnen wollen, gegen das System X_1, Y_1, Z_1.

Durch diese Einführungen werden unsere Gleichungen (3), (4) und (5):

$$1 - \omega^2 d^2 = q_1^2 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2} = q_2^2 = q_3^2 \tag{3'}$$

$$\mu_2\mu_3 + \nu_2\nu_3 + \pi_2\pi_3 = \mu_3\mu_1 + \nu_3\nu_1 + \pi_3\pi_1 = \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + \pi_1\pi_2 = 0$$

$$\text{d. h. } \cos(\delta_2, \delta_3) = \cos(\delta_3, \delta_1) = \cos(\delta_1, \delta_2) = 0 \tag{4'}$$

$$\mu\mu_1 + \nu\nu_1 + \pi\pi_1 = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d}, \quad \mu\mu_2 + \nu\nu_2 + \pi\pi_2 = \mu\mu_3 + \nu\nu_3 + \pi\pi_3 = 0$$

$$\text{d. h. } \cos(\delta, \delta_1) = \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d}, \quad \cos(\delta, \delta_2) = \cos(\delta, \delta_3) = 0. \tag{5'}$$

Nach (4') stehen die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 zu einander senkrecht, nach (5') fällt δ_1 mit δ zusammen, es muß also sein:

$$\mu = \mu_1, \quad \nu = \nu_1, \quad \pi = \pi_1 \text{ und } \frac{\varkappa}{\omega^2 q_1 d} = 1. \tag{6}$$

Dies in (3') eingesetzt bestimmt d und $q_1\ q_2\ q_3$.

Man erhält zunächst, da nur positive Zeichen einen Sinn geben:

$$q_1 = 1 \text{ oder } \frac{\varkappa}{\omega}$$
$$d = \frac{\varkappa}{\omega^2} \text{ oder } \frac{1}{\omega}.$$

Ich werde nur die erste Lösung benutzen, da die zweite kein Interesse bietet[1]); aus ihr folgt:

$$7)\qquad d = \frac{\varkappa}{\omega^2},\ q_1 = 1,\ q_2 = q_3 = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q.$$

Hiernach können wir die Gleichungen (2) schreiben:

$$8)\qquad \begin{aligned} \xi_1 &= x_1\mu_1 + y_1\nu_1 + z_1\pi_1 - \varkappa t &&= a_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= (x_1\mu_2 + y_1\nu_2 + z_1\pi_2)\,q &&= b_1 q \\ \zeta_1 &= (x_1\mu_3 + y_1\nu_3 + z_1\pi_3)\,q &&= c_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(\mu_1 x + \nu_1 y + \pi_1 z) &&= t - \frac{\varkappa a_1}{\omega^2}, \end{aligned}$$

wo für $\mu_h,\ \nu_h,\ \pi_h$ keine weiteren Bedingungeu mehr gelten, als die aus ihrer Bedeutung als Richtungscosinus von drei auf einander normalen, aber sonst ganz beliebigen Richtungen hervorgehenden.

Es können daher die mit $a_1\ b_1\ c_1$ bezeichneten Aggregate als die Coordinaten der Stelle $x_1\ y_1\ z_1$ in Bezug auf ein mit den Richtungen $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3$ zusammenfallendes Coordinatensystem ABC angesehen werden.

Jedes derartige System $\mu_h,\ \nu_h,\ \pi_h$ giebt eine Lösung (U), (V), (W) aus gegebenen $U,\ V,\ W$. Nahmen $U,\ V,\ W$ an einer Oberfläche $f(x,\ y,\ z) = 0$ gegebene Werthe $\overline{U},\ \overline{V},\ \overline{W}$ an, so (U), (V), (W) aus jenen ableitbare $(\overline{U})$, $(\overline{V})$, $(\overline{W})$ an der Oberfläche $(f) = f(\overline{\xi_1},\ \overline{\eta_1},\ \overline{\zeta_1}) = 0$, welche wegen der Werthe von $\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1$ die Eigenschaft hat, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der durch die Richtungscosinus $\mu_1\ \nu_1\ \pi_1$ gegebenen Richtung δ_1 oder A fortzuschieben. Die Lösungen (U), (V), (W) geben also die Gesetze, nach welchen gewisse in fortschreitender Bewegung begriffene Oberflächen leuchten, wenn sie nur noch der Bedingung

$$\frac{\partial(U)}{\partial x} + \frac{\partial(V)}{\partial y} + \frac{\partial(W)}{\partial z} = 0$$

1) Aus ihr folgt $q_2 = q_3 = 0$ also auch $m_2\ n_2\ p_2$, $m_3\ n_3\ p_3$ und hiernach $\zeta = \eta = 0$.

genügen. Die beiden Oberflächen $f = 0$ und $(f) = 0$ sind der Form nach nur identisch wenn $q = 1$, d. h. $\varkappa$ so klein gegen ω ist, daß $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigt werden kann. Ist dies der Fall, so sind sie nur durch ihre Lage gegen die Coordinatenaxen verschieden. Durch geeignete Verfügungen über die willkürlichen Constanten und die Functionen U, V, W kann man anschauliche specielle Fälle erhalten. Durch Transformation der Coordinaten gelangt man dann zu dem wenigstens formell allgemeineren Falle, daß die Verschiebung der Fläche nicht der A-Axe parallel, sondern beliebig gerichtet ist.

Wir verfolgen den speciellen Fall, daß die drei Richtungen δ_1, δ_2, δ_3 in die drei Coordinatenaxen X_1, Y_1, Z_1 fallen, d. h.

$$\begin{aligned} \mu_1 = \nu_2 = \pi_3 = 1, \\ \mu_2 = \mu_3 = \nu_1 = \nu_3 = \pi_1 = \pi_2 = 0 \text{ ist.} \end{aligned} \tag{9}$$

Dann wird sehr einfach, der Form nach naturgemäß mit (8) identisch:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x_1 - \varkappa t \\ \eta_1 &= y_1 q \\ \zeta_1 &= z_1 q \\ \tau &= t - \frac{\varkappa x_1}{\omega^2}, \text{ wobei } q = \sqrt{1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \text{ ist.} \end{aligned} \tag{10}$$

Die Bedingung (1') lautet in diesem Falle

$$(1-q)\frac{\partial(U)}{\partial\xi} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial(U)}{\partial\tau}$$

was sich ohne Weiteres vertauschen läßt mit

$$(1-q)\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial U}{\partial t}. \tag{10'}$$

Dies sagt aus, daß in U die Argumente x und t nur in der Verbindung $(1-q)\, t + \frac{\varkappa x}{\omega^2}$ oder garnicht vorkommen dürfen. Letzteres ist der Fall wenn $U = 0$ ist, d. h. wenn die fortgepflanzten Schwingungen überall normal zur Translationsrichtung der leuchtenden Oberfläche stehen.

Geht man von dem vorausgesetzten speciellen Coordinatensystem X_1, Y_1, Z_1 zu dem allgemeinen X, Y, Z über, welches durch die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 &= x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1 \\ y_1 &= x\alpha_2 + y\beta_2 + z\gamma_2 \\ z_1 &= x\alpha_3 + y\beta_3 + z\gamma_3 \end{aligned} \tag{11}$$

mit dem ersteren zusammen hängen möge, so erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
\xi &= xq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\alpha_1(1-q) - \varkappa\alpha_1 t\\
\eta &= yq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\beta_1(1-q) - \varkappa\beta_1 t\\
\zeta &= zq + (x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1)\,\gamma_1(1-q) - \varkappa\gamma_1 t\\
\tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Das ist die allgemeine Form (2) von der wir ausgegangen sind, aber mit vollständig durch $\varkappa$, α_1, β_1, γ_1 bestimmten Constanten, sie enthält das, was man gewöhnlich unter dem Doppler'schen Princip versteht, soweit dasselbe richtig ist.

Kann man hierin $\varkappa^2$ neben ω^2 vernachlässigen, so ist $q = 1$ und man erhält sehr einfach:

$$
\begin{aligned}
\xi &= x - \varkappa\alpha_1 t\\
\eta &= y - \varkappa\beta_1 t\\
\zeta &= z - \varkappa\gamma_1 t\\
\tau &= t - \frac{\varkappa}{\omega^2}(x\alpha_1 + y\beta_1 + z\gamma_1).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Die Bedingung (1') lautet hierbei:

$$
0 = \frac{\varkappa}{\omega^2}\frac{\partial}{\partial t}(U\alpha_1 + V\beta_1 + W\gamma_1)
\tag{13'}
$$

und ist bei den angenommenen Vernachlässigungen nur soweit zu erfüllen nöthig, daß das in $\frac{\varkappa}{\omega}$ multiplicirte Glied von erster Ordnung wird.

Bewegt sich außer der leuchtenden Oberfläche auch der Beobachter, etwa mit der constanten Geschwindigkeit $\varkappa'$ in einer durch die Richtungscosinus α', β', γ' gegebenen Richtung, so sind die Verschiebungen u, v, w, nur auf ein mit dem Beschauer bewegtes Coordinatensystem X', Y', Z' zu beziehen, also in (12) oder (13) x mit $x' + \varkappa'\alpha' t$, y mit $y' + \varkappa'\beta' t$, z mit $z' + \varkappa'\gamma' t$ zu vertauschen.

Wir machen von dem Gefundenen einige Anwendungen.

1) Sei eine Ebene parallel der YZ-Ebene in Schwingungen versetzt nach dem Gesetz

$$\overline{W} = A \sin\frac{2\pi t}{T},$$

so ist die nach der positiven X-Axe fortgepflanzte Bewegung gegeben durch:

$$W = A \sin\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{\omega}\right).$$

Machen wir hierin die Substitution nach (10) so ergiebt sich:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{\varkappa}{\omega}\right)\left(t-\frac{x}{\omega}\right).$$

Dies giebt für $x = \varkappa t$:

$$(\overline{W}) = A \sin \frac{2\pi t}{T}\left(1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) = A \sin \frac{2\pi t}{T'}, \qquad 14')$$

wir haben also eine mit der (nur um eine Größe zweiter Ordnung von T verschiedenen) Schwingungsdauer $T' = T/\left(1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right)$ schwingende und dabei mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Axe fortschreitendende (leuchtende) Ebene. Die fortgepflanzte Schwingung läßt sich schreiben:

$$(W) = A \sin \frac{2\pi}{T'\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t-\frac{x}{\omega}\right). \qquad 14)$$

Wir erhalten also in der fortgepflanzten Welle eine im Verhältniß $\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)/1$ verringerte Schwingungsdauer.

Bewegt sich auch noch der Beobachter, so gilt:

$$(W') = A \sin \frac{2\pi}{T'\left(1-\frac{\varkappa}{\omega}\right)}\left(t-\frac{x'+\varkappa' t}{\omega}\right)$$

$$= A \sin 2\pi \left(t\frac{(\omega+\varkappa')}{T'(\omega-\varkappa)} - \frac{x'}{T'(\omega-\varkappa)}\right).$$

Diese Formel giebt das Doppler'sche Princip für ebene Wellen. Aber sie ist keineswegs allgemein gültig, sondern setzt ganz wesentlich eine Wellenebene mit durchweg constanter Amplitude voraus.

2) Sei dieselbe Ebene versetzt in Schwingungen nach dem Gesetz:

$$\overline{W} = A e^{(\mu y+\nu z)\frac{2\pi}{T\omega}} \sin \frac{2\pi t}{T}$$

— wie es ähnlich auftritt, wenn eine Welle mit ursprünglich constanter Amplitude durch ein Prisma aus einer absorbirenden Substanz gegangen ist —, dann gilt für die fortgepflanzte Welle:

$$W = A e^{\frac{2\pi(\mu y+\nu z)}{T\omega}} \sin \frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x\sigma}{\omega}\right) \text{ worin } \sigma = \sqrt{1+\mu^2+\nu^2} \text{ ist.}$$

Nimmt man hier die Substitution gemäß (10) vor, so kommt, falls $\sqrt{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} = q$ gesetzt wird:

$$(W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu y+\nu z)q}{T\omega}} \sin\frac{2\pi}{T}\left[t\left(1+\frac{\varkappa\sigma}{\omega}\right)-x\left(\frac{\sigma}{\omega}+\frac{\varkappa}{\omega^2}\right)\right].$$

Dies giebt für $x = \varkappa t$, falls man $\frac{\mu}{q} = \mu'$, $\frac{\nu}{q} = \nu'$ schreibt:

$$(\overline{W}) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y+\nu' z)}{\omega T'}} \sin\frac{2\pi t}{T'}, \text{ wo wiederum } T' = \frac{T}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} \text{ ist,}$$

also eine schwingende und zugleich fortschreitende Ebene; die fortgepflanzte Verrückung aber schreibt sich:

$$15)\quad (W) = Ae^{\frac{2\pi(\mu' y+\nu' z)}{\omega T'}} \sin\frac{2\pi}{T'}\left(t\frac{1+\frac{\varkappa\sigma}{\omega}}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}} - x\frac{\frac{\sigma}{\omega}+\frac{\varkappa}{\omega^2}}{1-\frac{\varkappa^2}{\omega^2}}\right),$$

worin jetzt $\sigma = \sqrt{1+(\mu'^2+\nu'^2)q^2}$ ist.

Man bemerkt, daß hier ganz andere Gesetze gelten als durch das Doppler'sche Princip gegeben sind, selbst wenn man sich auf die erste Annährung beschränkt und $\varkappa^2/\omega^2$ neben 1 vernachlässigt.

3) Ist die leuchtende Oberfläche eine sehr kleine Kugel vom Radius R, welche nach dem Gesetz für den Drehungswinkel

$$\overline{\psi} = A\sin\frac{2\pi t}{T}$$

um die X-Axe oscillirt, so sind in der Entfernung $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ vom Kugelmittelpunkt die fortgepflanzten Drehungen ψ gegeben durch[1]):

$$\psi = \frac{R^3A}{r^3}\left[\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}\right)+\frac{2\pi(r-R)}{T\omega}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}\right)\right]$$

$$16)\quad = \frac{R^3A}{r^3}\sqrt{1+\left(\frac{2\pi(r-R)}{T\omega}\right)^2}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r-R}{\omega}-\eta\right),$$

worin

$$\frac{2\pi(r-R)}{T\omega} = \operatorname{ctg}\frac{2\pi\eta}{T}$$

1) W. Voigt, Crelles Journ. Bd. 89, 298.

gesetzt ist. Es wird also $\eta = \frac{T}{4}$ für $r = R$ und $\eta = 0$ wenn r sehr groß gegen die Wellenlänge $T\omega$ ist.

Die fortgepflanzten Verrückungen folgen aus ψ durch:

$$U = 0, \quad V = -\psi z, \quad W = \psi y;$$

wir setzen kurz:

$$U = 0, \quad V = MC, \quad W = NC.$$

Setzt man hierin für x, y, z die Werthe ξ, η, ζ nach (10), so wird der periodische Theil C:

$$(C) = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varkappa x}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R\right) - (\eta)\right), \quad 17)$$

$$\text{falls } \operatorname{cotg}\frac{2\pi(\eta)}{T} = \frac{2\pi}{T\omega}\left(\sqrt{(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2} - R\right) \text{ ist.}$$

Für $(x-\varkappa t)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ d. h. an der Oberfiäche einer mit der Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der X-Axe verschobenen Kugel wird dies

$$(\overline{C}) = \sin\frac{2\pi}{T}\left(t\left(1 - \frac{\varkappa^2}{\omega^2}\right) - \frac{\varkappa}{\omega^2}\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right)$$

also, da nach der Annahme $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ und $\frac{\varkappa R}{\omega^2}$ zweiter Ordnung ist:

$$(\overline{C}) = \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

(M) und (N) haben denselben Werth, als ob die kleine Kugel um die zur Zeit t erreichte Position $x_0 = \varkappa t$ als Gleichgewichtslage oscillirte. Wir erhalten demnach durch (U), (V), (W) die von einem in fortschreitender Geschwindigkeit $\varkappa$ parallel der Richtung der Rotationsaxe befindlichen durch Rotation »leuchtendem Punkte« ausgesandte Bewegung gegeben.

Die fortgepflanzten Wellenflächen beurtheilen sich nach dem Werth (17) für (C), der sich unter Einführung der relativen Coordinaten gegen den bewegten leuchtenden Punkt $\xi = x - \varkappa t$, $y = \eta$, $z = \zeta$ schreiben läßt bei Vernachlässigung von $\frac{\varkappa^2}{\omega^2}$ neben 1 und für gegen $T\omega$ großes r:

$$(C) = \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{\varkappa\xi}{\omega^2} - \frac{1}{\omega}\left(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} - R\right)\right).$$

Die Wellenflächen sind also Kugeln, aber nicht um den leuchtenden Punkt, sondern eine um den $\frac{\varkappa}{\omega}$-ten Theil ihrer Radien nach der der Bewegung entgegengesetzten Richtung von ihm abliegende Stelle als Centrum zu construiren.

Ein ruhender Beobachter würde also, da die Normale auf der Wellenfläche durch die Beobachtungsstelle die Richtung angiebt, in welcher die Lichtquelle wahrzunehmen ist, den leuchtenden Punkt an der Stelle sehen, an welcher er sich vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ befand, oder anders ausgedrückt: er würde, falls sein Radiusrector r mit der Bewegungsrichtung den Winkel φ einschließt, eine »Aberration« von der Größe $\frac{r}{\omega}\sin\varphi$, in der der Bewegung des Punktes entgegengesetzter Richtung wahrnehmen.

Was die fortgepflanzten Amplituden (M) und (N) angeht, so haben sie an der Stelle $x\ y\ z$ nach dem Obigen zur Zeit t diejenigen Werthe, als ob der leuchtende Punkt sich dauernd an der zu dieser Zeit t erreichten Stelle befunden hätte, während doch die Wellenfläche in $x\ y\ z$ die Form hat, als verharrte der leuchtende Punkt an der zur Zeit $t-\frac{r}{\omega}$ erreichten Stelle. Es gehören also Wellenfläche und Amplitude nicht in dem Sinne, wie bei einem ruhenden leuchtenden Punkte zusammen, letztere ist von der augenblicklichen, erstere von einer verlassenen Position des leuchtenden Punktes abhängig.

So giebt sich das eigenthümliche Resultat, daß ein Beobachter einen so bewegten leuchtenden Punkt constanter Intensität, der sich zur Zeit t in der Entfernung r von ihm befindet, in derjenigen Lage sieht, welche er vor der Zeit $\frac{r}{\omega}$ hatte, aber mit der Intensität, wie sie der augenblicklichen (größeren oder kleineren) Entfernung entspricht.

Die Anwendbarkeit der obigen allgemeinen Betrachtungen auf Probleme der Optik ist beschränkt durch die Nebenbedingung (1′), die auf die Formeln (10′) und (13′) geführt hat.

Eine solche Beschränkung findet bei den analogen Problemen der Akustik von Flüssigkeiten nicht statt. Denn für die fortgepflanzte Dilatation δ gilt hier die einzige Bedingung

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2} = \omega^2\,\Delta\delta.$$