Werk

Titel: Verbände. Ringe. Körper

Ort: Berlin

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0067|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Dieudonné, Jean: Sur les générateurs des groupes classiques. Summa Brasil. Math. **3**, 149—178 (1955).

u étant un élément d'un groupe classique, l'A. détermine, en fonction du rang r de $w = u - e$ (e: unité du groupe), le nombre minimum N de transvections ou dilatations en lesquelles u est décomposable, dans chacun des cas suivants (notations du livre de l'A. „La Géométrie des groupes classiques" Berlin 1955): $GL_n(K)$, $N = r - 1$ ou r; $Sp_{2m}(K)$, $N = r$ ou $r + 1$; $Sp_{2m}(F_2)$, mêmes résultats pour N, mais les deux cas sont caractérisés autrement, $U_n(K, f)$ et $U_n(F_4)$, $N = r$ ou $r + 2$ quasi-symétries; $O_n(K, g)$, où K est de caractéristique 2 et $O_n(F_2, g)$, $N = r$ ou $r + 2$ transvections orthogonales. Les cas où N prend l'une des deux valeurs possibles indiquées sont entièrement caractérisés. *A. Revuz.*

Newman, Morris: An alternative proof of a theorem on unimodular groups. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 998—1000 (1955).

Let G denote the group of matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ with determinant unity and with integral elements a, b, c, d. Let for any integer $n > 1$, $G_0(n)$ be the congruence subgroup consisting of these matrices in G with $c \equiv 0 \pmod{n}$. Let $\bar{G}_0(n)$ denote the normalizer of $G_0(n)$ in G. Since $G \supset \bar{G}_0(n) \supset G_0(n)$, it follows from a theorem of the author's (cf. this Zbl. **71**, 25) that $\bar{G}_0(n) = G_0(m)$ for some $m \mid n$. In this paper the author proves that if $n = 2^a \cdot 3^b \cdot c$ where $(c, b) = 1$, then $m = n/\sigma$ where $\sigma = 2^u 3^v$ with $u = \min(3, [\frac{1}{2}a])$, $v = \min(1, [\frac{1}{2}b])$. *K. G. Ramanathan.*

Følner, Erling: On groups with full Banach mean value. Math. Scandinav. **3**, 243—254 (1955).

Im Raum aller beschränkten reellwertigen Funktionen $f(x)$ der Elemente x einer Gruppe G sei ein Funktional Mf erklärt. Es heißt Mf ein voller Banach-Mittelwert, wenn gilt 1. $\inf f(x) \leq M f \leq \sup f(x)$, 2. $Mf(a x b) = Mf(x)$, 3. $M\{\lambda f\} = \lambda M\{f\}$ für reelle λ, 4. $M\{f + g\} = M f + M g$. Verf. beweist: Dann und nur dann existiert auf einer Gruppe G ein voller Banach-Mittelwert, wenn für jedes k in $0 < k < 1$ und beliebige endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n \in G$ eine endliche Teilmenge $E \subset G$ angegeben werden kann, so daß $N(E \cap E a_i) \geq k N(E)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dabei bedeutet $N(\mathfrak{M})$ die Anzahl der Elemente in der betreffenden Menge $\mathfrak{M}$. — Beim Beweis benutzt Verf. ein Resultat seiner früheren Abhandlung (dies. Zbl. **56**, 27) und einen Satz über die Auflösbarkeit eines endlichen Systems linearer Ungleichungen mit einer endlichen Anzahl von Variablen (siehe z. B. Motzkin, dies. Zbl. **14**, 246). *W. Maak.*

Verbände. Ringe. Körper:

Shoda, Kenjiro: Bemerkungen über die Existenz der algebraisch abgeschlossenen Erweiterung. Proc. Japan Acad. **31**, 128—130 (1955).

Alles bezieht sich auf die allgemeinen algebraischen Systeme $\mathfrak{A}$, deren Theorie Verf. in einer Reihe von Arbeiten niedergelegt hat (s. insb. dies. Zbl. **49**, 159). Unter den auch früher gemachten „Grundvoraussetzungen" beweist Verf. hier als Hauptresultat den Satz: Ist jedes Untersystem von $\mathfrak{A}$ normal, so besitzt $\mathfrak{A}$ eine algebraisch abgeschlossene Erweiterung. Der Weg hierzu führt über den Beweis, daß für zwei Nullstellen α, β eines irreduziblen Polynoms $f(x)$ aus $\mathfrak{A}(x)$, die in einer algebraischen Erweiterung von $\mathfrak{A}$ liegen, $\mathfrak{A}(\alpha) = \mathfrak{A}(\beta)$ gilt. *L. Rédei.*

Peremans, W.: Algebraic systems, which are not closed with respect to their operations. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW **1955—002**, 7 p. (1955).

In this lecture some applications are considered of the concept of a „partial algebra", i. e. an algebraic system in which the operations are not necessarily everywhere defined (cf. B. H. Neumann, this Zbl. **56**, 29). By contrast, algebras in the usual sense are called „full". Fields are instanced as a type of system which is more

readily defined as a partial algebra with four (well known) operations rather than a full algebra with three operations. The embedding theorem of B. H. Neumann (l. c.) is then stated and proved in detail, including a proof of the relevant case of Steenrod's Lemma (starting from Zorn's Lemma). In conclusion Tarski's theorem on the embeddability of a generalized cardinal algebra in a cardinal algebra (this Zbl. **41**, 345) is pointed out as an example of a case to which Neumann's Theorem cannot be applied as it stands, since some of the operations in a cardinal algebra are not finitary. *P. M. Cohn.*

Andreoli, Giulio: Automorfismi in un algebra di Boole determinati da funzioni algebriche e trascedenti invertibili e gruppo dell'ipercubo. I. II. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **6**, Nr. 2, 3—9, Nr. 3, 3—7 (1955).

Verf. untersucht verschiedene Typen von Automorphismen in Booleschen Algebren. *L. Fuchs.*

Patterson, E. M.: Note on nilpotent and solvable algebras. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 37—40 (1955).

Es sei A eine nicht notwendig assoziative lineare Algebra über einem kommutativen Körper. Durch $A^1 = A$, $A^{i+1} = A^i A$ bzw. $A_1 = A$, $A_{i+1} = A A_i$ werden zwei Folgen von „Teilräumen" definiert. A heißt nilpotent, wenn es ein r mit $A^r = 0 = A_r$ gibt. Das kleinste r mit dieser Eigenschaft heißt die Klasse von A. Die Klasse eines nilpotenten A von der Dimension n ist trivialerweise höchstens $n + 1$. Verf. beweist, daß diese Klasse höchstens n ist, wenn $n > 1$ ist und $x^2 = 0$ für alle x in A gilt. n ist dabei bestmöglich. Eine andere Folge von Teilräumen ist durch $A^{(0)} = A$, $A^{(i+1)} = A^{(i)} A^{(i)}$ definiert. $A^{(i)}$ heißt die i-te abgeleitete Algebra. A heißt auflösbar vom Index r, wenn $A^{(r)} = 0$, aber $A^{(r-1)} \neq 0$. Verf. schätzt den Index einer auflösbaren Lieschen Algebra $(x^2 = 0,\ x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0)$ nach oben ab. Für Grundkörper der Charakteristik 0 ist dieser Index $\leqq [\log_2(n-2)] + 2$, $(n > 2)$, für Charakteristik p ist er $\leqq n - [n/3]$ oder $\leqq n - [(n+1)/4]$ je nachdem $p \neq 2$ oder $p = 2$. *E. Trost.*

Patterson, E. M.: Bounds for the indices of nilpotent and solvable Lie algebras. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **64**, Part II, 200—208 (1955).

Verf. untersucht die Zusammenhänge zwischen den Potenzen L^i und den Ableitungen $L^{(i)}$ einer nilpotenten Lieschen Algebra L (vgl. das vorstehende Referat). Als nilpotente Algebra ist L auflösbar und besitzt somit einen Index r. Verf. gibt eine obere Schranke für r, die von der Dimension m und der Klasse von L abhängt. Damit erhält er folgende Abschätzungen: $r \leqq 2$ für $m = 3, 4, 5$; $r \leqq 3$ für $6 \leqq m \leqq 10$; $r \leqq 4$ für $11 \leqq m \leqq 20$ und $r \leqq k + 1$ für $2^k + k + 1 \leqq m \leqq 2^{k+1} + k + 1$ $(k \geqq 4)$. Ist L nur auflösbar und nicht notwendig nilpotent, so gilt, falls die Charakteristik des Grundkörpers Null ist, $r \leqq 2$ für $m = 2, 3$; $r \leqq 3$ für $m = 4, 5, 6$; $r \leqq 4$ für $7 \leqq m \leqq 11$; $r \leqq 5$ für $12 \leqq m \leqq 21$ und $r \leqq k + 2$ für $2^k + k + 2 \leqq m \leqq 2^{k+1} + k + 2$ $(k \geqq 4)$. Damit wird die in der oben referierten Arbeit gefundene Schranke für r verbessert. Beispiele zeigen, daß die angegebenen Schranken für nilpotentes L für $m \leqq 10$, für nur auflösbares L für $m \leqq 11$ bestmöglich sind. *E. Trost.*

Tôgô, Shigeaki: On the derivations of Lie algebras. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **19**, 71—77 (1955).

Zur Liealgebra L sei $D(L)$ die Liealgebra aller Derivationen von L in L und $I(L)$ das zweiseitige Ideal aller inneren Derivationen. Mit R wird das Radikal von L und mit $D(L)\,|\,R$ bzw. $I(L)\,|\,R$ die Einschränkung der Derivationen aus $D(L)$ bzw. $I(L)$ auf R bezeichnet. Verf. beweist, daß eine Derivation aus $D(L)$ dann und nur dann eine innere Derivation ist, wenn sie für R mit einer inneren Derivation übereinstimmt: also gilt $D(L) = I(L)$ dann und nur dann, wenn $D(L)\,|\,R = I(L)\,|\,R$. Eine Liealgebra L zerfällt (splits) über L_1, wenn es eine Unteralgebra L_1 so gibt, daß $L = L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2 = 0$ gilt. Dann wird gezeigt: Notwendig und hinreichend

dafür, daß $D(L)$ über $I(L)$ zerfällt, ist jede der beiden folgenden Bedingungen: (1) $D(L) \mid R$ zerfällt über $I(L) \mid R$; (2) $D(L) \mid R$ zerfällt über $I(R)$. Damit wird ein Ergebnis von G. F. Leger (dies. Zbl. **50**, 262) verallgemeinert. Schließlich untersucht Verf. den Zusammenhang von L und $D(L)$ für Liealgebren, bei denen $I(L)$ halbeinfach ist. *F. Kasch.*

Divinsky, Nathan: On commuting automorphisms of rings. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. **49**, 19—22 (1955).

Ein einfacher Ring mit absteigendem Kettensatz für Rechtsideale ist ein Körper, wenn es einen nichttrivialen Automorphismus T mit $x\,x^T = x^T\,x$ für x aus dem Ring gibt. Dieser Satz bildet den Hauptsatz der Arbeit, und er wird mit Hilfe des Lemmas bewiesen, daß im allgemeinen $(y - y^T)\,(z\,y - y\,z) = 0$ für einen Automorphismus T mit der oben angegebenen Eigenschaft gilt. *K. Shoda.*

Kovács, István: Infinite rings without infinite proper subrings. Publ. math., Debrecen **4**, 104—107 (1955).

The following two theorems are proved. All proper left ideals of an infinite ring R are finite if and only if R is a division ring or a zero ring with Prüfer's quasicyclic group as its additive group. All proper subrings of an infinite ring R are finite if and only if R is a zero ring with Prüfer's quasicyclic group as its additive group or a division ring $R_p\,(q^\infty)$, being the union of all $\mathrm{GF}(p^{q^k})$ $(k = 1, 2, \ldots)$, p and q being primes, which are not necessarily distinct. The author remarks, that the second theorem follows from results of Šnejdmjuller (this Zbl. **38**, 174). *W. Peremans.*

Steinfeld, Ottó: Bemerkung zu einer Arbeit von T. Szele. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 479—484 (1955).

Szele (dies. Zbl. **39**, 27) gab einen elementaren Beweis für die Folgerung des Wedderburn-Artinschen Struktursatzes, daß ein Ring ohne Linksideale ($\neq 0$) ein Schiefkörper oder ein Zeroring p-ter Ordnung ist (p Primzahl), weshalb ein Ring mit Linksidealen ($\neq 0$) notwendig Rechtsideale ($\neq 0$) enthält. Verf. ergänzt letzteres bedeutend durch eine Konstruktion, die zu jedem Linksideal ($\neq 0$) vier (nicht stets verschiedene) Rechtsideale liefert, von denen mindestens eins $\neq 0$ ist. Ähnliche Untersuchungen folgen noch im Zusammenhang mit den von ihm (dies. Zbl. **52**, 269) eingeführten Quasiidealen. *L. Rédei.*

Moisil, Gr. C.: Une définition des nombres idéaux. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Secţ. Şti. mat. fiz. **7**, 831—840, russ. und französ. Zusammenfassg. 840—841 (1955) [Rumänisch].

L'A. fonde la théorie des idéaux dans un domaine d'intégrité $\mathfrak{O}$ sur les deux relations suivantes: $F(\omega_0, \ldots, \omega_r)$ qui est valable s'il existe un élément $\lambda_0 \in \mathfrak{O}$ tel que $\lambda_0 \not\equiv 0 \pmod{\omega_0}$, $\lambda_0\,\omega_1 \equiv \cdots \equiv \lambda_0\,\omega_r \equiv 0 \pmod{\omega_0}$, et $D(\omega_0, \ldots, \omega_r \mid \theta)$ qui est valable si pour tout $\lambda \in \mathfrak{O}$, $\lambda\,\omega_1 \equiv \cdots \equiv \lambda\,\omega_r \equiv 0 \pmod{\omega_0}$ entraîne $\lambda\,\theta \equiv 0 \pmod{\omega_0}$. Autoreferat.

Lascu, Alexandru: Sur la division des nombres entiers. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Secţ. Şti., mat. fiz. **7**, 507—515, russ. und französ. Zusammenfassg. 514—515 (1955) [Rumänisch].

En considérant l'ensemble des applications $\mathfrak{N}$ d'un anneau $\mathfrak{O}$ dans un ensemble inductif E (c'est un ensemble partiellement ordonné dont chaque sousensemble totalement ordonné contient l'élément premier) pour lesquelles on a $\mathfrak{N}(0) < \mathfrak{N}(a)$ si $a \in \mathfrak{O}$, $a \neq 0$, l'A. donne une définition équivalente à la définition de l'anneau euclidien et une autre équivalente à la définition de l'anneau à idéaux principaux. Les voici: un anneau euclidien $\mathfrak{O}$ est un anneau commutatif, sans diviseurs de zéro pour lequel à chaque $\mathfrak{N}$ et à chaque paire $a, b \in \mathfrak{O}$, $b \neq 0$, on peut faire correspondre $c, q \in \mathfrak{O}$ ainsi que l'on a $\mathfrak{N}(b) \leq \mathfrak{N}(c)$ et $\mathfrak{N}(a - c\,q) < \mathfrak{N}(b)$; un anneau $\mathfrak{O}$ à idéaux principaux est un anneau commutatif, sans diviseurs de zéro pour lequel à chaque $\mathfrak{N}$ et à chaque paire $a, b \in \mathfrak{O}$, $b \neq 0$, on peut faire correspondre $c, \mu, \nu \in \mathfrak{O}$ ainsi que l'on a $\mathfrak{N}(b) \leq \mathfrak{N}(c)$, $\mathfrak{N}(a\,\nu - c\,\mu) < \mathfrak{N}(b)$ et c divise a immédiatement qu'il divise νa.

On remarque qu'on peut donner les démonstrations sans avoir recours au théorème de Zermelo et que ce travail contient la démonstration du fait que tout anneau du type εII est, en même temps, anneau du type εI, problème que V. Lemmlejn a proposé sans avoir la solution (ce Zbl. **56**, 264). *C. P. Popovici.*

Beyer, Gudrun: Erweiterungsproblem galoisscher Körper und Zerfall einfacher Algebren. J. reine angew. Math. **195**, 215—220 (1955).

Es sei $\mathfrak{N}$ ein Normalteiler einer endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{g}$ die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$. Schließlich sei Ω/Ω_0 eine galoissche Körpererweiterung von nicht in der Ordnung von $\mathfrak{N}$ aufgehender Charakteristik mit der Galoisgruppe $\mathfrak{g}$ und N bezeichne den dann halbeinfachen Gruppenring von $\mathfrak{N}$ über Ω. Der für die Einbettungstheorie galoisscher Algebren wichtige verschränkte Gruppenring von $\mathfrak{G}$ mit Ω/Ω_0 ist diejenige Algebra G, die über Ω die Elemente aus $\mathfrak{G}$ als Relativbasis besitzt und in der das Rechnen durch die Vorschrift $a\,S = S\,a^s$ (für alle a aus Ω und alle S aus $\mathfrak{G}$) erklärt ist, wo s die Restklasse von S mod $\mathfrak{N}$ bezeichnet. In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **57**, 29) hat Ref. das Zerfallen von G durch die Existenz einer zu $\mathfrak{g}$ isomorphen Relativbasis von G über N definiert. Verf. weist die Übereinstimmung dieses formaleren Zerfallsbegriffs mit einem mehr inhaltlichen von W. Jehne (dies. Zbl. **48**, 26) eingeführten Zerfallsbegriff nach, der seinerseits für die Spezialfälle, daß $\mathfrak{N}$ abelsch ist oder daß Ω die absolut irreduziblen Charaktere von $\mathfrak{N}$ enthält, das gewöhnliche Zerfallen der Algebra G über ihrem Zentrum bedeutet. — Als Folgerung ergibt sich ein strukturtheoretischer Beweis eines Eindeutigkeitssatzes, für den Verf. bereits früher (dies. Zbl. **55**, 267) einen rechnerischen Beweis gegeben hat. *P. Wolf.*

Robinson, Abraham: On ordered fields and definite functions. Math. Ann. **130**, 257—271 (1955).

Eine Anwendung des Prädikatenkalküls auf die Theorie der formal-reellen Körper und der definiten Funktionen. Eine Aussage

$$X = (x_1) \cdots (x_m)\,(\exists\, y_1) \cdots (\exists\, y_n)\, Z\,(x_1, \ldots, x_m;\, y_1, \ldots, y_n)$$

des Prädikatenkalküls heiße ein (AE)-Axiom, wo Z quantorenfrei ist. Verf. beweist zunächst folgendes Einbettungsprinzip (E. P.): Zu einem Modell (einer Realisierung) M eines (AE)-Axiomensystems K existiert stets eine Erweiterung von M, die außer K noch X erfüllt, wenn nur für alle $\{a_1, \ldots, a_m\} \subset M$ diejenigen Erweiterungen von M existieren, die außer K noch $(\exists\, y_1) \cdots (\exists\, y_n)\, Z\,(a_1, \ldots, a_m;\; y_1, \ldots, y_n)$ erfüllen. Eine multiplikative Halbgruppe C ohne Null aus einem (kommutativen) Körper K heißt ein Kern (core) von K. Wenn aus einer beliebigen Gleichung von der Form $\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i^2 = 0$ (n ist eine beliebige natürliche Zahl) stets $y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ folgt, wo $x_i \in C$ und $y_i \in K$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind, so heißt K C-formal-reell (C-f. r.). (Ein gewöhnlicher formal-reeller Körper ist ein C-f. r. Körper mit $C = \{1\}$.) Ein Körper L heißt quadratisch-abgeschlossen (q.-ab.), wenn für ein beliebiges x aus L mindestens eines der Elemente x und $-x$ Quadratelement aus L ist. Ist ein Element d aus einem C-f. r. Körper K niemals von der Form $-d = \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i^2$ $(a_i \in C,\ b_i \in K)$, so kann man mit Hilfe des E. P. die Existenz einer C-f. r. Erweiterung von K beweisen, welche q.-ab. ist und $\sqrt{d}$ enthält. Ein q.-ab., C-f. r. Körper K läßt sich stets so anordnen, daß alle und nur die von Null verschiedenen Quadratelemente aus K positiv sind; bei dieser Anordnung von K wird jedes Element aus C positiv. Umgekehrt ist ein angeordneter Körper K mit C als Kern, in dem jedes Element aus C positiv ist, sicher C-f. r. Ein Element a aus einem Körper K mit C als Kern heißt C-total-positiv, wenn a für alle diejenigen Anordnungen von K positiv bleibt, nach denen jedes Element aus C positiv ist. Verf. verallgemeinert den von Hilbert, Landau und Artin bewiesenen Satz auf folgende Weise: Ein Element $a \neq 0$ aus einem C-f. r. Körper K ist dann und nur dann C-total-

positiv, wenn a von der Form $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i^2$ $(a_i \in C,\ b_i \in K)$ ist. Ist M ein angeordneter Körper und $K = M(x_1, \ldots, x_n)$ ein rationaler Funktionenkörper von M mit den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$, so legen wir in K einen Kern C fest, welcher kein Nullelement, aber alle positiven Elemente aus M enthält. Ein Element $f(x_1, \ldots, x_n)$ aus K heißt C-definit, wenn für ein beliebiges Wertesystem $\{a_1, \ldots, a_n\}$ aus M stets $f(a_1, \ldots, a_n) \lneq 0$ ist, falls $g(a_1, \ldots, a_n) > 0$ ist, wo $g(x_1, \ldots, x_n)$ alle Elemente aus dem Kern C durchläuft; insbesondere heißt $f(x_1, \ldots, x_n)$ C-total-definit, wenn $f(x_1, \ldots, x_n)$ in jedem angeordneten Erweiterungskörper von M, dessen Anordnung eine Fortsetzung der Anordnung von M ist, C-definit ist. Ist ein Element $f(x_1, \ldots, x_n)$ aus K C-total-definit, so ist $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} g_i(x_1, \ldots, x_n)\, h_i(x_1, \ldots, x_n)^2$, wo $g_i(x_1, \ldots, x_n) \in C$ und $h_i(x_1, \ldots, x_n) \in K$ $(i = 1, \ldots, r)$ sind. Verf. bemerkt ferner, daß die letzte Tatsache für ein C-definites Element $f(x_1, \ldots, x_n)$ aus K im allgemeinen nicht gültig ist; wenn aber der angeordnete Körper M reell-abgeschlossen und der Kern C aus allen und nur den positiven Elementen aus M besteht, so gilt die letzte Tatsache auch für ein C-definites Element aus $M(x_1, \ldots, x_n)$. Weiter beweist Verf. unter Benutzung des Prädikatenkalküls folgenden Satz: Es sei ein Körper M reellabgeschlossen oder archimedisch angeordnet. Ferner seien $f(x_1, \ldots, x_n), g_i(x, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, r)$ Elemente aus $M(x_1, \ldots, x_n)$. Gilt dann $f(a_1, \ldots, a_n) \lneq 0$ für alle diejenigen Wertesysteme $\{a_1, \ldots, a_n\}$ aus M, für die $g_i(a_1, \ldots, a_n) > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sind, so besteht die Gleichung

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j \left(\prod_{i=1}^{r} g_i(x_1, \ldots, x_n)^{\varepsilon(i,j)} \right) c_j\, h_j(x_1, \ldots, x_n)^2,$$

wo die $c_j > 0$, die $h_j(x_1, \ldots, x_n)$ Elemente aus $M(x_1, \ldots, x_n)$ sind und die $\varepsilon(i, j)$ entweder 0 oder 1 bezeichnen. *M. Moriya.*

Herstein, I. N.: A theorem concerning three fields. Canadian J. Math. **7**, 202—203 (1955).

Let $F \subset K \subset L$ be three fields (proper inclusions). Suppose that for every element x in L there exists a nontrivial polynomial $f_x(t)$ over F such that $f_x(x)$ is in K. The paper proves: then either (a) L is purely inseparable over K, or (b) L (whence K) is algebraic over F. Under the assumption that L is neither purely inseparable over K nor algebraic over F, a subfield $\tilde{L}$ of L is constructed, for the proof, such that $\tilde{K} = \tilde{L} \cap K$ is a rational function field in one variable over F and $\tilde{L}$ is a finite separable proper extension of $\tilde{K}$. Then a modification of a valuation lemma of Nagata-Nakayama-Tuzuku (this Zbl. **52**, 32) is applied to get a contradiction, the modification being to arrange the valuations trivial on F.

T. Nakayama.

Kasch, Friedrich: Bemerkung zum Hauptsatz der Galoisschen Theorie für Schiefkörper. Arch. der Math. **6**, 420—422 (1955).

The paper shows that an argument of Ninot (this Zbl. **56**, 32) can be applied to a skew field K and its automorphism group $\mathfrak{G}$ to the effect to show that if the ring generated by $\mathfrak{G}$ and the left multiplication ring K_l of K has a finite rank over K_l then, and only then, the right rank of K over the fixed field H of $\mathfrak{G}$ is finite, and these ranks are then equal. This gives a foundation of the Galois theory for skew fields which makes no use of the Bourbaki-Jacobson density theorem.

T. Nakayama.

Cohn, Richard M.: Specializations over difference fields. Pacific J. Math. **5**, Suppl. II, 887—905 (1955).

Es sei F ein Differenzenkörper und $G, \bar{G}$ seien zwei Erweiterungen von F. Weiter seien $S = \{\alpha_i : i \in I\}$ und $\bar{S} = \{\bar{\alpha}_i : i \in I\}$ Teilmengen von G bzw. $\bar{G}$ (I beliebige Indexmenge).

Die Elemente $\bar{\alpha}_i$ heißen dann eine Spezialisierung der α_i über F, wenn es einen Homomorphismus des Differenzenringes $F\{S\}$ auf $F\{\bar{S}\}$ gibt, der F elementweise fest läßt und die α_i auf die $\bar{\alpha}_i$ abbildet. Es sei nun $\mathfrak{S}$ ein System algebraischer Differenzengleichungen mit Koeffizienten von F, in dem außerdem noch gewisse Parameter λ_i auftreten. Ferner besitze $\mathfrak{S}$ eine Lösung in einer Erweiterung von $F\langle\{\lambda_i\}\rangle$. Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei Systemen algebraischer Gleichungen oder algebraischer Differentialgleichungen gilt hier nicht der Satz, daß das aus $\mathfrak{S}$ durch Spezialisierung der λ_i entstehende System ebenfalls Lösungen besitzt, sofern nur die spezialisierten Werte der λ_i so gewählt sind, daß sie ein gewisses Differenzenpolynom nicht annullieren. Der Grund für dieses abweichende Verhalten besteht darin, daß der Differenzenkörper F unverträgliche Erweiterungen besitzen kann; d. h. Erweiterungen, die nicht in eine einzige Erweiterung isomorph eingebettet werden können. Verf. zeigt, daß der erwähnte Satz jedoch seine Gültigkeit behält, wenn die Spezialisierung der Parameter gewissen Verträglichkeitsbedingungen unterworfen wird, die im Falle eines algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers von selbst erfüllt sind. Bei diesen Untersuchungen nimmt die zentrale Stellung der folgende Satz über die Fortsetzbarkeit einer Spezialisierung ein, dessen Beweis den größten Teil der Arbeit beansprucht: Es sei $H = F\langle\beta_1, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\rangle$ eine Erweiterung des Differenzenkörpers F mit der Eigenschaft, daß der Transzendenzgrad (im Sinne der Differenzenkörper: transformal transcendence) von $F\langle\beta_1, \ldots, \beta_q\rangle$ über F gleich q ist. Dann gibt es ein $\delta \neq 0$ in $F\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_q$ eine Spezialisierung von $\beta_1, \ldots, \beta_q$ über F, für die $F\langle\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_q\rangle$ und H verträgliche Erweiterungen von F sind und die δ nicht auf Null spezialisiert, so kann diese Spezialisierung fortgesetzt werden zu einer Spezialisierung $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_q, \bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_p$ von $\beta_1, \ldots, \beta_q, \gamma_1, \ldots, \gamma_p$ über F. Den Abschluß der Arbeit bildet der Beweis des folgenden Satzes: In $F\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ gibt es ein $\gamma \neq 0$ mit folgender Eigenschaft: Ist $\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n$ eine Spezialisierung von $\eta_1, \ldots, \eta_n$ über F, bei der γ nicht auf Null abgebildet wird, so sind die Erweiterungen $F\langle\eta_1, \ldots, \eta_n\rangle$ und $F\langle\bar{\eta}_1, \ldots, \bar{\eta}_n\rangle$ verträglich. *H.-J. Kowalsky.*

Cohn, Richard M.: Finitely generated extensions of difference fields. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 3—5 (1955).

The author shows that for three difference fields J, K, L, where $J \subseteq K \subseteq L$, K is a finitely generated extension of J if L is a finitely generated extension of J.
F. Levin.

Cohn, Richard M.: On the intersections of the components of a difference polynomial. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 42—45 (1955).

The author defines a component of a difference manifold to be a maximal submanifold of the difference manifold. The author then proves that the separants of a difference polynomial are annulled by solutions common to two distinct components of the polynomial. The proof makes use of the following result for ordinary polynomials: let K be a field and $K_1 = K[u_1, \ldots, u_q;\ x_1, \ldots, x_p]$ be formed by the adjunction of the indeterminates u_i, x_j, If $F_1, \ldots, F_p \in K_1$ are chosen so that F_j is free of x_k, $k > j$, then any zero of $F_1, \ldots, F_p$ which annuls no formal partial derivative $\partial F_j/\partial x_j$ belongs to just one component of $\{F_1, \ldots, F_p\}_0$, the perfect polynomial ideal generated by the F_i, and this component is of dimension q.
F. Levin.

Epstein, Marvin P.: An existence theorem in the algebraic study of homogeneous linear ordinary differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 33—41 (1955).

The author considers an ordinary differential field F of characteristic zero whose elements are assumed to lie in Ω, a universal extension field of F, whose existence has been shown by Kolchin (this Zbl. **52**, 273). Let $L(y)$ be a homogeneous linear ordinary differential polynomial of order n with coefficients in F. A fundamental