Let $Q(k, n)$ be a general recursive function which is universal for the primitive recursive functions and let $Y = E_k \left[\overline{\lim_{n\to\infty}} Q(k, n) = \infty \right]$ be the set of all numbers k which (via Q) represent primitive recursive functions with infinite domains of values. Mostowski has shown that Y is a non recursively enumerable $\Pi\,\Sigma$ set and has asked whether Y can be a $\Sigma\Pi$ set. The author shows that for one particular Q this is not the case.
J. C. Shepherdson.

Mostowski, A.: Examples of sets definable by means of two and three quantifiers. Fundamenta Math. 42, 259—270 (1955).

The author investigates the sets of those integers y for which $\lim_{x\to\infty} 10^{-x}\,\alpha(x, y)$ exists and belongs to a preassigned class of real numbers, where α is a primitive recursive function. A typical result is that the family of sets $E_y\,[\lim_{x\to\infty} 10^{-x}\,\alpha(x, y)$ exists and is equal to 0] obtained by letting α run through all primitive recursive functions, coincides with $\mathfrak{Q}_3^{(1)}$ i. e. the family of sets having the form

$$E_y\,\Pi_u\,\Sigma_v\,\Pi_w\,(\Phi\,(y, u, v, w) = 0)$$

where Φ is recursive. Many results of this kind are obtained. They yield effective examples of sets definable by means of two or three quantifiers but not definable by a smaller number of them.
J. C. Shepherdson.

Algebra und Zahlentheorie.

● **Kochendörffer, Rudolf: Einführung in die Algebra.** (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 18.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955. XII, 316 S. DM 23,60.

Die nicht ganz leichte Aufgabe, ein einführendes Lehrbuch in die Algebra zu schreiben, welches den Leser von allgemein bekannten Grundlagen aus „in Etappen und in Anlehnung an das Gewohnte in die abstrakten Höhen der modernen Algebra" hinaufführt, ist hier in origineller und ausgezeichneter Weise gelöst worden. Denn in diesem wie auch in ähnlichen Fällen ist es notwendig, einen Kompromiß zwischen zwei einander widerstreitenden Forderungen zu schließen, deren erste nach der induktiven Methode verlangt, um durch Sammlung von vorbereitenden Beispielen das allmählich aufhellende Verständnis beim ersten Studium zu erleichtern, während die zweite die deduktive Methode bevorzugt, wonach aus wenigen klaren Begriffen und Axiomen die allgemeine Theorie und ihre Spezialisierungen einheitlich und in größter Übersichtlichkeit abgeleitet werden sollten. Der Weg vom Besonderen zum Allgemeinen ist der ursprünglich vom forschenden Geiste mühsam aufgefundene Pfad zur Erkenntnis, während der umgekehrte Weg vom Allgemeinen zum Besonderen der die Unwissenheit belehrenden Weisheit besonders angemessen ist. Der erste führt zum Verständnis der Wissenschaft, der zweite zu ihrer Beherrschung. Der erste Weg verbirgt nicht die Mängel des mühevoll und in vielen Irrwegen fortschreitenden menschlichen Geistes, während der zweite nach Abschleifung aller Unvollkommenheiten nur mehr die kristallene Form der logischen Zusammenhänge offenbart. — Die vorliegende Einführung ist in drei Teile gegliedert, deren erster, von gewissen Grundbegriffen wie Mengen und algebraischen Strukturen ausgehend, zunächst den Ring der ganzen rationalen Zahlen abhandelt, woran sich eine kurz gefaßte Theorie der Gruppen und der Ringe, speziell der Polynomringe anschließt. Der zweite Teil enthält Körper und Körpererweiterungen, die Auflösung algebraischer Gleichungen auf Grund der Galoisschen Theorie und ein letztes Kapitel über Bewertungen, welches der gegenwärtigen Überbewertung dieser Theorie auf Rechnung zu setzen ist. Im dritten Teil werden Darstellungsmoduln eingeführt und daraus einige Sätze der Matrizenrechnung abgeleitet; es folgen zwei Kapitel über Algebren und deren Darstellungen. Eine Aufgabensammlung und ein aufschlußreiches Literaturverzeichnis beschließen dieses sich auch in Druck und Ausstattung vorzüglich präsentierende Lehrbuch. *W. Gröbner.*

● **Miller, Frederic H.: College algebra and trigonometry. A basic integrated course.** 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, Inc. 1955. 342 p. $ 4,50.

Schulze, Herbert: Über die Reihenentwicklung des Ausdruckes $\alpha^n + \beta^n$. Z. angew. Math. Mech. **35**, 462—463 (1955).

Kombinatorik:

Lindgren, H.: From necklaces to number theorems. Math. Gaz. **39**, 13—19 (1955).

Verf. bestimmt die Anzahl der (geschlossenen) Perlenketten, wenn gefordert wird, daß keine zwei aneinanderstoßenden Perlen dieselbe Farbe haben sollen, $N + 1$ Farben zur Verfügung stehen und die Perlenanzahl der Kette gleich n sei. Die gesuchte Anzahl ermittelt sich leicht rekursiv zu $N^n - (-1)^n N$. Verf. untersucht weiterhin Teilbarkeitseigenschaften dieses Wertes. Ist z. B. $n = p$ eine Primzahl, so ergibt sich, da Ketten, deren Perlen sich nur durch eine zyklische Vertauschung unterscheiden, identisch sind, $N^p - N \equiv 0\ (p)$, also der kleine Fermatsche Satz. Für beliebiges n gewinnt Verf. die bekannte Kongruenz $\sum_{d|n} \mu(d)\, N^{n/d} \equiv 0\ (n)$. — Ist $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ die kanonische Zerlegung von n und bildet man ein Polynom der Form $\sum a_{\beta_1, \ldots, \beta_s}\, p_1^{\beta_1} \cdots p_s^{\beta_s} = \sum a\, t$ (kurz geschrieben), wobei $\beta_1, \ldots, \beta_s \geqq 0$ beliebig ganze Zahlen sind, so behauptet Verf. „Aus (1) $\sum a\, t \equiv 0\ (\varphi(n))$ folgt $\sum a\, N^t \equiv 0\,(n)$ für alle N und umgekehrt". Hierbei sei „(1) nicht lediglich eine numerisch richtige Relation, sondern eine algebraische", was Ref. unklar blieb. Falls man interpretieren soll, daß (1) für alle n gültig sei, so wird der Begriff des Polynoms $\sum a\, t$ unklar. — Weiterhin betrachtet Verf. die Anzahl solcher Ketten, in denen außer obigen Forderungen noch die vorletzte Perle eine andere Farbe als die erste und die letzte Perle eine andere als die zweite hat. *H. Ostmann.*

Hillman, Abraham P.: On the number of realizations of a Hasse diagram by finite sets. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 542—548 (1955).

Sei Σ eine endliche Menge von n Dingen. Gefragt wird nach der Anzahl von Systemen von Teilmengen von Σ mit gegebenem Hasse-Diagramm. Im Anschluß an ein (vermutlich unpubliziertes) Ergebnis von G. N. Raney für Systeme von zwei Teilmengen, gibt Verf. die Lösung dieses Problems für Systeme von weniger als fünf Teilmengen für beliebiges n und alle möglichen Hasse-Diagramme. *G. H. Müller.*

Lineare Algebra. Polynome. Formen. Invariantentheorie:

● **Mirsky, L.: An introduction to linear algebra.** Oxford: At the Clarendon Press 1955. XI, 433 p. 35 s. net.

Dieses Lehrbuch will eine systematische Einführung in die lineare Algebra geben, die ohne algebraische Vorkenntnisse gelesen werden kann. Diese Absicht wird voll erreicht. Als Skalarbereich wird dabei stets ein Unterkörper des Körpers der komplexen Zahlen genommen. Die Kapitelüberschriften geben einen ungefähren Eindruck von der Fülle des behandelten Stoffes: Determinants. Vector spaces and linear manifolds. The algebra of matrices. Linear operators. Systems of linear equations and rank of matrices. Elementary operations and the concept of equivalence. The characteristic equation. Orthogonal and unitary matrices. Groups. Canonical forms. Matrix analysis. Bilinear, quadratic and hermitian forms. Definite and indefinite forms. Die engen Beziehungen zur Geometrie sind an mehreren Stellen ausführlich erläutert. Zahlreiche, den einzelnen Kapiteln angefügte Aufgaben dienen weniger dem Einüben als vielmehr der Ergänzung des Stoffes. —

Das Beginnen mit den Determinanten läßt einen zuerst befürchten, der Verf. wolle sich eng an längst überholte Auffassungen von linearer Algebra halten. Erfreulicherweise ist das nicht der Fall, und die Voranstellung der Determinanten entspricht wohl nur dem Wunsch, sich einer gewissen Unterrichtstradition anzupassen. Allerdings werden im folgenden die nichtinvarianten Begriffe (z. B. Matrix) vor den invarianten (z. B. lineare Abbildung, hier: linear operator) behandelt; doch treten dadurch die letzteren durchaus nicht in den Hintergrund. Die verschiedenen Vor- und Nachteile beider Begriffsarten werden sehr gut auseinandergesetzt. Den Namen „vector space" behält der Verf. den Räumen aus Zahlen-n-tupeln vor; das, was man in der Algebra sonst meistens „Vektorraum" nennt, wird als „linear manifold" bezeichnet. In Kap. IV vermißt man den Satz, daß dem Produkt zweier linearer Abbildungen bei passender Basiswahl das Produkt ihrer Matrizen entspricht. Eine determinantenfreie Theorie der linearen Gleichungssysteme fehlt; eine solche wird nur an einem Beispiel kurz angedeutet. Am Schluß von Kap. VI findet man eine axiomatische Kennzeichnung des Determinantenbegriffs. Das Gruppenkapitel behandelt auch Gruppen singulärer Matrizen und den Begriff des invarianten Teilraumes bei einer Gruppe linearer Abbildungen. Die Herleitung der Jordanschen Normalform würde nach Meinung des Verf. aus dem Rahmen des Buches fallen; er begnügt sich daher in Kap. X mit einer Normalform aus diagonal aneinandergereihten Dreiecksmatrizen, von denen jede nur einen einzigen Eigenwert hat. — Auf die folgende Inkonsequenz sei noch hingewiesen, obwohl sich diese in ähnlicher Form auch in vielen anderen Lehrbüchern findet. Auf S. 169 wird zwar ausdrücklich zwischen function und functional value unterschieden; trotzdem machen andere Stellen des Buches (z. B. S. 58, 113, 114, 255, 353) diesen Unterschied nicht. So erscheinen denn die bilinearen Operatoren als Funktionswerte und nicht als Abbildungen. Auf S. 342 macht sich die Nichtunterscheidung von Funktion und Funktionswert unangenehm bemerkbar und veranlaßt den Verf. bei Theorem 11. 3. 2 zu einer besonderen Erläuterung. Vermutlich muß man diese Nichtunterscheidung auch für den merkwürdigen Satz auf S. 205 verantwortlich machen: The possibility of expressing every rational function of a matrix as a polynomial marks a vital point of difference between matrix algebra and the algebra of numbers. *G. Pickert.*

● **Monjallon, Albert: Initiation au calcul matriciel. Matrices, déterminants, applications à l'algèbre et à la géométrie analytique.** Paris: Librairie Vuibert 1955. 131 p. 700 F.

Das für Vorbereitungsklassen zum eigentlichen Hochschulstudium der Naturwissenschaften bestimmte Büchlein gibt eine leicht faßliche, klar und sauber geschriebene Einführung in den Gegenstand. Es behandelt den Matrizenkalkül, Determinanten, Theorie der linearen Gleichungen, das Wichtigste zum Eigenwertproblem, Anwendungen aus der Geometrie sowie einen Abschnitt über quadratische Formen. *R. Zurmühl.*

● **Cahen, G.: Éléments de calcul matriciel.** Paris: Dunod 1955. VI, 94 p., 18 illustr. Fr. 540.

Das Heft enthält eine einführende, auf die Bedürfnisse des Ingenieurs zugeschnittene Darstellung der Matrizenalgebra, die in vier Kapitel gegliedert ist: Matrizenkalkül, Eigenwerte und Eigenvektoren, Funktionen einer Matrix, Anwendung auf elektrische Netze. Der Begriff der Matrix wird an Hand der linearen Transformationen eingeführt, bei der Erörterung der Eigenwerte und der Eigenvektoren beschränkt sich Verf. auf den Fall, daß die charakteristische Gleichung der Matrix lauter einfache Wurzeln besitzt, und bringt ein elementares Iterationsverfahren zur Bestimmung der Eigenwerte. Im Anschluß an die Hamilton-Cayleysche Gleichung werden einige elementare Funktionen einer Matrix studiert. Das letzte Kapitel handelt von Anwendungen auf die Vierpoltheorie, auf elektrische Leitungen mit gleichmäßig verteilten Kennwerten und auf die allgemeine Theorie der elektrischen Netze. Ein ziemlich umfangreicher Anhang bringt für jedes Kapitel zahlreiche gut ausgewählte Übungsaufgaben. *W. Quade.*

Conte, Luigi: Sui determinanti ortosimmetrici di funzioni circolari. Archimede **7**, 270—271 (1955).

Ref. hatte gezeigt (dies. Zbl. **56**, 251), daß eine Hankelsche Determinante $A^{(m)}(\alpha, \beta; x)$ der Ordnung $m \geqq 3$ mit den Elementen $a_{rs} = \sin\,[\alpha+(r+s-2)\beta]\,x$, wo $r, s = 1, 2, \ldots, m$, bei festen reellen α, β den Wert 0 hat, und ebenso die entsprechende, mit Cosinus statt der Sinus gebildete Determinante $B^{(m)}(\alpha, \beta; x)$. Verf. gibt hier einen sehr kurzen Beweis dafür, der bei ungeradem m so verläuft: Fügt man die ersten $m-1$ Spalten zur letzten hinzu und ersetzt jede dieser m Summen nach bekannter Winkelformel durch ihren eingliedrigen Wert, so stimmt die neue letzte Spalte mit einer früheren überein. Bei geradem m ähnliches Verfahren, mit Bevorzugung der vorletzten Spalte. — Verf. gibt zwei weitere trigonometrische Determinanten vom Werte 0 an, die man erhält, wenn man in $A^{(m)}$, $B^{(m)}$ von jeder Spalte die vorhergehende abzieht. *L. Koschmieder.*

Mitrinovitch, Dragoslav S.: Sur le déterminant de Stern généralisé. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **7**, 153—160, serbo-kroat. Zusammenfassg. 160 (1955).

Let $D_{n,k}$ denote the n-th order determinant whose m-th row is 1, $\binom{r_m}{1}, \ldots, \binom{r_m}{k-1}, \binom{r_m}{k+1}, \ldots, \binom{r_m}{n}$, let V_n denote the alternant $|r_s^{n-t}|$ and σ_k denote the k-th elementary symmetric function of $r_1, r_2, \ldots, r_n$. The author shows that

$$[1!\,2!\cdots(k-1)!\,(k+1)!\cdots n!]\,D_{n,k} = V_n \sum_0^{n-k} \lambda_{ki}\,\sigma_{n-k-i}$$

where

$$\lambda_{pq} = \lambda_{p+1,q-1}\,S^p_{p+1} - \lambda_{p+2,q-2}\,S^p_{p+2} + \cdots + (-1)^{q+1}\,\lambda_{p+q,0}\,S^p_{p+q}$$

S^i_j being Stirling numbers of the first kind. Explicit forms are given for $\lambda_{n-k,r}$ when $r = 1, 2, 3, 4$. *F. W. Ponting.*

Ostrowski, Alexandre: Sur les déterminants à diagonale dominante. Bull. Soc. math. Belgique **7**, 46—51 (1955).

Verf. berichtet über verschiedene neueste Forschungen betreffend Determinanten, deren Hauptdiagonalglieder für den Wert weitgehend ausschlaggebend sind. *L. Holzer.*

Ostrowski, A. M.: Note on bounds for some determinants. Duke math. J. **22**, 95—102 (1955).

Eine n-reihige quadratische Matrix $A = (a_{\mu\nu})$ nennt Verf. eine M-Matrix, wenn alle $a_{\mu\mu} > 0$, alle Elemente außerhalb der Hauptdiagonale nicht positiv und alle Hauptminoren der Ordnungen $1, 2, \ldots, n$ positiv sind. Mit $d_\mu(A)$ oder kurz d_μ bezeichnet Verf. den Ausdruck (1) $d_\mu(A) = a_{\mu\mu} - \sum_{\nu \neq \mu} |a_{\mu\nu}|$. Ist $d_\mu(A) > 0$ für jedes μ, so spricht Verf. von einer Hadamard-Matrix. Sind dann alle außer der Hauptdiagonale stehenden Elemente nicht positiv, so spricht Verf. von einer Minkowski-Matrix. Ist $d_\mu(A) = 0$ für mindestens ein μ und stets $d_\mu(A) \geqq 0$, so nennt Verf. dies eine uneigentliche Hadamard-, bzw. Minkowski-Matrix. Geht bei Ersetzung jedes $a_{\mu\nu}$ durch $-|a_{\mu\nu}|$ $(\nu \neq \mu)$ aus der Matrix eine M-Matrix hervor, so nennt Verf. die ursprüngliche eine H-Matrix. Weiter sei $A_\mu = \max a_{\mu\nu}$, $a_\mu = \min a_{\mu\nu}$, $u^+ = u$ für $u \geqq 0$, $u^+ = 0$ für $u < 0$. Zunächst berichtet Verf. über einige neueste Forschungsergebnisse. Seine Hauptresultate bestehen in den fünf Sätzen: [1]: Sind alle a_μ und $d_\mu^- \geqq 0$, alle $a_\mu + d_\mu > 0$, so gilt:

$$|A| \geqq \left[1 + \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{a_\nu}{(d_\nu + (n-2)\,a_\nu)}\right\}\right] \prod_{\nu=1}^{n} \{d_\nu + (n-2)\,a_\nu\}.$$

— [2]: Sei A beliebig komplex (in allen andern Fällen ist A als reell angenommen), sei für jedes μ erfüllt $\delta_\mu = |a_{\mu\mu}| - \sum_{\nu \neq \mu} |a_{\mu\nu}| \geqq 0$, sei $\alpha_\mu = \min |a_{\mu\nu}|$ und gelte noch $(\mu = 1, \ldots, n)$: $\alpha_\mu + \delta_\mu > 0$. Dann ist

$$\text{abs}\,|A| \geqq \left[1 - \sum_{\nu=1}^{n} \left\{\frac{\alpha_\nu}{(\delta_\nu + n\,\alpha_\nu)}\right\}\right] \prod_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu + n\,\alpha_\nu).$$

[3]: Gilt $a_{\mu\mu} > n\,A_\mu^+ - \sum_{\nu \neq \mu} a_{\mu\nu}$ für alle μ, so ist $|A| > 0$. [4]: Sei Δ_k die $(n-1)$-reihige Determinante $\Delta_k = |(a_{\mu\nu} - a_{\mu k})|$ $(\mu, \nu = 1, \ldots, n;\ \ \mu, \nu \neq k)$. Sind alle $\Delta_k \geqq 0$, so nennt Verf. A halb-monoton. Nun gilt: Ist (2), (3) erfüllt, (2) $a_{\mu\mu} - \sum_{\nu \neq \mu} a_{\mu\nu} + (n-2)\,a_\mu \geqq 0$, $(\mu = 1, \ldots, n)$, (3) $a_{\mu\mu} + \sum_{\nu \neq \mu} a_{\mu\nu} - n\,A_\mu \geqq 0$, $(\mu = 1, \ldots, n)$, so ist A halb monoton. Ist (2) erfüllt, gilt überdies [3] in der schärfern Form: Aus $a_{\mu\mu} + \sum_{\nu \neq \mu} a_{\mu\nu} - n\,A_\mu^+ \geqq 0$, folgt $|A| > 0$. [5]: Ist $d_\mu(A) \geqq (n-2)\,A_\mu^+$ $(\mu = 1, \ldots, n)$, so ist A eine halbmonotone Hadamard-Matrix. *L. Holzer.*

Hua, Loo-Keng: Inequalities involving determinants. Acta math. Sinica **5**, 463—470 und engl. Zusammenfassg. 470 (1955) [Chinesisch].

Let I be the unit matrix, and let $X_1, \ldots, X_m$ be arbitrary complex matrices, all of n rows and columns; further let $\varrho > 0$ be a constant. Denote by $\overline{X}$, X', and $d(X)$ the complex conjugate, the transposed, and the determinant of X. The author proves the following general inequality. „If the Hermitean matrices $I - X_i\,\overline{X}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ are positive definite, then the Hermitean matrix

$$(d\,(I - X_h\,\overline{X}_k')^{-\varrho-n+1})_{h,k=1,2,\ldots,m}$$

is positive semi-definite“. The proof is based on determinant identities from the representation theory of the linear group. — For $m = 2$ the author further obtains the stronger inequality $|d(I - X_1\,\overline{X}_2')|^2 \geq d(I - X_1\,\overline{X}_1')\,d(I - X_2\,\overline{X}_2') + |d(X_1 - X_2)|^2$, if again $I - X_1\,\overline{X}_1' > 0$, $I - X_2\,\overline{X}_2' > 0$. *K. Mahler.*

Collatz, L.: Über monotone Systeme linearer Ungleichungen. J. reine angew. Math. **194**, 193—194 (1955).

Eine quadratische n-reihige Matrix A mit reellen Elementen a_{jk} heißt m o n o t o n oder v o n m o n o t o n e r A r t, wenn aus $A\,\mathfrak{x} \geqq 0$ folgt $\mathfrak{x} \geqq 0$ ($\mathfrak{x}$ Vektor mit reellen Komponenten). Das Zeichen $\geqq$ bei Vektoren bedeutet, daß es für sämtliche Komponenten gilt. Für die Monotonie einer Matrix A ist notwendig und hinreichend, daß alle Elemente von A^{-1} nichtnegativ sind. Ein einfach nachprüfbares, determinantenfreies, hinreichendes Kriterium gibt der Satz: Ist $a_{jk} \leqq 0$ für $j \neq k$, zerfällt A nicht und gibt es schließlich einen Vektor $\mathfrak{y} > 0$ und einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\mathfrak{r} \geqq 0$ mit $A\,\mathfrak{y} = \mathfrak{r}$, dann ist A eine monotone Matrix. — Der Satz ist von Bedeutung für die Fehlerabschätzung bei den Näherungslösungen verschiedener Anfangs- und Randwertaufgaben gewöhnlicher und partieller Differentialgleichungen. *G. Schulz.*

Stojaković, M.: Sur les propriétés d'une classe de matrices. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **8**, 33—36 (1955).

Der Verf. knüpft an den folgenden von ihm E. E g e r v a r y (1954) zugeschriebenen Satz an: Satz I. Wenn sämtliche Diagonalminoren aller Ordnungen einer reellen quadratischen unzerlegbaren Matrix A positiv und alle Nichtdiagonalelemente nichtpositiv sind, dann sind sämtliche Elemente der inversen Matrix A^{-1} positiv. — Der Referent gestattet sich zu bemerken, daß dieser Satz bereits 1937 in der Arbeit des Referenten: „Über die Determinanten mit überwiegender Hauptdiagonale“. (dies. Zbl. **17**, 290), Zusatz zu Satz II, aufgestellt und bewiesen wurde. — Der Verf. gibt nun einen neuen und recht instruktiven Beweis von Satz I und leitet sodann daraus den folgenden Satz her: Sei A eine reelle quadratische Matrix der Ordnung n und k eine feste der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Man fasse die k-te assoziierte Matrix B zu A ins Auge, deren Elemente alle Minoren k-ter Ordnung von A sind. Für B mögen die Voraussetzungen des Satzes I zutreffen. Dann sind in der zu A inversen Matrix alle Minoren k-ter Ordnung positiv. *A. Ostrowski.*

Matschinski, M.: Über eine Form der Lösung linearer Gleichungssysteme. Portugaliae Math. **14**, 133—139 (1955).

Es handelt sich um eine Modifikation des Cholesky-Verfahrens zur Dreieckszerlegung einer symmetrischen Matrix $\mathfrak{A}$ in der Form $\mathfrak{A} = \mathfrak{C}' \mathfrak{D}^{-1} \mathfrak{C}$ mit der oberen Dreiecksmatrix $\mathfrak{C}$ unter Zwischenschalten einer Diagonalmatrix $\mathfrak{D}$, wodurch die Zerlegung auch im Falle einer nicht positiv definiten Matrix $\mathfrak{A}$ reell verläuft. Das Gleichungssystem $\mathfrak{A}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{c}$ verwandelt sich dabei in $\mathfrak{C}\,\mathfrak{x} = \Gamma\,\mathfrak{c}$ mit $\mathfrak{C} = (c_{ik})$, $\Gamma = \mathfrak{D}\mathfrak{C}'^{-1} = (C_{ik})$, $\mathfrak{D} = \mathrm{Diag}\,(c_{ii}\,C_{ii})$, wobei von den Diagonalelementen c_{ii}, C_{ii} die einen noch frei wählbar sind, z. B. $C_{ii} = 1$. Dann erscheint die Lösung mittels Kehrmatrix in der Form $\mathfrak{x} = \Gamma'\,\mathfrak{D}^{-1}\,\Gamma\,\mathfrak{c}$. *R. Zurmühl.*

Stojaković, Mirko: On an elementary derivation of Cramer's rule. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **7**, 243—244 u. serbische Zusammenfassg. 244 (1955).

Goddard, L. S. and H. Schneider: Pairs of matrices with a non-zero commutator. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 551—553 (1955).

Es seien A, B, X und K Matrizen mit Elementen in einem Körper F von den Ordnungen $n \times n$, $m \times m$, $n \times m$ und $m \times n$. Wie bekannt, ist $|\lambda\,I_n - X\,K| = \lambda^{n-m}\,|I_m - K\,X|$, und wenn $A\,X = X\,B$, dann haben $|\lambda\,I_n - A|$ und $|\lambda\,I_m - B|$ einen gemeinsamen Teiler von Grad r, wo r der Rang der Matrix X ist. Diese beiden Resultate, ein Satz von A. Brauer (dies. Zbl. **46**, 12), und andere vor kurzem bewiesene Sätze sind in dem folgenden Satz enthalten: Ist $A\,X = X\,B$, und hat X den Rang r, dann gilt $|\lambda\,I_n - f(A, X\,K)| = \theta(\lambda)\,p(\lambda)$, $|\lambda\,I_m - f(B, K\,X)| = \theta(\lambda)\,q(\lambda)$, wo (i) $\theta(\lambda)$, $p(\lambda)$, $q(\lambda)$ Polynome in $F[\lambda]$ von den Graden r, $n - r$ und $m - r$ sind und (ii) $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ Faktoren von $|\lambda\,I_n - f(A, 0)|$ und $|\lambda\,I_m - f(B, 0)|$. (Es sei bemerkt, daß die Koeffizienten von $p(\lambda)$ und $q(\lambda)$ auch dann sogar in F enthalten sind, wenn die Elemente von K in einem Erweiterungskörper von F liegen.) Unter denselben Bedingungen hat das Paar von Matrizen A, XK die Eigenschaft P (oder die Eigenschaft L) wenn das Paar B, KX dieselbe Eigenschaft hat und umgekehrt. *H. Schneider.*

Terracini, Alessandro: Matrici permutabili con la propria derivata. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **40**, 99—112 (1955).

Sei $A = A(t)$ eine $n \times n$-Matrix, deren Elemente reelle oder komplexe Funktionen einer reellen Variablen t sind, und $A'(t)$ die Matrix der Ableitungen. Es ist bekannt, daß aus (*) $A(t)\;A'(t) = A'(t)\,A(t)$ die „endliche Vertauschbarkeit" (e. V.), d. i. $A(t_1)\,A(t_2) = A(t_2)\,A(t_1)$, folgt, wenn $A(t)$ in dem in Rede stehenden t-Intervall nicht-derogatorisch ist, d. h., wenn das Minimalpolynom von $A(t)$ den Grad n hat. Es ist auch bekannt, daß diese hinreichende Bedingung nicht notwendig ist. Verf. studiert Klassen von auch derogatorischen Matrizen $A(t)$, für die aus (*) die e. V. folgt oder durch gewisse Zusatzbedingungen der Form $A^{(q)}\,A = A\,A^{(q)}$ erzwungen wird. Wenn alle Wurzeln des Minimalpolynoms einfach sind, kann man A' leicht als Polynom in A darstellen, dessen Koeffizienten skalare Funktionen von t sind, falls (*) gilt; das hat e. V. zur Folge. Für die weitere Untersuchung bildet der folgende Satz die Grundlage: Sei $A = A(t)$ eine Matrix mit r verschiedenen Wurzeln und der Segreschen Charakteristik $[(n_{1,s_1}\,n_{1,s_1-1}\cdots n_{1,1})\cdots(n_{r,s_r}\cdots n_{r,1})]$, so daß $(\lambda - \lambda_i)^{n_{i,s_i}}, \ldots, (\lambda - \lambda_i)^{n_{i,1}}$ die Elementarteiler zur Wurzel λ_i sind. Sei ferner m die kleinste positive ganze Zahl derart, daß

$$2m > \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} (2\,s_i - 2\,j + 1)\,n_{i,j} = \sigma$$

ist. Ist dann A vertauschbar mit den Ableitungen ungerader Ordnung $A', A''', \ldots, A^{(2m-1)}$, so gilt e. V. Der Beweis benutzt den Satz von Frobenius, wonach die genaue Anzahl der mit A vertauschbaren linear unabhängigen Matrizen gerade σ ist. Indem man eine größere Anzahl von Ableitungen ungerader Ordnung mit A vertauschbar voraussetzt, kann man die Heranziehung des Frobeniusschen Satzes umgehen. Weiterhin wird der Fall $[(2\,1 \ldots 1)]$ für $n \geq 3$ betrachtet. Insbesondere wird angenommen $A = m(t)\,E + (b_i(t) \cdot \eta_j(t))$ mit der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n} b_i \eta_i = 0$, so daß die zu A gehörige projektive Abbildung eine „spezielle Homologie" mit dem Zentrum b und der Achsenebene η ist. Dann ist (*) gleichwertig mit der Bedingung $\sum_{i=1}^{n} \dot{b}_i \eta_i = 0$, was geometrisch bedeutet, daß die Homologie-Achsenebene die Kurve der Zentren $b(t)$ in dem entsprechenden Zentrum b berührt. Notwendige Zusatzbedingungen der oben genannten Art werden angegeben, unter denen e. V. aus (*) folgt. Ähnliche Ergebnisse werden hergeleitet für eine Matrix A mit der Segreschen Charakteristik $[(2\,2\,1 \ldots 1)]$ u. a., insbesondere für Matrizen der Form $A = m\,E + (b_i\,\eta_j) + (c_i\,\zeta_j)$ mit zusätzlichen Inzidenzbedingungen $\sum b_i \eta_i = \sum c_i \zeta_i = \sum b_i \zeta_i = \sum c_i \eta_i = 0$. Für $n = 3$ folgt aus dem Hauptsatz, daß allein im Falle der Segreschen Charakteristik $[(2\,1)]$ die e. V. nicht aus (*) folgt; e. V. wird jedoch erzwungen, wenn man dazu noch die Bedingung $A\,A''' = A'''A$ annimmt. Für $n = 4$ gilt gleiches im Falle der Matrizen A mit den Segreschen Charakteristiken $[(2\,1)\,1]$, $[(3\,1)]$, $[(2\,1\,1)]$. Die Untersuchung zeigt, daß Betrachtung der vielen Einzelfälle hier unvermeidlich ist, daß also über den nicht-derogatorischen Fall hinaus ein einfaches allgemeines Resultat nicht zu erwarten ist.

H. Schwerdtfeger.

Ostrovskij, G. M.: Über die Konstruktion von Stabilitätsgebieten. Avtomat. Telemech. **16**, 501—507 (1955) [Russisch].

Handelt es sich um eine charakteristische Gleichung vom Typus $\sum a_\nu\, p^{\nu-n} = 0$, so sind die in Frage kommenden Stabilitätskriterien durch die Positivität der Hurwitzschen Determinanten gegeben. Für $n = 4, 5, 6$ und positive a_ν wird der Einfluß der Koeffizienten untersucht, indem ein geeignetes Paar der Koeffizeinten a_ν ins Auge gefaßt wird, in dem die höchste zu betrachtende Hurwitzsche Determinante quadratisch ist. In der betreffenden Ebene ergibt sich als Rand des „Stabilitätsgebietes" ein Kegelschnitt, während die Hurwitz-Bedingungen niedrigerer Ordnung nur linear werden. Die übrigen Koeffizienten a_ν spielen dabei nur als Parameter eine Rolle. Der Einfluß der Variation dieser Parameter auf die Deformation des Kegelschnitts wird untersucht, wobei die Invarianten der Kegelschnittsgleichung sich als nützlich erweisen. In den betrachteten Fällen ergibt sich so eine gute Beherrschung der Situation.

A. Ostrowski.

Moyls, B. N. and M. D. Marcus: Field convexity of a square matrix. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 981—983 (1955).

Der Wertebereich $\mathfrak{W}(A)$ einer komplexen n-reihigen Matrix $A = (a_{\varkappa\lambda})$, d. h. die Menge der Werte $\sum \bar{z}_\varkappa\, a_{\varkappa\lambda}\, z_\lambda$ für $\sum |z_\varkappa|^2 = 1$, ist bekanntlich ein konvexer Bereich der Zahlenebene, der insbesondere die konvexe Hülle $\mathfrak{P}(A)$ der Menge der Eigenwerte von A umfaßt. Für normale Matrizen besteht bekanntlich die Gleichung $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{P}(A)$. Verff. zeigen, daß umgekehrt im Falle $n \leqq 4$ jede Matrix A, für die $\mathfrak{W}(A) = \mathfrak{P}(A)$, auch normal ist, während im Falle $n \geqq 5$ auch andere Matrizen diese Eigenschaft besitzen. Es lassen sich für diese kennzeichnende Bedingungen angeben; sie sind Dreiecksmatrizen mit genau festlegbaren Eigenschaften unitär-ähnlich.

W. Specht.

Hodges, John H.: Representations by bilinear forms in a finite field. Duke math. J. **22**, 497—509 (1955).

Let A, B denote matrices with elements in $GF(q)$; the author finds the number of matrices U, V, with assigned dimensions and with elements in $GF(q)$, for which $UAV = B$. The method is that of earlier papers by L. Carlitz and the author (this Zbl. **55**, 13; **56**, 17; **65**, 248) for the analogous problems for symmetric, skew-symmetric, and hermitian matrices. As in these earlier papers, the results are used to solve problems on bilinear forms in $GF[q, x]$, and on partitions of matrices.

M. C. R. Butler.

Uchiyama, Saburô: Note on the mean value of $V(f)$. I. II. Proc. Japan Acad. **31**, 199—201, 321—323 (1955).

Let $V(f)$ be the number of distinct values $f(x)$ $(x \in GF(q))$ of the polynomial $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$ $(a_i \in GF(q))$. For $1 < n <$ characteristic of $GF(q)$ the author (this Zbl. **58**, 12) and L. Carlitz (this Zbl. **65**, 249) have given estimates of $V(f)$, and this question is studied further in these two notes. The main results are (i) $\sum\limits_{(0)} V(f) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{q}{k} q^{n-k}$ and (ii) $\sum\limits_{(r)} V(f) = q^{-r} \sum\limits_{(0)} V(f) + R_{n,r}$ where $R_{n,0} = R_{n,1} = 0$; for $r \geq 2$, $R_{n,r} = O(q^{\theta n})$ with $\theta = 1 - 1/r$; and $\sum\limits_{(r)} V(f)$ denotes the sum over $a_1, a_2, \ldots, a_{n-r-1}$.

M. C. R. Butler.

Gilmore, P. C. and A. Robinson: Metamathematical considerations on the relative irreducibility of polynomials. Canadian J. Math. **7**, 483—489 (1955).

The authors consider infinite fields K satisfying the condition C: for any polynomial $p(t, x)$ in x, coefficients in $K(t)$, t transcendental with respect to K, which has no zeros in $K(t)$, there is a t^* in K for which $p(t^*, x)$ has no zeros in K. They prove first a metamathematical theorem: For any field K fulfilling condition C, there is an extension S' of $S = K(t)$ which is a model of $\mathfrak{K}$ and for which every member of $S' - S$ is transcendental with respect to S. Here $\mathfrak{K}$ is the set of all statements of the precidate calculus (extended by the addition of individual constants for all elements of K and atomic predicates for all relations over K) which hold in K. This theorem is used to prove that fields satisfying C satisfy 1. Hilbert's irreducibility theorem, 2. a related theorem of Dörge, and 3. a new theorem of the same kind applying to fields with valuations, viz: 1. If K fulfils condition C, then for any irreducible polynomial $p(t, x)$ in x with coefficients in $K(t)$ there are infinitely many t^* from K such that $p(t^*, x)$ is irreducible in x over K. 2. If K is an ordered field fulfilling condition C, then for any a and b from K for which $a < b$ and for any irreducible polynomial $p(t, x)$ in x with coefficients in $K(t)$, there exists a t^* in K such that $a < t^* < b$ and such that $p(t^*, x)$ is irreducible in x over K. 3. If K is a field with a valuation ψ in an ordered field W and K fulfils condition C, then for any a and b from K with $b \neq 0$ and for any irreducible polynomial $p(t, x)$ in x with coefficients in $K(t)$, there exists a t^* in K such that $\psi(a - t^*) < \psi(b)$ and such that $p(t^*, x)$ is irreducible in x over K.

J. C. Shepherdson.

Barrett, W.: On approximate factors of polynomials. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **6**, 293—300 (1955).

Die Arbeit knüpft an eine Abhandlung des Referenten an (dies. Zbl. **23**, 334, im folgenden zitiert mit M. G.). Ist $A(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu$, $a_0 a_n \neq 0$, ein Polynom n-ten Grades und betrachtet man das Polynom $A_0(x) = a_m + a_{m+1} x + \cdots + a_{m+k} x^k$, das aus einer Koeffizientensequenz von $A(x)$ gebildet wird, so wurde in M. G. nachgewiesen, daß unter gewissen Bedingungen $A(x)$ einen Teiler k-ten Grades $C(x) = \sum\limits_{\nu=0}^{k} c_\nu x^\nu$ besitzt, dessen Koeffizienten sich „wenig" von denen von $A_0(x)$ unterscheiden. Die Formulierung dieser Bedingungen benutzt wesentlich den Begriff der Deviationen D_k, die in M. G. mit Hilfe des Newtondiagramms eingeführt wurden, sich aber auch direkt durch die Formel $D_k = \operatorname{Max}\left[1, \operatorname*{Min}_{\mu,\nu>0} \left(\left|\frac{a_k}{a_{k-\nu}}\right|^{1/\nu} \cdot \left|\frac{a_k}{a_{k+\mu}}\right|^{1/\mu}\right)\right]$

darstellen lassen (dieser Ausdruck für D_k ist in der Arbeit des Verf. durch Druckfehler entstellt). In M. G. wurde nun gezeigt, daß, wenn $M = \mathrm{Min}\,(D_m, D_{m+k}) \geq 18{,}7$, bzw. im Falle $m + k = n$, $M = D_m \geq 13{,}5$ ist, der obige Zerlegungssatz gilt und man zugleich hat: $C(x) - A_0(x) \ll \delta \mathfrak{M}_{A_0}(x)$, wo $\mathfrak{M}_{A_0}(x)$ die sog. Newtonsche Majorante von $A_0(x)$ ist, während δ in beiden Fällen von M abhängt und für $M \to \infty$ im ersten Fall $= 2/M + O\,(1/M^2)$, im zweiten $= 1/M + O\,(1/M^2)$ ist. Für diesen Satz skizziert Verf. eine neue Beweismethode, die auf dem Brouwerschen Fixpunktsatz beruht. Diese Methode liefert zugleich eine gewisse Verbesserung der Konstanten, indem 18,7 durch 10,8 und 13,5 durch 9 ersetzt werden kann. Zugleich deutet der Verf. an, daß 9 für den Fall $m + k = n$ die „beste" Konstante ist. Er scheint auch anzugeben, daß die Werte von δ sich durch seine Methode als kleiner ergeben, doch überblickt man leicht, daß die von ihm angegebenen Ausdrücke in den beiden Fällen gleichfalls die oben angegebenen asymptotischen Darstellungen besitzen. Obgleich der obige Zerlegungssatz im Rahmen der Graeffeschen Methode von vornherein für relativ sehr große Werte von M angewandt wird, so wäre dennoch die Verbesserung der beiden angegebenen Konstanten nicht nur (im Falle von 9) von prinzipieller, sondern auch von praktischer Bedeutung, da ihre Verwendung gelegentlich ein paar Rechengänge ersparen kann und manchmal etwas früher das „Einsetzen der Konvergenz" zu konstatieren gestattet. Die Andeutungen über die Beweise sind allerdings sehr lückenhaft, und es wäre zu hoffen, daß Verf. an Hand dieser Andeutungen seinen Beweis vollständig rekonstruiert und ihn in einer Weise darstellt, die dem Leser nur normalen Aufwand an Zeit und Arbeit zumutet.

A. Ostrowski.

Specht, Wilhelm: Abschätzung der Wurzeln algebraischer Gleichungen. III. Math. Z. **63**, 324—330 (1955).

For the zeros of a complex polynomial better estimates are obtained than those previously given by the author (this Zbl. 22, 301; 33, 145). *E. Frank.*

Fekete, M. and G. Szegö: On algebraic equations with integral coefficients whose roots belong to a given point set. Math. Z. **63**, 158—172 (1955).

Ist P der Körper der rationalen Zahlen oder ein imaginärquadratischer Zahlkörper, so bezeichne $K(P)$ die Klasse aller in P irreduzibler Polynome $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ beliebigen Grades n mit ganzalgebraischen Koeffizienten aus P. In Verallgemeinerung eines früheren Ergebnisses von M. Fekete [vgl. Math. Z. **17**, 228—249 (1923), wo auch der „transfinite Durchmesser" erklärt wird] zeigen Verff.: — Zu jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge S der komplexen z-Ebene mit einem transfiniten Durchmesser $d(S) < 1$ gibt es nur endlich viele Polynome der Klasse $K(P)$, deren Nullstellen sämtlich S angehören. — (Eine Ausdehnung dieses Satzes auf andere Zahlkörper P ist grundsätzlich unmöglich.) Liegen die Nullstellen einer unendlichen Menge von Polynomen aus $K(P)$ in einer abgeschlossenen, beschränkten Punktmenge S, so gilt demnach $d(S) \geqq 1$. Diese (notwendigen) Bedingungen sind jedoch nicht hinreichend; man findet leicht Punktmengen S mit $d(S) > 1$, die keine Nullstelle irgendeines Polynoms aus $K(P)$ enthalten. Da eine genaue Abgrenzung dieses Sachverhaltes schwierig zu sein scheint, geben Verff. eine Reihe von weiteren Sätzen an, die zur Klärung dieser Frage beitragen sollen. Für Einzelheiten muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

W. Specht.

Farinha, João: Quelques propositions concernant les zéros d'un polynôme. Univ. Lisboa, Revista Fac. Ci., II. Ser. A **4**, 187—190 (1955).

Untersuchungen über die Lage von Nullstellen vollständiger Polynome $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ (mit $a_0 a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$). *W. Specht.*

Wilkoński, A.: On the boundedness of root moduls of some polynomials. Prace mat. **1**, 165—168, russ. u. engl. Zusammenfassg. 168 (1955) [Polnisch].

Soient k et p deux entiers positifs quelconques. On sait qu'il existe une constante positive $\tau = \tau(k, p)$ telle que chaque polynôme $W(z) = a_0 + a_1 z + \cdots \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$, où $n = k + p$, $|a_p| = 1$, $|a_j| \leq 1$ pour $j = p + 1, \ldots \ldots, n - 1$, admet au moins k zéros dans le domaine $|z| > \tau$ (ce Zbl. 8, 386). L'A. démontre que le nombre τ n'est pas plus petit que le seul zéro positif du polynôme

$$V_k(t) = -1 + \sum_{i=1}^{k} (1 + A_{k-i+1}(t)) \binom{p+1}{i} t^i,$$

où $A_1(t) = 0, \quad A_j(t) = \sum_{i=1}^{j-1} (1 + A_{j-1}(t)) \binom{p+1}{i} t^i, \; j = 2, 3, \ldots, k.$

F. Leja.

Gruppentheorie:

Artzy, Rafael: On loops with a special property. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 448—453 (1955).

Bezeichnet in einem Loop (Struktur mit einer Verknüpfung und Einselement u, in welcher durch eine Gleichung $x\,y = z$ mit je zweien der Elemente x, y, z das dritte eindeutig bestimmt wird) x' das Rechtsinverse von x und gilt die Eigenschaft π: $x\,y \cdot x' = y$ für alle x, y, so ist die Abbildung T: $x \to x'$ ein Automorphismus. Durch wiederholte Anwendung von T und T^{-1} auf ein festes x erhält man einen „Zykel", der endliche oder unendliche Länge haben kann (Länge = Anzahl der verschiedenen Elemente). Ein loop mit der Eigenschaft π kann nicht aus u und einem Zykel endlicher Länge bestehen, bei unendlicher Länge ist dies auf unendlich viele nicht isomorphe Arten möglich. u und die Elemente sämtlicher Zykeln endlicher Länge bilden für sich einen loop (subloop), ebenso u und die Elemente derjenigen Zykeln, deren Länge ein festes n teilt. Ein endlicher loop mit der Eigenschaft π wird durch Zahl und Länge der Zykeln nicht bis auf Isomorphie festgelegt (Beispiele). Für weitere Sätze über die Verteilung der Zykellängen sei auf die Arbeit verwiesen.

G. Bol.

Devidé, Vladimir: Über eine Klasse von Gruppoiden. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **10**, 265—284, kroat. Zusammenfassg. 284—286 (1955).

L'A. appelle C-groupe un ensemble S muni d'une opération satisfaisant aux axiomes suivants: 1) Il existe des applications biunivoques de S dans S, φ, ψ, χ, telles que, quels que soient $a, b, c \in S$, $a\,b \cdot c = \varphi\,a\,(\psi\,b \cdot \chi\,c)$; 2. Il existe une application biunivoque de S dans S, λ, et un élément m de S tels que, quel que soit $a \in S$, $m\,a = \lambda\,a$; 3. Quel que soit $a \in S$, il existe $a' \in S$ tel que $a'\,a = m$. Un groupe est évidemment un C-groupe; plus généralement, si S est un groupe dont l'opération est désignée par $\circ$, ξ et η deux automorphismes de S, l'opération définie par $a \cdot b = \xi\,a \circ \eta\,b$ fait de S un C-groupe. L'A. étudie les C-groupes et des cas de plus en plus particuliers de C-groupes, les D-groupes puis les A-groupes. Il obtient notamment un théorème de représentation concernant les A-groupes.

R. Croisot.

Oganesjan, V. A.: Invariante und normale Teilsysteme eines symmetrischen Systems von partiellen Substitutionen. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady **21**, 49—56 (1955) [Russisch].

Die Theorie der Permutationsgruppen wird wie folgt verallgemeinert: Partielle Substitutionen (p. S.) sind eineindeutige Abbildungen von echten oder unechten Teilmengen einer Menge $M_n = \{1, \ldots, n\}$; die Kardinalzahl k, $0 \leq k \leq n$, der betreffenden Teilmenge heißt die Länge der p. S. Eine Menge von p. S. über M_n heißt ein System, wenn sie für die Komposition von Substitutionen (gewöhnliche Komposition binärer Relationen) geschlossen ist; insbesondere heißt die Gesamtheit aller p. S. über M_n das symmetrische System Σ_n. P. S. gleicher Länge k bilden eine k-Schicht R_k, wenn mit jeder p. S. auch die inverse vorkommt, und mit je zweien auch ihr Produkt, sofern es auch die Länge k hat. R_k heißt ferner eine Kette, wenn zu je zwei $x, y \in R_k$ stets ein $z \in R_k$ existiert mit $x z y \in R_k$. Ketten sind Brandtsche Gruppoide; insb. bestimmt jede eindeutig eine abstrakte Gruppe (Isomorphismentypus), nämlich die maximale in ihr enthaltene gewöhnliche Substitutionsgruppe vom Grade k. Sei R ein System mit nichtleerem R_n, $s \in R_n$: s erzeugt durch $x \leftrightarrow s^{-1} x s$, $x \in R$, einen inneren Automorphismus von R. Ein Teilsystem J, $J \subset R$, heißt invariant, wenn es durch jeden inneren Automorphismus in sich selbst übergeführt wird. Mit Hilfe mehrerer Sätze kann man die invarianten Teilsysteme von Σ_n angeben. Dagegen heißt ein Teilsystem N, $N \subset R$, normal, wenn für alle $x, y \in R$, $s \in N$ $x y \in N \Leftrightarrow x s y \in N$ (vgl. Liapin, dies. Zbl. 32, 4). Für Gruppen fallen die Begriffe „invariant" und „normal" zusammen und haben die übliche Bedeutung. Es wird bewiesen, daß Σ_n genau vier, im allgemeinen verschiedene, normale Teilsysteme besitzt, nämlich sich selber, S_n (die symmetrische Gruppe), A_n (alternierende Gruppe) und $E = \{e_n\}$. *D. Tamari.*

Oganesjan, V. A.: Über die Halbeinfachheit der Systemalgebra. Akad. Nauk Armjan. SSR, Doklady **21**, 145—147 (1955) [Russisch].

Eine endliche Halbgruppe mit untereinander vertauschbaren idempotenten Elementen, in der es zu jedem x ein y mit $x y x = x$ gibt, wird hier „System" genannt und kann durch ein System partieller Substitutionen (siehe vorhergehende Besprechung) dargestellt werden. Verf. beweist, daß die Algebren solcher Systeme (ebenso wie für Gruppen) über (kommutativen) Körpern der Charakteristik 0 halbeinfach sind. *D. Tamari.*

Adjan, S. I.: Über das Problem der Teilbarkeit in Halbgruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR **103**, 747—750 (1955) [Russisch].

Die Frage, ob es zu zwei beliebig vorgegebenen Worten Q, R einer durch erzeugende Buchstaben $a_1, a_2, \ldots$ und definierende Relationen gegebenen Halbgruppe $\mathfrak{A}$ mit Kürzungsregeln (Hg. — nur von solchen wird die Rede sein) ein Wort X ($\in \mathfrak{A}$) gibt, so daß in $\mathfrak{A}$ $X Q = R$ ($Q X = R$) heißt rechtes (linkes) Teilbarkeitsproblem; der Sonderfall $R = 1$, $1 \in \mathfrak{A}$, heißt Inversionsproblem. Die folgenden vier Sätze werden bewiesen: 1. Es gibt eine endlich erzeugte Hg. mit (algorithmisch) unlösbaren Teilbarkeitsproblem. [Für Hg. ohne Kürzungsregeln ist dies schon von A. A. Markov bewiesen worden (dies. Zbl. **58**, 5).] 2. Es gibt keine endlich erzeugte Hg. mit unlösbarem Inversionsproblem. 3. Es gibt keinen Algorithmus, der für die Klasse der Hg. mit **1** das Inversionsproblem löst. 4. Es gibt eine effektiv angebbare abzählbar unendlich erzeugte Hg. mit unlösbarem Inversionsproblem. Satz 2 folgt ganz leicht aus dem fast selbstverständlichen Lemma: $A = a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ ($\in \mathfrak{A}$) hat dann und nur dann ein Inverses in $\mathfrak{A}$, wenn jedes a_{i_t} ($1 \leq t \leq K$) ein solches in $\mathfrak{A}$ hat. Die anderen Sätze werden auch ziemlich leicht bewiesen, jedoch unter wesentlicher Berufung auf verschiedene Konstruktionen und Ergebnisse von P. S. Novikov [Trudy mat. Inst. Steklov **44** (1955)]. (Druckfehler: In der Formel auf S. 748, Zeile 4 von unten, muß a_{i_t} gestrichen werden.) *D. Tamari.*

Ōhara, Akiko: Note on commutator subgroups of factorisable groups. Proc. Japan Acad. **31**, 612—614 (1955).

Verf. untersucht die Kommutatorgruppe einer faktorisierbaren Gruppe $G = A\,B$. Die wesentlichen Ergebnisse sind: Theorem 1. Die von den Kommutatoren (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ erzeugte Untergruppe (A, B) ist ein Normalteiler von G. Theorem 3. Ist A abelsch, B auflösbar von der Stufe 2 und G auflösbar, so ist Stufe $G \leqq$ Stufe $(A, B) + 2$. Theorem 4. Ist A abelsch, B nilpotent von der Klasse 2 und $A\,B'$ eine Untergruppe von G, so ist $G^{(i)} = (B', N, N', \ldots, N^{(i-2)})\; N^{(i-1)}$, und $(B', N, N', \ldots, N^{(i-2)})$ ist ein abelscher Normalteiler von $G^{(i)}$. Dabei ist $G^{(i)}$ die i-te Kommutatorgruppe von G, $N^{(i)}$ die i-te Kommutatorgruppe von $N = (A, B)$. Alle Beweise werden durch direkte Rechnungen geführt. Druckfehler: In der Formulierung von Theorem 4 muß es heißen: „. . ., where $G^{(i)}$ and $N^{(i)}$ denote the i-th derived group of G and (A, B) respectively". *B. Huppert.*

Rédei, L. und J. Szép: Die Verallgemeinerung der Theorie des Gruppenproduktes von Zappa-Casadio. Acta Sci. math. **16**, 165—170 (1955).

Gegeben seien zwei Gruppen G und Γ. Gesucht sind sämtliche Gruppen $\mathfrak{G} = G' \Gamma'$ mit $G' \cong G$, $\Gamma' \cong \Gamma$, wobei der Durchschnitt $G' \cap \Gamma'$ nicht nur aus dem Einselement zu bestehen braucht. Diese Aufgabe wird in folgender Weise gelöst: Für $a, b \in G$ und $\alpha, \beta \in \Gamma$ wird eine Multiplikation der Paare $(a, \alpha)\ (b, \beta) = (a\, b^{\alpha}, \beta\, \alpha^{b})$ definiert (vgl. Rédei, dies. Zbl. **40**, 299). Dadurch entsteht eine multiplikative Struktur $\mathfrak{M}$. Es seien G_* und Γ_* zwei isomorphe Untergruppen von G bzw. Γ, und S sei ein fester Isomorphismus von G_* auf Γ_*. In $\mathfrak{M}$ wird sodann eine Äquivalenzrelation C definiert, nämlich $(a, \alpha) \equiv (b, \beta)$ genau dann, wenn $S(a^{-1} b) = \alpha^{-1} \beta$. Es werden die Bedingungen dafür angegeben, daß die Faktorstruktur $\mathfrak{M}/C$ eine Gruppe bildet. Die so entstehenden Gruppen $\mathfrak{M}/C$ sind genau die gesuchten. *R. Kochendörffer.*

Rühs, F.: Über ein spezielles Rédeisches schiefes Produkt in der Gruppentheorie. Acta Sci. math. **16**, 160—164 (1955).

Verf. untersucht das schiefe Produkt $(a, \alpha)\ (\beta, b) = (a^{\beta}\, b^{\alpha},\ \alpha^{b}\, \beta^{a})$, das in der grundlegenden Arbeit von Rédei (dies. Zbl. **40**, 299) nicht behandelt worden war. Es zeigt sich, daß dieses schiefe Produkt im wesentlichen nur das direkte Produkt ist. *R. Kochendörffer.*

Curzio, Mario: Gli automorfismi del reticolo dei laterali dei sottogruppi d'un gruppo. Ricerche Mat. **4**, 3—14 (1955).

Unter dem S-Automorph der Gruppe G versteht der Verf. die Gruppe $S = S(G)$ aller Automorphismen des Verbandes der Teilscharen von G (= nicht leere Teilmengen von G, die mit a, b, c auch $a\, b^{-1}\, c$ enthalten). Es ist klar, daß S im wesentlichen mit der Gruppe aller der Permutationen von G identisch ist, die Teilscharen auf Teilscharen abbilden, so daß S eine Verallgemeinerung des Holomorphs von G ist. Ist $F(x)$ für x in G die Untergruppe aller der Elemente aus S, die x invariant lassen, so bilden die $F(x)$ eine volle Klasse konjugierter Untergruppen von S, deren Durchschnitt natürlich 1 ist. $F(x)$ ist also dann und nur dann ein Normalteiler von S, wenn $F(x) = 1$ ist; und dies ist, da $F(1)$ die Gruppe aller Automorphismen von G enthält, dann und nur dann der Fall, wenn G die Ordnung 1 oder 2 hat. Ist T die Gruppe aller (Rechts-) Translationen von G, so ist T eine zu G isomorphe Untergruppe von S; und es gilt $S = T\, F(x) = F(x)\, T$, $1 = T \cap F(x)$. — Weiter überzeugt man sich leicht davon, daß S dann und nur dann dreifach transitiv auf G ist, wenn $G^2 = 1$ (insbesondere also abelsch) oder G zyklisch von Primzahlordnung ist; und S ist dann und nur dann vierfach transitiv auf G, wenn G die Vierergruppe oder zyklisch von Primzahlordnung ist (und in diesem Falle ist S sogar die symmetrische Gruppe auf G). *R. Baer.*

Plotkin, B. I.: Zur Theorie der auflösbaren Gruppen ohne Torsion. Mat. Sbornik, n. Ser. **36** (**78**), 31—38 (1955) [Russisch].

To understand the details of this paper the reader has to be familiar with the following literature: Kurosh, Theory of Groups, English Edition, vol. II, Chapter XV (see also this Zbl. **57**, 18); Kontorovič, this Zbl. **40**, 6; Mal'cev, this Zbl. **43**, 23; Plotkin, this Zbl. **47**, 23 and 24. We recall briefly that an R-group is a torsion-free group in which the extraction of roots, if possible, is unique; an R^*-group is an R-group whose torsion-free factor-groups are also R-groups; an R^{**}-group is an R^*-group whose subgroups are also R^*-groups. The term „soluble" refers to normal series, well-ordered transfinite, unless the contrary is stated, with abelian factor-groups; a rational series is a soluble series with factors of rank at most 1. In the first three theorems G is an R^{**}-group which is also locally an SN^*-group (i. e. it has an ascending soluble normal series). I. If all the abelian subgroups of G have finite rank, then G is an extension of its maximal nilpotent normal subgroup of finite rational rank by a torsion-free abelian group. G has locally a finite rational series and is, in fact, soluble in a finite number of steps. — II. If all the abelian subgroups of G are finitely generated, then G satisfies the maximal condition for subgroups. — III. The following conditions are equivalent: 1. G has a finite rational series. 2. G has finite special rank. 3/4. G satisfies the maximal (minimal) condition for isolated subgroups. — In the next three theorems G is an R-group which is also an SI^*-group (i. e. it has an ascending soluble series whose terms are normal in G, not merely in their successor) with torsion-free factors of rank 1. IV. If all the factors are infinite cyclic, then the series is a central series. — V. If the series has no cyclic factors, then it is a central series. — VI. G is an extension of its nil-radical by means of a torsion-free group whose rational subgroups are all cyclic. — Finally the author proves that if in a group G the nil-radical $R(G)$ contains the derived group, then $R(G)$ consists of all the nilelements of G. *K. A. Hirsch.*

Plotkin, B. I.: Zur Theorie der auflösbaren Gruppen mit Endlichkeitsbedingungen. Doklady Akad. Nauk SSSR **100**, 417—420 (1955) [Russisch].

The radical $R(G)$ of a group G is the maximal locally nilpotent normal subgroup of G; the existence of a radical has been established by the author and the reviewer [Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3, 181—186 (1954) and this Zbl. **65**, 9]. The ascending radical series $1 = R_0 \leqq R_1 \leqq \cdots \leqq R_\alpha \leqq R_{\alpha+1} \leqq \cdots$ is defined by recurrence with $R_{\alpha+1}/R_\alpha = R(G/R_\alpha)$ and the obvious provision for limit subscripts. If $G = R_\gamma$ for some γ, then G is called a radical group. Radical groups are, obviously a generalisation of soluble groups and occupy, in the classification of Kurosh, Theory of Groups, English Edition, vol. II, § 57 (see also this Zbl. **54**, 18), an intermediate position between SN-groups and SN^*-groups. The class of locally radical groups is precisely the same as that of locally SN^*-groups. The object of this paper is to study in radical groups how certain finiteness conditions imposed on the radical influence the structure of the group. The proofs are partly sketched, partly omitted. Throughout this review G will denote a radical group; max, min, and $\min_N$ will stand for the maximal and minimal condition for subgroups and for normal subgroups, respectively. In a radical group G the radical contains its own centraliser, and G is finite if and only if $R(G)$ is finite, or even if the abelian subgroups of $R(G)$ are finite. Furthermore, if $R(G)$ is finitely generated (and hence nilpotent and satisfying max), then G satisfies max; again, it is sufficient to know that the abelian subgroups of $R(G)$ are finitely generated. [Here the results of Mal'cev (this Zbl. **43**, 23) and Smirnov (this Zbl. **50**, 18) are used.] If G is periodic and $R(G)$ is an extension of a direct product of a finite number of quasicyclic groups [i. e. of type (p^∞)] by a finite group, then G has the same structure. The same conclusion is reached about G if the same structure is assumed for $R(G)$, but the assumption of periodicity is replaced by $\min_N$. [Here results of Černikov (this Zbl. **38**, 161) are used.] Hence a radical group G satisfies min if and only if both G and $R(G)$ satisfy $\min_N$. Note that in a radical group with $\min_N$ the radical itself need not satisfy $\min_N$ (Čarin, this Zbl. **51**, 16). If G is of finite special rank, the $\min_N$ implies min. Hence for SI-groups of finite special rank min and $\min_N$ are coextensive. *K. A. Hirsch.*

Plotkin, B. I.: Radikale Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **37 (79)**, 507—526 (1955) [Russisch].

The paper continues the study of the (locally nilpotent) radical $R(G)$ and the upper radical $\overline{R}(G)$ of a group G that was initiated in preceding notes [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **98**, 341—343 (1954) and preceding review]. The radical is the maximal locally nilpotent normal subgroup, and its existence has been established by the author and the reviewer [Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3, 181—186 (1954) and this Zbl. **65**, 9]. The upper radical is the intersection of all normal subgroups whose factor-groups have a trivial radical. It is also the terminal member of the ascending radical series $1 = R_0 < R_1 < \cdots < R_\alpha < R_{\alpha+1} < \cdots$

$\cdots < R_\gamma = R_{\gamma+1} = \cdots = \overline{R}(G)$ which is defined by the recurrence $R_{\alpha+1}/R_\alpha = R(G/R_\alpha)$ with the obvious provision for a limit subscript. If $G = \overline{R}(G)$, then G is called a radical group. This class of groups is obviously a generalisation of soluble groups and includes the class of groups with an ascending soluble normal series or SN^*-groups in the terminology of Kurosh [Theory of Groups, English Edition, § 57 vol. II (1956), see also this Zbl. **57**, 18]. In a finite group the radical is the product of all nilpotent normal subgroups and the upper radical is the maximal soluble normal subgroup. Many of the author's results are extensions to arbitrary groups of theorems in Fitting's classical paper (this Zbl. **19**, 199) that were previously extended to groups with maximal condition by the reviewer [Proc. London math. Soc., II. Ser. **49**, 184—194 (1946)]. But the author first provides a wider framework by considering, instead of local nilpotence, an arbitrary property θ of groups, subject to the following requirements: θ shall be hereditary in subgroups and homomorphic images; θ shall be a local property (that is, if θ holds in at least one local system of G, then it holds in G — a local system being a directed set of subgroups covering G); and every group G shall have a unique θ-radical $\theta(G)$, that is, a maximal (hence characteristic) θ-subgroup containing all normal θ-subgroups. Examples of such θ-properties are periodicity, local finiteness, and local nilpotence. The main effort of the first part of the paper is directed towards proving that if a group G has an ascending normal series whose first term is a θ-subgroup, then G has a non-trivial radical containing this first term. (The author proves a little more, but to describe this would necessitate introducing several further definitions.) If a group has any ascending normal series of θ-subgroups, then it coincides with its upper θ-radical. In particular, the existence of an ascending normal series of θ-subgroups implies that of an invariant series. It follows that the product of two θ-radical normal subgroups is itself θ-radical (this could have been taken as one of the defining conditions for θ); that the extension of a θ-radical group by another is itself θ-radical; and that the upper θ-radical of an arbitrary group is precisely what we want it to be: a θ-radical characteristic subgroup containing all θ-radical normal subgroups. The remainder of the paper is concerned with the case where θ is local nilpotence. If G is locally finite, the radical can be described as follows; for each prime number p we form the intersection D_p of all the Sylow p-subgroups of G, and then the direct product of these D_p. This is the radical of G. If G is a radical group, then $R(G)$ contains its own centraliser which is, therefore, the centre of the radical. (This is not true in general: take the direct product of a locally nilpotent group with one that has only trivial locally nilpotent normal subgroups.) If G is locally finite or torsion-free and locally of finite special rank, then the radical coincides with the set of all nil-elements of G, that is, those $g \in G$ for which $[x, g, \ldots, g] = 1$ for all $x \in G$ and sufficiently many factors g. The same conclusion is reached (but with a more elaborate proof) when G is a radical or even a locally radical group, so that a radical nilgroup is locally nilpotent. [In the case of a finite group this result is due to Schenkman (this Zbl. **50**, 255).] An interesting criterion for an element g to be a nilelement is the following: In a locally radical group G whose radical satisfies the normaliser condition an element g is a nilelement if and only if the cyclic subgroup generated by g can be linked with G by an ascending normal series. [In this connection see Baer (this Zbl. **66**, 13).] Further results are based on the following construction: let $1 = H_0 < H_1 < \cdots \cdots < H_\alpha < H_{\alpha+1} < \cdots < H_\gamma$ be an arbitrary ascending series of normal subgroups of a group G. For every α let C_α be the complete inverse image in G of the centraliser of $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ in G/H_α. The intersection of all these C_α is called the centraliser of the series. It consists of all the group elements that induce the identity automorphism in all factors of the series. This leads to yet another description of the radical: if the radical of a group has an ascending central series, then it consists of the centralisers of all the invariant series of the whole group. In particular, if G

is a radical group and the radical $R(G)$ is nilpotent, then $R(G)$ coincides with the centraliser of every finite central characteristic series of $R(G)$. It is easy to prove by induction, following Mal'cev (this Zbl. **43**, 23) that a radical group of matrices is soluble. This leads, in conjunction with results of Smirnov (this Zbl. **50**, 18) to the following theorem: If G is a radical group and $R(G)$ is nilpotent, torsion-free and of finite rank, then G is soluble. G has a principal series $1 < R(G) < H < G$, with $H/R(G)$ abelian and G/H finite and soluble. Also if a radical group has a finite radical, then it is finite, and it is sufficient to know that the abelian subgroups of the radical are finite. The remainder of the paper deals with the radical and upper radical in some special classes of groups. *K. A. Hirsch.*

Mal'cev, A. I.: Zwei Bemerkungen über nilpotente Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **37 (79)**, 567—572 (1955) [Russisch].

Auf dem Weg über Lie-Ringe wird der folgende Satz bewiesen: Eine Menge von Elementen einer freien n-stufig nilpotenten Gruppe V ist genau dann ein freies Erzeugendensystem einer freien (höchstens) n-stufig nilpotenten Untergruppe von V, wenn sie modulo der Kommutatorgruppe V' linear unabhängig ist. — Im zweiten Teil der Note wird eine explizite Beschreibung eines Algorithmus zur Lösung des Wortproblems in n-stufig nilpotenten Gruppen gegeben, dessen Lösbarkeit schon aus der Arbeit von R. C. Lyndon (dies. Zbl. **47**, 256) bekannt ist. *H. Salzmann.*

Maurer, I.: Contribution à l'étude des groupes à partir du quasi-centre. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **5**, 1029—1032, russ. u. französ. Zusammenfassg. 1032—1033, 1033—1034 (1955) [Rumänisch].

Unter dem Quasizentrum einer Gruppe G versteht man nach O. Ore (dies. Zbl. **16**, 351) die Vereinigungsgruppe aller derjenigen zyklischen Untergruppen von G, die mit allen Untergruppen von G vertauschbar sind. — Verf. beweist u. a. folgende Sätze: 1. Ist das Quasizentrum einer Gruppe G eine maximale (endliche) abelsche Untergruppe von G, so ist G periodisch. 2. Die nichtabelsche Gruppe G sei in das direkte Produkt ihrer Primärkomponenten zerlegbar; wenn die dabei auftretenden nicht kommutativen direkten Faktoren von G maximale abelsche Quasizentren besitzen, dann auch G. *M. Benado.*

Maurer, I.: Über die Normalreihen der Gruppe verallgemeinerter unendlicher Permutationen. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. şti., Secţ. Şti. mat. fiz. **7**, 499—505, russ. u. deutsche Zusammenfassg. 503—504 (1955) [Rumänisch].

Gegeben sei eine abstrakte unendliche Menge M. Unter einer (unendlichen) Permutation von M versteht man eine eineindeutige Abbildung von M auf sich selbst; die Gesamtheit aller Permutationen von M sei mit S_M bezeichnet. Wenn man nun die Multiplikation der Permutationen aus S_M als gewöhnliche Komposition der Transformationen auffaßt, so wird die Menge S_M zu der sogenannten unendlichen symmetrischen Gruppe S_M. — Verf. beschäftigt sich mit der folgenden auf W. Specht zurückzuführenden Verallgemeinerung von S_M. Es sei A irgendeine abstrakte Gruppe und $\{a_x, x \in M\}$ eine Menge von Elementen aus A. Man setzt $\{a_x, x \in M\} = \{b_x, x \in M\}$ dann und nur dann, wenn $a_x = b_x$ für alle $x \in M$. Die Menge aller Teilmengen $\{a_x, x \in M\}$ von A sei mit $A(M)$ bezeichnet. Nun wird das kartesische Produkt $A(M) \times S_M$ zu einer Gruppe, wenn man folgende Zusammensetzungsregel festsetzt:

$$(\{a_x, x \in M\}, \pi)\,(\{b_x, x \in M\}, \varrho) = (\{c_x, x \in M\}, \sigma)$$

wobei $c_x = a_x\, b_{x\pi}$ $(x \in M)$ und $\sigma = \pi\,\varrho$ $(\pi, \varrho, \sigma \in S_M)$ gesetzt worden ist. — Verf. untersucht nun, in wie weit sich die Bestimmung aller Haupt- bzw. Kompositionsreihen der so gewonnenen Gruppe $A(M) \times S_M$ auf diejenigen von A zurückführen läßt. Ist M abzählbar und sind die Kompositionsreihen von A endlich, so wurde die betreffende Frage von I. Gáspár beantwortet. Verf. gibt eine Verallgemeinerung der Gáspárschen Resultate, indem er beweist: Satz 1. Die Menge M sei abzählbar und die Gruppe A habe unendliche abnehmende Hauptreihen (vom Ordnungstypus der natürlichen Zahlenfolge). Es sei

(1) $$A > N_1 > N_2 > \cdots > P > P_1 > \cdots > E$$

eine Hauptreihe von A derart, daß P mit dem Zentrum von A oder mit einer echten Untergruppe davon übereinstimmt. Dann entsteht aus (1) eine endliche bzw. unendliche Folge von Hauptreihen von $A(M) \times S_M$ je nachdem die Teilhauptreihe (2) $P > P_1 > \cdots > E$ endlich ist oder nicht. Satz 2. Die Menge M sei wieder abzählbar und die Gruppe A besitze unendliche abnehmende Kompositionsreihen (vom Ordnungstypus der natürlichen Zahlenfolge). Ist nun (1) eine Kompositionsreihe von A, deren erster abelscher Normalteiler von A genau P ist, so entsteht aus (1) eine endliche bzw. unendliche Folge von Kompositionsreihen von $A(M) \times S_M$, je nachdem die Teilkompositionsreihe (2) endlich ist oder nicht. — Konstruktives Beweisverfahren. *M. Benado.*

Lyndon, R. C.: On Burnside's problem. II. Trans. Amer. math. Soc. **78**, 329—332 (1955).

Verf. beweist als Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **58**, 17) in den dort eingeführten Bezeichnungen, wobei noch $\varkappa(n) = \psi(n) - \delta(n)$ gesetzt wird: Für $q = 2$ und $p \geqq 5$ ist $\delta(p+3) = 6p - 4$. Für $q = 2$ und $p = 5$ ist $\varkappa(9) = 4$, 2 oder 0. *R. Kochendörffer.*

Itô, Noboru: On primitive permutation groups. Acta Sci. math. **16**, 207—228 (1955).

Verf. zeigt: Sei G eine primitive Permutationsgruppe vom Grad p^n, welche einen elementar abelschen Normalteiler enthält. Ist A eine reguläre abelsche Untergruppe von G, so gilt: Ist p^w die Ordnung der von den Elementen $a \in A$ mit $a^p = 1$ gebildeten Untergruppe von A und ist $w < (p^m - 1)/m$, so hat keine Invariante von A den Wert p^{m+1}. Als Spezialfall (mit zyklischem A) ist darin der Satz von Ritt enthalten, daß eine auflösbare primitive Permutationsgruppe vom Grad p^n für $n > 1$ keinen p^n-Zyklus enthält, ausgenommen $p^n = 2^2$ [Trans. Amer. math. Soc. **24**, 21—30 (1923)]. Das gleiche Resultat unter der schärferen Voraussetzung $w \leqq (p^m - 1)/(m + 1)$ gab Ref. an (dies. Zbl. **64**, 253). Verf. zeigt weiter, daß das Holomorph einer elementar abelschen Gruppe der Ordnung p^p (in naheliegender Weise als primitive Permutationsgruppe dargestellt) eine reguläre abelsche Untergruppe vom Typ $(p^2, p, p, \ldots, p)$ enthält. Schließlich untersucht Verf., ob G unter den vorherigen Voraussetzungen (primitiv, mit elementar abelschem Normalteiler) eine reguläre abelsche Untergruppe vom Typ (p^a, p^b) mit $a \neq b$ haben kann. Mit dem angegebenen Satz läßt sich die Frage sofort verneinen, ausgenommen die Typen (4, 2), (8,2), (8,4), (9,3). Es gibt tatsächlich solche Gruppen G mit regulären Untergruppen der Typen (4,2), (8,2), (9,3). Alle solche Gruppen G sind zweifach transitiv und nicht auflösbar. Jedoch gibt es keine solche Gruppe G mit einer regulären Untergruppe vom Typ (8,4), wie durch längere Matrizenrechnungen gezeigt wird. Dem Ref. ist bekannt, daß Verf. für auflösbare Gruppen wesentlich schärfere Resultate erhalten hat. *B. Huppert.*

Hall, Marshall and L. J. Paige: Complete mappings of finite groups. Pacific J. Math. **5**, 541—549 (1955).

A complete mapping of a group G is a one-to-one mapping $x \to \theta(x)$ of G upon G such that $x \to x \cdot \theta(x)$ is also a one-to-one mapping of G upon G. The authors continue the work of a previous paper by Paige (this Zbl. **43**, 24) on the question of the existence of complete mappings for finite, non-abelian groups of even order. They prove that a necessary condition for a finite group of even order to have a complete mapping is that its Sylow 2-subgroup be non-cyclic and they conjecture that this condition is indeed also sufficient. Their conjecture is known to be correct for abelian groups and they prove its correctness for the more general case of solvable groups. They also prove that the symmetric group S_n (> 3) and the alternating group A_n possess complete mappings. These sufficiency results are obtained by applying the following theorem. Suppose G is a finite group and H is a subgroup of index k such that the following exist: (i) a set $u_1, u_2, \ldots, u_k$ of elements of G which form a system of representatives for both the right and left cosets of G by H, (ii) permutations σ and τ of the integers $1, 2, \ldots, k$ for which $u_i\, u_{\sigma(i)}\, H = u_{\tau(i)}\, H$, (iii) a complete mapping of H. Then G possesses a complete mapping. *P. T. Bateman.*

Taussky, Olga: A note on group matrices. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 984—986 (1955).

Es handelt sich um eine Charakterisierung der (endlichen) Hamiltonschen Gruppen mittels der sogenannten Gruppenmatrix einer Gruppe. — G sei eine endliche Gruppe der Ordnung n, deren Elemente mit $P, Q, \ldots$ bezeichnet werden. Weiter seien $x_P, x_Q, \ldots n$ Unbestimmte, die den Gruppenelementen von G eineindeutig zugeordnet werden. Die Matrix $(x_{PQ^{-1}})$, $P, Q \in G$ nennt Verf. „die" Gruppenmatrix von G; werden aber die x durch reelle oder komplexe Zahlen ersetzt, so spricht Verf. von „einer" Gruppenmatrix von G. Eine aus komplexen Zahlen bestehende Matrix A heiße normal, wenn $A\,A^* = A^*\,A$ gilt; dabei bedeutet A^* die durch Transponierung der Konjugierten von A erhaltene Matrix. Enthält aber A Unbestimmte, so wird die Normalität von A genau wie vorher definiert, nur muß man das Konjugieren einer Unbestimmten formal auffassen und diejenigen Unbestimmten, welche mit ihren betreffenden Konjugierten übereinstimmen, als reell betrachten. Das Hauptresultat der Verf. lautet nun: Es sei M die Gruppenmatrix der endlichen Gruppe G und es sei vorausgesetzt, daß die Unbestimmten x alle reell sind. Dann ist M normal dann und nur dann, wenn G eine abelsche oder Hamiltonsche 2-Gruppe ist; sind dagegen die Unbestimmten x alle komplex, so ist M normal dann und nur dann, wenn G eine abelsche Gruppe ist. — Wie Verf. bemerkt, kann man, nach Ky Fan, den Gruppenmatrixbegriff ein wenig anders einführen, und zwar folgendermaßen: Es sei f eine Abbildung von G auf eine endliche aus reellen oder komplexen Zahlen bestehende Menge $\mathfrak{M}$; dann heiße die Matrix $M_f = (f(PQ^{-1}))$, $P, Q \in G$ wieder die Gruppenmatrix von G (in bezug auf f). Dieser neue Gruppenmatrixbegriff führt nun zu den folgenden (ohne Beweise angegebenen) Kriterien: (i) Es werde gesetzt $\mathfrak{M} = \{0, 1\}$. Dann ist die endliche Gruppe G dann und nur dann eine abelsche oder Hamiltonsche, wenn die betreffende M_f normal ist. (ii) Es werde gesetzt $\mathfrak{M} = \{0, 1, \sqrt{-1}\}$. Dann wird die endliche Gruppe G dann und nur dann zu einer abelschen, wenn die betreffende M_f normal ist. *M. Benado.*

Belov, N. V., N. N. Neronova und T. S. Smirnova: 1651 Šubnikovsche Gruppen. Trudy Inst. Kristallogr. **11**, 33—67 (1955) [Russisch].

Pólya und Niggli [Z. Kristallogr. **60**, 278, 283 (1924)] haben die 17 Bewegungsgruppen der Ebene aufgestellt. Faßt man die Ebene als spiegelnd auf, so erhält man 80 Bewegungsgruppen [Weber, Z. Kristallogr. **70**, 309 (1929); Alexander und Herrmann, ebenda **69**, 295 (1928) und **70**, 328 (1929)]. Man kann diese auffassen als zweifarbige Gruppen, indem man anstatt der Spiegelung an der Trägerebene den Punkten die zwei Farben weiß und schwarz zukommen läßt. Daher sprechen die Verff. auch von den 80 zweifarbigen Gruppen. Die Verff. lösen die folgende Aufgabe: Analog wie man die 17 einfarbigen Gruppen zu den 80 zweifarbigen verallgemeinern kann, so soll man die 230 einfarbigen Raumgruppen (von Schönflies und Fedorov) zu zweifarbigen Gruppen verallgemeinern. Sie finden 1651 Gruppen, die sie nach Šubnikov benennen. Die Methode der Verff. ist geometrisch: Zuerst werden die 36 zweifarbigen Bravais-Gitter aufgestellt, man erhält sie durch Zentrieren der Kanten, der Flächen und der Zellen der 14 Bravais-Gitter. Hierauf folgen 10 Lehrsätze, welche das gegenseitige Verhalten der Symmetrieelemente bei den zweifarbigen Gruppen beschreiben, sie entsprechen den Kombinationsregeln bei den einfarbigen

Symmetrieelementen. Die 1651 Šubnikov-Gruppen oder zweifarbigen Bewegungsgruppen werden hierauf erhalten, indem man die 36 zweifarbigen Bravais-Gitter mit allen möglichen ein- und zweifarbigen Symmetrieelementen kombiniert. Das Verfahren wird am Beispiel der rhombischen Hemimorphie C_{2v} ausführlich erläutert und führt auf 192 zweifarbige Raumgruppen. In den einzelnen Kristallsystemen haben die Verff. die folgenden Anzahlen von zweifarbigen Raumgruppen gefunden: Triklin: 7, Monoklin: 91, Rhombisch: 562, Tetragonal: 570, Trigonal (rhomboedrisch): 108, Hexagonal: 164, Kubisch: 149. Das Problem der zweifarbigen Raumgruppen wurde erstmals durch H. Heesch [Z. Kristallogr. **73**, 325—345 (1930)] gestellt und für den Fall des triklinen und monoklinen Systems gelöst. Seine Gruppen Nr. 1-19 und 40—118 stimmen mit den obigen 7 + 91 überein. Hierauf hat der Ref. (dies. Zbl. 8, 244) das Problem mit arithmetischen Methoden behandelt und für das hexagonale und rhomboedrische System eine Anzahl der zweifarbigen Gruppen angegeben. Der Vergleich mit Belov und eine Überprüfung zeigen, daß diese Aufstellung unvollständig ist. *J. J. Burckhardt.*

Koecher, Max: Einheiten schiefsymmetrischer Matrizen. Math. Nachr. **13**, 367—382 (1955).

Without loss of generality we assume that $\mathfrak{H}$, a non-singular skew-symmetric matrix of order $2n$, is of the form $\begin{pmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{pmatrix}$, where $H = [h_1, \ldots, h_n]$ is a diagonal integral matrix with $h_i | h_{i+1}$. The group of unimodular matrices $\mathfrak{A}$ satisfying $\mathfrak{A}\,\mathfrak{H}\,\mathfrak{A}' = \mathfrak{H}$ is denoted by $M_0(H)$. If we write $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, then

$$A'HC = C'HA, \quad B'HD = D'HB, \quad A'HD - C'HB = H.$$

The author proves that $M_0(H)$ is generated by elements of the form $\begin{pmatrix} U^* & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ where both U und U^* are matrices with integral elements satisfying $U^* = H^{-1}U'^{-1}H$ and $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} E & T \\ 0 & E \end{pmatrix}$ where T is a matrix with integral elements satisfying $T'H = HT$. He proves also that for $H = E$ the group $M_0(E)$ is generated by $\frac{1}{2}n(n-1) + 1$ or $\frac{1}{2}n(n-1) + 2$ elements of the form $\begin{pmatrix} S & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ with symmetric integral S according to n is even or odd. The order of these elements are divisors of 12. He considers also the problem of automorphisms of the group $M_0(H)$. (Cf. Reiner, this Zbl. **66**, 18.) Further, if G is a diagonal integral matrix $[g_1, \ldots, g_n]$ with $g_i | g_{i+1}$, let

$$M_0(H, G) = \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix} M_0(HG^2) \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}^{-1};$$

the author proves that if $(\det G_1, \det G_2) = 1$ then

$$M_0(H, G_1) \cdot M_0(H, G_2) = M_0(H), \quad M_0(H, G_1) \wedge M_0(H, G_2) \doteq M_0(H, G_1 G_2).$$

L. K. Hua.

Goetz, A.: Über eine hinreichende Bedingung für die Existenz einer invarianten Metrik in homogenen Räumen. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **3**, 467—469 (1955).

Soient G un groupe topologique métrisable, ϱ une distance invariante à gauche sur G et H un sous-groupe fermé de G. L'A. montre que, si H est distingué ou bien si $\varrho(xz, yz) = \varrho(x, y)$ pour tout $x, y \in G$ et $z \in H$ (ce qui a toujours lieu si H est compact), l'espace homogène G/H est métrisable par une distance d telle que $d(uX, uY) = d(X, Y)$ pour tout $X, Y \in G/H$ et $u \in G$. *T. Ganea.*

Enomoto, Shizu: Sur la structure des fonctions d'ensemble dans les groupes topologiques localement compacts. II. Proc. Japan Acad. **31**, 431—435 (1955).

Let G be a locally compact, non-discret and σ-compact group. The author examines the connexion between Baire and Borel sets in G and the analogous sets in the metrizable groups G/H where H is the intersection of a branch of neighbourhoods of the unit element $e \in G$ (see the first part of the paper, this Zbl. **64**, 260). For instance, it is proved that the class $\mathfrak{B}$ of all Baire subsets of G is the class of all sets $\pi_H^{-1}(B)$ where H is the intersection of a branch of neighbourhoods of $e \in G$, B is a Borel subset of G/H, and π_H is the natural homomorphism of G onto G/H. Every $\mathfrak{B}$-mesurable function $f(x)$ on G is of the form $f(x) = f_0(\pi_H(x))$ where $f_0(x)$ is a Baire function on G/H and H is the intersection of a suitable branch of neighbourhoods of $e \in G$. *R. Sikorski.*

Murakami, Haruo: A note on exponential mapping. Portugaliae Math. **14**, 15—19 (1955).

G sei die Gruppe aller n-reihigen regulären Matrizen mit komplexen Elementen und g ihre Liesche Algebra. Verf. beweist, daß es zu jeder Matrix $X \in G$ mindestens eine Matrix $Y \in g$ gibt, so daß $\exp Y = X$ ist. Einen anderen Beweis hat K. Asano gegeben (dies. Zbl. **17**, 51). *W. Quade.*

Ono, Takashi: Arithmetic of orthogonal groups. II. Nagoya math. J. **9**, 129—146 (1955).

(Teil I s. dies Zbl. **65**, 12.) Es sei k ein Körper einer Charakteristik $\neq 2$ und ϑ ein Automorphismus von k. V, W seien lineare Vektorräume über k und θ eine halblineare Abbildung von V in W mit der Eigenschaft $\theta(\varkappa v) = \vartheta\varkappa \cdot \theta v$ für alle $\varkappa \in k$, $v \in V$. Eine Bilinearform $f(w_1, w_2)$ auf W stellt eine Bilinearform $g(v_1, v_2)$ auf V halbähnlich dar, wenn $f(\theta v_1, \theta v_2) = \lambda\vartheta\, g(v_1, v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$ gilt; hier bedeutet λ ein Element $\neq 0$ aus k. (Speziell kann man $\lambda = 1$ oder $\vartheta =$ Identität oder beides verlangen und erhält so verschärfte Bedingungen für die Darstellung von g durch f.) Wenn k ein perfekter bewerteter Körper ist, so ist für die halbähnliche Darstellbarkeit von g durch f notwendig und hinreichend: $0 \leqq \nu(f) - \nu(g) \leqq \dim W - \dim V$ falls nicht $\dim V = \dim W \equiv 0 \mod 2$ ist. In diesem Ausnahmefall muß man außerdem voraussetzen, daß die Determinanten von f und g sich um einen quadratischen Faktor unterscheiden. Hierbei bedeutet $\nu(f)$ den „Index" der quadratischen Form $f(w_1, w_2)$. Ist k ein algebraischer Zahlkörper oder ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen über einem endlichen Konstantenkörper, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die halbähnliche Darstellbarkeit von g durch f: $0 \leqq \nu_{\mathfrak{p}}(f) - \nu_{\mathfrak{p}}(g) \leqq \dim W - \dim V$ für alle Primstellen $\mathfrak{p}$ von k, wozu im Ausnahmefalle $\dim V = \dim W \equiv 0 \mod 2$ noch die Quadratgleichheit der Determinanten kommt. — Wenn g durch f halbähnlich dargestellt wird, so wird die orthogonale Gruppe bez. g in die orthogonale Gruppe bez. f halblinear eingebettet. Obige Sätze lassen sich auch als Sätze über halblineare Einbettung von orthogonalen Gruppen deuten. *M. Eichler.*

Littlewood, D. E.: On orthogonal and symplectic group characters. J. London Math. Soc. **30**, 121—122 (1955).

Verf. gibt die folgenden Zusammenhänge zwischen den Charakteren $\langle\lambda\rangle$ der symplektischen und $[\lambda]$ der orthogonalen Gruppe von $2k$ Dimensionen: $\langle\lambda\rangle = [\lambda] + \sum \Gamma_{\xi\mu\lambda}[\mu] - \sum \Gamma_{\eta\mu\lambda}[\mu]$, $[\lambda] = \langle\lambda\rangle + \sum \Gamma_{\varrho\mu\lambda}[\mu] - \sum \Gamma_{\sigma\mu\lambda}[\mu]$, wo $\Gamma_{\iota\mu\lambda}$ der Koeffizient der S-Funktion $\{\lambda\}$ im Produkt $\{\iota\}\{\mu\}$ ist; die Summation ist auch über $\{\iota\}$ zu erstrecken, und zwar sind speziell: $\{\xi\}$ Partitionen der Form $\{2r, 2s\}$, $r \geqq s \geqq 0$, ($r = s = 0$ ausgeschlossen), $\{\eta\}$ Partitionen der Form $\{2r+1, 2s+1\}$, $r \geqq s \geqq 0$, $\{\varrho\}$ Partitionen der Form $\{2^{2r}, 1^{2s}\}$, $r, s \geqq 0$ ($r = s = 0$ ausgeschlossen), $\{\sigma\}$ Partitionen der Form $\{2^{2r+1}, 1^{2s}\}$, $r, s \geqq 0$. Dies beweist und vervollständigt Aussagen von Ibrahim (dies. Zbl. **56**, 26). *F. L. Bauer.*

Reiner, Irving: Real linear characters of the symplectic modular group. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 987—990 (1955).

The author determines completely all homomorphisms of symplectic modular group into $\{\pm 1\}$, and the commutator subgroup of the symplectic modular group. *L. K. Hua.*

Krafft, Günther: Die stetigen Darstellungen der reellen Formen der komplexen unimodularen, orthogonalen und symplektischen Gruppen. Mitt. math. Sem. Gießen **53**, 51 S. (1955).

Verf. untersucht diejenigen reellen Lieschen Gruppen, welche bei Erweiterung des reellen zum komplexen Zahlkörper übergehen in entweder die komplexe unimodulare Gruppe SL(n), oder die komplexe orthogonale Gruppe $O(n)$, oder die komplexe symplektische Gruppe Sp$(2n)$. Eine Aufzählung dieser reellen Lieschen Gruppen wurde bereits von E. Cartan [Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. **31**, 362 (1914)] und von F. Gantmacher (dies. Zbl. **22**, 315) durchgeführt. Verf. untersucht nun hier die stetigen Darstellungen dieser Gruppen. — § 2 gibt einen kurzen Abriß der Darstellungstheorie der komplexen Gruppen SL(n), $O(n)$, Sp(n). Die Beziehungen zwischen den Infinitesimalringen der reellen und denen der zugehörigen komplexen Gruppen führen zu Beziehungen zwischen den Infinitesimalringen der entsprechenden Darstellungen. Diese ermöglichen es, die Darstellungen für die Einheitskomponente einer reellen Gruppe aus solchen der zugehörigen komplexen Gruppe zu gewinnen (§ 3). Damit wird eine Untersuchung darüber notwendig, welche der untersuchten reellen Gruppen mehr als eine Komponente besitzen (§ 4). Für diese Gruppen gelingt es, die Darstellungen der Einheitskomponente auf die vollen Gruppen auszudehnen (§ 7). — Die in § 8 behandelte Spindarstellung der komplexen orthogonalen Gruppe ergänzt nicht nur die Ausführungen des § 2, sondern verhilft überdies zur Auffindung gewisser Äquivalenzen, die zwischen den Darstellungen der komplexen $O(n)$ entstehen, wenn man sich auf eine der zugehörigen reellen Untergruppen beschränkt (§ 9). Für die komplexen Gruppen SL(n) und Sp(n) werden solche Äquivalenzen angegeben. *P. Roquette.*

Verbände. Ringe. Körper:

Hughes, N. J. S.: Refinement and uniqueness theorems for the decompositions of algebraic systems with a regularity condition. J. London math. Soc. **30**, 259—273 (1955).

A Σ-set is defined to be a set in which for certain (finite or infinite) families x_u $(u \in U)$ of elements a sum $\sum\limits_{u \in U} x_u$ exists, with the property that there is a zero-element 0, an arbitrary number of which may be added to or cancelled from a sum. Furthermore there may be n-ary operations, which are idempotent for 0; these operations need not to be finitary and need not to be defined for all n-uples of elements. Decomposition of a Σ-set as an inner direct sum with an arbitrary number of summands is defined in the obvious way. In this paper sufficient conditions are given in order that two direct decompositions of a Σ-set have a common refinement. The following auxiliary notions are required. An S-function of rank ϱ is a function, which maps a subset of the cardinal product of ϱ Σ-sets into a Σ-set with the property that a point with at least one component 0 is mapped onto 0. An S-system is a collection of Σ-sets and S-functions with the property that the Σ-sets which are used in the definition of the S-functions are in the system. A direct decomposition of an S-system consists of direct decompositions of its Σ-sets, which are compatible with its S-functions in a sense not to be described here. An S-system is called regular if every element $\neq 0$ of every Σ-set, which is a component of the domain of one of its S-functions, is a component of a point, which is mapped by one of its S-functions onto an element $\neq 0$ and if its other Σ-sets are generated by the ranges of those of its S-functions, whose ranges are in that Σ-set. The main theorem states that two direct decompositions of a regular S-system have a common refinement. There are applications of this theorem to groups, rings and partially ordered sets. We mention the theorem stating that two decompositions of a group as a direct sum of fully invariant subgroups have a common refinement. Another application is the solution of problem 11 of Birkhoff's Lattice theory (this Zbl. 33, 101) concerning partially ordered sets with a least element: two factorizations of such a set have a common refinement. *W. Peremans.*

Hughes, D. R.: Planar division neo-rings. Trans. Amer. math. Soc. 80, 502—527 (1955).

Ein Divisions-Neoring (DNR) ist eine nicht leere Menge R, in der zwei Operationen, genannt Addition und Multiplikation, definiert sind, welche die folgenden Eigenschaften erfüllen: (a) R ist eine loop bezüglich der Addition, 0 sei deren neutrales Element; $R - \{0\}$ ist eine loop bezüglich der Multiplikation, 1 sei deren neutrales Element; (c) es gelten die beiden Distributivgesetze. R ist genau dann ein planarer Divisions-Neoring (PDNR), d. h. Koordinatenbereich einer affinen Ebene (und somit spezieller Ternärkörper), wenn $x a + b = x c + d$ für $a \neq c$ eindeutig nach x und $a x + y = b$, $c x + y = d$ für $a \neq c$ eindeutig nach x, y auflösbar sind. (Für endliche PDNR genügt eine dieser beiden Auflösbarkeitsbedingungen.) Ein DNR heißt assoziativ, wenn seine Multiplikation assoziativ ist. (Die assoziativen DNR sind genau die Neokörper im Sinne von L. Paige, dies. Zbl. 40, 305.) Die multiplikative loop eines endlichen PDNR R enthält höchstens ein Element e der Ordnung 2; für dieses gilt $e + 1 = 0$. Ist R außerdem potenzassoziativ (d. h. erzeugt jedes $a \in R$, $a \neq 0$ eine assoziative Unterloop), so ist außerdem die Addition von R kommutativ und es gilt $(a + b) - b = a$. — Sei $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt der multiplikativen Gruppe eines assoziativen PDNR mit sich. $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ seien die Untergruppen, die aus allen Paaren $(1, a)$, $(a, 1)$ bzw. (a, a) bestehen; $\mathfrak{D}$ sei die Untermenge aller (a, b) von $\mathfrak{G}$ mit $a + b = 1$. Aus $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{g} \notin \mathfrak{H}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ folgt die Existenz genau eines geordneten Paares $(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)$ von Elementen aus $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{g} = \mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2^{-1}$; ist dagegen $\mathfrak{g} \in \mathfrak{H}_i$, $\mathfrak{g} \neq (1, 1)$, so ist $\mathfrak{g}$ nicht in der Form $\mathfrak{d}_1 \mathfrak{d}_2^{-1}$ darstellbar. $\mathfrak{D}$ erfüllt somit Bedingungen, die denen einer Differenzenmenge ähnlich sind (vgl. R. H. Bruck, dies. Zbl. 65, 133). Weitere Eigenschaften von $\mathfrak{D}$ werden angegeben. — Es werden die Automorphismen endlicher abelscher PDNR untersucht. („abelsch" bedeutet, die multiplikative loop ist eine abelsche Gruppe.) Ist n die Ordnung des abelschen PDNR R und p ein Primteiler von n, so ist die Abbildung $x \to x^p$ ein Automorphismus von R; der Beweis hierfür wird mittels Untersuchungen im Gruppenring von $\mathfrak{G}$ geführt. Hieraus folgen Beschränkungen über die Ordnung einer endlichen abelschen PDNR, u. a. wird hergeleitet, daß n für $n \leqq 250$ notwendig eine Primzahlpotenz ist. — In einem Anhang gibt Verf. Beispiele unendlicher eigentlicher abelscher PDNR an; es ist jedoch nicht bekannt, ob endliche eigentliche PDNR existieren. [Vgl. auch G. Pickert, Projektive Ebenen über Neokörpern, Wiss. Z. Friedrich-Schiller-Univ. Jena, math.-natur. R. 1955/56, 131—135 (1956).] *J. André.*

Boccioni, Domenico: Semianelli complementarizzabili. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 24, 474—509 (1955).

L'A. appelle semi-anneau S un ensemble muni de deux opérations: addition et multiplication, qui en font un semi-groupe abélien pour l'addition, la multiplication étant associative et distributive par rapport à l'addition. Il considère en outre un sous-ensemble M de S, multiplicativement clos, et dont tous les éléments sont simplifiables dans S vis à vis de la multiplication. On dit alors que le semi-anneau S est „complémentarisable" à gauche par rapport à M quand il existe un sur-anneau A de S ayant les propriétés suivantes: I. A est un anneau ayant un élément unité, II. Tout élément α de M possède un inverse α^{-1} dans A, III. Tout élément x de A est représentable sous la forme $x = \gamma^{-1}(a - b)$, avec $\gamma \in M$, a et $b \in S$. — Le théorème fondamental obtenu est alors le suivant: Pour que le semi-anneau S soit complémentarisable à gauche par rapport à M, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition A) $a, b \in S$ et $\gamma \in M$ étant donnés, il existe $a_1, b_1 \in S$ et $\gamma_1 \in M$

tels que $\gamma_1 a + b_1 \gamma = \gamma_1 b + a_1 \gamma$. L'anneau A est alors déterminé de façon unique à un isomorphisme près. — Lorsque S est un anneau et M un sous-ensemble multiplicativement fermé d'éléments non diviseurs de zéro, ce théorème revient au théorème d'Asano suivant lequel il existe un anneau de quotients à gauche si et seulement si la condition suivante est remplie A_0) $c \in S$ et $\gamma \in M$ étant donnés, on peut trouver $c_1 \in S$, et $\gamma_1 \in M$ tels que $\gamma_1 c = c_1 \gamma$; l'anneau des quotients à gauche est univoquement déterminé par S et M à un isomorphisme près. — L'A. démontre directement son théorème au moyen d'une équivalence dans l'ensemble $M \times S \times S$ et retrouve le théorème d'Asano comme cas particulier. Il est bien plus commode de passer d'abord du semi-anneau S à un anneau S' par une équivalence classique dans l'ensemble $S \times S$, puis d'effectuer une immersion au moyen du théorème d'Asano qui est applicable en vertu de la condition A qui entraîne la condition A_0 dans S'. Le cas d'un pseudo anneau qui est envisagé par l'A. à la fin de son travail pourrait être traité par une méthode analogue. *L. Lesieur.*

Jónsson, Bjarni: Distributive sublattices of a modular lattice. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 682—688 (1955).

L'A. dà la seguente condizione necessaria e sufficiente affinchè un sottoinsieme (non vuoto) X di un reticolo modulare A generi un subreticolo distributivo (teorema 2)

$$\text{(i)} \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) \prod_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{m} \left(x_i \prod_{j=1}^{n} y_j\right)$$

(m, n interi positivi) ogni qualvolta si abbia: $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in X$. Le condizioni (i) non sono però tutte indipendenti; ciò permette all'A. di dedurre dalle (i) condizioni più semplici in alcuni casi speciali, ritrovando in particolare la nota condizione perchè tre elementi x, y, z di un retricolo modulare A generino un reticolo distributivo [la quale è semplicemente: $(x + y) z = x z + y z$]. NB: Basandosi sulla ricerca di Jonsson, R. Musti e E. Buttafuoco hannd ridotto sistematicamente il numero delle condizioni nel caso di X finito [Sui subreticoli distributivi dei reticoli modulari, Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **11**, 584—587 1956)]. L'A. fa infine vedere su di un esempio che le condizioni (i) non possono essere sostituite dalle condizioni più semplici:

$$\text{(i')} \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) y = \sum_{i=1}^{m} x_i\, y;$$

lascia aperto il problema se le (i'), insieme alle loro duali, siano equivalenti alle (i). *L. Lombardo-Radice.*

Tandai, Kwoichi: On certain pairs of mappings of modular lattices. Sci. Papers College general Educ. Univ. Tokyo **5**, 83—86 (1955).

L'A. simplifie certaines démonstrations de M. Hukuhara (ce Zbl. **57**, 337) et les généralise en remplaçant l'ensemble des sous-espaces d'un espace vectoriel V par une lattice modulaire L admettant un plus petit élément 0 et un plus grand élément 1. Les endomorphismes de V sont remplacés par les couples (φ, φ') où $\varphi: L \to L$ et $\varphi': L \to L$ vérifient les axiomes: $\varphi(\alpha \cup \beta) = \varphi(\alpha) \cup \varphi(\beta)$, $\varphi'(\alpha' \cap \beta') = \varphi'(\alpha') \cap \varphi'(\beta')$, $\varphi' \varphi(\alpha) = \alpha \cup \varphi'(0)$, $\varphi\varphi'(\alpha') = \alpha' \cap \varphi(1)$. *J. Dixmier.*

● **Albada, P. J. van: Integral relations in alternative coordinate rings.** Leiden: Drukkerij „Luctor et Emergo" 1955. 43 p.

Sei R ein Ring mit Einselement und mit nullteilerfreiem Primring Π, in dem die Alternativgesetze $(a, a, b) = (b, a, a) = 0$ gelten $[(a, b, c) = a b \cdot c - a \cdot b c$ gesetzt]. Ein Polynom P aus dem freien nichtassoziativen Polynomring $F = \Pi(x_1, \ldots, x_k)$ heißt Identitätspolynom (IP) bezüglich R, wenn $P(a_1, \ldots, a_k) = 0$ für alle $a_1, \ldots, a_k \in R$ gilt. Die IP bezüglich R bilden ein T-Ideal in F, das ist ein Ideal, das mit $P(x_1, \ldots, x_k)$ auch $P(y_1, \ldots, y_k)$ für beliebige $y_1, \ldots, y_k \in F$ enthält. Die Polynome P aus F werden auf folgende Weise durch Einführung einer Signatur klassifiziert: Einem Produkt (Monom) in $x_1, \ldots, x_k$ mit n_i-tem Grad in x_i werde die Signatur $s = (d_1, \ldots, d_k)$ mit $d_i = \sum_{j=i}^{k} n_j$ zugeordnet. Für zwei Signaturen soll $(d_1, \ldots, d_k) < (d_1', \ldots, d_k')$ bedeuten: Es gibt ein j mit $1 \leq j \leq k$, so daß $d_i = d_i'$ für $1 \leq i \leq j-1$ und $d_j < d_j'$ gilt. Das Maximum der Signaturen aller Summanden von P heiße eine spezielle Signatur von P. Das Minimum aller speziellen Signaturen von P, die man durch Vertauschen der Indizes $1, \ldots, k$ erhält, wird schließlich die Signatur von P genannt. Ein in einem festen T-Ideal gelegenes Polynom mit möglichst kleiner Signatur und (unter diesen) mit möglichst wenig Monomen heißt T-Kern. Es werden für einige niedrige Signaturen diejenigen Polynome angegeben, die T-Kerne sind. So ergeben sich u. a. für die Signaturen (2, 1), (3, 1) und (3, 2, 1) die Polynome $[x, y] = x\,y - y\,x$, $[[x, y], y]$ und (x, y, z) als einzige T-Kerne. Für Ringe R, die keine nilpotenten Elemente enthalten, folgen weitere Reduktionen. Hieraus ergibt sich folgende Verschärfung eines Satzes von M. Hall [Trans. Amer. math. Soc. **54**, 229—277 (1943), Thm. 6. 2]: Ein assoziativer Divisionsring, für den $[[x, y]^2, x] = 0$ für alle $x, y \in R$ gilt, ist entweder kommutativ oder eine Quaternionenalgebra über seinem Zentrum. Zum Schluß werden noch einige nicht ganze Relationen in Alternativringen (d. h. solche, in denen auch x^{-1} vorkommt) untersucht und geometrische Anwendungen gebracht. *J. André.*

San Soucie, R. L.: Right alternative rings of characteristic two. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 716—719 (1955).

Ein Assoziator eines Ringes R wird durch $(x, y, z) = x\,y \cdot z - x\ \ y\,z$ definiert. R heißt rechtsalternativ, wenn $(x, y, y) = 0$ für alle $x, y \in R$ gilt. F sei der von x_1 und x_2 erzeugte freie nichtassoziative Ring. Die Elemente $u_1, u_2, u_3 \in R$ bilden nach Kleinfeld (dies. Zbl. **52**, 267) ein alternatives Tripel, wenn folgendes gilt: (a) Es gibt $\alpha_i[x_1, x_2] \in F$ $(i = 1, 2, 3)$ und $r_1, r_2 \in R$ derart, daß $u_i = \alpha_i\,[r_1, r_2]$ ist; (b) sind s_1, s_2 Elemente eines beliebigen Alternativringes und gilt $u_i' = \alpha_i\,[s_1, s_2]$, so ist $(u_1', u_2', u_3') = 0$. Der Ring R hat die Eigenschaft (P), wenn $(u_1, u_2, u_3) = 0$ aus $(u_1, u_2, u_3)^2 = 0$ für jedes alternative Tripel u_1, u_2, u_3 folgt. Verf. überträgt die Ergebnisse von Kleinfeld (a. a. O.) auf Ringe mit Charakteristik 2 und beweist: Ein Rechtsalternativring der Charakteristik 2, für den außerdem $w(x\,y \cdot x) = (w\,x \cdot y)\,x$ gilt, ist genau dann alternativ, wenn er die Eigenschaft (P) hat. Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes des Verf. über rechtsalternative Divisionsringe der Charakteristik 2 (dies. Zbl. **64**, 34). *J. André.*

Kleinfeld, Erwin: Generalization of a theorem on simple alternative rings. Portugaliae Math. **14**, 91—94 (1955).

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des folgenden vom Verf. (dies. Zbl. **51**, 25) bewiesenen Hauptsatzes: Ein alternativer Ring R, der kein Nilring ist und keine eigentlichen zweiseitigen Ideale besitzt, ist entweder assoziativ oder eine Cayley-Dickson-Algebra. Verf. beweist, daß die Aussage des Hauptsatzes schon gilt, wenn der Durchschnitt aller von Null verschiedenen zweiseitigen Ideale von R kein Nilring ist. *E. Trost.*

Jenner, W. E.: Arithmetics of Lie algebras. Nieuw Arch. Wiskunde, III. R. **3**, 72—78 (1955).

Verf. versucht, eine geeignete Idealtheorie in halbeinfachen Lieschen Algebren der Charakteristik Null zu entwickeln, um auf diesem Wege — in Analogie zu den für gewöhnliche Algebren bekannten Zusammenhängen — Strukturaussagen über gewisse Klassen Liescher Algebren über Körpern von Primzahlcharakteristik zu gewinnen. Dazu wird ein Teilring $\mathfrak{O}$ einer Lieschen Algebra $\mathfrak{L}$ über einem Körper k der Charakteristik Null, welcher Quotientenkörper eines Dedekindschen Ringes $\mathfrak{o}$ ist, ganz genannt, wenn $\mathfrak{O}$ ein endlich erzeugbarer $\mathfrak{o}$-Modul ist, der eine k-Basis von $\mathfrak{L}$ enthält. Bei algebraischen Zahlkörpern k wird lokal die Existenz von ganzen Teilringen, die multiplikative Einheitsoperatoren ihrer Ideale sind, für fast alle Primstellen von k nachgewiesen. Für endlich viele Primstellen von k bleibt diese

Existenzfrage offen. Im zweiten Teil der Arbeit werden die Grundlagen einer allgemeinen Idealtheorie Liescher Algebren durch Einführung der Begriffe „teilerfremd“, „direkter Durchschnitt“ und „Blockideal“ entwickelt. Die Definitionen und Sätze sind analog zu denen einer früheren Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **52**, 270) über gewöhnliche Algebren. *P. Wolf.*

Villamayor, Orlando E.: On the theory of unilateral equations in associative rings. Revista mat. Cuyana **1**, 1—40 (1955).

Der Verf. untersucht Gleichungen und Gleichungssysteme in assoziativen Ringen, und zwar behandelt er in den ersten drei Abschnitten der Arbeit Systeme einseitiger linearer Gleichungen in beliebigen Ringen und im vierten Gleichungen höheren Grades in einer Unbestimmten in kommutativen Ringen. Dazu bedient er sich im wesentlichen der — naheliegend definierten — freien Erweiterungen in endlich vielen Unbestimmten, bzw. im kommutativen Fall des Polynomringes über einem Ring. — Ist A ein assoziativer Ring, $\Gamma_n(A)$ die freie Erweiterung von A in n Unbestimmten $X_1, \ldots, X_n$, $f = f(X_1, \ldots, X_n) \in \Gamma_n(A)$, so heißt die Gleichung $f = 0$ lösbar, wenn es einen Homomorphismus von $\Gamma_n(A)$ auf einen Ring B gibt, der A isomorph abbildet und dessen Kern f enthält. Die Bilder der X_i in B sind die Lösungen der Gleichung. Ein System von Gleichungen heißt verträglich (compatible), wenn die Gleichungen in einer geeigneten Erweiterung von A simultane Lösungen besitzen. A heißt Rechts- (Links-) Halbkörper (semi-field), wenn jede lösbare lineare Gleichung $a x - b = 0$ $(x a - b = 0)$ schon eine Lösung in A hat. Ein Halbkörper ist ein Rechts- und Links-Halbkörper. A heißt vollständiger Rechts-Halbkörper usw., wenn jedes verträgliche System linearer Rechts- usw. Gleichungen in A Lösungen hat. Einfache Anwendungen des Satzes von Zorn zeigen, daß sich jeder Ring in einen (nicht eindeutig bestimmten) Rechts- usw. Halbkörper einbetten läßt. Hauptergebnis des zweiten Abschnittes: Enthält der Ring A ein Einselement, so ist $a x - b = 0$ genau dann lösbar, wenn aus $z a = 0$ stets $z b = 0$ folgt $(z \in A)$. Im Beweis von Theorem 2, 3 scheint dem Ref. die Überlegung des ersten Absatzes auf p. 16 nicht schlüssig. Der Rest des Beweises läßt sich sehr vereinfachen (einige andere übrigens auch), wenn man sich auf direkte Summen beschränkt, die subdirekten lassen sich hierauf einfach zurückführen. — Abschnitt 3 behandelt Systeme einseitiger linearer Gleichungen in einer und mehreren Unbestimmten. Typisches Ergebnis: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ ist lösbar, wenn aus $z a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, stets $z b = 0$ folgt. Als Anwendungen dieser Ergebnisse werden einige Sätze über invariante Ideale I in gewissen Ringen A hergeleitet. Dabei heißt I invariant bezüglich eines Oberringes B von A, wenn der Durchschnitt von A mit dem Erzeugnis von I in B gleich I ist. Im letzten Teil werden kommutative Ringe, meist mit Einselement, betrachtet. Es werden Sätze über Ideale im Polynomring $A[X]$ bewiesen, z. B.: Ist f ein monisches Polynom minimalen Grades des Ideals $I \subset A[X]$, so erzeugt f das Ideal I. Dabei heißt ein Polynom in einem Ring mit Einheit monisch (monic), wenn der höchste Koeffizient gleich Eins ist. Ist B Oberring von A, so heißt ein Element $\vartheta \in B$ algebraisch über A, wenn es einer nicht trivialen Gleichung $f(\vartheta) = 0$ genügt. Theorem 4. 4: Ist A ein Halbkörper und ϑ algebraisch über A, so ist jedes Element des von A und ϑ erzeugten Unterringes $A(\vartheta)$ von B algebraisch über A. Theorem 4. 5: Genügt ϑ einer Gleichung $f(\vartheta) = 0$ mit monischem f, und ist A ein Halbkörper, so auch $A(\vartheta)$. *H. Leptin.*

Villamayor, Orlando: Sur les équations et les systèmes linéaires dans les anneaux associatifs. II. C. r. Acad. Sci., Paris **240**, 1750—1751 (1955).

Im Anschluß an den 1. Teil dieser Note (dies. Zbl. **64**, 30) werden weitere Ergebnisse ohne Beweis mitgeteilt. Diese betreffen notwendige und hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme mit Koeffizienten aus einem beliebigen assoziativen Ring A. Ferner werden Fragen über algebraische Erweiterungen und Einbettungsfragen behandelt, bei denen der Begriff des Halbkörpers (semi-corps) und ähnliche Begriffe eine wichtige Rolle spielen. Dabei heißt A ein Halbkörper, wenn jede in einer Erweiterung von A lösbare lineare Gleichung bereits eine Lösung in A besitzt. *F. Kasch.*

Tominaga, Hisao: On a theorem of N. Jacobson. Proc. Japan Acad. **31**, 653—654 (1955).

Généralisant des résultats de N. Jacobson (ce Zbl. **64**, 269), l'A. démontre, par des méthodes tout à fait analogues, les théorèmes suivants: I. Soit R un anneau simple, R' un sous-anneau simple ayant même élément unité, Z, Z' les centres de R, R'. Si R, considéré comme R'-module à gauche, est de longueur finie, et si $[R':Z']$ est fini, alors $[R:Z]$ est fini. Réciproquement, si $[R:Z]$ est fini, alors $[R':Z'] \leq [R:Z]$. II. Avec les mêmes notations, si R est de dimension 2 sur R' (à gauche), si $[R':Z']$ est fini et si Z' n'est pas de caractéristique 2, alors R est galoisien sur R'. *J. Dieudonné.*

Nakayama, Tadasi: Derivation and cohomology in simple and other rings. II. (A remark on the Kronecker product $A \times_C A$). Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **29**, 89—91 (1955).

(Teil I dies. Zbl. **46**, 32.) A sei ein Ring mit Einselement 1, C Teilring von A, $1 \in C$; A erfülle ferner als A-C-Modul (A Links-, C Rechtsoperatorenbereich) die Minimalbedingung für Teilmoduln und besitze eine endliche C-Linksbasis $a_1, \ldots, a_n$ mit $C\,a_i = a_i\,C$. Ist dann $A \underset{C}{\times} A$ zweiseitig vollreduzibel, so ist A als A-C-Modul vollreduzibel. *W. Gaschütz.*

Nagahara, Takasi and Hisao Tominaga: A note on Galois theory of division rings of infinite degree. Proc. Japan Acad. **31**, 655—658 (1955).

Es sei D ein Schiefkörper und L ein galoisscher Unterschiefkörper von D mit der Galoisgruppe $\mathfrak{G}$. Setzt man voraus, daß jedes Element aus D bei den Automorphismen aus $\mathfrak{G}$ nur endlich viele verschiedene Konjugierte besitzt, so folgt: Der Zentralisator $V_D(L)$ von L in D ist entweder gleich dem Zentrum von D oder $V_D(L)$ ist ein endlicher Körper. Der Beweis dieses Satzes ist so angelegt, daß er auch eine entsprechende Aussage für einfache Ringe mit Minimalbedingung liefert, wobei allerdings noch weitere Voraussetzungen hinzukommen. *F. Kasch.*

Amitsur, S. A.: Generic splitting fields of central simple algebras. Ann. of Math., II. Ser. **62**, 8—43 (1955).

In dieser wichtigen Arbeit wird eine vollständige Antwort auf die Frage nach einer Charakterisierung aller, d. h. sowohl der algebraischen als auch der transzendenten Zerfällungskörper einer zentralen, einfachen Algebra A gegeben. Diese Charakterisierung erfolgt durch einen Körper $D = D(A)$, der folgende Eigenschaften besitzt (Theorem 9. 1): (1) D ist ein über dem Zentrum C von A regulärer Funktionenkörper vom Transzendenzgrad $n - 1$ (n^2 gleich Rang von A/C); (2) D ist Zerfällungskörper von A; (3) ein Körper $E \supseteq C$ ist dann und nur dann Zerfällungskörper von A, wenn E Oberkörper eines Restklassenkörpers von D (Restklassenkörper im Sinne der Arithmetik des Funktionenkörpers) ist, und das ist dann und nur dann der Fall, wenn das Körperkompositum (E, D) isomorph zum Körper $E(x_1, \ldots, x_{n-1})$ aller rationalen Funktionen in $n - 1$ Unbestimmten ist; (4) der Körper D besitzt eine Gruppe von Isomorphismen, die isomorph zur Gruppe A^*/C^* ist, wobei A^* bzw. C^* die multiplikative Gruppe aller regulären Elemente von A bzw. C ist. Im Sinne dieses Satzes kann D als allgemeinster Zerfällungskörper von A bezeichnet werden. Dieses Ergebnis stellt eine weitgehende Verallgemeinerung eines Ergebnisses von E. Witt (dies. Zbl. **10**, 149) über Quaternionenalgebren dar. Im Gegensatz zu E. Witt ist die hier zum Nachweis der Existenz von D benutzte Schlußweise aber nicht arithmetischer Natur, sondern die Grundlage bildet die

Darstellungstheorie, die im I. Teil der Arbeit entwickelt wird. Dabei spielt der Begriff der verallgemeinerten halblinearen Abbildung (v. h. A.) eine wichtige Rolle. Seien $K \subsetneq H \subseteq F$ Körper und sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über F. Unter einer v. h. A. ist dann eine homomorphe Abbildung T eines H-Unterraums V_T von V in V zu verstehen, die $T(h\,v) = h^{\varphi}\,T\,(v)$ mit einem Isomorphismus φ von H/K in F genügt. Auf weitere Einzelheiten der umfangreichen Arbeit kann hier nicht eingegangen werden. Der Verf. gibt am Ende der Arbeit eine geometrische Deutung seiner Ergebnisse. *F. Kasch.*

● **Châtelet, F., R. Croisot, R. Descombes, I. Fleischer, J. Guérindon, P. Jaffard, M. Krasner, M. Lazard, L. Lesieur, J. Petresco, C. Pisot, J. Riguet et P. Samuel: Algèbre et théorie des nombres.** (Faculté des Sciences de Paris, Séminaire P. Dubreil, 8e année 1954/55). Paris: Secrétariat mathématique 1955 (hektogr.).

Es handelt sich um eine hektographierte Sammlung von Vorträgen, die 1954/55 im Seminaire P. Dubreil, Paris gehalten wurden. Im folgenden werden die Themen dieser Vorträge mitgeteilt und — falls dadurch der Inhalt noch nicht genügend gekennzeichnet ist — einige stichwortartige Angaben gemacht. F. Châtelet: Géométrie diophantienne et théorie des algèbres. Gegenstand des Vortrages ist ein Ergebnis von S. A. Amitsur (vgl. vorstehend. Referat), welches besagt, daß es zu jeder zentralen einfachen Algebra A einen algebraischen Funktionenkörper D gibt, der in einem gewissen Sinne als allgemeinster Zerfällungskörper von A betrachtet werden kann. — R. Croisot: Sur une généralisation de la théorie des A-modules de Grundy. Verallgemeinerung der Überlegungen von P. M. Grundy [A generalization of additive ideal theory, Proc. Cambridge philos. Soc. 38, 241—279 (1942)] auf Mengen mit einer Halbgruppe als Operatorenbereich. — R. Descombes: Sur un problème d'approximation diophantienne non homogène. Modifizierte Darstellung eines Ergebnisses von J. W. S. Cassels (dies. Zbl. **55**, 44) über Linearformen der Gestalt $v\,|v\,\zeta - u + \eta|$ mit u, v ganz, $v > 0$ und ζ, η reell mit $v\,\zeta - u + \eta \neq 0$ für alle u, v. — I. Fleischer: Les homomorphismes dans les algèbres généralisées. Übertragung des Homomorphiesatzes, der Isomorphiesätze und des Satzes von Jordan-Hölder-Schreier auf universelle Algebren (algèbres universelles; Verf. nennt diese algèbres généralisées). — J. Guérindon: Généralisation additive de la théorie des idéaux. Verallgemeinerung auf unitäre, noethersche Moduln nach dem Vorbild der bereits erwähnten Arbeit von P. M. Grundy. — M. Jaffard: Sur les groupes réticulés associés à un groupe ordonné. Im Anschluß an J. Lorenzen (dies. Zbl. **21**, 387) und frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. **51**, 13 und die dort angegebene Literatur) wird die Frage nach der Einbettung einer geordneten Gruppe in eine vollständig geordnete Gruppe (groupe réticulé) behandelt. — M. Krasner: La non-existence de certaines extensions des corps. Darstellung der Beweisideen zu Ergebnissen des Verf. (dies. Zbl. **50**, 34; **51**, 28, 267). — M. Lazard: Groupes de Lie formels à un paramètre. Vgl. dazu auch Verf. dies. Zbl. **55**, 256. — L. Lesieur: Sur les idéaux irréductibles d'un anneau ou d'un demi-groupe commutatif. Einheitliche Herleitung und Verallgemeinerung von Ergebnissen über irreduzible Ideale kommutativer Ringe und Halbgruppen, die für die Ringe von W. Gröbner (dies. Zbl. **9**, 290; **42**, 265) und für Halbgruppen vom Verf. (dies. Zbl. **64**, 21, 261) aufgestellt worden waren. — J. Petresco: Sur les groupes libres, I. Identité, théorème de Nielsen-Schreier; II. Transformations des suites de générateurs. — Ch. Pisot: Quelques résultats nouveaux dans l'étude d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques. Angabe der Methode und der Ergebnisse von Arbeiten des Verf. zusammen mit J. Dufresnoy (dies. Zbl. **64**, 37, 273 und die dort angegebene Literatur) über die Menge aller ganzalgebraischen Zahlen, deren Konjugierte alle innerhalb des Einheitskreises liegen. — P. Samuel: Courbes planes en caractéristiques 2. Der Unterschied zwischen den klassischen Ergebnissen und den Ergebnissen im Falle der Charakteristik 2 wird auseinandergesetzt. *F. Kasch.*

Eilenberg, Samuel, Masatoshi Ikeda and Tadasi Nakayama: On the dimension of modules and algebras. I. Nagoya math. J. **8**, 49—57 (1955).

Die Arbeit dient der Koordinierung der von Ikeda, Nagao und Nakayama [Nagoya math. J. 7, 115—131 (1954)] und der von Eilenberg [Commentarii math. Helvet. 28, 310—319 (1954)] erzielten Resultate über die Kohomologietheorie in Algebren. An neuen Ergebnissen enthält sie die folgenden: In der Bezeichnungsweise von Eilenberg gilt für eine endliche K-Algebra Λ, mit Körper K und ein zweiseitiges Λ-Ideal l aus dem Radikal N von Λ $\dim \Lambda \leq \dim \Lambda/l + \mathrm{l.\,dim}_\Lambda \Lambda/l$. Die Ungleichung folgt aus dem allgemeinen Satz $\mathrm{l.\,dim}_\Lambda A \leq \mathrm{l.\,dim}_{\Lambda'} A + \mathrm{l.\,dim}_\Lambda \Lambda'$ für ein beliebiges homomorphes Bild Λ' von Λ und einen beliebigen Λ-Modul A. — Zum Nachweis der Separabilität von Λ/N falls $\dim \Lambda < \infty$ benutzten die Verf. früher, daß bei $\dim \Lambda < \infty$ die Cartan-Matrix von Λ gleich ± 1 ist. Zum Beweis der Nichtumkehrbarkeit dieses Sachverhalts wird hier eine Frobeniusalgebra Λ konstruiert — für die also nach früheren Sätzen $\dim \Lambda = \infty$ ist — deren Cartan-Matrix den Wert -1 hat. *W. Gaschütz.*

Deprit, André: A. S. Eddington's E-numbers. Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. **69**, 50—78 (1955).

A sei ein kommutativer Ring mit Einselement, α und β Zahlen aus A. Verallgemeinerte Quaternionen-Algebra $\Omega\,(A;\alpha,\beta)$ heiße die Algebra — vom Rang 4 — über A mit der Basis (*) $1, e_1, e_2, e_3$ und der Multiplikationsregel $e_1^2 = \alpha$, $e_2^2 = \beta$, $e_3^2 = -\alpha\,\beta$, $e_1 e_2 = -e_2 e_1 = e_3$, $e_2 e_3 = -e_3 e_2 = -\beta\, e_1$, $e_3 e_1 = -e_1 e_3 = -\alpha\, e_2$. Verf. nennt verallgemeinerte Sedenionen-Algebra $\Sigma\,(A;\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ das Tensorprodukt — vom Rang 16 — von $\Omega(A;\alpha,\beta)$ und $\Omega(A;\gamma,\delta)$. „Die" Sedenionen-Algebra ist $\Sigma\,(C;-1,-1,-1,-1)$, wo C der Körper der komplexen Zahlen; das ist Eddingtons Algebra der E-Zahlen, die in anderer Weise auch bei Dirac vorkommt. Es werden viele wichtige Eigenschaften dieser Algebren übersichtlich zusammengestellt. Verf. nennt Dirac-Gruppe die Gruppe der Ordnung 32, die von den Basiselementen von $\Sigma\,(A;-1,-1,-1,-1)$ und ihren Negativen — bei der aus (*) in natürlicher Weise abgeleiteten Basis — gebildet wird (Ref. macht darauf aufmerksam, daß sie wesentlich von dieser Basiswahl abhängt) und stellt auch deren Eigenschaften ausführlich zusammen. Endlich wird gezeigt, daß die verallgemeinerte Sedenionen-Algebra als Clifford-Algebra C über einem 4-dimensionalen metrischen Raum (Definition nach Chevalley, The algebraic theory of spinors; dies. Zbl. **57**, 259) oder als zweite Clifford-Algebra C_+ über einem 5-dimensionalen metrischen Raum angesehen werden kann und daß auch ein Zusammenhang mit der Clifford-Algebra über einem 6-dimensionalen metrischen Raum besteht — Tatsachen, die für die physikalische Anwendung besonders wichtig sind. *H. Boerner.*

Fadini, Angelo: Nozioni di aritmetica appoggiata ad un'algebra. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **6**, Nr. 3, 17—31 (1955).

Fadini, Angelo: Algebre di matrici diagonali ed algebre di Boole collegate a particolari classi modulo n. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **6**, Nr. 2, 20—26 (1955).

Rees, D.: Valuations associated with a local ring. I. Proc. London math. Soc. III. Ser. **5**, 107—128 (1955).

Eine Abbildung, die jedem Element x eines kommutativen Ringes A mit Einselement 1 einen Wert $v(x)$ aus der geordneten Additivgruppe der rationalen Zahlen (plus einem Symbol ∞) zuordnet mit den Eigenschaften: (1) $v(0) = \infty$, $v(1) = 0$; (2) $v(x-y) \geqq \min(v(x), v(y))$; (3) $v(x\,y) \geqq v(x) + v(y)$; heißt eine Pseudobewertung auf A. Ist überdies (4) $v(x^n) = n \cdot v(x)$ für jedes x und jede natürliche Zahl n, so heißt $v(x)$ homogen, und ist stets $v(x\,y) = v(x) + v(y)$, so ist $v(x)$ eine Bewertung. — Nach einer Reihe von Vorbemerkungen über Pseudobewertungen, Bewertungen und Ganzabhängigkeit von Idealen bemerkt Verf. aufbauend auf Überlegungen von Samuel (dies. Zbl. **49**, 23), daß in einem Noetherschen Ring A für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ die Funktion $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} v_{\mathfrak{a}}(x^n)/n$, wo $v_{\mathfrak{a}}(y) = m$, falls $y \in \mathfrak{a}^m$, $y \notin \mathfrak{a}^{m+1}$, eine homogene Pseudobewertung auf A ist; es ist $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) \geqq 0$ für jedes Ringelement (dem Ring assoziierte Pseudobewertung). Hauptergebnisse: Ist Q ein äquicharakteristischer Stellenring der Dimension d mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ (Q und $Q/\mathfrak{m}$ haben die gleiche Charakteristik) und ist $\mathfrak{q}$ ein $\mathfrak{m}$-primäres Ideal von Q, so besitzt $\bar{v}_{\mathfrak{q}}$ eine eindeutige unverkürzbare Darstellung $\bar{v}_{\mathfrak{q}} = \min\limits_i v_i$ durch endlich viele diskrete Bewertungen v_i von Q und die Dimension der zugehörigen Restklassenkörper ist bestimmbar. — Nennt man zwei Ideale $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ asymptotisch äquivalent, falls $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \bar{v}_{\mathfrak{b}}(x)$ für alle x, und projektiv äquivalent, falls $\bar{v}_{\mathfrak{a}}(x) = \alpha \cdot \bar{v}_{\mathfrak{b}}(x)$ für alle x, so folgt: Zwei $\mathfrak{m}$-primäre Ideale $\mathfrak{q}_1$ und $\mathfrak{q}_2$ von Q sind d. u. n. d. asymptotisch äquivalent, wenn sie die gleichen ganzen Abschließungen $\hat{\mathfrak{q}}_1 = \hat{\mathfrak{q}}_2$ haben, und projektiv äquivalent, wenn natürliche Zahlen r und s existieren, so daß $\mathfrak{q}_1^r$ und $\mathfrak{q}_2^s$ asymptotisch äquivalent sind. — Anwendungen der Pseudobewertungen auf die Multiplizitäten $\mathfrak{m}$-primärer Ideale $\mathfrak{q}$ werden angegeben. — Schließlich zeigt Verf. in Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Krull [vgl. Idealtheorie (dies. Zbl. **11**, 197), S. 138—139], daß in einem vollständigen lokalen Integritätsbereich Q der Dimension d mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ genau die diskreten Bewertungen v_i des Quotientenkörpers von Q (bis auf äquivalente) in den unverkürzbaren Darstellungen der $\bar{v}_{\mathfrak{q}}$ vorkommen, deren Restklassenkörper die Dimension $d-1$ über $Q/\mathfrak{m}$ besitzen; hiermit werden die zu „Divisoren zweiter Art" gehörigen Bewertungen ausgeschlossen. *E. Lamprecht.*

Rees, D.: A note on valuations associated with a local domain. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 252—253 (1955).

Unter Benutzung der Bezeichnungen und Ergebnisse des vorstehenden Ref. zeigt Verf.: (1) Ist Q ein äquicharakteristischer lokaler Integritätsbereich mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$, so ist der Durchschnitt aller ganzabgeschlossenen ein festes Ideal $\mathfrak{a}$ enthaltenden $\mathfrak{m}$-primären Ideale von Q die algebraische Abschließung $\bar{\mathfrak{a}}$ von $\mathfrak{a}$. — (2) Ist Q wie oben erklärt und S die Menge der zu Q assoziierten Bewertungen des Quotientenkörpers F von Q, dann ist der Durchschnitt der zu S gehörigen Bewertungsringe die algebraische Abschließung von Q. *E. Lamprecht.*

Keller, Ott-Heinrich: Eine Bemerkung zur Ausführung der körpertheoretischen Operationen in erträglich vielen Schritten. Math. Z. **63**, 277—285 (1955).

Es handelt sich um einen Beitrag zur Verringerung der Anzahl der Schritte, die bei der Bestimmung der Gruppe einer Gleichung zu machen sind. Grundlage ist der folgende Satz, bei dem eine Idee von I. Schur, Math. Z. **29**, 463 (1929) [nicht 1928 wie in Fußnote 1 angegeben] benutzt wird. Satz: Es sei G ein Integritätsbereich, K sein Quotientenkörper. K sei separabel und enthalte unendlich viele Elemente. Die Zahlen α und β seien ganz algebraisch über G; β möge der irreduziblen Gleichung $f(\beta) = 0$ über G genügen. Es sei u eine Zahl aus G, die in der Diskriminante von f nicht aufgeht. Dann ist $\beta + u\,\alpha$ ein primitives Element des Körpers $K(\alpha, \beta)$. — Zum Beweis seien α_i bzw. β_ν die Konjugierten von α bzw. β. Nimmt man an, daß $\beta_\nu + u\,\alpha_i = \beta_\mu + u\,\alpha_j$ sei, so folgt $\beta_\nu - \beta_\mu = u(\alpha_j - \alpha_i)$, was nach Wahl von u nur für $\nu = \mu$ und $j = i$ gelten kann; also sind die Konjugierten von $\beta + u\,\alpha$ alle voneinander verschieden, und $\beta + u\,\alpha$ ist ein primitives Element. — Dieser Satz wird nun ausgenutzt, um ein Polynom $g(x, \alpha)$ in irreduzible Faktoren zu zerlegen. Bildet man $F(x, u) = N(g(x - u\,\alpha, \alpha))$ und zerlegt man F in Faktoren $F = F_1 F_2 \cdots F_n$, dann sind die Faktoren von g die größten gemeinsamen Teiler der F_i mit g. Statt wie üblich mit unbestimmtem u zu rechnen, was eine sehr große Zahl von Rechenschritten erfordert, erlaubt der angegebene Satz für u ein Element zu wählen, das nicht in der Diskriminante eines irreduziblen Teilers von $N(g(x, \alpha))$ aufgeht. Dieser Zusammenhang wird für $g(x, \alpha) = f(x)/(x - \alpha)$, wobei $f(x)$ das zu untersuchende Polynom mit $f(\alpha) = 0$ ist, ausgenutzt (Resolventenbildung). Wegen $N(g(x, \alpha)) = f(x)^{n-1}$ ist jetzt $F(x, u) \equiv f(x)^{n-1} \pmod{u}$. Sucht man eine Zerlegung $F = PQ$

in Polynome bestimmter, durch n teilbarer Grade, so kann man für ein Primelement u P und Q u-adisch entwickeln, wobei auf Grund der vorhergehenden Bemerkung die Anfangskoeffizienten als Potenzen von $f(x)$ bekannt sind. Dies macht es möglich, die Teiler von F durch das Lösen linearer Kongruenzen zu bestimmen. Die soweit angedeutete Schlußweise wird am Beispiel der Gleichung $x^5 + 5x^3 + 5x - 1 = 0$ ausgeführt, deren Gruppe sich als die volle metazyklische Gruppe herausstellt.

F. Kasch.

Volnina, N. V.: Über Körper mit erweiterten Polyedergruppen. Doklady Akad. Nauk SSSR **105**, 889—892 (1955) [Russisch].

Die Frage nach der Einbettbarkeit von Galoiskörpern mit Polyedergruppe in Galoiskörper mit nach Klein erweiterter Polyedergruppe wird auf die Frage nach der Isomorphie gewisser Quaternionenalgebren reduziert. *H. Reichardt.*

Mostowski, Andrzej: Eine Verallgemeinerung eines Satzes von M. Deuring. Acta Sci. math. **16**, 197—203 (1955).

Ist L/K eine endliche, galoissche Körpererweiterung mit der Galoisgruppe $G = G(L/K)$ und ist R der Gruppenring von G mit K als Koeffizientenbereich, dann sind bekanntlich L und R mit R als Operatorenbereich operatorisomorph (Normalbasis). Damit äquivalent sind auch R' und L als R-Moduln operatorisomorph, wenn R' den zu R dualen Modul bezeichnet. In dieser zweiten Fassung wird der Satz auf unendliche, algebraische, galoissche Erweiterungen ausgedehnt, wobei noch die Voraussetzung gemacht wird, daß die Charakteristik von L nicht im Grad eines der Elemente von L aufgeht. Die Galoisgruppe G wird jetzt (im Sinne von Krull) als topologische Gruppe betrachtet. In K wird die diskrete Topologie eingeführt und mit M wird der K-Modul aller stetigen Abbildungen von G in K bezeichnet. Dann gibt es also zu jedem $f \in M$ einen über K endlichen und galoisschen Unterkörper U_f von L mit $f(\gamma_1) = f(\gamma_2)$, falls γ_1 und γ_2 auf U_f übereinstimmen. Die Abbildung $f(\xi) \to f(\gamma^{-1}\xi)$ bei festem $\gamma \in G$ für alle $\xi \in G$ ist eine Darstellung D_γ von G in M; die Abbildung $a \to \gamma(a)$ für alle $a \in L$ ist eine Darstellung Δ_γ von G in L. Der Hauptsatz der Arbeit besagt, daß D_γ und Δ_γ äquivalent sind. Der Beweis beruht auf dem Nachweis, daß es eine konsistente Auswahlfunktion Γ_U gibt, d. h. eine Funktion, die jedem über K endlichen, galoisschen Unterkörper U von L ein für U normales Element so zuordnet, daß für $U_1 \subset U_2$ gilt: $\Gamma_{U_1} = \sigma_{U_2/U_1}(\Gamma_{U_2})$ mit $\sigma_{U_2/U_1} = (U_2 : U_1)^{-1} \sum_{\xi \in G(\overline{U_2/U_1})} \xi$. — Setzt man $S(f) = S(f(\xi)) = (U_f : K)^{-1} \sum_{\gamma \in G(\overline{U_f/K})} f(\bar\gamma)$, wobei $\bar\gamma$ eine beliebige Fortsetzung von γ auf L ist, dann wird durch $h(\alpha) = S(f(\xi)\, g(\xi^{-1}\alpha))$ in M ein Produkt $h = f \times g$ definiert. Der von M. Deuring (dies. Zbl. 5, 6) festgestellte Zusammenhang zwischen den Körpern L' mit $K \subset L' \subset L$ und den rechtsseitigen Idealen von M besteht auch jetzt: Jedem L' ist eineindeutig das Rechtsideal $\mathfrak{r}$ zugeordnet, wobei $\mathfrak{r}$ die Menge aller $f \in M$ mit $D_\gamma f = f$ für alle $\gamma \in G(L/L')$ ist. *F. Kasch.*

Zahlentheorie:

● **Fraenkel, Abraham A.: Integers and theory of numbers.** (Scripta Mathematica Studies 5, Problems and methods in modern mathematics I.) New York: Scripta Mathematica 1955. 102 p. $ 2,75.

Aus dem Vorwort: „This volume is essentially a translation of the first part of my Hebrew book Mavo Le Mathematika (Introduction to Mathematics), but quite a number of modifications and additions have been incorporated... These volumes developed from talks in the adult education program given by the author in towns and rural settlements of Palestine (now Israel) from 1929 on. Consequently, the subject of the volume and its treatment meet the needs, abilities, and interests of gifted high school students, of college freshmen, and, indeed, of laymen who are interested in knowing what mathematics really deals with — a question whose answer may have been concealed rather than revealed by the presentation in their classes.“ Der Verf. hat diese oft angestrebten Ziele weit besser erreicht als viele seiner Vorgänger. Verhältnismäßig straffe Organisation des Inhalts und Bündigkeit des Stils (im Gegensatz zu der weitbekannten, für Mathematiker geschriebenen „Mengenlehre“ desselben Verf.) sind mit leichter Lesbarkeit vereint. Dies ist kein Ausflug eines kultivierten Mathematikers in die schöne Literatur, sondern der gelungene Versuch, die mathematische Bildung wirklich interessierter weiter Kreise zu heben und zu modernisieren. Es ist ein ernstes Buch voll von wichtigen und interessanten Informationen. *D. Tamari.*

Olson, F. R.: Arithmetic properties of Bernoulli numbers of higher order. Duke math. J. 22, 641—653 (1955).

$B_m^{(k)}$ seien die Bernoullischen Zahlen der Ordnung k, definiert durch $\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} B_m^{(k)}$, $|t| < 2\pi$, p bezeichne eine Primzahl. Verf. dehnt einige von Carlitz (dies. Zbl. **50**, 267; vgl. auch S. W. Wachs, dies. Zbl. **38**, 25 und L. Carlitz, dies. Zbl. **46**, 40) herrührende Kongruenzen aus: 1. Für $p \geq 7$ ist $B_p^{(p)} \equiv -\frac{p^2}{2}(p-1)! + \frac{p^5}{36} B_{p-3} \pmod{p^6}$. 2. Für $p \geq 5$ ist $B_{p+2}^{(p+1)} \equiv \frac{p^4}{4} - \frac{p^3}{6}(p-1)! \pmod{p^5}$. Allgemeiner werden Kongruenzeigenschaften verallgemeinerter Bernoullischer Zahlen „gemischter Ordnung“ (vgl. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin 1924, Kap. 6, und L. Carlitz-F. R. Olson, dies. Zbl. **56**, 36) untersucht, aus denen sich die beiden oben genannten Formeln als Spezialfälle ergeben. *H.-E. Richert.*

Carlitz, L.: The number of solutions of some equations in a finite field. J. math. Soc. Japan **7**, 209—223 (1955).

The author considers the equation of the following type for a finite field: $Q(\xi_1, \ldots, \xi_{2r+1}) = g(\eta_1, \ldots, \eta_s)$, where Q is a quadratic form and g is a polynomial satisfying certain conditions, in particular $g = \prod_{i=1}^{s} (\eta_i^2 + \beta_i \eta_i + \gamma_i)$. The number of solutions is studied. The method relates naturally to the extended Gaussian sum over a finite field. *L. K. Hua.*

Storchi, Edoardo: Un metodo per la fattorizzazione dei numeri della forma $a^n \pm 1$. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **88** (III. Ser. **19**), 405—441 (1955).

Verf. leitet Folgerungen ab, falls sich eine ungerade Primzahl p in der Gestalt

$$p = x^{2k} + a\, y^{2k} \quad (a, x, y, k \text{ ganz}, \ k > 0)$$

darstellen läßt. Diese Folgerungen sind vielfach Teilbarkeitssätze, die zum Teil von Bedeutung für die Theorie der quadratischen und der biquadratischen Reste sind. Von den 29 Sätzen führe ich an: 1. Sind x und a ungerade, $k \mid (p-1)/4$, so gilt $a^{(p-1)/4k} \equiv a/x \pmod p$. 2. Ist $a = 2^\alpha c$, $0 < \alpha < 2k$, c ungerade, $k \mid (p-1)/4$, so gilt von einer Ausnahme abgesehen $a^{(p-1)/4k} \equiv (-1)^{(p-1)/4k} c/x \pmod p$. 3. Sind q und $8q+1$ ungerade Primzahlen und ist $8q+1 = f^4 + 8g^4$ mit $f = 8h \pm 3$, dann ist die Mersennesche Zahl $2^q - 1$ durch $8q+1$ teilbar, also zusammengesetzt. *N. Hofreiter.*

Sierpiński, Waclaw: Sur une propriété des nombres naturels. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **39**, 69—74 (1955).

Verf. beweist den folgenden Satz über additive Zerlegungen in ungleiche Teile: $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ seien natürliche Zahlen. Dann ist die Bedingung (1) $n_i \leq 1 + n_1 + n_2 + \cdots + n_{i-1}$ für $i = 1, 2, \ldots, k$, notwendig und hinreichend dafür, daß sich jede natürliche Zahl $\leq n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ als Summe verschiedener der $n_1, n_2, \ldots, n_k$ darstellen läßt. Insbesondere: Jede natürliche Zahl ist als Summe verschiedener Primzahlen (die 1 mitgerechnet) darstellbar (vgl. Ref., dies. Zbl. **40**, 308). Sind die Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ genau die Teiler einer Zahl $n = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l}$, $\alpha_i \geq 1$, $p_1 < p_2 < \cdots < p_l$ ungerade Primzahlen, so wird die Bedingung (1) durch $p_i \leq 1 + \sigma(2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}})$ für $i = 1, 2, \ldots, l$, wo $\sigma(m)$ die Summe der Teiler von m bezeichnet, ersetzt [vgl. A. K. Srinivasan, Current Science, Bangalore, India, **17**, 179—180 (1948); A. K. Saroja, Math. Gaz. **36**, 48—49 (1952); B. M. Stewart, dies. Zbl. **56**, 270]. *H.-E. Richert.*

Knödel, Walter: Primzahldifferenzen. J. reine angew. Math. **195**, 202—209 (1955).

Es sei p_n die n-te Primzahl ($p_0 = 2$) und $d_n = p_n - p_{n-1}$ für $n \geqq 1$. Verf. beweist: 1. Falls

$$S_1(x) = \sum_{p_n < x} \frac{1}{d_n}, \quad S_2(x) = \sum_{p_n < x} \left| \frac{1}{d_n} - \frac{1}{d_{n+1}} \right|,$$

so gilt $c_1 S_1(x) < S_2(x) < c_2 S_1(x)$, wo c_1 und c_2 positive Konstanten sind. — 2. Falls $S_3(x) = \sum 1/d_n$, wo die Summe jetzt erstreckt wird über alle $n \geqq 2$ mit $p_n < x$, $d_n \geqq d_{n-1}$, so ist $c_3\, x/\log^2 x < S_3(x) < c_4\, x/\log^2 x$, wo c_3 und c_4 positive Konstanten sind. *H. D. Kloosterman.*

Kanold, Hans-Joachim: Über zahlentheoretische Funktionen. J. reine angew. Math. **195**, 180—191 (1955).

Verf. betrachtet Mengen natürlicher Zahlen, die durch den positiven Anteil des Wertevorrats zahlentheoretischer Funktionen $f(n)$ gebildet werden. In einer Reihe von Sätzen werden jeweils die Dichten solcher Mengen $\mathfrak{F}$ untersucht. Es mögen die folgenden Sätze hervorgehoben werden, wobei $\delta_*(\mathfrak{F})$ die natürliche Dichte bezeichne. Ist $\lim_{n\to\infty} n^{-1} f(n) = \infty$, so ist $\delta_*(\mathfrak{F}) = 0$. — Ist $\varliminf_{n\to\infty} n^{-1} f(n) > 0$ und $a | f(p)$ für alle großen Primzahlen p und für wenigstens ein a, ferner $f(n_1 n_2) = f(n_1) \cdot f(n_2)$ für $(n_1, n_2) = 1$, so ist $\delta_*(\mathfrak{F}) = 0$. — Ferner werden noch Mengen $\mathfrak{N}_s$ betrachtet, die für jedes natürliche s folgendermaßen erklärt sind: Zu jedem $n \in \mathfrak{N}_s$ gibt es mindestens s paarweise und von n verschiedene Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_s$, so daß die Gleichungen $f(n) = f(n_\sigma)$ für $\sigma = 1, 2, \ldots, s$ gelten. Aus $\lim_{n\to\infty} n^{-1} f(n) = 0$ folgt $\delta_*(\mathfrak{N}_s) = 1$. — Aus $\delta_*(\mathfrak{F}) = 0$ und $\sum_{n \leq N} n^{-1} f(n) = O(N)$ folgt $\delta_*(\mathfrak{N}_s) = 1$. — Schließlich werden u. a. noch Mengen untersucht, die als Verallgemeinerungen der mehrfach-vollkommenen Zahlen bzw. der befreundeten Zahlenpaare angesehen werden können, genauer: in diese übergehen, wenn für $f(n)$ die Teilersumme $\sigma(n)$ gewählt wird. *H. Ostmann.*

Cohen, Eckford: A class of arithmetical functions. Proc. nat. Acad. Sci. USA **41**, 939—944 (1955).

Let F be a field of characteristic 0 containing the r-th roots of unity for all $r \geq 1$. Let $C_d(n)$ be the Ramanujan sum. In this paper, the author proves that the class of functions defined by $f(n, r) = \sum_{d|r} \alpha(d)\, C_d(n)$ with $\alpha(d) \in F$ and the class defined by $f(n, r) = \sum_{d|(n,r)} g\left(d, \frac{r}{d}\right)$ with arbitrary single-valued function $g(a, b)$ in F of two positive integral variables a, b are identical. Some applications are given. *M.-I. Yüh.*

Schmidt, Wolfgang: Über höhere kritische Determinanten von Sternkörpern. Monatsh. Math. **59**, 274—304 (1955).

Let S be a star body which is symmetrical in the origin O. If k is a positive integer, let $\Delta^k(S)$ denote the lower bound of the determinants of the lattices Λ that have less than k pairs $\pm X$ of lattice points in S (we assume the existence of one such lattice). The reviewer conjectured (this Zbl. **43**, 51) that $k\Delta^k(S) \geq \Delta^1(S)$, but only proved the conjecture when k is a prime. The author gives a series of theorems, showing that the conjecture holds when k is of various forms, culminating in a theorem (Satz 5) showing that the conjecture holds for all sufficiently large integers k. He also discusses the more general inequality $k\Delta^{kl}(S) \geq \Delta^l(S)$, showing that this holds when $l = 2$ and k is prime, but that it fails for suitable $S = S_{k,l}$ when $l \geq 3$, $k > 1$. However he shows that, if S is bounded, then $l\Delta^l(S) \leq \lim_{k\to\infty} k\Delta^k(S)$, for each positive integer l, the limit on the right having a finite value. This limit is determined in the case when S is a convex plane domain. The inequality $k\Delta^k(S) \leq \frac{V(S)}{2\zeta(n)} \sum_{\nu=1}^{k} \frac{1}{\nu^n}$, generalizing the Minkowski-Hlawka theorem, is established. The reviewer remarks that, using the results of A. E. Western's (this Zbl. **10**, 151) examination of J. W. L. Glaisher's factor tables and D. N. Lehmer's list of prime numbers, it is easy to verify that the author's first four theorems prove the conjecture for all $k \leq 10^7$. *C. A. Rogers.*

Davenport, H. and K. F. Roth: The solubility of certain Diophantine inequalities. Mathematika **2**, 81—96 (1955).

The authors prove the following theorem by means of Vinogradow's method: There exists an absolute constant C such that, if $k \geq 12$ and $s > C\,k \log k$, the inequality $|\lambda_1 x_1^k + \cdots + \lambda_s x_s^k + \varkappa| < \varepsilon$ has infinitely many solutions in positive integers $x_1, \ldots, x_s$ for any $\varepsilon > 0$, provided $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ are not all of the same sign, and not all in rational ratios. For $k = 3$, they prove the same result for $s = 8$ by means of a lemma of Davenport. Cf. an article of I. I. Šapiro-Pjateckij (this Zbl. **47**, 280). *L. K. Hua.*

Davenport, H. and K. F. Roth: Rational approximations to algebraic numbers. Mathematika **2**, 160—167 (1955).

By elaborating the estimates in Roth's paper (this Zbl. **64**, 285), the authors prove the following results: Theorem 1: Let α satisfy the irreducible equation $\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \cdots + a_n = 0$, where $n \geq 3$, and $a_1, \ldots, a_n$ are rational integers, and let $A = \max(|a_1|, \ldots, |a_n|)$, $C = 3 + \log(1 + |\alpha|) + 2\log(1 + A)$, $0 < \zeta \leq 1/3$. There are at most $2\zeta^{-1}\log C + \exp(70\,n^2\zeta^{-2})$ pairs of integers h, q such that $|\alpha - h/q| < 1/2\,q^{2+\zeta}$, $(h, q) = 1$, $q > 0$. Theorem 2: Let $f(x, y) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} y + \cdots + b_n y^n$ be an irreducible form of degree $n \geq 3$ with rational integral coefficients, $g(x, y) = \sum_{r+s\leq n-3} g_{rs} x^r y^s$ a polynomial with rational integral coefficients, and let $B = \max(|b_r|)$, $G = \max(|g_{rs}|)$. The equation $f(x, y) = g(x, y)$ has less than $(4B)^{2n^2} G^3 + \exp(643\,n^2)$ solutions in rational integers x, y. Theorem 3: Let β be a real algebraic number, and let $p_1/q_1, p_2/q_2, \ldots$ be the sequence of the convergents of its continued fraction. There is a $c(\beta)$ independent of ν such that $\log\log q_\nu < c(\beta)\,\nu/\sqrt{\log \nu}$. For earlier results similar to Theorems 1 and 2 see K. Mahler, this Zbl. **6**, 156 and C. J. Parry, this Zbl. **39**, 275. *K. Mahler.*

Roth, K. F.: Corrigendum. Mathematika **2**, 168 (1955).

In his paper reviewed in this Zbl. **64**, 285, the author mistakenly stated that he had proved the Theorem: „Let α be any irrational algebraic number. If the inequality (1) $|\alpha - \beta| < H(\beta)^{-\varkappa}$ is satisfied by infinitely many algebraic numbers β of degree g, then $\varkappa \leq 2g$“. [$H(\beta)$ denotes the height of β.] He has, however, a proof for the following result: Let K be a finite algebraic number field. If (1) holds for infinitely many primitive β of K, then $\varkappa \leq 2$. *K. Mahler.*

Sós, Vera T. and P. Turán: On some new theorems in the theory of Diophantine approximations. Acta math. Acad. Sci. Hungar. **6**, 241—255 (1955).