Werk

Titel: Numerical Analysis

Jahr: 1972

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0237|log49

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

65 Numerical Analysis

65001 *
Cherkasova, M. P.:
Collected problems in numerical methods. An educational aid for students in universities and technical colleges. Translated and edited from the Russian by G. L. Thomas and R. S. Anderssen.
Groningen, The Netherlands: Wolters-Noordhoff Publishing. VII,210 p. Dfl. 25.00 (1972).
Das aus dem Russischen übersetzte Buch (1967; dies. Zbl. 158, 335) ist eine umfangreiche Aufgabensammlung zu bekannten Rechenverfahren der klassischen praktischen Analysis. In 3 Kapiteln (80 Seiten) werden die Verfahren skizziert und die auch mit Tischrechenmaschinen zu bewältigenden Aufgaben gestellt. Kapitel 1: Iterative Lösungsverfahren für algebraische und transzendente Gleichungen in einer und mehreren Unbekannten. Kapitel 2: Direkte und iterative Verfahren zur Lösung linearen Gleichungssysteme, zur Matrixinversion, Eigenwert- und Eigenvektorberechnung. Kapitel 3: Verfahren zur Lösung von Anfangswertaufgaben für gewöhnliche Dglgn 1. Ordnung - für eine Gleichung und für Systeme -, sowie zur Lösung von Anfangs- und Randwertaufgaben für gewöhnliche Dglgn 2. Ordnung. Auf numerische Schwierigkeiten der zu exerzierenden Verfahren wird nur sehr kurz hingewiesen. - Die Lösungen zu den Aufgaben sind auf rund 120 Seiten angegeben. H. Sandmann.

65B ACCELERATION OF CONVERGENCE

65002
Kruglikova, L. G.:
Lineare Transformationen von Folgen nach der Methode der kleinsten Quadrate und Summation divergenter Reihen.
Izvestija Akad. Nauk BSSR, Ser. fiz.-mat. Nauk 1972, Nr. 3, 97-100 (Russisch) (1972).
Im Artikel wird die Tranformation

$$\sigma_{n,m} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{kn}$$

untersucht, wo $\alpha_k = D_k/D$, $D = \sum_{k=1}^{n} D_k$,

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^m} \\ \frac{1}{k} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{m+1}} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{k^m} & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{m+1}} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^{2m}} \end{vmatrix}$$

Für $m=0$ gilt $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$. - Es wird bewiesen, daß die Transformationen mit

verschiedenen Graden der Approximation m (m=0,1,2,...) untereinander gleichwertig sind. Übersetzung des Autorreferats.

65003
Field, David A.; Jones, William B.:
A priori estimates for truncation error of continued fractions $K(1/b_n)$.
Numerische Math. 19, 283-302 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 227.65004.

65C NUMERICAL SIMULATION

65004
Maghsoodloo, S.:
An investigation by high speed sampling of the frequency distribution of rank correlation.
Computing 8, 1-12 (1971).
The function $\varphi_n(S)$ is linearly related to $f_n(r)$, the frequency distribution of Spearman's coefficient for rank correlation. Exact combinatorial results for $n \leq 8$ and an asymptotic approximation are available by M. K e n d a l l , The advanced theory of statistics. I (2nd ed., London 1958), p. 388. Since the combinatorial approach is intractable for $n > 10$ the principal purpose of this paper was to study $\varphi_n(S)$ for $n > 10$ by the Monte Carlo method. The conclusion was reached that the asymptotic approximation is satisfactory for $n > 20$.
Zusammenfassung des Autors.

65D NUMERICAL APPROXIMATION

65005
Hall, C. A.:
Natural cubic and bicubic spline interpolation.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).
An alternate proof is presented of Kershaw's result that the L_∞-norm of the error in natural spline interpolation to a function $f \in C^4[a,b]$ is $O(h^4)$ in a closed sub-interval which is asymptotic to [a,b] as $h \to 0$. The case $f \in C^m[a,b]$, $m = 2$ or 3 is also considered. These univariate results are then used to investigate natural bicubic spline interpolation over a rectangle $\mathfrak{R}$. For $f \in C^m[\mathfrak{R}]$, the L_∞-norm of the error is shown to be $O(h^{m-2})$ throughout $\mathfrak{R}$ and $O(h^m)$ in a closed subrectangle which is asymptotic to $\mathfrak{R}$ as $h \to 0$. Arbitrary sequences of partitions are considered throughout. Autorreferat.

65006
Melkes, František:
Reduced piecewise bivariate Hermite interpolations.
Numerische Math. 19, 326-340 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 227.65007.

65007
Nicoletti, B.; Mariani, L.:
Optimal differential approximation.
J. math. Analysis Appl. 40, 138-147 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 209, 468.

65008 □
Makarov, V. L.:
Über spezielle Funktionen eines diskreten Arguments erster Art eines axialsymmetrischen Potentials.
Vyčislit. priklad. Mat., mežvedomst. naučn. Sbornik 3, 140–149 (Russisch. Deutsche Zusammenfassung) (1967).
[Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 189, 161 angezeigten Sammelwerk.]
In der Arbeit wird eine neue Klasse von speziellen Funktionen untersucht. Es wird gezeigt, daß diese Funktionen mit den Legendreschen Polynomen auf bestimmte Weise verbunden sind. Für die Nullstellen dieser Funktionen werden obere und untere Grenzen gefunden. Deutsche Zusammenfassung.

65009
Shingo, Takaichi:
Approximate formulae for the elliptic integrals of the first and second kinds for use in engineering problems.
Mem. Defense Acad. 2, Nr. 5, 55-67 (1963).

65010
Ascari, Aldo:
Sul calcolo numerico degli integrali iterati della funzione degli errori.
Rivista Mat. Univ. Parma, II. Ser. 11, 103-110 (1970).
A method is proposed for the numerical evaluation of the repeated integrals of the error function, which avoids the use of the three-term recurrence relation. The method is based on a bilinear relation, derived in the paper, between these functions and the Hermite polynomials. Engl. Zusammenfassung.

65011
Strahov, V. N.:
Gewisse Rechenschemata zur Ermittlung der zweiten vertikalen Ableitungen von Potentialfeldern.
Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geofiz. 1963, 110-127 (Russisch) (1963).

65012
Askey, Richard:
Positivity of the Cotes numbers for some Jacobi abscissas.
Numerische Math. 19, 46-48 (1972).
Continuing earlier work of Pólya, Fejér, and Szegö, the Cotes numbers for Jacobi abscissas are shown to be nonnegative for $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha+\beta \leq 1$; $\alpha = \beta + 1$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$; and $\beta = \alpha + 1$, $\frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$. Autorreferat.

65013 *
Chakravarti, P. C.:
Integrals and sums. Some new formulae for their numerical evaluation.
London etc.: The Athlone Press of the University of London. X, 88 p. £ 2.25 (1970).
In diesem Buch werden mit Hilfe einer Verallgemeinerung der Euler-Maclaurin-Formel neue Quadraturverfahren bei verschiedenen Gewichtsfunktionen aufgestellt und in Tabellen explizit angegeben. Dazu werden spezielle Fehlerabschätzungen entwickelt. Numerische Vergleiche mit neueren Quadraturverfahren werden nicht durchgeführt. S. Filippi.

65014
Cazenave, René:
Critères de précision dans l'intégration numérique.
C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A 274, 781-783 (1972).
Unter der Voraussetzung, daß der Integrand f(x) in [a,b] konvex oder konkav ist, werden Fehlerabschätzungen bei der numerischen Quadratur mit Hilfe der Trapez- und Simpson-Regel diskutiert. S. Filippi.

65015
Ionescu, D. V.:
Formules de cubature du type Obrechkoff ayant le degré d'exactitude égal à quatre.
Bălgar. Akad. Nauk., Otd. mat. fiz. Nauki, Izvestija mat. Inst. 12, 17-28 (1970).
In Acad. Republ. polul. Romîne, Fil. Cluj, Inst. Calcul, Studii Cerc. Mat. 13, 35-86 (1962), gab Verf. Übertragungen von Quadraturformeln nach O b r e s c h k o f f auf Gebietsintegrale bei rechteckigem Integrationsgebiet, durch die Polynome vom Höchstgrad drei in zwei Veränderlichen noch exakt integriert werden. Hier werden in derselben Weise Kubaturformeln vom Genauigkeitsgrad vier mit Restdarstellungen in Integralform angegeben. G. Hämmerlin.

65016
Hunter, D. B.:
Some Gauss-type formulae for the evaluation of Cauchy principal values of integrals.
Numerische Math. 19, 419-424 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 231.65028.

65017 □
Mysovskih, I. P.:
Über Kubaturformeln für Kreis und Kugel.
Metody Vyčislenií 1, 3-11 (Russisch) (1963).
Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 126, 4 angezeigten Sammelwerk.

65018
Sobolev, S. L.:
A method for calculating the coefficients in mechanical cubature formulas.
Doklady Akad. Nauk SSSR 150, 1238-1241 (Russisch) (1963), engl. Übersetzung in Soviet Math., Doklady 4, 878-882 (1963).

65019 □
Ljaščenko, N. Ja.; Ramskiĭ, Ju. S.:
Einige Kubaturformeln zur Berechnung von Doppelintegralen.
Vyčislit. priklad. Mat., mežvedomst. naučn. Sbornik 3, 46--57 (Russisch. Engl. Zusammenfassung) (1967).
[This article was published in the book announced in this Zbl. 189, 161.]
A number of cubature formulas containing derivatives from the integrand function in some nodes is being worked out for calculation of double integrals in the rectangle. The remainders of corresponding formulas are obtained here. The effectiveness of these formulas is illustrated by a numerical example.
Engl. Zusammenfassung.

65020
Domorjad, A. P.; Kosjuk, S. D.:
Über die Formeln von M. L. Frank für die approximative Berechnung von Doppelintegralen.
Taškent. gosudarst. Univ. V. I. Lenin., naučn. Trudy 208, 71-75 (Russisch) (1962).
Zur Näherungsberechnung von Doppelintegralen, die sich über den Flächeninhalt

eines Rechtecks erstrecken, hat M. L. F r a n k [Trudy Leningrad. industr. Inst. 5, 66-78 (1938)] Kubaturformeln vorgeschlagen, die nur für den Fall gelten, daß die Knoten entweder auf den Diagonalen des Quadrats oder auf den Koordinatenachsen liegen. Durch Einführen gewisser Korrektionen zeigen die Verff., wie man Franksche Formeln erhält, die für Polynome höheren Grades genau sind. Verff. geben vier verbesserte Franksche Kubaturformeln, die für Polynome fünften Grades genau sind und zwei Formeln, die für Polynome siebenten Grades genau sind. Von den Formeln, die für Polynome fünften Grades genau sind, sei auf die folgenden hingewiesen:

$$1)\quad I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dxdy \approx \frac{8}{7}f(0,0)+\frac{5}{7}[f(a_1,b_1)+f(b_1,-a_1)+f(-b_1,a_1)+f(-a_1,-b_1)]+$$

$$\frac{2\sqrt{10}}{135}\left[\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x\partial y^3}-\frac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^3\partial y}\right],\ \text{wo}\ a_1=\sqrt{\frac{7+\sqrt{14}}{15}},\ b_1=\sqrt{\frac{7-\sqrt{14}}{15}};$$

$$2)\quad J\approx(1/11)[f(a_1,b_1)+f(-b_1,a_1)+f(b_1,-a_1)+f(-a_1,-b_1)]+$$

$$(10/11)[f(a_2,b_2)+f(-a_2,b_2)+f(a_2,-b_2)+f(-a_2,-b_2)]-$$

$$-(4\sqrt{55}/1485)[\partial^4 f(0,0)/\partial x^3\partial y-\partial^4 f(0,0)/\partial x\partial y^3],$$

wo $a_1=b_1=1$, $a_2=\sqrt{(4+\sqrt{11})/15}$, $b=\sqrt{(4-\sqrt{11}/15}$. Von den für Polynome siebten Grades sei auf die folgenden hingewiesen

$$J\approx(4/81)f(0,0)+(31/81)[f(a_1,b_1)+f(-b_1,a_1)+f(b_1,-a_1)+f(-a_1,-b_1)]+$$

$$(49/81)[f(a_2,b_2)+f(-b_2,a_2)+f(b_2,-a_2)+$$

$$f(-a_2,-b_2)]-(4/45\sqrt{6})[\partial^4 f(0,0)/\partial x^3\partial y-\partial^4 f(0,0)/\partial x\partial y^3]+$$

$$(2/375\sqrt{6})[\partial^6 f(0,0)/\partial x\partial y^5-\partial^6 f(0,0)/\partial x^5\partial y],$$

wo $a_1=\sqrt{3(31+\sqrt{186})/155}$, $b_1=\sqrt{3(31-\sqrt{186})/155}$, $a_2=\sqrt{12/35}$, $b_2=0$.

N. Ljaščenko (R. Ž. Mat. 1963, Nr. 9 B 52).

65021
Kosjuk, S. D.:
Die Verwendung bekannter Quadraturformeln für die Konstruktion von Formeln von erhöhter Genauigkeit.
Taškent. gosudarst. Univ. V. I. Lenin., naučn. Trudy 208, 104-113 (Russisch) (1962).

Verf. gibt ein Verfahren zur Konstruktion von Quadraturformeln mit erhöhter Genauigkeit, indem er vom Vorhandensein einer gewissen Zahl von Quadraturformeln s-ter Dimension und von der gleichen Genauigkeit ausgeht. Liegen q für Polynome (n - 1)-ten Grades genaue Formeln vor und sind ihre Restglieder R_p ($p=1,2,\ldots,q$) bekannt, so konstruiert Verf., um eine für Polynome (n + m - 1)-ten

Grades genauen Formel zu erhalten, den Ausdruck $R = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \ldots + \alpha_q R_q$ so, daß in der sich ergebenden Kombination der Restglieder die Ableitungen des Integranden bis einschließlich $(n+m-1)$-ter Ordnung verschwinden. Dann wird die Quadraturformel

$$\int\int_Q \ldots \int f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s \approx \frac{1}{\alpha_1 + \ldots + \alpha_q} \sum_{p=1}^{q} \alpha_p \sum_{k=1}^{m_p} A_k^{(p)} f(x_{1k}^{(p)}, \ldots, x_{sk}^{(p)})$$

für Polynome genau, deren Grad höchstens $n+m-1$ ist. Die einzige Beschränkung bei der Wahl der an der gesuchten linearen Kombination beteiligten Quadraturformeln folgt aus der Forderung, daß $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q \neq 0$. Es werden drei Spezialfälle der Konstruktion von Quadraturformeln von erhöhter Genauigkeit angeführt. Für den Fall $s = 1$ wird die Simpsonsche Formel aus den Formeln für Rechtecke und Trapeze erhalten. Für $s = 2$ kann man nach der Methode von F r a n k (zit. im vor. Referat) eine Reihe von Kubaturformeln zu Integration über ein Quadrat konstruieren, die für Polynome höchstens dritten Grades genau sind. Durch Kombination dieser Formeln erhält Verf. eine Kubaturformel, die für Polynome höchstens fünften Grades genau ist. Zum Schluß konstruiert Verf. unter Verwendung von drei Formeln von A. V. T i c eine Quadraturformel von erhöhter Genauigkeit. N. Ljaščenko (R. Ž. Mat. 1963, Nr. 9 B 53).

65022
Bereanu, B.:
On the convergence of Cartesian multidimensional quadrature formulae.
Numerische Math. 19, 348-350 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 231.65031.

65023
Sobol', I. M.:
On the evaluation of infinite-dimensional integrals.
Žurn. vyčislit. Mat. mat. Fiz. 1, 917-922 (Russisch) (1961), engl. Übersetzung in U.S.S.R. Comput. Math. math. Phys. 1962, 1086-1091 (1963).

65024. □
Mahowald, M. E.; MacLaren, M. D.:
A machine calculation of a spectral sequence.
Proc. Sympos. appl. Math. 19, 117-124 (1967).
[This article was published in the book announced in this Zbl. 165, 2.]
Our approach is to study spaces, the Stiefel manifolds, which in a certain sense are approximations to spheres, hoping to uncover some internal structure. This has been reasonably successful, and the machine computation played a strong role in this matter. It turns out that these spaces also are important in unstable groups. The topological results and details are to be discussed by the first author [Mem. Amer. math. Soc. 72, 81 p. (1967; this Zbl. 166, 191)]. Here we will content ourselves with a short description of the topology which leads to the specific problem run on a machine. We will then discuss some of the details of the computation which was done. In a sentence: we used the machine to do most of the drudgery in computing $\pi_{k+p}(V_{k+m,m})$ for $m \geq p-2$, $p \leq 28$, $k > p-1$. The machine program would do the job for all m, but the restriction on p ($p < 28$) is a limit on our ambition, while the last inequality is important for theoretical reasons. - A totally different approach to the machine computation of this problem is due to L i u l e v i c i u s [Math. Algorithms 1, 4-12 (1966)]. Aus der Einleitung.

65E NUMERICAL METHODS IN COMPLEX ANALYSIS (POTENTIAL THEORY, ETC.)

65025
Aleksidze, M. A.:
Über die Näherungslösung des Riemann-Hilbertschen Problems.
Akad. Nauk Gruzin. SSR, Trudy vyčislit. Centra 6, Nr. 3, 103--122 (Russisch) (1965).

Die Lösung des Riemann-Hilbertschen Randwertproblems für ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet: es ist die im Gebiet G holomorphe Funktion $F(s)=u+iv$ zu bestimmen, die auf der Berandung $\Gamma=\Gamma_0+\Gamma_1+\ldots+\Gamma_m$ der Bedingung $\alpha(s)+\beta(s)v=\gamma(s)$ genügt, - wird nach dem bekannten Verfahren zu den drei grundlegenden Randwertproblemen der Theorie der harmonischen Funktionen reduziert. - Zur Näherungslösung dieser wird die in einer Arbeit von V. D. K u p r a d z e und M. A. A l e k s i d z e [Žurn. vyčislit. Mat. mat. Fiz. 4, 683-715 (1964); engl. Üb. U.S.S.R. Comput. Math. math. Phys. 4(1964), Nr. 4, 82-126 (1966; dies. Zbl. 154, 176)] ausgearbeitete Methode angewandt und entwickelt. - Die in dieser Arbeit erhaltenen Resultate werden auf den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Gebietes verallgemeinert. Im besonderen wird behauptet, daß das Funktionensystem $\{\ln r(x_i,y_i)\}$, wo $r(x_i,y_i)$ die Entfernung zwischen den beiden Punkten x_i, y_i ist und x_i die Elemente der abzählbaren Menge sind, die überall dicht auf der Kontur $S=S_0+S_1+\ldots+S_m$ angeordnet ist, für die Γ_0 im Inneren von S_0 und S_i im Inneren von Γ_i $(i>1)$ enthalten ist, ein linear unabhängiges und vollständiges System von harmonischen Funktionen in $L_2(\Gamma)$ darstellt.

V. V. Ivanov (R. Ž. Mat. 1966, Nr. 9 B 328).

65F NUMERICAL LINEAR ALGEBRA

65026 □
Forsythe, George E.:
Today's computational methods of linear algebra.
Studies numer. Analysis 1, Sympos. numer. Analysis Iowa 1966, 106-132 (1968).

Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 228.00008 angezeigten Sammelwerk.

65027
Szmodits, K.:
A simplified method for solving smaller systems of linear equations.
Acta techn. Acad. Sci. Hungar. 59, 97-102 (1967).

The described method concerns the solution of systems consisting of three, four or five linear equations. The problem is reduced to the solution of systems of equations of two unknowns obtainable by successive closed formulae. In proceeding in this way, the computation will be dissolved into parts, independent of one another, which makes it extraordinarily easier to find and correct the incidental calculation mistakes, for one mistake affects only a small part of the calculation. Up to five unknowns, the calculation is more simple than according to the Gaussian algorithm. Zusammenfassung des Autors.

65028
Robert, F.; Maitre, J. F.:
Normes et algorithmes associés à une découpe de matrice.
Numerische Math. 19, 303-325 (1972).

Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 227.65023.

65029
Wilkinson, J. H.:
Global convergence of tridiagonal QR algorithm with origin shifts.
Linear Algebra Appl. 1, 409-420 (1968).
The author investigates the convergence of the QR algorithm with origin shifts $R_t = Q_t(A_t - k_t I)$, $A_{t+1} = R_t Q_t^T + k_t I$ where Q_t is orthogonal, R_t is upper triangular, and A_1 (and consequently A_t) is a tridiagonal symmetric matrix. He shows that for two common choices of k_t the algorithm always converges, a) if $k_t = a_{n,n}^{(t)}$, b) if $k_t = \lambda_t$, the eigenvalue of the lower right principal 2×2 submatrix of A_t which is closest to $a_{n,n}^{(t)}$. In addition, it is shown that in case b) the convergence is ultimately always at least quadratic. The article is enlivened by numerical examples and practical comments. B. W. Levinger.

65030
Meyer-Spasche, Rita:
A constructive method of solving the Liapounov equation for complex matrices.
Numerische Math. 19, 433-438 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 229.65039.

65G ROUNDOFF ERROR

65031
Miller, Webb:
On the stability of finite numerical procedures.
Numerische Math. 19, 425-432 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 227.65032.

65032
Ratschek, H.:
Teilbarkeitskriterien der Intervallarithmetik.
J. reine angew. Math. 252, 128-138 (1972).
Sei $I(R)$ die Menge der reellen kompakten Intervalle und $I'(R) = I(R)\setminus\{[0,0]\}$, so sind $\Sigma = \langle I(R),+\rangle$, $\Sigma^- = \langle I(R),-\rangle$, $\Pi = \langle I'(R),\cdot\rangle$ und $\Pi^: = \langle I'(R),:\rangle$ die einzelnen binären Systeme der Intervallarithmetik. Σ und Π sind kommutative Halbgruppen, in Σ gilt die Kürzungsregel, in Π nicht. Σ^- ist ein Gruppoid mit Kürzungsregel und Π ein Halbgruppoid. Für jedes dieser Systeme wird die Frage nach den Teilbarkeitsbeziehungen aufgeworfen, d.h. für welche Intervalle A,B aus $I(R)$ bzw. $I'(R)$ die Relation $A \mid B$ gilt, wobei " " jede der vier Operationen bedeuten kann. ($A \mid^+ B$ bedeutet also, daß ein $X \in I(R)$ existiert, das $A + X = B$ erfüllt.) Bei den nichtkommutativen Systemen Σ^- und $\Pi^:$ hat man zwischen Rechts- und Linksteilbarkeit zu unterscheiden. - Mit Hilfe holomorpher Darstellungen der einzelnen Systeme in reellen Gruppen und Verbänden werden notwendige und hinreichende Kriterien für die einzelnen Teilbarkeitsbeziehungen gefunden, so daß auch entscheidbar ist, wann Gleichungen der Form $A + X = B$, $A - X = B$, $X - A = B$, $AX = B$, usw. nach X auflösbar sind. Es wird erörtert, wenn das Lösungsintervall X eindeutig, wann mehrdeutig bestimmbar ist, und Formeln für alle möglichen Lösungen werden angegeben. Weiter behandelte Punkte sind: Kürzungsregeln, Primfaktorzerlegung in Π, Überdeckung von Π durch Gruppen, Zusammenhänge zwischen den Teilbarkeitsrelationen und dem subdistributiven Gesetz der Intervallarithmetik. (Fehlerhinweis: Im Beispiel auf Seite 133 ist $[-1/2,-1/2]$ durch $[-1/2,1/2]$ zu ersetzen.)
Autorreferat.

65H NONLINEAR ALGEBRAIC OR TRANSCENDENTAL EQUATIONS

65033
Ratschek, Helmut:
Ergebnisse einer Untersuchung über die Struktur von Intervallpolynomen.
Ber. Ges. Math. Datenverarbeitung, Bonn 52, 18 S. (1972).

Intervallpolynome sind Intervallfunktionen $P : R \to I(R)$ der Form $P(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$ mit $A_i \in I(R)$, wenn R die Menge der reellen Zahlen, I(R) die Menge der reellen kompakten Intervalle bedeutet. Verknüpfungen für Intervallpolynome sind punktweise erklärt. Im Gegensatz zur Summe und Differenz ist das Produkt PQ zweier Intervallpolynome P und Q nicht notwendig ein Intervallpolynom, nicht einmal eine Intervallpolynomkette (das ist eine Intervallfunktion, die sich stückweise durch Intervallpolynome darstellen läßt). Aus diesem Grunde definiert man ein Formalprodukt F_{PQ} von P und Q für $Q(x) = B_0 + \ldots + B_m x^m$ durch $F_{PQ}(x) = \sum_{k=0}^{n+m} \sum_{i=0}^{k} A_i B_{k-i} x^k$, das aufgrund des subdistributiven Gesetzes der Intervallarithmetik die Eigenschaft $PQ(x) \subseteq F_{PQ}(x)$ aufweist und zur Approximation des Produktes PQ herangezogen wird. - Die Arbeit ist eine Zusammenstellung von Ergebnissen, die die arithmetisch-algebraischen Eigenschaften von Intervallpolynomen betreffen. Der erste Abschnitt beschäftigt sich mit für Rechenzwecke brauchbaren Darstellungen von $\mathfrak{P}$, der Menge der Intervallpolynome, der zweite mit der algebraischen Struktur des Systems $\langle \mathfrak{P}, + \rangle$. Ein dritter Abschnitt untersucht die Interpolationsaufgabe für Intervallpolynome; d.h. sind $a_i \in R$ und $U_i \in I(R)$ $(i = 1,\ldots,n)$ gegeben, so sind Intervallpolynome P gesucht, die $P(a_i) = U_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ erfüllen. Es zeigt sich, daß das Lösungsverhalten in keiner Weise der Theorie reeller Polynome analog ist. Der vierte Abschnitt beantwortet die Frage, für welche Punktmengen $M \subseteq R$ aus $P(a) = Q(a)$ für $P,Q \in \mathfrak{P}$ und alle $a \in M$ die Gleichheit $P = Q$ folgt. Hierauf aufbauend werden Sätze angegeben, die die multiplikative Kürzung von Intervallpolynomen betreffen, d.h. unter welchen Voraussetzungen aus $P_1 Q = P_2 Q$ bzw. $F_{P_1 Q} = F_{P_2 Q}$ die Gleichheit $P_1 = P_2$ folgt. Der nächste Abschnitt bringt notwendige und hinreichende Kriterien, wann für Intervallpolynome P und Q auch PQ ein Intervallpolynom ist. Ein Überblick über grundlegende Eigenschaften des Systems $\langle \mathfrak{P}, \cdot \rangle$ schließt sich an. Ein weiterer Abschnitt vermittelt notwendige und hinreichende Bedingungen, wann $PQ = F_{PQ}$ ist, d.h. wann das punktweise erklärte Produkt der Intervallpolynome P und Q mit ihrem Formalprodukt übereinstimmt. Der letzte Abschnitt behandelt die Frage, wann mit $P,Q \in \mathfrak{P}$ auch $P : Q \in \mathfrak{P}$ ist. Autorreferat.

65034
Jenkins, M. A.; Traub, J. F.:
A three-stage algorithm for real polynomials using quadratic iteration.
SIAM J. numer. Analysis 7, 545-566 (1970).

The authors introduce a three-stage algorithm for the calculation of all zeros of a polynomial with real coefficients. The algorithm works completely in real arithmetic and is about four times as fast as an earlier complex version by the same authors. The purpose of the first stage is to make the smaller zeros stand out. The second stage finds either a linear or quadratic factor and the third stage uses one of two variable-shift iterations corresponding to the linear or quadratic case. After each zero or pair of zeros is found the polynomial is deflated and the algorithm is applied to the deflated polynomial. The authors discuss how to terminate the three stages and proof the global convergence of the algorithm. In addition they give a computer implementation of the algorithm, summarize the results of extensive testing and present a numer-

ical example. There is an ALGOL 60 implementation of the algorithm and a program which calculates a posteriori bounds on the zeros in the first author's dissertation (Stanford 1969). G. Merz.

65035
Jabłoński, Aleksander:
Die Lösung von Gleichungssystemen vermittels der Methode der gleichen Teiler.
Zeszyty nauk. Politechn. Szczecińn. 122, Prace monograf. 62, 113-123 (Polnisch. Engl. und russ. Zusammenfassung) (1971).
A new method based on equal division has been shown. It has a number of advantages the main one being easy programming which facilitates the initial approximation of all the solutions sought for a given system. Examples have been given to illustrate the method. Engl. Zusammenfassung.

65J NUMERICAL ANALYSIS IN ABSTRACT SPACES

65036
Broudiscou, C.:
Résolution par variation recurrente de parametre, d'équations linéaires dans un espace de Banach.
Revue Franç. Inform. Rech. opérat. 5, Nr. R-3, 73-81 (1971).
Nous démontrons que la résolution d'une équation linéaire $\varphi = f + \lambda K\varphi$ (K opérateur compact d'un espace de Banach X dans lui-même, $f \in X$ donné, $\varphi \in X$ inconnu, λ valeur régulière pour K) est équivalence à celle d'un problème récurrent basé sur la détermination de l'opérateur résolvant le long d'une route du plan complexe joignant l'origine à la valeur λ considérée et ne contenant que des valeurs régulières pour K. - La résolution numérique du problème récurrent utilise à chaque pas la méthode des approximations successives. Un théorème de convergence est établi, les équations de propagation d'erreur mises en évidence et des résultats,numériques donnés pour la résolution de systèmes linéaires et d'équation intégrales linéaires de Fredholm de 2ème espèce. Autorreferat.

65037
Döring, Boro:
Über einige Klassen von Iterationsverfahren in Banach-Räumen.
Math. Ann. 187, 279-294 (1970).
Der Operator F bilde eine offene Teilmenge eines Banach-Raumes in einem anderen Banach-Raum. Der Verfasser untersucht die Iterationsverfahren $x_n = x_{n-1} + d_{k-1,n-1}$ von der Ordnung k zur Lösung der Gleichung $F(x) = 0$; hier

$$d_{m,n-1} = -(F'_{n-1})^{-1}\left(F_{n-1} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} F_{n-1}^{(j)} d_{m-1,n-1}^{j}\right)$$

oder

$$d_{m,n-1} = -(F'_{n-1})^{-1}\left(F_{n-1} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{j!} F_{n-1}^{(j)} d_{m-1,n-1}^{j-1} d_{m,n-1}^{j}\right)$$

($m = 1,2,\ldots,k-1$). Der Verf. gibt neue Konvergenzsätze und Fehlerabschätzungen, die die bekannten Ergebnisse von verschiedenen Autoren verstärken.
G. Vainikko.

65038
Mosolov, B. G.:
Näherungslösung von Operatorgleichungen mit der Methode von Ju. D. Sokolov.
Izvestija Akad. Nauk UzSSR, Ser. fiz.-mat. 1963, Nr. 5, 26–29 (Russisch) (1963).

65039
Robinson, Stephen M.:
Extension of Newton's method to nonlinear functions with values in a cone.
Numerische Math. 19, 341–347 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 227.65040.

65040
Atkinson, Kendall E.:
The numerical evaluation of fixed points for completely continuous operators.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).
Given a completely continuous nonlinear operator $\mathcal{K}$ on a domain D contained in a Banach space $\mathcal{X}$, one common way of approximating $\mathcal{K}$ leads to a sequence $\{\mathcal{K}_n\}$ which is collectively compact and pointwise convergent to $\mathcal{K}$ on D. If $\mathcal{K}$ is an integral operator, then $\mathcal{K}_n$ would usually be the result of replacing the integral with a numerical integral which depended on n. The results given here concern local existence and uniqueness of fixed points of $\mathcal{K}_n$ and convergence of them to fixed points of $\mathcal{K}$. The approach used is the invariance under homotopy of the rotation of a completely continuous vector field. Autorreferat.

65041
Ostrowski, Alexandre:
Les estimations des erreurs a posteriori dans les procédés itératifs.
C. r. Acad. Sci., Paris, Sér. A 275, 275–278 (1972).
Die Note enthält eine Relation, die in vielen Fällen gestattet, aus einer relativ groben Abschätzung a priori eine relativ scharfe Abschätzung a posteriori herzuleiten. - Hat man in einem metrischen Raum mit der Distanz $|a,b|$ eine gegen ξ konvergierende Elementfolge x_ν und ist dabei die folgende Relation befriedigt: $|x_{\nu+1},\xi| \le \varphi_\nu |x_\nu,\xi|$, wo die $\varphi_\nu < 1$ sind und $\prod_1^\infty \varphi_\nu = 0$ ist, so gilt $1/(1+\varphi_\nu) \le |x_\nu,\xi|/|x_\nu,x_{\nu+1}| \le 1/(1-\varphi_\nu)$. Sodann werden die entsprechenden Überlegungen für Iterationen im n-dimensionalen Vektorraum, $\xi_{\nu+1} = A_\nu \xi_\nu$, angestellt und in diesem Zusammenhang verschiedene Abschätzungen für die Euklidische Norm von $I - A$ und $(I-A)^{-1}$ angegeben, wo A eine $n \times n$ Matrix ist. Autorreferat.

65K MATHEMATICAL PROGRAMMING AND OPTIMIZATION TECHNIQUES

65042
Poll', V.:
Über einige Methoden zur Ermittlung stationärer Punkte von Funktionen mehrerer Veränderlichen.
Izvestija Akad. Nauk Êston. SSR, Fiz. Mat. 16, 35–44 (Russisch. Engl. Zusammenfassung) (1967).
This paper deals with the construction of divided differences of third order for

a function of several variables. The Schmidt's methods [see J. W. Schmidt, Wiss. Z. techn. Univ. Dresden 12, 1601-1605 (1963; dies. Zbl. 196, 513)] for finding stationary values of a function of one variable are extended to functions of several variables. It is proved that the methods have the same convergence rate as the Schmidt's methods. A numerical illustration is given.
Zusammenfassung des Autors.

65043
Baker, George A. jun.; Hunter, D. L.:
A diverse strategy method of minimization.
J. comput. Phys. 9, 273-289 (1972).
We break the problem of finding the minimum of a function down according to the type of surface encountered locally. Based on this surface classification we adopt that minimization strategy which ought to be most effective. We give a modified version of Krylov's eigenvector method, with a starting vector derived by a theorem of Lagrange and Beltrami. A convenient lower bound on the condition number of a positive definite matrix is obtained. We give a number of numerical examples of our procedure. The methods presented depend on the availability of analytic expressions for the first and second derivatives.
Autorreferat.

65044
Bagaeva, N. Ja.; Moiseev, N. N.:
A method for the numerical solution of optimum control problems.
Doklady Akad. Nauk SSSR 153, 747-750 (Russisch) (1963), engl. Übersetzung in Soviet Math., Doklady 4(1963), 1730--1733 (1964).

65045
Wenzel, A.; Scheidemandel, Th.:
Multivariate Modelle in der chemischen Industrie.
Computing 8, 40-61 (1971).
A program is described to compute the solutions of systems of nonlinear equations. The number of variables may exceed the number of equations, so that the values of certain variables must be given by the user. The program enables the user to decide which variables he wishes to be computed. By decomposition automatically the system of equations into smaller systems computing time is reduced in comparison with simultaneous solution. Engl. Zusammenfassung.

65L ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

65046
Tanaka, Masatsugu:
On Kutta-Merson process and its allied processes.
Inform. Processing Japan 8, 44-52 (1968)
The author describes attempts to give Runge-Kutta methods the ability of error estimation by single-stage method as originated by R. Merson and developed by F. Ceschino and R. E. Scraton. Unlike these pioneers whose methods consumed the freedom of conditional equations for the purpose of simplifying the procedure, the author uses the same freedom to heighten the accuracy both of estimated value of truncation error and of the formula for the numerical solution. The author shows several methods for obtaining formulas in

various cases. The following is one of his formulas: $k_1 = hf(x_0, y_0)$, $k_2 = hf(x_0 - 0.00\,25h,\ y_0 - 0.0025k_1)$, $k_3 = hf(x_0 + 0.3985h,\ y_0 + 32.15974180k_1 - 31.76124180k_2)$, $k_4 = hf(x_0 + 1.0005h,\ y_0 - 402.9114034k_1 + 400.1456441k_2 + 3.766259273k_3)$, $k_5 = hf(x_0 + h,\ y_0 - 401.1095721k_1 + 398.3565430k_2 + 3.752531702k_3 + 0.0004973503641k_4)$, $y_1 = y_0 + 0.1216605083k_2 + 0.5834052183k_3 - 54.23420321k_4 + 54.52913749k_5$, $y_2 = y_0 - 0.009699144572k_1 + 0.1323963467k_2 + 0.5803923412k_3 - 55.73162758k_4 + 56.02853803k_5$, $T = y_1 - y_2 = 0.009699144572k_1 - 0.01073583832k_2 + 0.003012877023k_3 + 1.497424364k_4 - 1.499400548k_5$, where T is the estimated value of truncation error of y_1. The more a system of functions becomes complicated and the more the ratio between the deriving of the integral formula and the amount of all computations becomes smaller, the author's methods will increase their usefulness. P. S. Chiang.

65047
Scherer, R.:
Herleitung von Runge-Kutta-Verfahren der Ordnung vier mit übersichtlichen Fehlerdarstellungen.
Math. Z. 128, 311-323 (1972).

Bei der Herleitung von Runge-Kutta-Verfahren und deren Fehlerglieder benützt man meistens Taylorabgleich in Verbindung mit Differentialoperatoren. Eine andere Methode, die an den rekursiven Aufbau der Verfahren im Zusammenhang mit Integrationsformeln anknüpft, wurde von K. Z e l l e r [Abstract spaces Approx., Proc. Conf. Math. Res. Inst. Oberwolfach 1968, 365-366 (1969; dies. Zbl. 188, 224)] vorgeschlagen. - Wir leiten eine allgemeine Darstellung des Runge-Kutta-Restglieds für Verfahren vierter Ordnung her, die aus sieben Gliedern der Ordnung $O(s^5)$ besteht, Diese sind Kombinationen verschiedener Integrationsfehlerglieder E_n, die selbst Ableitungen der wahren Lösung u enthalten (a-posteriori-Schranken). Daneben treten partielle Ableitungen der rechten Seite f der Differentialgleichung bis zur Ordnung drei auf. Durch geeignete Wahl der zwei freien Runge-Kutta-Parameter lassen sich die partiellen Ableitungen dritter Ordnung vermeiden, was zu einer besonders übersichtlichen Fehlerdarstellung führt. (z.B. $E = E_4 + \frac{s}{6}E_{23}p_3 + \frac{s^2}{3}E_2p_2p_3 + \frac{s^3}{8}E_1p_1p_2p_3 + (\frac{2}{3}sE_2 + \frac{s^2}{4}E_1p_1) \times (p_2 - p_3)$; E_n $(n = 1,2,4,23)$: Integrationsfehlerglieder, $p_j = f_y(c_j s, \ldots)$ $(j = 1,2,3)$.) Wir stellen dafür hinreichende Bedingungen auf und geben Runge-Kutta-Formeln an, die diesen Bedingungen genügen. Autorreferat.

65048
Fujii, Masatomo:
Optimal choice of mesh points for Adams-type-methods with variable step-size.
Bull. Fukuoka Univ. Education, Part III 20, 31-46 (1970).

Verf. untersucht die Frage nach der bei gegebener Anzahl im Sinne einer Minimisierung des Diskretisierungsfehlers bei $x = b$ optimalen Wahl der Knoten bei Verwendung von Verfahren vom Adams-Typ zur numerischen Integration der Anfangswertaufgabe $y' = f(x,y)$, $y(a) = y_0$, über einem Intervall $[a,b]$ und gibt unter geeigneten Voraussetzungen die Lösung dieses Problems an. Da diese im allgemeinen nicht explizit bestimmt werden kann, wird anschließend eine Methode zur näherungsweisen Berechnung der optimalen Knoten beschrieben. Zwei Beispiele zeigen die Brauchbarkeit des Verfahrens. G. Merz.

65049
Kemper, Gene A.:
Linear multistep methods for a class of functional differential equations.
Numerische Math. 19, 361-372 (1972).

Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 229.65058.

65050
Jakubovič, V. A.:
Zweiseitige Abschätzungen der Lösung einer homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung.
Metody Vyčislenij 1, 30-44 (Russisch) (1963).

Es wird ein Prozeß untersucht, der in einigen Fällen effektive zweiseitige Abschätzungen für die Lösung der Aufgabe $\ddot{y} + p(t)y = 0$, $0 \le t \le T$, $y(0) = a$, $\dot{y}(0) = b$, zu erhalten gestattet. Man darf annehmen, daß entweder $a > 0$, oder $a = 0$, $b > 0$. Setzen wir voraus, daß sich die Funktion $p(t)$ als die Summe $p(t) = p_0(t) + p_1(t)$ so darstellen läßt, daß $p_1(t) \ge 0$ für $0 \le t \le T$ und das Maß der Menge, auf der $p_1(t) < \varepsilon$, für $\varepsilon \to 0$ nach Null strebt; das normale fundamentale Lösungssystem der Gleichung $\ddot{u} + p_0(t)u = 0$ ist dann bekannt, wobei $\begin{pmatrix} u_1 u_2 \\ \dot{u}_1 \dot{u}_2 \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $u_2(t) > 0$ für $0 < t < T$. Als "nullte Approximation" wählen wir die den erforderlichen Anfangsbedingungen $y_0(t) = au_1(t) + bu_2(t)$ genügende Lösung der letzten Gleichung und bestimmen die Folge $\{y_n(x)\}$ aus den Gleichungen

$$\ddot{y}_{n+1} + p_0(t)y_{n+1} = p_1(t)y_n, \quad y_{n+1}(0) = \dot{y}_{n+1}(0) = 0, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Im Satz 1 wird bewiesen, daß, wenn $y_0(t) > 0$ für $0 < t < T$, auf diesem Intervall: alle $y_n(t) > 0$; $y_{n+1}(t)/y_n(t) < (n(n+1))y_n(t)/y_{n-1}(t)$; solch eine Zahl $m = m(t)$ existiert, daß

$$y_0(t) < y_1(t) < \ldots < y_m(t), \quad y_m(t) \ge y_{m+1}(t) > y_{m+2}(t) > \ldots;$$

$m(t') \le m(t'')$ für $t' < t''$. Nun führen wir die Bezeichnung $y^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)y_k(t)$ ein. Dann gelten für die abzuschätzende Lösung $y(t)$ die Ungleichungen $y(t) < y^{(n)}(t)$ für ein gerades $n \ge m(t) - 1$, $y(t) > y^{(n)}(t)$ für ein ungerades $n \ge m(t) - 1$; wenn für ein gerades n die Ungleichung $y^{(n)}(t) \le y_0(t)$, oder für ein ungerades n die Ungleichung $y^{(n)}(t) \ge -y_0(t)$ erfüllt ist, gilt $n \ge m(t)$; für $n \to \infty$ konvergiert gleichmäßig in bezug auf $t \in [0;T]$: $y^{(2n)}(t) \to y(t)$, $y^{(2n+1)}(t) \to y(t)$. - Im § 2 wird der Fall der vorzeichenvariablen "nullten Approximation" $y_0(t)$ untersucht. - Im § 3 werden die Beispiele $p = \alpha + \beta t$ und $p = \alpha + \beta \cos 2t$ mit den Bedingungen $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$ untersucht. In diesen Beispielen ist es mittels analytischer zweiseitiger Abschätzungen gelungen, auf der Ebene (α,β) die Parametergebiete zu konstruieren, für die die Lösung $y(t)$ die vorgegebenen Eigenschaften besitzt.

I. Sobol' (R. Ž. Mat. 1964, Nr. 5 B 503).

65051
Gur'janov, V. M.:
Zur Abschätzung des Fehlers einer Approximationslösung des Cauchy-Problems für ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen.
Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 1964, Nr. 5(42), 17-22 (Russisch) (1964).

Es wird eine Fehlerabschätzung für die Näherungslösung des Differentialgleichungssystems (in vektorieller Integralform)

$$y(x) = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(z,y(x))dz, \quad x \ge x_0, \tag{1}$$

gegeben, wo f der Lipschitzbedingung nach dem zweiten Argument genügt. $\tilde{y}(x)$ sei

die nach irgendeinem Verfahren gefundene Näherungslösung von (1). Nach Annahme des $\tilde{y}(x)$ als nullte Approximation in der Picardschen Iterationsmethode erhält Verf. die Abschätzung

$$\varepsilon(x) \leq \exp(P(x - x_0))\max|y_1(x) - \tilde{y}(x)|, \tag{2}$$

wo $\varepsilon(x)$ der Fehler der Näherungslösung $\tilde{y}(x)$, P die Matrix der Lipschitzkonstanten des Systems (1) und $y_1 = y^0 + \int_{x_0}^{x} f(z,y(z))dz$ ist. Die Ungleichheits- und die Betragszeichen in Formel (2) werden koordinatenweise angewandt. Die Abschätzung (2) erfordert nicht die Differenzierbarkeit von f. - Unter der Voraussetzung, daß f erforderlich oft differenzierbar ist, leitet Verf. auf Grund von (2) eine neue Fehlerabschätzung für eine feste Schrittweite der Integration nach dem Runge-Kutta-Verfahren ab (mit s Rückgriffen auf die rechte Seite):

$$\varepsilon(x) \leq (h^{s+1}/(s+1)!)e^{Ph}\max\left|f_s^{(s)}(\xi) - \sum_{i=1}^{s}\beta_{s+1,i}[sf_{i-1}^{(s)}(\xi) + f_{i-1}^{(s)}(\xi_1)]\right|,$$

in der $\beta_{s+1,i}$ die Koeffizienten der Runge-Kutta-Formel

$$f_i(x) = f[x_0 + \alpha_{i+1}h, \tilde{y}_i(x)];\ \xi,\xi_1 \in [x_0,x] \text{ und } h = x - x_0$$

sind. Es wird gezeigt, daß für das lineare System mit konstanten positiven Koeffizienten $y' = Py$ die erhaltene Abschätzung hinreichend genau ist.

T. Zverkina (R. Ž. Mat. 1965, 4 B 589).

65052
Richard, Ubaldo:
Sulla risoluzione asintotico-numerica dell'equazione differenziale $(py')' + qy = 0$, nel caso oscillante.
Atti Accad. Sci. Torino, Cl. Sci. fis. mat. natur. 97, 857-890 (1963).

65053
Schiop, Alexandru I.:
Stability of Ritz procedure for nonlinear two-point boundary value problem.
Numerische Math. (to appear).
In this paper we establish the stability of Ritz procedure in the sense of M i h l i n and T u c k e r for the following real nonlinear two-point boundary value problem: $L[u(x)] = f(x,u(x))$, $0 < x < 1$, with boundary conditions $D^k u(0) = D^k u(1) = 0$, $D = d/dx$, $0 \leq x \leq n - 1$, where $L[u(x)] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{j+1}D^j[p_j(x)D^j u(x)]$, $n \geq 1$, which has been considered by V a r g a , S c h u l t z and C i a r l e t.

Autorreferat.

65054
Vašakmadze, T. S.:
Über einige optimale Algorithmen.
Trudy Inst. priklad. Mat. 1, 7-16 (Russisch) (1969).
Numerical solution of boundary problems of ordinary differential equations is studied and oneparametric difference relations are derived for them. - The

paper begins with some auxiliary formulas necessary for the following proofs. The optimal formulas for a differential equation of the third order $y'''(x) = f(x,y(x))$ $(0 \le x \le 1, -M < y < M)$ $y(0) = \overset{0}{y}$, $y(1) = \overset{1}{y}$, $y'(0) = \overset{0}{y}'$ are derived by solving a system of difference equations. A theorem about the number of arithmetic operations necessary to obtain the values $y_i^{[n+1]}$ of the solution is proved. Then a theorem for a more general differential equation $y'''(x) = f(x,y(x),y'(x),y''(x))$ $(0 \le x \le 1, -M < y,y',y'' < M)$ with the same boundary conditions is proved. Under the certain assumptions an optimal algorithmus is derived in the theorem and also the order of convergence of the approximate solution to the exact solution. In the end a theorem about the suitability and optimality of the approximate solution to the exact solution. V. Jankovič.

65M-N PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, INITIAL AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

65055 □
Thomée, Vidar:
On the rate of convergence of difference schemes for hyperbolic equations.
Numerical Solution partial diff. Equations II, Proc. 2nd Sympos. numerical Solution partial diff. Equations, SYNSPADE 1970, Univ. Maryland, 585-622 (1971).
[This article was published in the book announced in this Zbl. 235.65060.]
The author gives a survey of recent results on the rate of convergence of finite difference schemes applied to the initial-value problems for hyperbolic equations. The paper gives an excellent presentation of results up to 1970 given be the author, P e e t r e , H e d s t r o m , B r e n n e r and the reviewer with special emphasis on the dependence of the smoothness of the initialvalues. The main technique used is the interpolation spaces (Besov spaces) approach, which also gives some extended and improved results. Convergence results are also given in maximum-norm for L_2-stable operators. Much attention is paid to the scalar onedimensional problem, where the initialvalues have isolated singularities. The propagation properties of these discontinuities are studied and the reviewer's results [Math. Comput. 22, 525-539 (1968)] are improved even in the variable coefficient case. M. Apelkrans.

65056
Sulhanišvili, G. I.:
Numerische Lösung von Gleichungen parabolischen Typs.
Soobščenija Akad. Nauk Gruzin. SSR 33, 513-520 (Russisch) (1964).

65057
Jakut, L. I.:
The problem of establishing the convergence of difference schemes.
Doklady Akad. Nauk SSSR 151, 76-79 (Russisch) (1963), engl. Übersetzung in Soviet Math., Doklady 4, 954-958 (1963).
Im Banachraum E wird das Cauchysche Problem für die Evolutionsgleichung mit unbeschränktem Operator $A(t)$, $du/dt + A(t)u = f(t)$ $(0 \le t \le T)$, $u(0) = u_0$, betrachtet und die Frage nach der Konvergenz der Analoga von Differenzenmethoden für solche Aufgaben untersucht. Der Übergang zur Differenzengleichung in abstrakter

Form wird als Übergang vom Operator A(t) zu dem in einem gewissen Faktorraum E_1/L_N wirkenden Operator $A_N(t)$ behandelt, wo E_1 in E eingebettet ist und den Definitionsbereich einer gewissen Potenz des Operators A(t) enthält. Im Artikel werden homogene Gleichungen mit nach t konstanten Koeffizienten, inhomogene Gleichungen mit variablen Koeffizienten sowie einige nichtlineare Gleichungen untersucht (Sätze 1-4). Die erhaltenen Resultate werden auf den Beweis der Konvergenz der Lösungen von stabilen expliziten Differenzenschemata für Randwertaufgaben von Gleichungen der Form $\partial u/\partial t + Lu = f$ angewandt, wo L einen stark elliptischen Operator der Ordnung 2m mit hinreichend glatten Koeffizienten bezeichnet, der im beschränkten Gebiet G des s-dimensionalen Raumes vorgegeben ist. Die Rolle des Raumes E spielt der Raum $L_p(G)$, die des E_1 der Raum C(G) oder $C^{\alpha}(G)$. L. Jakut (R. Ž. Mat. 1963, Nr. 12 B 36).

65058 *
Ljašenko, I. N.:
Eigenwertprobleme für partielle Differenzengleichungen zweiter Ordnung. (Zadači na sobstvennye značenija dlja uravnenij vtorogo porjadka v častnyh konečnyh raznostjah.)
Kiev: Verlag der Universität. 205 S. R. 0.74 (Russisch) (1970).

In dem Buch werden gewöhnliche und partielle Differenzengleichungen zweiter Ordnung untersucht. Im Mittelpunkt stehen hierbei (in Analogie zu den entsprechenden Differentialgleichungen) Randwertaufgaben sowie die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenfunktionen. Die Grundidee ist, Summendarstellungen für die Lösungen der Randwertaufgaben sowie für die Eigenwerte und Eigenfunktionen zu geben, die analog zu den bekannten Integraldarstellungen für die Lösung von Randwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen sind. Auf diese Weise gelingt es, Verfahren zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenfunktionen anzugeben, die numerisch wesentlich leichter auswertbar sind als die aufwendigen Gitterpunktsverfahren. - Das Buch zerfällt in 4 Kapitel: 1. Aufgaben über Eigenwerte und Eigenfunktionen diskreter Argumente für Gleichungen zweiter Ordnung. 2. Die Lösung des Problems der Eigenwerte und der Eigenfunktionen für gewöhnliche Differenzengleichungen zweiter Ordnung mit stückweise konstanten Koeffizienten durch die Methode der Summendarstellung. 3. Die Lösung des Problems der Eigenwerte und der Eigenfunktionen für die Helmholtz-Differenzengleichung durch die Methode der Summendarstellung. 4. Einige Fragen der Differenzenmethode zur Lösung des Problems der Eigenwerte und der Eigenfunktionen bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Kap. 1 hat einleitenden Charakter. Ist $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, so wird mit $u_k = u(x_k)$ der gewöhnlichen Differenzenausdruck $Lu_k = a_k u_{k+1} + b_k u_k + c_k u_{k-1}$ betrachtet. Folgende Probleme werden behandelt: Selbstadjungiertheit in einem geeigneten endlichdimensionalen Hilbertraum, Randwertprobleme, Existenz von Eigenwerten und Eigenfunktionen usw. Mit Hilfe spezieller Funktionen (Tschebyscheff-Polynome, Legendre-Polynome) werden spezielle Operatoren untersucht. Ferner enthält dieses Kapitel die entsprechenden Untersuchungen für das übliche diskrete Analogon für den Laplace-Operator. Hierbei beschränkt sich der Verf. (wie auch in den weiteren Teilen des Buches) auf den zweidimensionalen Fall. Das zweite Kapitel enthält eine genaue Untersuchung der angeschnittenen Probleme für verschiedene gewöhnliche Differenzenoperatoren und für verschiedene Randwertprobleme. Es werden explizite Darstellungen von Eigenwerten und Eigenfunktionen (Summendarstellungen unter Verwendung spezieller Funktionen) angegeben. Kapitel 3 beschäftigt sich mit den entsprechenden Fragen für das Differenzenanalogon des Laplace-Operators. Im Vordergrund stehen rechteckige Gebiete in der Ebene und Gebiete, die sich aus Rechtecken zusammensetzen. Es werden auch numerische Beispiele behandelt.

Das relativ kurze abschließende vierte Kapitel behandelt Fragen im Zusammenhang mit der Approximation von Randwertaufgaben für Differentialgleichungen durch Randwertprobleme für Differenzengleichungen (Fehlerabschätzungen und Konvergenzgeschwindigkeit). H. Triebel.

65059
Jirouš̆ek, Jaroslav:
The application of the basic formulas of the analytical--difference method to the solution of the boundary problems of the partial differential equations of the theory of elasticity.
Sbornik vysok. Učeni techn. v Brně 1967, 425-428 (Tschechisch. Russ. und engl. Zusammenfassung) (1967).
The so called analytical-difference method suitable to the solution of the boundary problems of the theory of elasticity has been described in the author's previous paper [ibid. 1965, 409-421 (1965)]. In the present paper the possibility of application of this method to the solution of boundary problems of partial differential equations is shown. Engl. Zusammenfassung.

65060
Saint-Pierre, Patrick:
Sur la convergence numérique de différentes méthodes de décomposition pour une classe de problèmes elliptiques.
Numerische Math. 19, 439-449 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 231.65082.

65061
Rivkind, V. Ja.:
Estimates of the rate of convergence of solutions of difference equations to solutions of elliptic equations with discontinuous coefficients and a numerical method of solving the Dirichlet problem.
Doklady Akad. Nauk SSSR 149, 1264-1267 (Russisch) (1963), engl. Übersetzung in Soviet Math., Doklady 4, 546-549 (1963).

65062
Boziev, L. A.:
Über die Konvergenzordnung der Methode der kleinsten Quadrate für das Dirichletsche Problem.
Differencial'nye Uravnenija 7, 743-746 (Russisch) (1971).
Der Artikel behandelt das Dirichletsche Problem für die Gleichungen $Au = -(pu')' + qu = f$ auf dem Segment $0 \le x \le 1$, $Au = -(\partial/\partial x_1)(a_1 \partial u/\partial x_1) - (\partial/\partial x_2)(a_2 \partial u/\partial x_2) + cu = f$ im Quadrat $0 \le x_1, x_2 \le 1$, $Au = -(\partial/\partial x_1)(a_1 \partial u/\partial x_1) - (\partial/\partial x_2)(a_2 \partial u/\partial x_2) - (\partial/\partial x_3)(a_3 \partial u/\partial x_3) + cu = f$, im Würfel $0 \le x_1, x_2, x_3 \le 1$ für $u|_\Gamma = 0$ und $Au = (pu'')'' + cu = f$ auf dem Segment $0 \le x \le 1$ für $u|_\Gamma = u''|_\Gamma = 0$. - Als Koordinatenfunktionen dienen die Eigenfunktionen des zu A ähnlichen Operators B. Bedingungen werden abgeleitet, u.a. die Gleichheit der Definitionsbereiche $D(A^2) = D(B^2)$, und gewisse bekannte Resultate ergeben die Konvergenzordnungen der Methode der kleinsten Quadrate für die Fälle $f \in L_2$ und $f \in D(A)$. Übersetzung des Autorreferats.

65063 □
Aubin, J. P.; Lions, J. L.:
Remarques sur l'approximation régularisée de problèmes aux limites.
C.I.M.E. 2° Ciclo Ispra (Varese) 1967, Numer. Analysis partial Equat., 295-306 (1968).
[This article was published in the book announced in this Zbl. 172, 1.]
The authors consider a variationally regularized approximation scheme that is

applicable to the following elliptic equation in a bounded domain Ω of R^n with boundary conditions of Neumann type: (*) $Au = \sum_{|p|,|q| \le m} (-1)^p D^p (a_{pq} D^q u) = f$. Let $V = H^m(\Omega)$ and $W = H^{k+2m}(\Omega)$. Assume that h is an R^n-valued parameter tending to 0. Then for any h there exist a finite-dimensional space V_h, an injection p_h from V_h into W, and a (not necessarily linear) operator r_h from V into V_h that satisfy (i) $\|u - p_h r_h u\|_V \le \gamma(h)\|u\|_W$ for any $u \in W$, (ii) $\lim_{h\to 0} \gamma(h) = 0$ and (iii) $\lim_{h\to 0} p_h r_h v = v$ in V[W] for any $v \in V[W]$. Let $a(u,v) = \sum_{|p|,|q| \le m} \int_\Omega a_{pq} D^q u D^p v \, dx$. Suppose that b(u,v) is a continuous sesquilinear form on W such that $\mathrm{Re}\, b(v,v) \ge \beta \|v\|_W^2$ for any $v \in W$ (b corresponds to some differential operator of order $2(k+2m)$). Then the variationally regularized scheme for (*) is defined by (**) $\varepsilon(h) b(p_h u_h, p_h v_h) + a(p_h u_h, p_h v_h) = (f, p_h v_h)$ for any $v_h \in V_h$. Let $u[u_h]$ be a solution of (*) [(**)], and let $\lim_{h\to 0} (h) = 0$. In this setting the authors prove that if $f \in H^k(\Omega)$, then $\lim_{h\to 0} p_h u_h = u$ in $H^{2m+k}(\Omega)$, provided $\lim_{h\to 0} \gamma(h)\varepsilon(h)^{-1/2} = 0$. One can choose ε and γ to satisfy this condition [the first author, Bull. Soc. math. France, Suppl. Mém. Nr. 12 (1967; this Zbl. 157, 219)]. Using interpolation theory and Sobolev's imbedding theorem, the authors estimate the truncation error. Theorems are stated and proved in the framework of abstract Hilbert space theory.

T. Ushijama (M. R. 40, Nr. 5150).

65064
Aleksidze, M. A.:
Zweiseitige Approximationen für die Lösung von Randwertaufgaben.
Akad. Nauk Gruzin. SSR, Trudy vyčislit. Centra 4, 3-7 (Russisch) (1964).

Verf. zeigt, daß bei Erfüllung gewisser Bedingungen auf einem hinreichend feinen Netz die Differenzengleichungen

$$v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{i,j} = h^2 f_{i,j} \text{ und}$$

$$w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} - 4w_{i,j} = 2h^2 f_{i,j} + (h^4/2)(\Delta f)_{i,j}$$

Approximationen für die Lösung der Poissonschen Gleichung $\Delta u = f(x,y)$ von verschiedenen Seiten ergeben.

V. Saul'ev (R. Ž. Mat. 1964, 9 B 492).

65065
Abutaliev, È. B.; Umirbekov, A. U.:
Lösung eines instationären Problems der Filtrationstheorie nach dem Monte-Carlo-Verfahren.
Doklady Akad. Nauk UzSSR 1969, Nr. 3, 6-8 (Russisch) (1969).

Für die Differentialgleichung

$$a(x,y)(\partial U/\partial t) = (\partial/\partial x)[b(x,y)(\partial U/\partial x)] + (\partial/\partial y)[b(x,y)(\partial U/\partial y)] + \varepsilon(x,y,t),$$

die die instationäre Filtration im mehrfach zusammenhängenden Gebiet G mit der äußeren Berandung Γ und den inneren Konturen γ_i beschreibt, wird das Randwertproblem untersucht. Die Gleichung wird durch ein verallgemeinertes Neunpunkt-Differenzenschema approximiert. Auf der äußeren Berandung Γ und auf den inneren

Konturen γ_i wird der Wert der gesuchten Funktion vorgegeben. Das gestellte Differenzenproblem wird nach dem Monte-Carlo-Verfahren gelöst.

L. Kočneva (R. Ž. Mat. 1969, Nr. 10 B 324).

65066
Babuška, Ivo; Zlámal, Milos:
Nonconforming elements in the finite element method with penalty.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).

A penalty method approach is used for achieving convergence of a finite element method using nonconforming elements. Error estimates are given.

Autorreferat.

65067
McLaurin, Johnnie William:
A general coupled equation approach for solving the biharmonic boundary value problem.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).

The biharmonic boundary value problem with Dirichlet boundary conditions is reduced to a coupled system of Poisson equations, which depend upon an arbitrary, positive coupling constant c. Since each of the Poisson equations is well-posed, the system may be solved by iteration. We show that the iterates may be represented as a linear combination of the eigenfunctions of the "Dirichlet eigenvalue problem" (a fourth order boundary value problem with the eigenvalue in the boundary condition). Convergence of the iterative scheme occurs when $0<c<2\nu_1$ where ν_1 is the smallest eigenvalue. By making use of an averaging scheme convergence may be produced for any positive c. With the proper choice of c, the rate of convergence may be increased. This coupled equation approach includes the finite difference approach as a special case.

Autorreferat.

65068
Valickiĭ, Ju. N.:
On the convergence of difference approximations of the eigenvalues and eigenfunctions of a two-dimensional elliptic operator.
Doklady Akad. Nauk SSSR 198, 263-265 (Russisch) (1971), engl. Übersetzung in Soviet Math., Doklady 12, 749-752 (1971).

Der Verf. betrachtet den elliptischen Operator $Lu \equiv -au_{xx} - bu_{yy} + cu_x + du_y + qu$ in einem beschränkten Gebiet D mit einem stückweise glatten Rand Γ. Die Koeffizienten werden als glatt in $\overline{D}$ vorausgesetzt. - Das Dirichlet-Problem $Lu = f$ in D, $u|_\Gamma = \varphi$ $(f, \varphi \in C^1)$ und das zugehörige Eigenwertproblem werden diskretisiert, indem L durch den Fünf-Punkte-Operator L_h, definiert auf einem quadratischen Gitter mit der Maschenweite h, ersetzt wird. Konvergenzergebnisse für $h \to 0$ werden bewiesen für die Lösungen der diskreten Probleme gegen die Lösungen der stetigen Probleme; die Beweismethode macht die übliche Einschränkung $q \geq 0$ überflüssig. Ferner zeigt der Verf., daß die Methode der endlichen Differenzen auch zur Bestimmung des Spektrums von L geeignet ist. Fehlerabschätzungen werden jedoch nicht angegeben.

K.-H. Jansen.

65069
Mitchell, A. R.; Phillips, G. M.:
Construction of basis functions in the finite element method.
BIT, Nordisk Tidskr. Inform.-Behandl. 12, 81-89 (1972).

Es sei $n \in \mathbb{N}$, und im $\mathbb{R}^2$ sei ein Dreieck mit den nichtkollinearen Ecken (x_1, y_1),

(x_2,y_2), (x_3,y_3) gegeben. Es sei

$$I_n = \{\beta = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) \mid \beta_1,\beta_2,\beta_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ \beta_1+\beta_2+\beta_3 = n\}$$

eine Tri-Index-Menge, und in den $(n+1)(n+2)/2$ Knotenpunkten (diese entstehen als Schnittpunkte von Parallelen zu den Dreieckseiten durch Teilungspunkte auf den Dreiecksseiten, wobei jede Seite in n gleichlange Teile zu teilen ist)

$$(x_\beta,y_\beta) = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{3}\beta_r(x_r,y_r),\quad \beta \in I_n,$$

seien Werte U_β vorgegeben. Dann existiert (wie in der Arbeit bewiesen wird) genau ein Polynom U vom Grade n, das diese Werte in den Knotenpunkten annimmt, und es gibt eindeutig Basispolynome $P_{\beta,n}$, ebenfalls vom Grade n, mit $P_{\beta,n}(x_\alpha,y_\alpha) = \delta_{\beta,\alpha}$ (Kronecker-Symbol) für $\alpha,\beta \in I_n$, mit welchen

$$U(x,y) = \sum_{\beta \in I_n} U_\beta p_{\beta,n}(x,y)$$

ist. Die Verff. geben eine Normaldarstellung der Basispolynome als Polynome (ebenfalls vom Grade n) der drei Basispolynome $p_{\beta,1}$, $\beta \in I_1$, an. Die $p_{\beta,1}$ sind die baryzentrischen Koordinaten des Dreiecks, bezogen auf seine Eckpunkte. In der Methode der finiten Elemente is $p_{\beta,n}$ aufzufassen als Restriktion einer Basisfunktion, die zu einer Triangulierung eines polygonalen Gebietes gehört, auf das vorliegende Dreieck. - Die Verff. weisen auf die Verallgemeinerbarkeit ihrer Ergebnisse auf das Problem der Interpolation in einem Simplex des $\mathbb{R}^k$, $2 \le k \in \mathbb{N}$, hin. R. Gorenflo.

65070
Dupont, Todd:
Galerkin methods for first order hyperbolics: An example.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).

The continuous-time Galerkin method is studied for the equation $u_t + u_x = 0$ with periodic solution. If the space of possible approximate solutions is taken to be C^1 piecewise cubic polynomials on a mesh of size h, then the L^2 norm of the error is in general no better than ch^3; if the class of possible approximate solutions is taken to be C^2 piecewise cubic polynomials on this mesh, the error is bounded by ch^4 for sufficiently smooth solutions. Autorreferat.

65071
McKnight, R. S.; Bosarge, W. E. jun.:
The Ritz-Galerkin procedure for parabolic control problems.
SIAM J. Control (to appear).

A systematical numerical approximation approach to the problem of minimizing an integral cost functional subject to a parabolic partial differential equation constraint is discussed. This problem is viewed as a standard variational minimization problem subject to nonholonomic constraints and is treated using Lagrange multipliers. A practical computational procedure for obtaining approximate solutions to this problem is developed. Error estimates for the control, state, costate, and cost functional are established under appropriate smoothness and boundedness conditions. Also, explicit order bounds are obtained for these estimates over generalized Spline interpolating spaces.

Autorreferat.

65072
Dew, P. M.; Scraton, R. E.:
An improved method for the solution of the heat equation in Chebyshev series.
J. Inst. Math. Appl. 9, 299-309 (1972).

We consider the equation

(1) $$\partial u/\partial t = P(\partial^2 u/\partial x^2 + k\,\partial u/x\,\partial x)$$

subject to general linear boundary conditions at $x = \pm 1$. If it be assumed that u can be expressed in the form (2) $u = \sum_{n=2}^{\infty}{}' a_n(t)T_n(x)$, then it can be shown that (3) $a'_m(t) = \sum_{n=2}^{\infty} C_{mn}a_n(t)$, $m \geq 0$, where $C_{mn} = 0$ if $n \leq m+1$. After suitable truncation this can be expressed in matrix form as (4) $\underset{\sim}{a}'(t) = \underset{\sim\sim}{C}\underset{\sim}{a}(t) + \underset{\sim\sim}{H}\underset{\sim}{w}(t)$,

$$\text{where } \underset{\sim}{a}(t) = \begin{bmatrix} a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}, \quad \underset{\sim}{w}(t) = \begin{bmatrix} a_{N+1}(t) \\ a_{N+2}(t) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim\sim}{C} = \begin{bmatrix} C_{22} \cdots C_{2N} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ C_{N2} \cdots C_{NN} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim\sim}{H} = \begin{bmatrix} C_{2,N+1} & C_{2,N+2} \\ \vdots & \vdots \\ C_{N,N+1} & C_{N,N+2} \end{bmatrix}.$$

The boundary conditions can be put in the form (5) $\underset{\sim\sim}{S}\underset{\sim}{a}(t) + \underset{\sim\sim}{T}\underset{\sim}{w}(t) = \underset{\sim}{0}$, where $\underset{\sim\sim}{S}$ is a $2 \times (N-1)$ matrix and $\underset{\sim\sim}{T}$ a 2×2 matrix. On eliminating $\underset{\sim}{w}(t)$ from equations (4) and (5) we have (6) $\underset{\sim}{a}'(t) = (\underset{\sim\sim}{C} - \underset{\sim\sim}{H}\underset{\sim\sim}{T}^{-1}\underset{\sim\sim}{S})\underset{\sim}{a}(t) = \underset{\sim\sim}{D}\underset{\sim}{a}(t)$, say. - An approximate solution to the matrix differential equation (6) can be obtained in a step-by-step manner by using the formula (7) $\underset{\sim}{a}(t+h) = \varphi(-h\underset{\sim\sim}{D})\underset{\sim}{a}(t)$, where $\varphi(z)$ is a rational approximant to e^{-z}. For general matrix $\underset{\sim\sim}{D}$ the evaluation of $\varphi(-h\underset{\sim\sim}{D})$ involves the inversion of (possibly large) matrices; for the matrix $\underset{\sim\sim}{D}$ used here it is only necessary to invert triangular matrices (apart from the 2×2 matrix $\underset{\sim\sim}{T}$). - The method can be improved if the last two terms of $\underset{\sim}{a}(t)$ are modified by adding an appropriate multiple of $\underset{\sim}{w}(t)$. This entails a corresponding modification in the matrices $\underset{\sim\sim}{H}$ and $\underset{\sim\sim}{T}$, but no other changes. The modification leads to a substantial improvement in accuracy, particularly when the boundary conditions contain the derivative $\partial u/\partial x$. Autorreferat.

65073
Cheung, To-yat:
Quasilinear parabolic boundary value problems. Approximate solutions and error bounds by linear programming.
SIAM J. numer. Analysis (to appear).

Constrained minimization problems are formulated from a quasilinear parabolic boundary value problem (possibly with nonlinear boundary conditions), making use of the latter's (conditional) inverse-positive property. Approximate solutions and three error bounds can be obtained by solving these minimization problems by linear programming and discretization techniques. Numerical results are obtained using splines as basis functions. Autorreferat.

65074
Rizzo, F. J.; Shippy, D. J.:
A method of solution for certain problems of transient heat conduction.
AIAA J. 8, 2004-2009 (1970).
Zur numerischen Lösung von allgemeinen linearen Randwertproblemen (drittes Randwertproblem) der instationären ebenen Wärmeleitungsgleichung wird in der vorliegenden Arbeit folgende Methode vorgeschlagen: Zunächst wird die Gleichung durch Laplacetransformationen bezüglich der Zeitvariablen auf die Form $\Delta T - sT = 0$ gebracht. Die Lösung dieser Gleichung wird mit der dritten Greenschen Formel, in der die zugehörige Fundamentallösung, eine Zylinderfunktion nullter Ordnung, auftritt, durch die Randwerte der transformierten Lösung bzw. deren Normalableitung ausgedrückt. Zur Bestimmung dieser Randwerte stehen zur Verfügung die vorgegebene Randwertrelation und eine Identität, die sich aus der dritten Greenschen Formel ergibt, wenn man zum Rand übergeht. Dabei treten singuläte Integrale vom Cauchytyp auf. Bei der numerischen Lösung werden zunächst die Randwerte und die Werte der Normalableitung als stückweise konstante Funktionen aus einem Gleichungssystem berechnet, das dabei an die Stelle der Integralformel tritt. Die Berechnung der Integrale erfolgt nach der Simpsonregel bzw. in der Nähe der Singularität nach speziellen aus der Literatur entnommenen Methoden. Nachdem die Randwerte bekannt sind, wird die dritte Greensche Formel nach dem gleichen Prinzip ausgewertet. Diese angegebenen Rechnungen sind für eine Folge von Werten s durchzuführen. Schließlich erfolgt dann die inverse Laplacetransformation numerisch in Form einer endlichen Dirichletreihe von Exponentialfunktionen. Einfache Beispiele zeigen im Vergleich mit der geschlossenen Lösung recht genaue Ergebnisse. Der hohe analytische Aufwand wird dadurch gerechtfertigt, daß nur relativ kleine Gleichungssysteme für die Randwerte, einer Funktion einer Veränderlichen, zu lösen sind (im Gegensatz zu den Differenzenverfahren). M. Schleiff.

65P PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS, MISCELLANEOUS PROBLEMS

65075 □
Migovič, F. M.:
Anwendung einer projektiven Iterationsmethode auf die Lösung des Problems der Temperaturverteilung in einem Barren von rechteckigem Querschnitt.
Mat. Fiz., Respubl. mežvedomstv. Sbornik 8, 119-122 (Russisch) (1970).
Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 214, 2 angezeigten Sammelwerk.

65076
Angel, E.; Distefano, N.:
Equivalence of a Cauchy system and a class of boundary-value problems in thin plate theory.
J. Engin. Math. 6, 117-123 (1972).
The authors and A. J a i n [Internat. J. Engin. Sci. 9, 933-945 (1971)] have shown that a forth order boundary value problem arising in thin plate theory could be converted to an initial value (Cauchy) problem by means of invariant imbedding. - This paper shows that every solution of the Cauchy problem is a solution of the original boundary value problem. Autorreferat.

65077
Novoselov, V. S.:
Theorie der Näherungslösung von Variationsaufgaben und ihre Anwendung auf die Untersuchung der Bewegung eines Punktes von veränderlicher Masse.
Vestnik Leningrad. Univ. 20, Nr. 1 (Ser. Mat. Meh. Astron. Nr. 1), 110-120 (Russisch. Engl. Zusammenfassung) (1965).
Folgender Satz wird bewiesen. Mögen die Steuerungen u_k, $u_{k1} \leq u_k \leq u_{k2}$, $u_{k1} = \text{const}$ linear in das minimisierte Funktional und in die Differentialgleichungen der Bewegung eingehen, die die Kopplungen darstellen. In den Eulerschen Gleichungen, den Transversalitätsbedingungen und den entsprechenden, bei der Maximisierung von H erhaltenen Gleichungen vernachlässigen wir die Glieder der Ordnung ε^{m-1}, ferner vernachlässigen wir in den Kopplungsgleichungen und den Randbedingungen die Glieder der Ordnung ε^m. Dann hat der Fehler des optimalen Funktionalwerts die Ordnung ε^m für $m \geq 2$. - Es wird das Problem des kurzdauernden komplanaren Nichtimpulsübergangs auf eine endliche Kreisbahn gelöst. Dabei wird gezeigt, daß, wenn die Abweichung in der Transversalgeschwindigkeit größer als die der Radialgeschwindigkeit ist, die optimale Trajektorie aus einer Strecke der freien Bewegung, danach aus einer Strecke der größten Beschleunigung besteht. Die Bewegungszeit wird aus den optimalen Bedingungen gefunden. Ist dagegen die Abweichung in der Transversalgeschwindigkeit kleiner als die der Radialgeschwindigkeit, so besteht die optimale Trajektorie aus einer Strecke der Bewegung mit der größten Beschleunigung, danach aus einer Strecke der freien Bewegung und wieder einer Strecke der Bewegung mit der größten Beschleunigung. Die Bewegungszeit kann im voraus gewählt werden.
Autorreferat (R. Ž. Mat. 1965, Nr. 10 B 260).

65Q DIFFERENCE AND FUNCTIONAL EQUATIONS, RECURRENCE RELATIONS

65078
Ivanov, A. V.:
Numerische Eigenschaften regulärer Differenzengleichungen.
Trudy mat. Inst. Steklov 70, 59-115 (Russisch) (1964).
Es werden lineare algebraische Systeme (1) $L\underline{y} = \underline{f}$ untersucht, wo L eine tridiagonale Matrix bezeichnet, deren Elemente durch die Formel

$$\{L\}_{ij} = a_i \delta_j^{i-1} - b_i \delta_j^i + c_i \delta_j^{i+1}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

$\delta_j^k = 0$, für $k \neq j$, $= 1$ für $k = j$ vorgegeben sind; y ist der gesuchte, $\underline{f}$ der vorgegebene n-dimensionale Vektor mit den Komponenten y_i bzw. f_i, $1 \leq i \leq n$. Verf. bezeichnet die Eigenschaften der Stabilität (im Sinne von A. F. Filippov) von Systemen der Form (1) in bezug auf die rechten Seiten und in bezug auf die bei ihrer Lösung nach direkten Methoden der Matrixinversion zugelassenen Rundungsfehler mit Recheneigenschaften der betrachteten Systeme und die Bedingung $\text{Det}\, L \neq 0$ mit Regularitätsbedingung; diese Eigenschaften der Systeme vom Typus (1) untersucht er für einen variablen natürlichen n-Wert, wobei er die Systeme auch reguläre Differenzengleichungen nennt. Nun bezeichnet Verf. die Menge der ganzen Zahlen r, r+1,...,s-1, s mit [r,s] und nennt sie Knoten; die auf [r,s] erklärten Funktionen nennt er die dem Raume K(r,s) angehörenden Knotenfunktionen; dann bemerkt er, daß der Wert jeder beliebigen Funktion $y \in K(1,n)$ im Knoten $i \in [1,n]$ gleich der i-ten Komponente des Vektors $\underline{y}$ ist, und führt den als Knotenoperator genannten Operator 1 ein, der jeder Knotenfunktion $y \in K(1,n)$

die Knotenfunktion ly mit den Werten $(ly)_i$, $1 \leq i \leq n$, zuordnet. Mit Hilfe des Operators l erhält Gleichung ($\hat{1}$) die Form folgender Knotengleichung (2) $ly = f$. Verf. nennt die Methode R zur Lösung dieser Gleichung eine direkte Methode, wenn Aufgabe (2) auf eine endliche Zahl von Aufgaben, deren Lösung auch die der Ausgangsaufgabe ergibt, zurückgeführt ist. Reduziert sich jede dieser Hilfsaufgaben ihrerseits allein auf Ausführung von arithmetischen Operationen (Ermittlung der Summe, der Differenz, des Produkts und des Quotienten zweier Zahlen), so ist damit nach Behauptung des Verf. ein Berechnungsalgorithmus R konstruiert, der die gegebene direkte Methode R zur Lösung der Gleichung (2) realisiert. Danach konstruiert Verf. Berechnungsalgorithmen zu Lösung der Gleichung (2), die die bekannten genauen Gaußschen Eliminationsverfahren realisieren, sowie Faktorisierungen, schlägt neue genaue Methoden zur Inversion tridiagonaler Matrizen vor, konstruiert und untersucht Berechnungsalgorithmen, die diese Methoden realisieren (Kapitel I und II). Unter der Voraussetzung, daß der Knotenoperator l im Raume K(l,n) mit einem variablen natürlichen Parameter n wirkt, führt Verf. ferner den Begriff der regulären Differenzengleichung ein und untersucht ihre numerischen Eigenschaften (Kapitel III und IV). - Zum Schluß untersucht er die numerischen Eigenschaften der regulären Differenzengleichungen, die gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung und partielle Differentialgleichungen parabolischen Typus zweiter Ordnung approximieren. Für alle konstruierten Berechnungsalgorithmen gibt Verf. ihre zeitliche Charakteristik an, indem er die Zeit, die zur Ermittlung der Lösung mittels jedes der konstruierten Berechnungsalgorithmen notwendig ist, nach folgendem Schema im Hinblick auf die Durchführung der arithmetischen Operationen berechnet: die Addition, Subtraktion und Multiplikation zweier Zahlen nimmt t, die Division 4t Zeiteinheiten in Anspruch. Die zeitliche Charakteristik des Rechenalgorithmus R wird vom Verf. als die summarische Zeit definiert, die die Ausführung aller in den konstruierten Berechnungsalgorithmus eingehenden arithmetischen Operationen erfordert. P. Bondarenko (R. Ž. Mat. 1964, Nr 12 B 537).

65079 □
Pfluger, P.; Henrici, P.:
Truncation error estimates for Stieltjes fraction.
Sovremen. Probl. Teor. analit. Funkcii, meždunarod. Konf. Teor. analit. Funkcii, Erevan 1965, 257-262 (1966).
This article was published in the book announced in this Zbl. 149, 241.

65R INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

65080
Nazarenko, T. I.:
Zur Frage der numerischen Lösung des Cauchy-Problems für eine Klasse linearer Integro-Differentialgleichungen von Volterraschem Typus.
Sibir. mat. Žurn. 4, 303-308 (Russisch) (1963).

65081
Smoljakov, V. I.:
Einige numerische Methoden zur Näherungslösung von Systemen Volterrascher Integralgleichungen.
Izvestija vyss. učebn. Zaved., Mat. 1971, Nr. 6(109), 95-101 (Russisch) (1971).
In der vorliegenden Arbeit werden einige Verfahren zur numerischen Lösung

nichtlinearer Volterrascher Integralgleichungen beschrieben und miteinander verglichen. Zunächst wird das bekannte Verfahren beschrieben, das auf der Anwendung einer Quadraturformel und der damit möglichen schrittweisen Berechnung der Funktionswerte beruht. Sodann wird ein weiteres Verfahren angegeben, das die Differenz zweier benachbarter Funktionswerte berechnet und so die Anwendung der bekannten Differenzenschemaverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen gestattet. Für dieses Verfahren wird eine Fehlerabschätzung hergeleitet. Durchgerechnete Beispiele zeigen allerdings, daß die einfacheren Quadraturformelmethoden meistens bessere Ergebnisse liefern, als das etwas kompliziertere Differenzenschema. In einem abschließenden Abschnitt wird eine Methode der Konvergenzverbesserung vorgeschlagen, die auf einer geeigneten Zerlegung des Kerns des Volterraschen Integraloperators in einem einfachen Hauptteil und einen kleineren Zusatzkern beruht und eine erhebliche Erhöhung der Genauigkeit der Näherungswerte ermöglicht. M. Schleiff.

65082
Ikebe, Yasuhiko:
The Galerkin method for the numerical solution of Fredholm integral equations of the second kind.
SIAM Review 14, 465-491 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 221.65189.

65083
Bel'tjukov, B. A.:
Konstruktion schnellkonvergierender Iterationsalgorithmen für die Lösung von Integralgleichungen.
Sibir. mat. Žurn. 6, 1415-1419 (Russisch) (1965).
Die Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art $\varphi = f + \lambda K$ mit nichtcharakteristischem λ wird in die Form (1) $\varphi = \psi + K^*\varphi$ transformiert, wo

$$\psi = f + {}'\Gamma f,\quad K^* = \lambda(K - {}'K) + \lambda^2\Gamma(K - {}'K) = \lambda K + \lambda^2\,{}'\Gamma K - \lambda\,{}'\Gamma,$$

${}'K(x,y)$ ein gewisser, $K(x,y)$ naher Kern und ${}'\Gamma(x,x,\lambda)$ die Resolvente dieses Kerns ist. - Auf (1) wird die übliche Methode der sukzessiven Approximation angewandt. Im Ergebnis erhält man folgenden Algorithmus (2) $\varphi_{(n)} = \psi + \lambda K^*\varphi_{(n-1)}$, $n = 1,2,3,\ldots$ Er konvergiert gleichmäßig gegen die Lösung der Ausgangsgleichung für die in $[a,b]$ beschränkten $\int_a^b K^2(x,y)\,dy$ und $\int_a^b {}'K(x,y)\,dy$, sofern die erste charakteristische Zahl der Gleichung (1) dem Betrag nach größer als Eins ist. Für den Prozeß (2) werden Beispiele von effektiv hinreichenden Konvergenzbedingungen angeführt, deren "gute Erfüllung" von der Nähe des Kerns ${}'K(x,y)$ zum Kern $K(x,y)$ abhängt. Es wird eine neue Fehlerabschätzung der n-ten Iteration von (2) im Raume M (M ist der Raum der in $[a,b]$ beschränkten Funktionen) erhalten, welche die Norm der Differenz der n-ten und der $(n-1)$-ten Iteration im Raume L_2 enthält. - Ein weiterer Teil der Arbeit ist der Konkretisierung des Algorithmus (2) für den Fall eines ausgearteten Kerns ${}'K(x,y)$ gewidmet. Für die Funktion $\psi(x,\lambda)$ und den Kern $K^*(x,y,\lambda)$ werden allgemeine Formeln angeführt. Es werden fünf Varianten des Algorithmus (2) untersucht, die verschiedenen Methoden zur Konstruktion des $K(x,y)$ approximierenden Kerns ${}'K(x,y)$ entsprechen, von denen ein Teil vom Verf. stammt. Für Spezialfälle einiger dieser Varianten wird der Zusammenhang mit den Iterationsalgorithmus von Ju. D. S o k o l o v und Ju. V. V o r o b ' e v festgestellt.

Autorreferat (R. Ž. Mat. 1966, Nr. 4 B 462).

65084
Mamedov, A. M.:
Über eine Näherungslösung nichtlinearer Integralgleichungen.
Akad. Nauk Azerbaĭdž. SSR, Izvestija, Ser. fiz.-tehn. mat. Nauk 1965, Nr. 3, 41-47 (Russisch) (1965).
Es werden die von N. M. K o b o r o v ["Zahlentheoretische Methoden in der numerischen Analysis" (1963; dies. Zbl. 115, 117)] ausgearbeiteten zahlentheoretischen Methoden der Näherungslösung linearer Integralgleichungen auf nichtlineare Integralgleichungen übertragen. $E_s^{\alpha}(K)$, $\alpha \geq 1$, sei die von N. M. K o r o b o v [Vestnik Moskovsk. Univ., Ser. Mat. Mech. Astron. Fiz. Chim. 14, Nr. 4, 19-25 (1959; dies. Zbl. 92, 60)] untersuchte Funktionenklasse. Es wird die Gleichung (1) $\varphi(x) = \lambda \int_0^h K(x,y,\varphi(y))dy$ untersucht, wo der Kern $K(x,y,u)$ in eine Potenzreihe nach u entwickelt wird, deren Koeffizienten Funktionen der Klasse $E_2^{\alpha}(K)$, $K>0$, sind und noch einigen Bedingungen genügen; $|\lambda| < 1/M$. Verf. beweist den Existenzsatz für eine eindeutige Lösung der Gleichung (1), die $E_1^{\alpha}(K)$ angehört. Ferner werden Abschätzungen für die Konvergenz des Newtonschen Prozesses der Lösung der Gleichung (1) gemacht.
H. Kogan (R. Ž. Mat. 1967, Nr. 7 B 248).

65085
Paget, D. F.; Elliott, David:
An algorithm for the numerical evaluation of certain Cauchy principal value integrals.
Numerische Math. 19, 373-385 (1972).
Vgl. das Autorreferat (Voranzeige) in diesem Zbl. 229.65091.

65086
Shaw, C. B. jun.:
Improvement of the resolution of an instrument by numerical solution of an integral equation.
J. math. Analysis Appl. 37, 83-112 (1972).
A method of data analysis has been developed which has the same effect as a substantial increase in the resolving power of the instrument which produced the data. The output of a physical instrument is represented by the known function in an integral equation which, if solved, would yield the input which the instrument was intended to measure. But this presents a classic example of an "improperly posed" problem: one for which even small errors in the given data make solution impossible or grossly inaccurate. Earlier investigators concluded noise (including computational error) could be overcome, or a solution could be obtained with detail beyond the Rayleigh limit of resolution of the instrument, but not both at once. Recent approaches require not only statistical information on the background- and instrument-generated noise, but the expected value of the input itself. In many technologically important problems it is the latter which is unavailable. Therefore, a procedure was developed which, from known data only, generates a serviceable starting estimate of the input; iteratively refines the estimate so that, if numerical errors did not accumulate, the sequence would converge to that (computationally inaccessible) estimate which minimizes the rms error; detects the onset of excessive computational error accumulation; and at that point stops with the "best accessible" estimate. Application to computer-simulated experimental data has consistently yielded resolution far beyond the Rayleigh limit, in the presence of substantial noise,

with quite modest demands on computer time. - Later results (ibid., to appear) remove certain restrictions, prove that formal convergence is to minimum-residue approximate solution of minimum norm as measure by ellipsoidal norms defined by correlation operators of noise and error processes, present alternative computational methods suited to different dominant noise situations, and illustrate use with experimental data. Autorreferat.

65087 □
Lyčkina, G. P.; Netušil, A. V.; Tetel'baum, I. M.:
Modellierung irrationaler Übertragungsfunktionen.
Vyčislit. Tehn. Upravlenii, 415-422 (Russisch) (1966).
Dieser Artikel erschien in dem in diesem Zbl. 191, 171 angezeigten Sammelwerk.

65S GRAPHICAL METHODS

65088
Bal, L.; Mihoc, M.:
Sur la représentation des fonctions nomographiques.
Studii Cerc. mat. 23, 511-522 (Rumänisch. Französ. Zusammenfassung) (1971).
M. W a r m u s [Rozprawy mat. Nr. 16, 150 p. (1959; ce Zbl. 85, 14)] a établi sept types de fonctions nomographiques pour les fonctions de trois variables. Dans ce travail on présente une étude de ces types de fonctions et on établit la correspondence entre elles et les formes canoniques des équations à trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés, données par R. S o r e a u [Nomographie ou traité des abaques (Paris 1921)]. - On classifie ces types en considérant les genres des nomogrammes correspondants.
Autorreferat.

65089
Ionescu, Gh. D.:
On some classes of equations which can be represented by simple nomograms with three degrees of freedom between the planes.
Mathematica, Cluj 12(35), 69-74 (1970).
Verf. gibt eine Reihe von Funktionen zwischen sieben Variablen an, die durch Nomogramme mit zwei übereinanderliegenden Ebenen des folgenden Typs dargestellt werden können: Die feste Ebene enthält entsprechend den sieben Variablen drei Paare von Netzen und eine Kurvenschar, die bewegliche Ableseebene ein Punktepaar und ein (nicht beziffertes) Geradenbüschel. - Die Nomogramme sind (natürlicherweise) sehr viel übersichtlicher als die dargestellten Funktionen mit den an sie gestellten Bedingungen. W. Böhm.

65090
Vranić, Vladimir:
On the nomographic method in nonlinear correlation.
Rad Jugoslav. Akad. Znanost. Umjetnost. 331 (Odj. mat. fiz. tehn. Nauke Nr. 10), 75-91 (1965).
The nomographie method is the application of those procedures which are used in Nomography and leads most commonly to collinear nomograms. The author applied this method for the first time in Periodicum math.-phys. astron. II. S. 5, 166-173 (1950; this Zbl. 41, 462) and showed how the regression lines could be represented by two points. These two points are called regression points, and the distance of these two points will be called the strength of correlation.

This method was extended by the author, ibid. 325, 165-180 (1963; this Zbl. 144, 193) when we were considering the area of the triangle formed by the regression points and the origin of the coordinate system. This area was taken as the measure of correlation. At the same time these considerations were also extended to the space of n dimensions. In this way this nomographic method was applied to the most general case of linear correlation between n random variables. - In this paper we intend to show the possibility of applying this method for nonlinear correlation as well. In nonlinear correlation a parabola, in general of the n-th order, is taken as regressioncurve and is fitted to the given data. Einleitung.

65T HARMONIC ANALYSIS AND SYNTHESIS

65091
Lyness, J. N.:
The calculation of Fourier coefficients by the Möbius inversion of the Poisson summation formula. II: Piecewise continuous functions and functions with poles near the interval [0,1]. III: Functions having algebraic singularities.
Math. Comput. 25, 59-78, 483-493 (1971).

These two papers are the second and third in a sequal of three papers discussing the numerical calculations of the Fourier coefficients (1) $C^{(m)}f = \int_0^1 f(x)\cos 2\pi mx\,dx$, and (2) $S^{(m)}f = \int_0^1 f(x)\sin 2\pi mx\,dx$. - In part I several expansions for the integrals above were derived using Poisson's summation formula, Euler-MacLaurin's expansion and Möbius inversion. - In part II the expansions derived in part I are modified in order to compute the integrals (1) and (2) in cases where the function f(x) is: (i) Piecewise continuous i.e. $f(x) = \varphi_i(x)$ on $x_{i-1} < x < x_i$, $i = 1(1)n$, $f(x_i) = \frac{1}{2}[\varphi_{i-1}(x) + \varphi_i(x_i)]$, $i = 1(1)(n-1)$, $f(0) = \frac{1}{2}[\varphi_n(x_n) + \varphi_1(x_0)]$, and each function $\varphi_i(x) \in C^{(p)}[x_{i-1}, x_i]$. ii) Functions with poles near the interval [0,1]. The function is assumed to have the structure $f(x) = \theta(x)/(x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + \mu^2)^w$, where w is a small positive integer and $\theta(x)$ is analytic in a convex region which contains the interval [0,1] and the poles. In part III the general theory developed in part I was modified in order to compute integrals (1), (2) with f(x) having the structure $f(x) = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta \varphi(x)$, $\alpha, \beta > -1$, where $\theta(x) \in C^{(p)}[a,b]$ and $f(x) = 0$, $x < a$, $x > b$. - The formulae developed are applicable if at least one of α or β is nonintegral. If both are integers the theory reduces to that of part II and if $a = 0$, $b = 1$, it reduces to that of part I. T. Håvie.