Werk

Titel: Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1957

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0070|log64

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

dieser von den Autoren absichtlich in Kauf genommenen theoretischen Schwäche der Grundlagen abgesehen, zeichnet sich das Buch durch einen großen Reichtum an schönen Anwendungen aus, die seine Hauptstärke bilden und die wohl vor allem seinen großen Erfolg verbürgen. *K. Strubecker.*

● **Vygodskij, M. Ja.: Handbuch der höheren Mathematik.** Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 784 S. R. 13,40 [Russisch].

Das Buch ist die Fortsetzung des „Handbuches der Elementarmathematik" desselben Verf. und für die Absolventen höherer technischer Lehranstalten bestimmt. Es enthält eine sehr ausführliche, systematische Zusammenstellung der Formeln und Regeln folgender Gebiete: Analytische Geometrie der Ebene (Geraden, Kurven 2. Ordnung), analytische Geometrie des Raumes (Vektorbegriff, lineare Gebilde, Flächen 2. Ordnung, Systeme linearer Gleichungen), Grundbegriffe der Analysis (Zahlbegriff, Funktionsbegriff, Grenzwert), Differentialrechnung, Integralrechnung, Anfangsgründe der ebenen und räumlichen Kurven, Reihen, Differential- und Integralrechnung bei mehreren Veränderlichen, gewöhnliche Differentialgleichungen (bis zur Methode der Variation der Konstanten für lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung). Vollständige Beweise werden nur in Ausnahmefällen gegeben, dagegen wird die Einführung von Begriffen stets sehr gründlich vorgenommen, und es werden überall viele Beispiele gebracht. Den Schluß des Buches bilden Tafeln des natürlichen Logarithmus der Zahlen 1,00 bis 9,99 auf 4 Dezimalen und der Exponentialfunktion für die Argumente von 0,00 bis 3,99 auf 5 geltende Ziffern sowie eine Tabelle von 147 unbestimmten Integralen. *W. Schulz.*

● **Tarasov, N. P.: Lehrgang der höheren Mathematik für Technische Lehranstalten.** 9. überarb. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1956. 404 S. R. 7,15 [Russisch].

● **Klaf, A. Albert: Calculus refresher for technical men.** Unabridged and unaltered republication of the first edition. New York: Dover Publications, Inc. 1956. VIII, 431 p. $ 195.

Aufgabensammlung aus dem Gebiet der reellen Analysis und ihrer Anwendung auf Physik und Technik. Anhang betreffend Bezeichnungen, Formeln, Tabellen. *W. Maier.*

Clarke, L. E.: Inequalities involving upper and lower limits. Math. Gaz. **40**, 43—44 (1956).

Es seien $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ beschränkte Folgen von reellen Zahlen mit Λ und Λ' bzw. λ und λ' als oberen bzw. unteren Grenzen. Die Ungleichungen

$$f(\lambda, \lambda') \leqq \varliminf_{n\to\infty} f(a_n, b_n) \leqq \begin{matrix} f(\lambda, \Lambda') \\ f(\Lambda, \lambda') \end{matrix} \leqq \varlimsup_{n\to\infty} f(a_n, b_n) \leqq f(\Lambda, \Lambda')$$

gelten genau dann für alle beschränkten $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$, wenn $f(x, y)$ stetig und für festes y eine nicht-absteigende Funktion von x, für festes x eine nicht-absteigende Funktion von y ist. *L. Fuchs.*

Bellman, Richard: On an inequality concerning an indefinite form. Amer. math. Monthly **63**, 108—109 (1956).

Differentiation und Integration reeller Funktionen. Maßtheorie:

Kondô, Motokiti: Sur la nommabilité d'ensembles. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 1841—1843 (1956).

Kondô, Motokiti: Sur les nombres réels et nommables. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 1945—1948 (1956).

Kondô, Motokiti: Sur les analyses relatives. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2084—2087 (1956).

Kondô, Motokiti: Sur la notion du transfini. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2209—2212 (1956).

Kondô, Motokiti: Sur le continu projectif et la conclusion de l'étude des ensembles nommables. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 2275—2278 (1956).

Verf. behandelt die Frage nach der „effektiven Definierbarkeit" im Sinne (des Existenzbegriffes) von H. Lebesgue, nach der sogenannten „Nommabilität". Unterschieden wird dabei, ob für die Definitionen transfinite Hilfsmittel herangezogen werden oder nicht. In den ersten drei Noten wird vom Transfiniten kein Gebrauch gemacht. Wesentliche Konstruktionsmittel sind die Projektionen (vgl. weiter unten). Im übrigen wird unterschieden: Nommabilität (E) auf unendlichen Folgen ganzer Zahlen, Nommabilität (S) auf den B-meßbaren Mengen und Nommabilität (P) auf den projektiven Mengen. — 1. Note. Nommable Mengen. 1. 1. Es sei J der Integritätsbereich der ganzen Zahlen und L der Körper der reellen Zahlen, ferner J^n bzw. L^n der Raum der geordneten n-tupel $(a_1, \ldots, a_n)$, $a_\nu \in J$ bzw. $a_\nu \in L$; falls kein bestimmtes n ins Auge gefaßt ist, schreiben wir J^* bzw. L^* (statt J^n bzw. L^n). Unterräume von J^* bzw. L^* werden bezeichnet mit U', U'' usw., ferner der Raum der (u', u''), wobei $u' \in U'$, $u'' \in U''$, mit $U' + U''$ und als direkte Summe von U', U''. Wenn $M \subset U' + U''$, wobei U' ein L^* bzw. ein J^* ist, werde unter der „Projektion" $P(U', M)$ bzw. $S(U', M)$ verstanden die Menge aller $u' \in U'$, zu denen ein $u'' \in U''$ existiert mit $(u', u'') \in M$. — 1. 2. Es seien k_0, k Unterkörper von L mit $k_0 \subset k$. Verf. bezeichnet die im folgenden angedeutete Theorie als eine relative Analysis $\mathfrak{A}(k_0, k)$. — Nun sei $F = F(x_1, \ldots, x_n; x_1', \ldots, x_k')$ ein Polynom über k_0 und $[F \geq 0]$ die Menge aller $(a_1, \ldots, a_n; a_1', \ldots, a_k')$ mit $a_\nu \in J$, $a_\varkappa' \in k$ und mit $F(a_1, \ldots, a_n; a_1', \ldots, a_k') \geq 0$; ein solches $[F \geq 0]$ heiße elementar, genauer (k_0, k)-elementar bzw., falls neben den x_ν keine $x_\varkappa'$ auftreten, (k_0)-elementar. Ist $M \in U' + U''$ (k_0)- bzw. (k_0, k)-elementar, so heiße $S(U', M)$ resp. das Komplement von $S(U', M)$ bezüglich U' nommabel-(E^1, k_0) bzw. -$(S^1; k_0, k)$ resp. nommabel-$(E_1; k_0)$ bzw. -$(S_1; k_0, k)$; kürzer schreiben wir hierfür $S(U', M) \in (E^1; k_0)$ usw. Allgemein: Wenn $M \in (E_n; k_0)$, sei $S(U', M) \in (E^{n+1}, k_0)$ und $U' - S(U', M) \in (E_{n+1}; k_0)$; und entsprechend wird $(S^{n+1}; k_0, k)$ sowie $(S_{n+1}; k_0, k)$ definiert. Ist $M \in (E^n; k)$ und $M \in (E_n; k_0)$, so schreiben wir $M \in (E_n^n; k_0)$; entsprechend ist $M \in (S_n^n; k_0, k)$ zu verstehen. Ist n nicht festgelegt, so wird statt (E^n, k_0) usw. geschrieben $(E; k_0)$ usw. Ersetzt man in der Definition von $(E^n; k_0)$ die Projektion S durch P, für $M \in (S; k_0, k)$, so erhält man die Definition von $M \in (P^n; k_0, k)$ usw. — 1. 3. Es sei $f(u)$ eine Abbildung von $D \subset U'$ in U'' und $G(f)$ die Paarmenge $(u, f(u)) \subset U' + U''$ mit $u \in D$. Wenn $G(f) \in (E_n^n; k_0)$, schreiben wir $f \in (E_n^n; k_0)$ oder kürzer $f \in (E; k_0)$; entsprechend ist $f \in (S_n^n; k_0, k)$ und $f \in (P_n^n; k_0, k)$ zu verstehen. 2. Note. Nommable Zahlen. 2. 1. Es sei $M \subset J^2$ und $M \in (E; k_0)$; ferner sei $K(n; M) = K(M \cap Q_n)$ die Mächtigkeit von $M \cap Q_n$, wobei Q_n das Quadrat $(|x| < n, |y| < n)$, $(x, y) \in J^2$ bedeutet. Man setze $\bar{d}(M) = \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} K(n; M)/K(n; J^2)$ und $\underline{d}(M) = \lim\limits_{n \to \infty} K(n; M)/K(n; J^2)$. Falls $\bar{d}(M) = \underline{d}(M)$ ist, wird $\bar{d}(M)$ als die Dichte $d(M)$ von M bezeichnet und M selbst als meßbar; dabei ist also $M \in (E; k_0)$ vorausgesetzt. Die reelle Funktion $d(X)$ ist über dem System $\mathfrak{m}$ der meßbaren Mengen ein (normierter) Inhalt; nämlich: $\mathfrak{m}$ ist ein Boolescher Verband mit J^2 als Einheit; ferner ist $0 \leq d(X) \leq 1$ und $d(0) = O$, $d(J^2) = 1$; $d(X') \leq d(X'')$ für $X' \leq X''$; $d(X') + d(X'') = d(X' \cap X'') + d(X' \cup X'')$. Außerdem ist $d(X)$ $(E; k_0)$-deformationsinvariant, d. h. $d(X) = d(\sigma(X))$, wobei $\sigma \in (E; k_0)$ eine ein-eindeutige Abbildung von J^2 auf sich ist derart, daß $K(\sigma(Q_n) \cap (J^2 - Q_n)) + K(Q_n \cap (J^2 - \sigma(Q_n))) = o(n^2)$. Übrigens ist $d(X)$ der einzige derartige Inhalt. — 2. 2. Ist $\alpha \in L$ gegeben, so schreiben wir $\alpha \in (E^n; k_0)$ und nennen α von der Klasse n, wenn ein $M \in \mathfrak{m}$ existiert mit $d(M) = \alpha - [\alpha]$; kürzer: $\alpha \in (E; k_0)$. Es gilt der Satz. Es sei $\alpha = a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \cdots \in k$, $1 < p \in J$, $0 \leq \alpha < p$, $0 \leq a_n \in J$; es ist $\alpha \in (E; k_0)$ genau dann, wenn für die Menge A der Punkte $(n, a_n) \in J^2$ gilt $A \in (E; k_0)$. Die reellen Zahlen $\alpha \in (E; k_0)$ bilden einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper $\pi(k_0)$ von k_0. [Es gibt $\alpha \in \pi(k_0)$ von jeder Klasse n.] Es heißt k_0 ein Relativkontinuum, wenn $k_0 = \pi(k_0)$; jede nicht leere beschränkte

Teilmenge T eines solchen $k_0 (= \pi(k_0))$ besitzt, wenn $T \in (S; k_0, k)$, in k_0 ein Supremum. Ist R der Körper der rationalen Zahlen, so enthält die relative Analysis $\mathfrak{A}(\pi(R), \pi(R))$ eine „nommable" Theorie der Baireschen Funktionen und des Lebesgueschen Integrals. 3. Note. In 3. 1.—3. 2. werden k_0 und k als Relativkontinua angenommen. — 3. 1. Bezeichnet man mit k^* die Menge der in k enthaltenen Irrationalzahlen, so gilt: Ist N eine nicht leere, in k enthaltene Menge mit $N \in (P^1; k_0, k)$, so gibt es eine, in k^* definierte, stetige Funktion $f \in (S; k_0, k)$ mit $N = f(k^*)$. Jede nicht leere, in k enthaltene, beschränkte Menge $H \in (P^1; k_0, k)$ besitzt in k_0 ein Supremum. Für die abgeschlossene Hülle $\overline{M}$ eines $M \in (P^1; k_0, k)$ gilt $\overline{M} \in (S; k_0, k)$. — 3. 2. Sodann werden Sätze über reelle Funktionen $f \in (S; k_0, k)$ angegeben; insbesondere gilt der Satz von der Existenz des Maximums und Minimums einer stetigen Funktion mit kompaktem Definitionsbereich $D \in (S; k_0, k)$. — 3. 3. Schließlich wird der Begriff der reellen Zahl $\beta \in (P; k_0)$ analog erklärt wie der der Zahlen $\alpha \in (E; k_0)$; dabei tritt $(P; k_0, k_0)$ an Stelle von (E, k_0). Ist $p(k_0)$ die Menge aller $\beta \in (P; k_0)$, so gilt $\pi(p(k_0)) = p(k_0)$. Ist sogar $p(k_0) = k_0$, so heißt k_0 projektiv abgeschlossen. Zu jedem Körper k' reeller Zahlen existiert ein kleinster projektiv abgeschlossener Oberkörper $P(k')$ von k', die sogenannte projektive Hülle von k'. Falls k' der Körper R der rationalen Zahlen ist, heißt $P(R) = K$ projektives Kontinuum. 4. Note. Die Sätze in 3. 1.—3. 2. gelten aber im allgemeinen nicht für Mengen bzw. Funktionen aus $(P; k_0, k)$. Diese Unebenheit wird beseitigt vermöge weiterer Entwicklungen über Nommabilität-$(P; k_0, k)$ und Heranziehung transfiniter Prozesse. Zunächst werden die (auch transfiniten) Ordinalzahlen $t \in (S; k_0, k)$ bzw. $t \in (P; k_0, k)$ folgendermaßen definiert: Es sei Q die Menge der (positiven) dyadischen Brüche $2^{-p}(2q+1)$, wobei $p, q \in J$, $0 \leq p$, $0 \leq q$, und $t(A)$ der Ordnungstypus der Untermenge A von Q. Wir setzen $t(A) \in (S; k_0, k)$, wenn $A \in (S; k_0, k)$; entsprechend wird $t(A) \in (P; k_0, k)$ erklärt. Aus $a, b \in (S; k_0, k)$ folgt $a + b, a \cdot b \in (S; k_0, k)$ und $t \in (S; k_0, k)$ für jedes $t < a$. Von dieser Definition ausgehend gewinnt man, wie hier im einzelnen nicht beschrieben werden kann, den Begriff der Funktionen $f(x_1, \ldots, x_n) \in (S; k_0, k)$ bzw. $f(x_1, \ldots, x_n) \in (P; k_0, k)$, worin die $x_1, \ldots, x_n$ und die Funktionswerte Ordinalzahlen sind; sodann gelangt man (vermittelst transfiniter Prozesse) zum Begriff der „transfinit $(E; k_0)$-nommablen" Mengen W, kurz $W \in \mathrm{tr}\,(E; k_0)$, sowie entsprechend $W \in \mathrm{tr}\,(S; k_0, k)$ bzw. $W \in \mathrm{tr}\,(P; k_0, k)$. Wie im nicht-transfiniten Fall (vgl. 2. Note) erklärt man das System $\omega(k_0)$ der reellen Zahlen $a \in \mathrm{tr}\,(E; k_0)$ und bezeichnet k_0 als transfinit-relatives Kontinuum, wenn $k_0 = \omega(k_0)$. Für $K = P(R)$, wobei R der Körper der rationalen Zahlen (vgl. 3. Note), gilt nun $K = \omega(K)$. Sind k_0, k transfinit-relative Kontinua, so kann man in der relativen Analysis $\mathfrak{A}(k_0, k)$ die Theorie der analytischen Mengen entwickeln; aus $M \in (P^1; k_0, k)$ folgt nämlich $M \in \mathrm{tr}\,(S; k_0, k)$ genau dann, wenn für das Komplement CM von M gilt $CM \in (P^1; k_0, k)$. 5. Note. Ist $M \subset K$ (oder $M \subset L$) nicht leer, beschränkt und $M \in \mathrm{tr}\,(P; K, K)$ (oder $M \in \mathrm{tr}\,(P; K, L)$), so besitzt M in K ein Supremum. Eine Menge $M \in (P^2; K, L)$ mit $M \subset L$ ist nicht leer genau dann, wenn $M \cap K$ nicht leer ist. Für Systeme von Mengen $M \in (P^2; K, L)$ gilt das Zermelosche Auswahlaxiom. — Weitere Bemerkungen betreffen unter anderem das Kontinuumproblem in der vom Verf. entwickelten relativen Analysis und die Beziehungen zu den Untersuchungen von Gödel. Beweise werden im allgemeinen nicht gegeben. *Otto Haupt.*

Rechard, Ottis W.: Invariant measures for many-one transformations. Duke math. J. **23**, 477—488 (1956).

Es sei $\mathfrak{X}$ eine sigma-Algebra von Teilmengen einer Menge X mit $X \in \mathfrak{X}$, m ein endliches Maß auf $\mathfrak{X}$ und τ eine eindeutige, meßbare und nichtsinguläre Transformation von X in sich. Ein zweites derartiges Maß m^* heißt stärker als m, wenn aus

$m^*(A) = 0$ folgt $m(A) = 0$, und τ-asymptotisch stärker als m, wenn aus $m^*(A) = 0$ folgt $\inf_n m(\tau^{-n}(A)) = 0$. Beide Begriffe fallen zusammen, wenn τ umkehrbar eindeutig mit meßbarer Umkehrung ist. Einen sich nur auf diesen Fall beziehenden Satz von Cotlar und Ricabarra (dies. Zbl. **37**, 76) verallgemeinernd beweist der Verf., daß dann und nur dann ein gegenüber τ invariantes Maß m^* existiert, so daß m stärker als m^* und m^* τ-asymptotisch stärker als m ist, wenn die in $\mathfrak{X}$ erklärten Mengenfunktionen $m(\tau^{-n}(E))$, $n = 1, 2, \ldots$ gleichmäßig totalstetig in bezug auf m sind. Dies dient dazu, die Beweise der Ergodensätze von Dunford und Miller [Trans. Amer. math. Soc. **60**, 538—549 (1946)], denen ein nicht invariantes Maß zugrunde liegt, zu vereinfachen. Das Hauptergebnis kann teilweise auf den Fall einer Abelschen Semigruppe meßbarer Transformationen übertragen werden.

K. Krickeberg.

Kunugi, Kinjirô: Application de la méthode des espaces rangés à la théorie de l'intégration. I. Proc. Japan Acad. **32**, 215—220 (1956).

The author considers the set S of all step-functions (on a fixed interval) as an „espace rangé" (see the earlier papers of the author· this Zbl. **57**, 147; **58**, 166). By completion of S and by extension of the integral of step-functions he obtains a definition of the Lebesgue integral. *S. Sikorski.*

Bartle, R. G.: A general bilinear vector integral. Studia math. **19**, 337—352 (1956).

Es sei $\mathfrak{S}$ ein Körper von Teilmengen E einer Grundmenge S. Es seien ferner X und Y normierte lineare (reelle oder komplexe) Räume und Z ein Banachraum. Es existiere eine eindeutige bilineare Verknüpfung $x\,y$, $x \in X$, $y \in Y$ mit Werten $x\,y = z \in Z$. Es gelte $|x\,y| \leqq k\,|x|\,|y|$ für jedes Paar $x \in X$, $y \in Y$ mit einer festen Konstanten k. Verf. führt einen Integralbegriff $\lambda(E) \equiv \int_E f(s)\,\mu(ds)$, $E \in \mathfrak{S}$, für gewisse eindeutige Abbildungen (Funktionen $f|S$) von S in X bezüglich eines additiven Maßes $\mu|\mathfrak{S}$ mit Werten des Maßes $\mu(E) \in Y$ ein. Die Werte des Integrals $\lambda(E)|\mathfrak{S}$ liegen dann im Banachraum Z. Das Integral $\lambda(E)$ wird zuerst für Treppenfunktionen $t = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\chi_{E_i}$, d. h. für lineare Kombinationen von charakteristischen Funktionen χ_{E_i}, $E_i \in \mathfrak{S}$ mit Koeffizienten $x_i \in X$ durch: $\lambda(E) \equiv \int_E t(s)\,\mu(ds) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,\mu(E_i \cap E)$, für jedes $E \in \mathfrak{S}$, definiert. Es bezeichne für jedes $E \in \mathfrak{S}$: $||E|| \equiv \sup\{|\Sigma\, x_j\,\mu(E_j)|$ für alle endlichen Zerlegungen von E und beliebige $x_j \in X\}$ und für eine beliebige Teilmenge $A \subseteq S$: $||A|| \equiv \inf\{||E||, E \in \mathfrak{S}$ mit $A \subseteq E\}$; dann soll eine Folge von Funktionen $f_n(s)|S$, $n = 1, 2, \ldots$, μ-konvergent gegen $f(s)|S$ genannt werden, wenn $||(S, n, \varepsilon)|| \to 0$ für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, wobei $(S, n, \varepsilon) \equiv \{s \in S : |f_n(s) - f(s)| \geqq \varepsilon\}$ ist. Eine Funktion $f(s)|S$ heißt μ-meßbar, wenn sie als μ-Grenzfunktion einer Folge $t_n(s)|S$ $n = 1, 2, \ldots$, von Treppenfunktionen darstellbar ist. Der so definierte Raum der μ-meßbaren Funktionen ist linear und abgeschlossen für die μ-Konvergenz. Eine Funktion $f(s)|S$ heißt μ-integrierbar über S, wenn eine Folge von Treppenfunktionen $t_n(s)|S$ existiert, die folgende Bedingungen erfüllt: I. $t_n(s)$ ist μ-konvergent gegen $f(s)$. II. Die Folge der Integrale $\lambda_n(E) \equiv \int_E t_n(s)\,\mu(ds)$, $E \in \mathfrak{S}$, hat die folgenden zwei Eigenschaften: 1. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, daß $|\lambda_n(E)| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, für jedes $E \in \mathfrak{S}$ mit $||E|| < \delta$ gilt; 2. für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $E_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ mit $||E|| < +\infty$ derart, daß $|\lambda_n(G)| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, für jedes $G \in \mathfrak{S}$ mit $G \leqq S - E_\varepsilon$ gilt. Verf. zeigt nun: Wenn f μ-integrierbar über S ist, dann konvergiert für jedes $E \in \mathfrak{S}$ die Folge $\lambda_n(E)$ (bezüglich der Norm in Z), und zwar gleichmäßig, und der Grenzwert $\lambda(E)$ dieser Folge in Z definiert eindeutig das Integral $\lambda(E) \equiv \int_E f(s)\,\mu(ds)$

von f über $E \in \mathfrak{S}$. Bei fester μ-integrierbarer Funktion f ist $\lambda(E) \mid \mathfrak{S}$ additiv. Bei fester Menge $E \in \mathfrak{S}$ bilden die μ-integrierbaren Funktionen einen linearen Raum und das Integral ist eine lineare Abbildung dieses Raumes in Z. Es gilt ferner für jede μ-integrierbare Funktion $\lim\limits_{\|E\| \to 0} \int\limits_E f(s)\, \mu(ds) = 0$ und für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $E_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ derart, daß $\left| \int\limits_G f(s)\, \mu(ds) \right| < \varepsilon$ für jedes $G \in \mathfrak{S}$ mit $G \subseteq S - E_\varepsilon$ ist. Die wesentlich beschränkten μ-meßbaren Funktionen sind über jeder Menge $E \in \mathfrak{S}$ mit $\|E\| < +\infty$ stets μ-integrierbar. Für das Integral des Verf. gilt der Vitalische Konvergenzsatz. Der Lebesguesche Konvergenzsatz dagegen gilt nicht stets, sondern nur für Folgen, die fast überall durch eine Konstante beschränkt sind. Verf. untersucht weiter Eigenschaften seines Integrals, im Falle, daß das Maß μ auf einem σ-Körper $\mathfrak{S}$ definiert und σ-additiv ist, und Beziehungen seines Integrals zu anderen Integralbegriffen. *D. A. Kappos.*

Pagni, Mauro: Sulla derivazione negli insiemi astratti delle funzioni a variazione limitata integrabili secondo Burkill. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **25**, 279—302 (1956).

Es sei $\mathfrak{J}$ ein Halbring von Mengen, die hinsichtlich eines endlichen, abzählbar additiven und nichtnegativen Maßes μ meßbar sind, und F eine auf $\mathfrak{J}$ erklärte reelle Funktion beschränkter Variation. Existiert das Unterteilungsintegral G von F, so bezeichnet der Verf. als Ableitung f von F die von Fichera [Rend. Sem. mat. Univ. Padova **23**, 366—397 (1954)] definierte Ableitung von G, die der Radon-Nikodýmsche Integrand des μ-totalstetigen Teils von G ist. Fichera hatte f im Fall eines nichtnegativen und additiven F (d. h. $F = G \geq 0$) durch ein Maximumprinzip charakterisiert; der Verf. tut das gleiche bei nichtnegativem und oberadditivem (in der Terminologie des Verf., unteradditivem) F. *K. Krickeberg.*

Mikolás, Miklós: Construction des familles de fonctions partout continues non dérivables. Acta Sci. math. **17**, 49—62 (1956).

Viene dato un nuovo procedimento per costruire funzioni continue senza derivata. Tra i risultati raggiunti dall'A. riportiamo il seguente, dopo aver premesso che una funzione $f(x)$ si chiama convessa [concava] a segmenti in (a, b) con i punti di divisione $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b$, se è continua in questi punti e convessa [concava] o lineare in ciascuno degli intervalli (x_{r-1}, x_r), $(r = 1, 2, \ldots, m)$. — Sia $\varphi(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$ una funzione continua, periodica con periodo p e convessa [o concava] a segmenti in $(0, p)$ con i punti di divisione ω_r, $(r = 0, 1, \ldots, m)$, e sia $\varphi(0) > \varphi(p/2)$ [o rispettivamente $\varphi(0) < \varphi(p/2)$]. Supponiamo che: 1. c_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sia una successione di numeri reali o tutti positivi o tutti negativi e tali che sia convergente la serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$; 2. ν_k, $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sia una successione crescente di numeri interi positivi, ognuno dei quali è un divisore del successivo, e esistano dei valori di k arbitrariamente grandi, per i quali i rapporti $\nu_k\, \omega_r / \nu_{k-1}\, p$, $(r = 1, 2, \ldots, m)$ sono interi; 3. per $k \to \infty$ sia $\underline{\lim}\, \nu_k\, |c_k| > 0$. Allora la funzione $\Phi(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k\, \varphi(\nu_k\, x)$ risulta ovunque continua, ma non è derivabile in alcun punto.

S. Cinquini.

Bögel, K.: Die Struktur der stetigen Funktionen einer Veränderlichen. I, II. J. reine angew. Math. **196**, 1—33, 137—154 (1956).

Über die Grundgedanken und die wesentlichen Ergebnisse wurde in einer Voranzeige berichtet (dies. Zbl. **58**, 49). In der vorliegenden Arbeit wird eine ausführliche Darstellung mit Beweisen gegeben. Insbesondere wird im II. Teil eine einheitliche Konstruktion aller stetigen Funktionen gewonnen. Es handelt sich dabei andeutungsweise um folgendes: Es seien vorgegeben: Beliebig eine aufsteigende Folge abgeschlossener, die Endpunkte von J enthaltender Mengen F_n; ferner ab-

zählbar viele (Bedingungen ziemlich allgemeiner Natur unterworfene) reelle Zahlen als Schranken für den Betrag der zu konstruierenden stetigen Funktion f in gewissen (durch die F_n bestimmten) Teilmengen von J. Nun werden mit Hilfe von (ebenfalls ziemlich willkürlich wählbaren) konkaven (stetigen) Funktionen Folgen stetiger Funktionen gebildet, die gleichmäßig konvergieren; deren Limes ist das zu konstruierende f. Die Konstruktion ist so eingerichtet, daß jede stetige Funktion genau einmal erhalten wird. *Otto Haupt.*

Kolmogorov, A. N.: On the representation of continuous functions of several variables by superpositions of continuous functions of a smaller number of variables. Doklady Akad. Nauk SSSR **108**, 179—182 (1956) [Russisch].

The paper contains the following partial solution of the well known problem of Hilbert: Every continuous function of several real variables is a finite superposition of continuous functions of three real variables. In particular, each continuous function f of four variables is of the form

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{r=1}^{4} h_r\,(x_4, g_{1,r}\,(x_1, x_2, x_3),\ g_{2,r}\,(x_1, x_2, x_3)).$$

The problem whether every function of three variables is a superposition of functions of two variables, remains open. The answer to this problem is affirmative if some variables run through a dendrite instead of the interval. *R. Sikorski.*

Froda, Alexandre: Propriétés (à distance) des fonctions réelles dans un espace euclidien. C. r. Acad. Sci., Paris **242**, 1948—1951 (1956).

Es sei $a > 0$ eine feste reelle Zahl, R der n-dimen., euklidische Raum, $n > 1$, und $d(s, t)$ der Abstand zweier Punkte $s, t \in R$. Bezeichnen E, E', E'' Teilmengen von R, so sei $L(R, R; a)$ bzw. $L(R; a)$ die Familie aller Paare (E', E'') bzw. aller E derart, daß $0 < d(s', s'') < a$ oder $2a < d\,(s', s'')$ für alle $s' \in E', s'' \in E''$ bzw. für alle $s', s'' \in E$ $(s' \neq s'')$. Weiter sei $J(p; a)$ ein homothetisches [d. h. ein durch eine topologische Abbildung $y - p = b(x) \cdot (x - p)$, wobei $b(x) > 0$ reelle Zahl, vermitteltes] Bild der Einheitssphäre $a(x, p) = 1$ derart, daß $d \leq d\,(y, p) \leq 2\,a$ ist. Mit $\Phi(E; a)$ sei bezeichnet jedes System solcher $J(p; a)$ derart, daß zu jedem $p \in E$ genau ein $J(p; a)$ in $\Phi(E; a)$ existiert. Es sei f eine eindeutige, reelle, endliche Funktion mit R als Definitionsbereich. Ist $\bar{c}(f; J(p; a)) = \sup\,(f\,(y);\ y \in J\,(p; a))$ bzw. $\underline{c}\,(f; J\,(p; a)) = \inf\,(f\,(y);\ y \in J\,(p; a))$ gesetzt, so werde f als a-beschränkt bezeichnet, wenn $-\infty < \underline{c}\,(f; J\,(p; a)) \leqq \bar{c}(f; J\,(p; a)) < +\infty$ für alle $J\,(p; a)$ aus allen möglichen $\Phi(R; a)$. Bei festem, a-beschränktem f und gegebenen $\Phi_1 = \Phi(E_1; a)$, $\Phi_2 = \Phi(E_2; a)$ setze man $F_1 = \{x \,|\, f(x) \geq \bar{c}\,(f; J_1\,(x; a))\} =$ Menge aller $x \in E_1$, fü rdie $f(x) \geq \bar{c}\,(f; J_1\,(x; a))$ bezügl. aller $J_1\,(x; a) \in \Phi_1$. Ferner sei $F_2 = \{x \mid f\,(x) \leq \underline{c}\,(f; J_2\,(x; a))\}$, $G_1 = \{x \,|\, f(x) > \bar{c}\,(f; J_1\,(x; a))\}$, $G_2 = \{x \mid f(x) < \underline{c}\,(f; J_2\,(x; a))\}$. — Dann wird unter anderem gezeigt: (1) Die Mengen $G_1 \cap G_2$, $G_1 \cap F_2$ und $G_2 \cap F_1$ gehören zu $L(R; a)$. — (2) Ist f einwertig, so gilt $F_1 \cap F_2 \in L(R; a)$. — (3) Sind je zwei Punkte von $F = F_1 \cap F_2$ durch eine Kette von endlich vielen Punkten $q_i \in F$ verbindbar derart, daß $a < d\,(q_i, q_{i+1}) < 2\,a$, so ist f konstant auf F. — (4) Ist f konstant auf $F_1 \cup G_2$, so gilt $(F_1, G_2) \in L\,(R, R; a)$; entsprechend für (G_1, F_2) und (G_1, G_2). — Außerdem werden zwei weitere, weniger einfach formulierbare Sätze angegeben, deren einer sich auf die Konstanz von f auf gewisse andere Mengen bezieht. *Otto Haupt.*

Nevanlinna, Rolf: Über den Satz von Stokes. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I **219**, 24 S. (1956).

Die Stokessche Integralformel wird zunächst für eine alternierende Differentialform A der Stufe (Dimension) m, die auf einem $(m + 1)$-dimensionalen, in einem linearen Raum enthaltenen Simplex s_{m+1} stetig differenzierbar ist, bewiesen. Definiert man allgemeiner die Rotation (das äußere Differential) von A als die „Dichte" des als Funktion eines beliebigen Simplexes $\bar{s}_{m+1}$ aufgefaßten Integrals von A über den Rand von $\bar{s}_{m+1}$, so gilt die Stokessche Formel auch dann noch, wenn diese Dichte

in s_{m+1} gleichmäßig existiert und stetig ist. Mit dieser Definition von rot A hat die Gleichung rot $X = A$, wobei A in einem konvexen Gebiet G stetig und rot A in G vorhanden (aber nicht notwendig stetig) ist, dann und nur dann eine Lösung, wenn rot $A = 0$. *K. Krickeberg.*

Dvoretzky, Aryeh: On a theorem of J. L. Walsh. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 363—366 (1956).

Si tratta di una precisazione di un recente teorema di Walsh (questo Zbl. **53**, 228) il quale aveva provato che se $f(x)$ e $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sono funzioni p volte differenziabili nell'intervallo $a < x < b$, tali che (1) $f_n(x) \to f(x)$ in ogni punto di (a, b), allora assegnato un $x_0 \in (a, b)$, esiste una successione $x_n \in (a, b)$ per cui (2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ e (3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{(p)}(x_n) = f^{(p)}(x_0)$. L'A. crede di generalizzare questo risultato, affermando che al posto della (1) si può solo supporre

$$(1') \qquad \lim_{n\to\infty} \inf_{\substack{x\in I\\ y\in I}} |f_n(y) - f(x)| = 0$$

per ogni sottointervallo aperto I di (a, b) e, invece delle (2) e (3), si può richiedere l'esistenza di una successione $N = \{n\}$ di interi formata da due successioni (non entrambe necessariamente infinite) $N_1 \equiv \{n_1\}$ e $N_2 \equiv \{n_2\}$ tali che per ogni n_1 esista $x_{n_1} \in (a,b)$ per cui $f_{n_1}^{(p)}(x_{n_1}) = f^{(p)}(x_0)$ e, se N_1 è infinita: (2') $\lim\limits_{n_1\to\infty} x_{n_1} = x_0$, mentre, se N_2 è infinita, si abbia: (3') $\limsup\limits_{n_2\to\infty} \int\limits_{x_0-h}^{x_0+h} |f_{n_2}^{(p)}(x) - f^{(p)}(x_0)|\, dx = o(h)$ se $0 < h \to 0$. Inoltre, se x_0 non è un estremo relativo (nel senso debole) di $f^{(p)}(x)$, la successione N_2 può richiedersi che sia finita. La tesi dell'A. non è corretta, come può vedersi con esempi. Lo è si suppone che, detto $(\bar{a}, \bar{b})$ un sotto intervallo aperto di (a, b) contenente x_0, è $x_{n_1} \in (\bar{a}, b)$ e non si prescrive che debba valere la (z'). V'è da notare che la condizione (1') è più debole non solo della convergenza puntuale, ma anche della convergenza in misura e della convergenza su un insieme ovunque denso di punti. La Nota termina con alcune osservazioni, alcune delle quali mettono in luce ulteriori immediate generalizzazioni del risultato centrale a cui si è accennato. *L. Giuliano.*

Koksma, J. F.: Sur les suites $(\lambda_n x)$ et les fonctions $g(t) \in L^{(2)}$. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **35**, 289—296 (1956).

Soit $g(x+1) = g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, $\int\limits_0^1 g(x)^2\, dx < \infty$ et λ_n une suite croissante d'entiers positifs. Plusieurs auteurs ont donné récemment des conditions pour qu'on ait (*) $\frac{1}{N} \sum\limits_{n=1}^{N} g(\lambda_n x) \to \int\limits_0^1 g(x)\, dx$ presque partout lorsque $N \to \infty$ (Erdös, ce Zbl. **34**, 72; Koksma, ce Zbl. **58**, 49). L'A. prouve ici le théorème suivant. Soit $A(n, d; M, N)$ $(M \geq 0, N \geq 1$ entiers) le nombre des indices $m \neq n$ tels que $M + 1 \leq m \leq M + N$ et $(\lambda_m, \lambda_n) = d$. Soit $k = k(n)$ l'exposant pour lequel $2^k \leq n < 2^{k+1}$ et posons $P(n, d) = \max A(n, d; M, N)/N$, où le maximum est pris par rapport aux M, N avec $2^k \leq M + 1 \leq M + N < 2^{k+1}$. Soit finalement $\sum\limits_{h=-\infty}^{\infty} c_h e^{2\pi i h x}$ la série de Fourier de $g(x)$. Si

$$\sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\delta|h,\delta|\lambda_n} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k} A\left(n, \frac{\lambda_n}{\delta}; 0, 2^k\right) < \infty \text{ et } \sum_{h=1}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\delta|h,\delta|\lambda_n} n^{-1} P\left(n, \frac{\lambda_n}{\delta}\right) < \infty,$$

alors (*) est vrai p. p. La démonstration est basée sur un théorème antérieur de l'A. (loc. cit., Théorème 2). — Voici deux cas où les hypothèses du théorème sont vérifiées. 1. $\lambda_n = n^a$ (a entier > 0), $\sum\limits_{h=2}^{\infty} |c_h|^2 \sum\limits_{d^a|h} d^{-1} < \infty$ (pour $a = 1$ ce résultat a été démontré par l'A. loc. cit., Théorème 3); 2. $(\lambda_n, \lambda_m) = 1$ pour tout $m \neq n$,

$\sum_{h=2}^{\infty} |c_h|^2 \sum_{\lambda_n | h} n^{-1} < \infty$. — Faute d'impression: p. 293, ligne 8 du bas et p. 296, ligne 2 du haut: au lieu de $u_n(x) = \lambda_n x$, lire $u_n(x) = g(\lambda_n x)$. *J. Horváth.*

Williamson, R. E.: Multiply monotone functions and their Laplace transforms. Duke math. J. **23**, 189—207 (1956).

Eine Funktion $f(t)$ $(t > 0)$ heißt n-fach monoton $(n \geqq 2)$, wenn $(-1)^k f^{(k)}(t)$ nichtnegativ, nichtzunehmend und konvex für $k = 0, 1, \ldots, n-2$ ist. In Analogie zu dem Bernsteinschen Satz über vollmonotone Funktionen gilt: Notwendig und hinreichend dafür, daß $f(t)$ n-fach monoton ist, ist die Darstellbarkeit von $f(t)$ in der Form $f(t) = \int_0^\infty (1 - u\,t)_+^{n-1}\, d\gamma(u)$, wo $(t)_+ = t$ für $t \geqq 0$, $= 0$ für $t < 0$ und $\gamma(u)$ nichtabnehmend und nach unten beschränkt ist. — Indem man in dieser Darstellung die ganze Zahl n durch eine reelle Zahl $\alpha \geqq 1$ ersetzt, kann man die α-fache Monotonie definieren. Diese läßt sich andererseits auch mit Hilfe der Riemann-Liouvilleschen Derivierten $D^{\alpha-2}$ definieren. — Bezüglich der Laplace-Transformierten von $f(t)$ wird bewiesen: Notwendig und hinreichend dafür, daß eine nicht negative Funktion $F(s)$ $(0 < s < \infty)$ die Laplace-Transformierte einer α-fach monotonen $(\alpha \geqq 1)$ und in jedem endlichen Intervall integrablen Funktion $f(x)$ ist, sind die Bedingungen: (1) $D^\alpha[s^\alpha F(s)]$ ist vollmonoton und bei $s = 0$ integrabel, (2) $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$, (3) $\lim_{s\to\infty} s\,F(s)$ existiert. *G. Doetsch.*

Szekeres, G.: On a property of monotone and convex functions. Proc. Amer. math. Soc. **7**, 351—353 (1956).

Die Sätze sind: 1. Ist die Funktion $f(x)$ streng wachsend und zweimal stetig derivierbar in einem offenen Intervall (a, b) $(-\infty \leqq a < b \leqq \infty)$, dann kann sie als (1) $f(x) = \psi[\varphi(x)]$ mit streng wachsendem von unten bzw. von oben konvexem φ bzw. ψ dargestellt werden. 2. Ist $f(x)$ auch beschränkt, so kann in (1) $\varphi(x)$ dann und nur dann als beschränkt gewählt werden, wenn das (uneigentliche) Integral

$$\int_d^b \exp\left(\int_d^y \{\tfrac{1}{2}[f''(x) + |f''(x)|]/f'(x)\}\,dx\right) dy \quad (a < d < b)$$

konvergiert. Ein kurz skizziertes Beispiel zeigt daß dies nicht bei jedem beschränkten $f(x)$ zutrifft. — Im Beweise des Satzes 2. (S. 352, Z. 5. v. u.) sollte richtig $\frac{d}{dx}\log\varphi'(x) \geqq f''_+(x)\,f'(x) = \frac{d}{dx}\log\varphi'_0(x)$ stehen. (Briefliche Mitteilung des Verf.) *J. Aczél.*

Bellman, Richard: Converses of Schwarz's inequality. Duke math. J. **23**, 429—434 (1956).

Sind u und v konkave Funktionen im Intervall $[0, 1]$ mit $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$ und $\int_0^1 [u(x)]^2\,dx = \int_0^1 [v(x)]^2\,dx = 1$, so gilt $\int_0^1 u(x)\,v(x)\,dx \geqq 1/2$. Dieser auf Blaschke und Pick [Math. Ann. **77**, 277—302 (1916)] zurückgehende Satz wird hier auf einem Wege bewiesen, der auch eine zweidimensionale Verallgemeinerung zuläßt; dabei treten an Stelle der Konkavität die Bedingungen $\nabla^2 u \leqq 0$ und $\nabla^2 v \leqq 0$ im Innern des Definitionsbereiches von u und v neben dem Verschwinden von u und v auf dem Rande. *G. Aumann.*

Shenton, L. B.: A determinantal expansion for a class of definite integral. III. Generalised continued fractions. Proc. Edinburg math. Soc. **10**, 134—140 (1956).

(Teil II, dies. Zbl. **56**, 281.) Verf. untersucht die aus I (dies. Zbl. **53**, 38) folgende Determinantenentwicklung

$$\int_a^b \frac{w(x)}{P_n(x)}\,dx = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|a_0, \gamma_{01}, \ldots, \gamma_{s-1,s}|^2}{\Delta_{s-1}\Delta_s} = \lim_{s\to\infty} \frac{N_{s+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)}{D_{s+1}(z_1, z_2, \ldots, z_n)},$$

wo $a_s = \int_a^b \Theta_s(x)\,w(x)\,dx$, $\gamma_{r,s} = \int_a^b \Theta_r(x)\,\Theta_s(x)\,w(x)\,P_n(x)\,dx$, $\Delta_s = D_{s+1} =$