Werk

Titel: Gruppentheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0065|log55

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beweis eines bereits von ihm (dies. Zbl. **15**, 386) bewiesenen Satzes [von jetzt ab seien die a_j und b_j in (3) wieder ganzzahlig]: Ist q Primteiler einer der Zahlen b_μ, so stimmen die $a_1, \ldots, a_m$ mit den $b_1, \ldots, b_m$ mod q überein. Hieraus folgt sofort, daß eine ideale T. E. Lösung zur Lösung des idealen T. E. Kongruenz-Problems $a_1, \ldots, a_m \overset{m-1}{\equiv} b_1, \ldots, b_m$ mod M für $M = q$ unbrauchbar ist. Für dies Problem gibt es Lösungen für Primzahlmoduln $p > 3$ und $m = p-1$, $(p-1)/2$. Es ist z. B. $r_1, r_2, \ldots, r_{(p-1)/2} \overset{(p-3)/2}{\equiv} n_1, n_2, \ldots, n_{(p-1)/2}$ mod p, wo die r_j das System aller quadratischen Reste, die n_j das aller Nichtreste mod p durchlaufen. *L. Holzer.*

● **Sokolov, N. P.: Affinprojektive Klassifikation der kubischen ternären Formen im reellen Gebiet.** Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR **1955**, 315—317 und russ. Zusammenfassg. 317 (1955) [Ukrainisch].

Die vorliegende Arbeit stellt eine weitere Entwicklung der in vorhergehenden Artikeln ([1] Dopovidi Akad. Nauk Ukrain. RSR **1954**, 159 (1954); [2], [3] dies. Zbl. **56**, 253) dargelegten Untersuchungen des Verf. dar. In Ergänzung zu den in [2] angegebenen projektiven Invarianten einer reellen kubischen ternären Form wird eine Reihe arithmetischer und algebraischer Invarianten derselben Form in bezug auf affin-projektive Transformationen gegeben. Mit Hilfe dieser Invarianten werden die in [3] aufgestellten projektiven Klassen der reellen kubischen ternären Formen in affin-projektive Unterklassen zerlegt, deren Vertreter kanonische Formen sind, die man durch elementare Transformationen entsprechender kubischer Matrizen erhält. Übersetzung der russ. Zusammenfassg.

Gruppentheorie:

Sonneborn, Lee M.: On the arithmetic structure of a class of commutative semigroups. Amer. J. Math. **77**, 783—790 (1955).

L'A. considère un demi-groupe abélien S dans lequel toutes les chaînes de diviseurs non associés d'un élément quelconque sont finies et dans lequel l'égalité $a\,b = c\,d$ implique l'existence de x, y, z, w tels que $a = x\,y$, $b = z\,w$, $c = x\,z$, $d = y\,w$. Dans un tel demi-groupe, tout élément possède nécessairement un élément unité et par suite la relation $a \sim b$ (a associé à b) est une relation d'équivalence. L'A. examine les propriétés du demi-groupe quotient S' de S par cette relation d'équivalence. Il montre en particulier que S' possède un élément unité, que l'ensemble de ses idempotents coïncide avec l'ensemble des éléments qui sont élément unité pour au moins un élément et que cet ensemble forme un treillis distributif, que S' vérifie un théorème de factorisation unique et qu'il est le produit sous-direct d'un treillis distributif et d'un demi-groupe de Gauss. *R. Croisot.*

Yamada, Miyuki: On the greatest semilattice decomposition of a semigroup. Kōdai math. Sem. Reports **7**, 59—62 (1955).

D étant un demi-groupe, l'A. étudie les équivalences régulières telles que le demi-groupe-quotient soit un demi-treillis. En appelant P-sous-demi-groupe de D un sous-demi-groupe qui contient, en même temps qu'un produit d'éléments dont certains peuvent être répétés, chaque produit formé à l'aide de tous ces éléments éventuellement répétés pris dans un ordre quelconque, il montre que chaque telle équivalence peut être caractérisée à l'aide d'une famille $\{S_\alpha\}$ de P-sous-demi-groupes: on aura $a \equiv b$ si et seulement si $x\,a\,y \in S_\alpha$ équivaut à $x\,b\,y \in S_\alpha$, quel que soit α. En particulier, la plus fine des équivalences régulières du type précédent est celle qui est ainsi associée à la famille de tous les P-sous-demi-groupes de D. Appliquant ceci au cas commutatif, l'A. retrouve un résultat de T. Tamura et N. Kimura [Kōdai math. Sem. Reports **6**, 109—112 (1954)]. *R. Croisot.*

Faucett, W. M.: Compact semigroups irreducibly connected between two idempotents. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 741—747 (1955).

L'A. considère un demi-groupe compact S qui soit irréductiblement connexe entre deux idempotents f et g (c'est-à-dire qui soit connexe et qui ne possède pas de sous-ensemble propre connexe contenant f et g). Si S ne contient pas d'autre idempotent, il est abélien et homéomorphe au segment $I = [0, 1]$ des nombres réels,

l'un de ses idempotents est élément zéro ($f = 0$ par exemple) et l'autre élément unité ($g = u$). Si S ne contient pas d'éléments nilpotents, il existe un homéomorphisme de S sur I respectant la multiplication et la relation d'ordre (S est supposé ordonné par la relation $x \leq y$ si $x = 0$, $y = u$, $x = y$ ou x appartient à la composante connexe de 0 dans $S - \{y\}$). Si S possède un élément unité, il est abélien si et seulement si il possède un élément zéro. Dans le cas général, S est abélien si et seulement si il possède un élément zéro et vérifie l'égalité $f g = g f$. Des exemples et contre-exemples précisent ces différentes circonstances. *R. Croisot.*

Faucett, W. M.: Topological semigroups and continua with cut points. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 748—756 (1955).

L'A. discute d'abord les relations entre l'existence de points de coupure („cut points") dans un demi-groupe compact connexe et la structure algébrique du demi-groupe. Extrayons de son étude le résultat suggestif suivant: S étant un demi-groupe compact connexe, s'il existe un point $p \in S$ qui coupe le noyau K (idéal bilatère minimum de S), ou bien $K = Sp$, K est un idéal à gauche minimum et tout élément de K est zéro à gauche pour S, ou bien les propriétés symétriques sont vérifiées. Il examine ensuite, toujours dans un demi-groupe compact connexe, des ensembles particuliers, appelés D-chaînes, dont la définition est trop technique pour être donnée ici. Finalement, il étudie les demi-groupes compacts qui sont des arbres métriques (continus métriques tels que deux points soient toujours „séparés" par un troisième point); ses résultats insistent sur l'influence de la structure topologique sur la structure algébrique. *R. Croisot.*

Kimura, Naoki and Takayuki Tamura: Counter examples to Wallace's problem. Proc. Japan Acad. **31**, 499—500 (1955).

Les AA. donnent sans démonstration deux exemples de demi-groupe compact ayant un élément unité à gauche et n'ayant pas d'élément unité à droite, résolvant ainsi un problème proposé par A. D. Wallace. *R. Croisot.*

Faucett, W. M., R. J. Koch and K. Numakura: Complements of maximal ideals in compact semi-groups. Duke math. J. **22**, 655—661 (1955).

Les AA. établissent d'abord le résultat fondamental suivant: Si J est un idéal propre maximal d'un demi-groupe compact S, le demi-groupe différence $S - J$ (au sens de Rees) est, soit le demi-groupe de carré nul à deux éléments, soit un demi-groupe complètement simple. Ils en tirent un certain nombre de conséquences intéressantes: par exemple, un élément $a \in S$ est régulier ($a \in a\,S\,a$) si et seulement si il est simple (au sens de Green); en appelant élément maximal un élément a vérifiant $a \in S\,a\,S$ et tel que $a \in S\,b\,S$ implique $b \in S\,a\,S$, si S est globalement idempotent ($S^2 = S$), on a $S = SES$, où E est l'ensemble des idempotents maximaux de S. *R. Croisot.*

✓● **The collected works of George Abram Miller. IV.** Urbana: University of Illinois Press 1955. 458 p.

Die vorangehenden Bände sind 1935, 1938, 1946 (vgl. dies. Zbl. **12**, 201; **19**, 396) erschienen. Der vorliegende Band enthält 98 Arbeiten aus den Jahren 1916—1929. Abgesehen von wenigen Aufsätzen allgemeineren (meist geschichtlichen) Inhalts und mehreren Beiträgen zur Theorie der Permutationsgruppen handelt es sich im wesentlichen um eine Fülle von Einzelfragen über abstrakte endliche Gruppen, insbesondere um Gruppen mit einfachen definierenden Relationen oder von einfachem Erweiterungstypus, um Automorphismen und charakteristische Untergruppen sowie um die Anzahl der Untergruppen von gewissen Typen in abelschen oder p-Gruppen. *H. Wielandt.*

Whittaker, J. V.: On the postulates defining a group. Amer. math. Monthly **62**, 636—640 (1955).

The author gives a number of sets of postulates defining a group in terms of right-division; he adds some remarks on the independence of these postulates, and on the significance of the different sets. *Hanna Neumann.*

Lazard, Michel: Sur le nilpotence de certains groupes algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 1687—1689 (1955).

Es sei A ein unitärer kommutativer Ring, und A^n für $n \geq 1$ der Raum der n-Tupel über A. Sind dann $f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ Polynome in $2n$ Unbestimmten mit Koeffizienten aus A, so bestimmen sie für jede unitäre und kommutative A-Algebra B in natürlicher Weise eine Abbildung von $B^n \times B^n$ in B^n. Das Polynomsystem (f_i) heißt dann gruppenbestimmend von der Dimension n, wenn für jede unitäre und kommutative A-Algebra B durch die genannte Abbildung (aufgefaßt als Multiplikation) in B^n eine Gruppenstruktur bestimmt wird. Ein gruppenbestimmendes Polynomsystem heißt nilpotent, von einer Klasse $\leq r$, wenn für jede A-Algebra B die durch das System definierte Gruppe B^n nilpotent von einer Klasse $\leq r$ ist. Verf. beweist den Satz: Jedes gruppenbestimmende Polynomsystem der Dimension n mit Koeffizienten in einem unitären kommutativen Ring A ist nilpotent. Besitzt A überdies kein von Null verschiedenes nilpotentes Element, so ist das System nilpotent von einer Klasse $\leq n$. *H.-J. Kowalsky.*

Brenner, Joël Lee: Quelques groupes libres de matrices. C. r. Acad. Sci., Paris **241**, 1689—1691 (1955).

The author shows very simply that the (multiplicative) group $\mathfrak{G}_m$ generated by the matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ is free on A and B, if m is a real number such that $m \geq 2$ (cf. Sanov, this Zbl. **29**, 4 for the case $m = 2$). He remarks that all matrices of $\mathfrak{G}_m$ have determinant 1 and are of the form $I + m\,C$, where the non-diagonal elements of C are integers and the diagonal elements are $m \times$ integer. For $m = 2$ all these matrices belong to $\mathfrak{G}_m$, but when $m > 2$ he shows that the following further condition is necessary and sufficient for (a_{ij}) to belong to $\mathfrak{G}_m$: $|a_{11}/a_{12}|$ does not lie between f and $1/f$, where $f = \frac{1}{2}\left(m + \sqrt{m^2 - 4}\right)$. These results are to be used in later work to find the normal subgroups of the unimodular group. The author also notes (without proof) that for infinitely many m between 0 and 2, $\mathfrak{G}_m$ is not free ($\mathfrak{G}_1$ is the integral unimodular group) and asks whether $\mathfrak{G}_m$ is free for any algebraic number between 0 and 2. *P. M. Cohn.*

Taylor, Robert L.: Compound group extensions. III. Trans. Amer. math. Soc. **79**, 490—520 (1955).

The author continues his detailed study of „normal homomorphisms" and of the associated „continuations" and „modular structures" (cf. this Zbl. **53**, 13,14). Using his previous notation he is concerned essentially with classifying continuations of normal homomorphisms $\Phi: K \to G$ which induce a given homomorphism $Q \to A_X(K)/I(K)$, where $Q = G/\Phi K$, $X = \Phi^{-1}(0)$. This classification is made by exhibiting a cohomology group $H^n(\Phi)$ with which is associated a group $\tilde{H}^n(\Phi)$ which operates simply transitively on the set of all isomorphism classes of such continuations. The results are so formulated that the relations with the modular structures which induce a given $Q \to A_X(K)/I(K)$, and with the classification of extensions of the Q-kernels $Q \to A_X(K)/I(K)$, $Q \to A(N)/I(N)$, where $N = \Phi K$, are brought out in full detail. Thus continuations are redefined in terms of given groups Q, K, a normal subgroup X of K, and a homomorphism $\tau: Q \to A_X(K)/I(K)$, rather than a given normal homorphism $\Phi: K \to G$; i. e. if as before Φ denotes the homomorphism $K \to N = K/X$, the induced homomorphism $\Phi_0: A_X(K)/I(K) \to A(N)/I(N)$ gives a Q-kernel $\Phi_0\tau: Q \to A(N)/I(N)$, and a continuation is a continuation in the previous sense, $(E, \overline{\Phi})$, inducing τ, together with an extension $0 \to N \to G \to Q \to 0$ of the Q-kernel $\Phi_0\tau$. Isomorphism of continuations now involves identity of the Q-kernel extensions. Then $\tilde{H}^2(\Phi)$ is proved to operate simply on the set of all such isomorphism classes of continuations, the orbits being the non-empty counter images of individual extensions of $\Phi_0\tau$ under the natural mapping:

(continuations) $\to$ (extensions of $\Phi_0\tau$). The „obstruction element" in this context is a natural mapping χ such that the sequence: (continuations) $\to$ (extensions of $\Phi_0\tau$) $\xrightarrow{\chi} H^3(\Phi)$ is exact. As a consequence of previous results it is found that if Z_K denotes the centre of K, $H^2(Q, \Phi Z_K)$ operates simply transitively in a natural way on the isomorphism classes of what the author calls modular expansions. These are extensions of $\Phi_0\tau$ together with a modular structure $\theta: G \to A_X(K)/c(X)$ on $\Phi: K \to G$. The result is suggested by results of A. P. Cobbe (this Zbl. **45**, 302). Several subsidiary results demonstrating the operations of various groups on certain sets of continuations and modular expansions are given. The main results can be used to generalize to the non-abelian case the criteria, in case K is abelian, for the extendibility of a crossed module $\Phi: K \to G$, $\theta: G \to A_X(K)$; viz. that (Φ, θ) is extendible if and only if the element in $H^2(Q, N)$ corresponding to the group extension, $0 \to N \to G \to Q \to 0$, of Q by N, is in the image of $H^2(Q, K)$ in the exact sequence $\to H^n(Q, X) \to H^n(Q, K) \to H^n(Q, N) \to H^n(Q, X) \to$, which is induced by the exact sequence $0 \to X \to K \xrightarrow{\Phi} N \to 0$ of operator homomorphisms rel Q.

W. H. Cockcroft.

Hattori, Akira: On exact sequences of Hochschild and Serre. J. math. Soc. Japan **7**, 312—321 (1955).

Avoiding the use of spectral sequences, the author gives new proofs of the exactness of the two sequences used by Hochschild and Serre (this Zbl. **50**, 21) to prove, respectively, the Teichmüller-Eilenberg-Maclane results of Galois cohomology theory, and the Eilenberg-Maclane cup product reduction of group cohomology theory. *W. H. Cockcroft.*

Buchsbaum, D. A.: Exact categories and duality. Trans. Amer. math. Soc. **80**, 1—34 (1955).

This is a generalization of the theory of functors developed by H. Cartan and S. Eilenberg in their book „Homological algebra" (Princeton 1956). In place of the functors dealt with by these authors, which were defined on categories of modules over certain rings with values in such categories, functors are taken which are defined on abstract categories with values in abstract categories. Basic is the introduction of the dual category to a given category, so that e. g. the dualities suggested in group theory by Saunders MacLane (this Zbl. **41**, 363) can be formulated as explicit mathematical theorems. Following Cartan-Eilenberg, homology in graded categories is studied, as also is the fundamental notion of a derived functor; both these in the authors „abstract" context, so that a general theory of derived functors is available for extensions of this theory beyond that restricted to modules over a ring. The duality theory enables one also to restrict attention only to left derived functors. Three algebraic applications are pointed out (i) to the functor Ext^n, where global dimension is defined for an exact category, (ii) to the Eilenberg-Steenrod axiomatic homology theory (this Zbl. **47**, 414), now with an abstract category as its range of values, (iii) to the Pontrjagin duality of the categories of compact abelian groups and the category of discrete abelian groups.

W. H. Cockcroft.

Borevič, Z. I.: Zur Homologietheorie in Gruppen mit Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR **104**, 5—8 (1955) [Russisch].

Let G be a group, and $\ldots \xleftarrow{\partial} \Phi_i \xleftarrow{\partial} \Phi_{i+1} \xleftarrow{\partial} \cdots$ be an exact sequence of G-free G-modules Φ_i, A a fixed G-module. If for any G-module Φ, Hom (Φ, A) denotes the abelian group of additive homomorphisms $\Phi \to A$, operated on by G in the usual way, then $H^n(G, \mathrm{Hom}(\Phi, A)) = 0$ for any $n \geq 0$ and G-free Φ. Since

$$0 \to \mathrm{Hom}(\partial\Phi_i, A) \to \mathrm{Hom}(\Phi_i, A) \to \mathrm{Hom}(\partial\Phi_{i+1}, A) \to 0$$

is exact in the present case, it follows that

$$H^n(G, \mathrm{Hom}(\partial\Phi_{i+1}, A)) \cong H^{n+1}(G, \mathrm{Hom}(\partial\Phi_i, A)).$$

If in particular the sequence Φ_i contains a Φ_0 such that $\Phi_0 \bmod \partial\Phi_1 \cong J$ ($=$ additive group of integers operated on trivially by G), it follows that $H^{n+k}(G, A) \cong H^n(G, \mathrm{Hom}(\partial\Phi_k, A))$, $H_{n+k}(G, A) \cong H_n(G, A \otimes \partial\Phi_k)$ for $n \geq 1$, $k \geq 0$. If G is finite, then n and k may be arbitrary. From this theorem the author obtains easily the cup-product reduction theorem of Eilenberg-MacLane, a similar theorem for finite groups due to the author, and universal coefficient theorems.

W. T. van Est.

Schenkman, Eugene: The existence of outer automorphisms of some nilpotent groups of class 2. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 6—11 (1955).

Es ist eine bisher unbeantwortete Frage, ob p-Gruppen $\mathfrak{G}$ stets Automorphismen besitzen, die nicht innere sind. Verf. zeigt, daß sie zu bejahen ist, wenn $\mathfrak{G}'$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$ liegt und wenn zu einer Potenz p^k die von den Elementen G^{p^k}, $G \in \mathfrak{G}$, erzeugte Gruppe in $\mathfrak{G}'$ liegt. Verwendet wird dabei der auch an sich interessante Satz: Ist $\mathfrak{G}$ eine endliche nicht-abelsche Gruppe, $\mathfrak{G}'$ im Zentrum von $\mathfrak{G}$, dann teilt die Ordnung von $\mathfrak{G}$ die Ordnung der Automorphismengruppe von $\mathfrak{G}$. *W. Gaschütz.*

Weir, A. J.: The Sylow sub-groups of the symmetric groups. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 534—541 (1955).

Verf. untersucht die Struktur der p-S.-Gruppen der symmetrischen Gruppen. Es liegen auf diesem Gebiete bereits viele eingehende Untersuchungen vor. Allen liegen zwei Tatsachen zugrunde: 1. Nur die p-S.-Gruppen vom Grade p^n, $n = 1, 2, \ldots$ sind interessant, denn für jeden anderen Grad sind die p-S.-Gruppen direkte Produkte von p-S.-Gruppen von Primzahlpotenzgraden p^n. 2. Bezeichnet man mit P_n die p-S. Gruppe vom Grade p^n, mit E_n ihre Einheit, so erhält man P_{n+1} aus

$$\left.\begin{pmatrix} P_n & & \\ & E_n & \\ & & E_n \end{pmatrix}\right\} p \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & E_n & & \\ & & E_n & \\ & & & E_n \\ E_n & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Verf. vereinfacht manche Betrachtungen durch Benutzung von Homomorphismen φ mit $\varphi^2 = 1$. Wesentliche Resultate dieser Arbeit, die ein Teil seiner Cambridge Phil. D-Thesis ist: 1. Die aufsteigende und die absteigende Zentrenreihe der p-S.-Gruppe der Permutationsgruppen fallen zusammen. 2. Die charakteristischen Untergruppen und die Normalteiler, welche Partitionsuntergruppen sind, fallen zusammen.

O. Grün.

Amitsur, S. A.: Finite subgroups of division rings. Trans. Amer. math. Soc. **80**, 361—386 (1955).

I. N. Herstein (this Zbl. **50**, 30) had begun to study the finite groups that can be embedded in the multiplicative group of non-zero elements of a division ring. In the paper under review these groups are completely determined. It is shown that there are non-cyclic groups of odd order with this property (contrary to a conjecture of Herstein), and in fact infinitely many; the smallest has order 63. The groups in question are „without fixed points", that is they possess a matrix representation in which only the unit element is represented by a matrix with 1 among its latent roots; such groups have been studied by several authors, notably by Zassenhaus (this Zbl. **11**, 103), whose results are extensively used. Not every group without fixed points can be embedded in a division ring, and the precise determination of those that can requires a detailed discussion of number theoretic conditions and the use of class field theory. The groups that are finally found to be so embeddable are of the following types: (1) cyclic groups; (2) metacyclic groups subject to certain arithmetical restrictions; (3) the binary tetrahedral group and its direct products with certain groups of the first two types; (4) the binary octahedral group and the binary icosahedral group. The last of these is the only non-

soluble group that occurs. The finite subgroups of the real quaternions are also determined; they are cyclic, binary dihedral, binary tetrahedral, binary octahedral, or binary icosahedral. A comparison of this classification with the known classification of finite groups of motions of Euclidean 3-space concludes the paper.

B. H. Neumann.

Frucht, Robert: Remarks on finite groups defined by generating relations. Canadian J. Math. **7**, 413 (1955).

Ergänzungen und Verbesserungen zum sog. „Duplikationsprinzip" einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **64**, 24). *J. J. Burckhardt.*

Itô, Noboru: On the number of isomorphic classes of nonnormal subgroups in a finite group. Acta Sci. math. **16**, 9—11 (1955).

Es bezeichne G eine endliche Gruppe, $r(G)$ die Anzahl der nichtnormalen, untereinander nichtisomorphen Untergruppen und $t(G)$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren der Ordnung von G. Als wesentliche Verschärfung eines Satzes von P. I. Trofimov (dies. Zbl. **50**, 255) wird bewiesen: Im Fall $r(G) < 2t(G) + 2$ ist G auflösbar oder gleich A_5, der alternierenden Gruppe 5-ten Grades. Der ziemlich komplizierte Beweis stützt sich unter anderem auf den Satz vom Ref. (dies. Zbl. **38**, 15), nach dem eine nichtzyklische einfache Gruppe ($\neq A_5$) von gerader Ordnung mindestens eine nichtabelsche zweitmaximale Untergruppe enthält.

L. Rédei.

Artin, Emil: The orders of the classical simple groups. Commun. pure appl. Math. **8**, 455—472 (1955).

Complétant un résultat antérieur (ce Zbl. **65**, 12), l'A. prouve que, parmi les groupes simples finis connus (i. e. les groupes classiques, les groupes de type exceptionnel récemment découvert par Chevalley et les 5 groupes de Mathieu), il n'y a pas de coïncidences entre les ordres de ces groupes sauf dans les cas connus depuis Dickson (1901). Il arrive à réduire considérablement le nombre de vérifications nécessaires par la méthode suivante: 1. pour la comparaison entre les groupes alternés et les groupes du type „de Lie" sur un corps de caractéristique p, on remarque que si N est l'ordre d'un groupe de ce dernier type, M la plus haute puissance de p divisant N (p-contribution à N), on a $N \leq M^3$, et d'autre part, la p-contribution à une factorielle est bien connue; 2. sauf dans un petit nombre de cas bien précisés et faciles à traiter séparément, p est le nombre premier dont la contribution à l'ordre N est la plus grande, ce qui dispose facilement de la comparaison entre deux groupes sur des corps de caractéristiques différentes; 3. pour le cas plus difficile de corps de même caractéristique, l'A. considère les différents polynômes cyclotomiques Φ_s tels que $\Phi_s(p)$ divise N; il prouve d'abord que, si α et β sont les deux plus grandes valeurs de s, la connaissance de N, p, α et β détermine le groupe sans ambiguité; en outre, si $p > 2$, α et β sont les deux plus grands exposants de p modulo les nombres premiers $\neq p$ divisant N, et par suite α et β sont déterminés par N et p; pour $p = 2$ enfin, on applique la même idée mais il y a un nombre fini d'exceptions à examiner séparément. *J. Dieudonné.*

Walter, John H.: Isomorphisms between projective unitary groups. Amer. J. Math. **77**, 805—844 (1955).

Soit K un corps (commutatif ou non) de caractéristique $\neq 2$, possédant un antiautomorphisme involutif J. Soit E un espace vectoriel à droite de dimension n sur K, et $f(x, y)$ une forme sesquilinéaire hermitienne non dégénérée sur E, relative à J. L'A. se propose de déterminer les automorphismes du groupe projectif unitaire $PU_n(K, f)$ relatif à la forme f. Par les méthodes du Réf. et de Rickart, ce problème est ramené à une caractérisation (par des propriétés ne faisant intervenir que la structure de groupe), des involutions extrémales de $PU_n(K, f)$, c'est-à-dire des involutions u^* provenant d'une involution u du groupe $U_n(K, f)$ dont un sous-espace propre est de dimension 1. La difficulté est due à la présence de plusieurs sortes

d'involutions dans $PU_n(K, f)$, qui ne proviennent pas d'involutions de $U_n(K, f)$. Suivant une méthode de Mackey et Rickart, l'A. désigne pour tout ensemble S^* d'involutions de $PU_n(K, f)$, par $c(S^*)$ l'ensemble des involutions commutant à toutes celles de S^*; $\nu(u^*, v^*)$ est le nombre d'éléments de $c(c(u^*, v^*))$, ν_{u^*} le maximum de $\nu(u^*, v^*)$ pour toutes les involutions $v^* \neq u^*$ telles que $u^* v^* = v^* u^*$, $u^* \neq 1$ et $v^* \neq 1$. On a toujours $\nu_{u^*} \geq 4$; soit J^* l'ensemble des involutions telles que $\nu_{u^*} = 4$. On désigne ensuite par $\omega(u^*, v^*, w^*)$ le nombre d'éléments de $c(c(u^*, v^*, w^*))$, par ω_{u^*} le maximum de $\omega(u^*, v^*, w^*)$ lorsque u^*, v^*, w^* sont trois éléments distincts de J^*, deux à deux permutables et tels que $u^* v^* \neq w^*$. On a $\omega_{u^*} \geq 8$; pour $n > 4$, $n \neq 6, 8$ et 12, l'A. montre que $\omega_{u^*} = 8$ caractérise les involutions extrémales; pour $n = 6, 8$ ou 12 une autre méthode conduit aussi au but, de sorte que la détermination des automorphismes de PU_n est complète pour $n > 4$. La plus grande partie du travail est consacrée à la détermination de l'ensemble J^*, qui nécessite l'étude de nombreux cas. *J. Dieudonné.*

Arcidiacono, Giuseppe: Sul gruppo aggiunto del gruppo di Galileo. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 633—654 (1955).

Die 100 Matrixkoeffizienten der adjungierten Gruppe der Galilei-Gruppe werden in kanonischen Koordinaten ausgerechnet. *H. Freudenthal.*

Honda, Kin'ya: On a decomposition theorem of primary groups. Commentarii math. Univ. St. Pauli **4**, 53—66 (1955).

Es werden neue Beweise von des Verf. „Zerlegungssatz für abelsche p-Gruppen mit endlichem Horizontalexponenten" (dies. Zbl. **55**, 18 — für die Bezeichnungen s. dort) und dem Fundamentalsatz der endlichen abelschen Gruppen gegeben. Ferner wird folgender bemerkenswerte Satz bewiesen: Zu jeder abelschen p-Gruppe K gibt es eine im Sinne des Isomorphismus eindeutige Obergruppe G, so daß $K = pG$ und $h(G) \neq 1$ ist. *F. W. Levi.*

Fuchs, L., A. Kertész and T. Szele: On abelian groups whose subgroups are endomorphic images. Acta Sci. math. **16**, 77—88 (1955).

Making extensive use of methods and results of earlier papers of Fuchs, Kertész and Szele (this Zbl. **52**, 22), Fuchs (this Zbl. **52**, 22), Kertész and Szele (this Zbl. **52**, 21), and Szele (this Zbl. **56**, 23), and L. Kulikov's basic sub-groups of abelian p-groups [Mat. Sbornik, n. Ser. **16 (58)**, 129—162 (1945)], the authors characterize those abelian groups G with the property that every subgroup of G is an endomorphic image of G, called property P, as follows. 1. A torsion free group has property P if and only if it has a direct summand which is the (discrete) direct sum of as many infinite cyclic groups as the rank of G. 2. In the case of torsion groups, only p-groups need be considered, p a prime. Such a group G has property P if and only if the final rank of G equals the final rank of a basic subgroup of G, or equivalently, G is a homomorphic image of a basic subgroup of G. The final rank is defined as $\min_n$ rank $p^n G$. Corollaries: A bounded abelian p-group (i. e. one in which there exists an element of maximal order) has property P. A countable abelian p-group has property P if and only if it is not the direct sum of $m > 0$ groups of type p^∞ and a bounded p-group. 3. (a) A mixed group of finite rank r has property P if and only if it is the direct sum of a torsion group with property P and r infinite cyclic groups. (b) A mixed group of infinite rank r has property P if and only if it contains a direct summand which is the (discrete) direct sum of r infinite cyclic groups, and each primary component of its torsion subgroup of final rank $> r$ has property P. In the final section it is proved that an abelian group G has the property that every subgroup which is a direct sum of cyclic groups is an endomorphic image of G if and only if G has property P. *D. G. Higman.*

Higman, Graham: A remark on finitely generated nilpotent groups. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 284—285 (1955).

Verf. beweist, daß in einer endlich erzeugten nilpotenten Gruppe der Durchschnitt der Gruppen G^p, wobei p einen unendliche Menge von Primzahlen durchläuft, eine endliche Gruppe ist. Dieser Satz, zusammen mit einem Satz des Ref. (dies. Zbl. **33**, 149), wonach jede auflösbare Gruppe mit Maximalbedingung für Untergruppen einen Normalteiler von endlichem Index, ohne Elemente endlicher Ordnung, enthält, ergibt einen einfachen Beweis des folgenden Satzes von Baer [Math. Z. **59**, 299—338 (1953)]: Wenn G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe ist, so gibt es eine natürliche Zahl n, so daß der Durchschnitt aller charakteristischen Untergruppen von G, deren Indizes Primzahlpotenzen p^α mit $\alpha \leqq n$ sind, das Einheitselement ist. *K. A. Hirsch.*

Crouch, Ralph B.: Monomial groups. Trans. Amer. math. Soc. **80**, 187—215 (1955).

Ist H eine Gruppe und M eine Menge beliebiger Mächtigkeit, so sei $V = V(H, M)$ die Gruppe aller eindeutigen Abbildungen von M in H. Ist σ eine Permutation der Elemente in M und $f(x)$ eine Abbildung aus V, so ist auch $f^\sigma(x) = f(x^\sigma)$ ein Element aus V. Jede Permutation σ von M kann also mit einem Automorphismus von V identifiziert werden. Die umfassendste monomiale Gruppe $\Sigma(H, M)$ ist dann die Untergruppe des Holomorphs von V, die von V und den von Permutationen von M induzierten Automorphismen von V erzeugt wird. Diese Verallgemeinerung der symmetrischen Gruppe über M wird in vorliegender Abhandlung sorgfältig untersucht; insbesondere wird die Frage erledigt, wann alle Komplemente von V in Σ konjugiert sind; die Normalteiler von Σ werden erörtert usw. Beschränkt man die Permutationen von M auf solche, die in einer der wohlbekannten charakteristischen Untergruppen der symmetrischen Gruppe von M vorkommen, so erhält man wichtige Untergruppen von Σ, die ebenfalls untersucht werden. — Für den Fall, daß M endlich ist, hat O. Ore (dies. Zbl. 28, 3) bereits ähnliche Untersuchungen angestellt. Die vorliegende Untersuchung beseitigt die Beschränkung auf endliches M. *R. Baer.*

Černikov, S. N.: Über die Ergänzbarkeit der Sylowschen Π-Untergruppen in gewissen Klassen unendlicher Gruppen. Mat. Sbornik, n. Ser. **37 (79)**, 557—566 (1955) [Russisch].

Bekanntlich heißt eine Untergruppe $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{G}$ ergänzbar, wenn es eine Untergruppe $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ gibt mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = 1$. Verf. beschäftigt sich mit dem Problem, wann eine Π-Sylowgruppe $\mathfrak{A}$ einer unendlichen Gruppe $\mathfrak{G}$ ergänzbar ist. Dabei spielt folgender Begriff eine Rolle: Die Π-Sylowgruppe $\mathfrak{A}$ heißt in $\mathfrak{G}$ arithmetisch abgeschlossen, wenn der Index von $\mathfrak{A}$ in jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{A}$ enthält, entweder unendlich oder durch keine Primzahl der Menge Π teilbar ist. Als Beipiel sei folgender Satz genannt: Ist $\mathfrak{G}$ lokal normal und $\mathfrak{A}$ arithmetisch abgeschlossen in $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{A}$ dann und nur dann ergänzbar in $\mathfrak{G}$, wenn der Durchschnitt von $\mathfrak{A}$ mit jedem endlichen Normalteiler $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{N}$ ergänzbar ist. Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Hall stellt folgendes Ergebnis dar: Ist $\mathfrak{G}$ lokal normal und lokal auflösbar, so ist jede Π-Sylowgruppe ergänzbar. Ist $\mathfrak{G}$ lokal normal und besitzt $\mathfrak{G}$ für jede Primzahl p eine ergänzbare p-Sylowgruppe, so ist $\mathfrak{G}$ lokal auflösbar. *R. Kochendörffer.*

Auslander, Maurice and R. C. Lyndon: Commutator subgroups of free groups. Amer. J. Math. **77**, 929—931 (1955).

Let F be a non-abelian free group, R a non-trivial normal subgroup of F and $F/R = G$. If $F_0 = F/[R, R]$, $R_0 = R/[R, R]$, then $F_0/R_0 = G$, and G operates on R_0 through the inner automorphisms of F_0. The authors prove (1) only the unit element of G leaves all the elements of R_0 fixed, (2) the centre C_0 of F_0 is trivial if and only if G is infinite, (3) if S is another normal subgroup of F, then $[S, S] \subset [R, R]$ implies $S \subset R$. Corollaries of (1) when $R \neq F$ are (a) $[R, R] \neq [F, R]$ (and hence $\neq [F, F]$), (b) $C_0 \subset R_0$ but $C_0 \neq R_0$, (c) $C_0 = \{r \in R_0 \mid xr = r$ for all $x \in G\}$. *W. H. Cockcroft.*

Higman, D. G.: Induced and produced modules. Canadian J. math. **7**, 490—508 (1955).

Aus der Darstellungstheorie endlicher Gruppen ist der Induktionsprozeß bekannt: das ist ein Verfahren, aus einem Darstellungsmodul M einer Untergruppe einen „induzierten" Darstellungsmodul $I(M)$ der vollen Gruppe zu gewinnen. Verf. verallgemeinert dieses Verfahren auf den Fall, wo an Stelle der Gruppe ein beliebiger Ring A mit 1 vorliegt, und an Stelle der Untergruppe ein Teilring S, welcher 1 enthält. Jedem S-Modul M wird ein „induzierter" A-Modul $I(M)$, zusammen mit einem S-Homomorphismus $\varkappa: M \to I(M)$ zugeordnet, und zwar ist $I(M)$ maximal in dem Sinne, daß jeder S-Homomorphismus δ von M in einen A-Modul H sich als Produkt $\delta = \varkappa\,\bar{\delta}$ mit einem eindeutig bestimmten A-Homomorphismus $\bar{\delta}: I(M) \to H$ schreiben läßt. Explizit stellt sich $I(M)$ als Kroneckerprodukt $M \underset{S}{\otimes} A$ dar. — Dual dazu läßt sich zu M ein „produzierter" A-Modul $P(M)$, zusammen mit einem S-Homomorphismus $\pi: P(M) \to M$ erklären, welcher minimal ist in dem Sinne, daß jeder S-Homomorphismus $\delta: H \to M$ eines A-Moduls H sich eindeutig als Produkt $\delta = \bar{\delta}\pi$ mit einem A-Homomorphismus $\bar{\delta}: H \to P(M)$ schreiben läßt. Explizit ist $P(M) = S\text{-Hom}\,(A, S)$. — Die Dualität zwischen $I(M)$ und $P(M)$ ordnet sich einem allgemeinen Dualitätsprinzip von MacLane unter (dies. Zbl. **45**, 299). Falls A der Gruppenring einer endlichen Gruppe (mit ganzrationalen Koeffizienten) ist, und falls S der Gruppenring einer Untergruppe ist, so ist $\varkappa$ eine Injektion und π eine Projektion; ferner sind $I(M)$ und $P(M)$ in natürlicher Weise isomorph und stimmen mit dem oben erwähnten gewöhnlichen Modul $I(M)$ überein. — Verf. untersucht allgemein die Bedingungen, unter denen $I(M)$ und $P(M)$ isomorph sind für alle S-Moduln M: Falls A sowohl eine linke als auch eine rechte S-Basis besitzt, so ist dafür notwendig und hinreichend, daß A selbst-dual in dem Sinne ist, daß er eine invariante S-Bilinearform besitzt. Eine andere Bedingung ist, daß es zu jeder linken S-Basis $a_1, \ldots, a_n$ von A eine rechte S-Basis $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ gibt, derart, daß für jedes Element $a \in A$ die durch $a_i\, a = \sum_j a_j\, s_{ji}$, $a\,\bar{a}_i = \sum_j \bar{s}_{ij}\,\bar{a}_j$ definierten Matrizen s_{ij}, $\bar{s}_{ij}$ aus S übereinstimmen. Ist diese letztere Bedingung erfüllt, so ist für jeden A-Modul M die Existenz eines S-Endomorphismus α mit $\sum_i \bar{a}_i\,\alpha\, a_i = 1$ notwendig und hinreichend dafür, daß M direkter A-Summand in jedem A-Modul H ist, in welchem es als direkter S-Summand enthalten ist. Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung von ähnlichen Sätzen von Gaschütz (dies. Zbl. **47**, 27), Eckmann (dies. Zbl. **50**, 172) und des Verf. (dies. Zbl. **55**, 255). — Als weitere Anwendung seiner allgemeinen Ausführungen gibt Verf. u. a. eine Charakterisierung der separablen Algebren A über einem Körper S durch die Existenz von dualen Basen a_i, $\bar{a}_i$ im obigen Sinne derart, daß $\sum \bar{a}_i\, a_i = 1$. [Vgl. auch Hochschild, Amer. J. Math. **64**, 677—694 (1941), Higman (folgendes Referat) sowie die diesbezüglichen Teile des Buches von Cartan und Eilenberg: Homological Algebra (Princeton 1956).] *P. Roquette.*

Higman, D. G.: On orders in separable algebras. Canadian J. Math. **7**, 509—515 (1955).

Es sei $\mathfrak{g}$ ein Dedekindscher Ring mit dem Quotientenkörper K. Das Ziel dieser Arbeit ist, die Resultate von Maranda über die $\mathfrak{g}$-Darstellungen einer endlichen Gruppe (dies. Zbl. **52**, 261 und folgendes Referat) zu verallgemeinern auf die Darstellungen einer beliebigen $\mathfrak{g}$-Ordnung $\mathfrak{G}$ in einer Algebra A über K. Verf. bemerkt, daß die Marandaschen Schlußweisen unverändert auch in dem allgemeineren Fall übernommen werden können, sobald der Hauptsatz von Maranda (Theorem 1 der ersten der zitierten Arbeiten) in geeigneter Weise verallgemeinert ist. Diese Verallgemeinerung spricht Verf. in der folgenden Form aus: Für jeden zweiseitigen

$\mathfrak{G}$-Modul T sei $I(T)$ das annulierende Ideal der als $\mathfrak{g}$-Modul aufgefaßten ersten Kohomologiegruppe $H^1(T)$, und es werde $I(\mathfrak{G}) = \bigcap_T I(T)$ gesetzt. Der in Rede stehende Satz lautet dann: $I(\mathfrak{G}) \neq 0$. Es wird gezeigt, daß dies dann und nur dann richtig ist, wenn A eine (halbeinfache und) separable Algebra ist. Damit können dann auch die Marandaschen Resultate für Ordnungen aus solchen Algebren ausgesprochen werden. *P. Roquette.*

Maranda, J.-M.: On the equivalence of representations of finite groups by groups of automorphisms of modules over Dedekind rings. Canadian J. Math. **7**, 516—526 (1955).

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper und $\mathfrak{i}$ der Integritätsbereich der ganzalgebraischen Zahlen aus K. Für eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ betrachtet Verf. die endlich-erzeugbaren $(\mathfrak{i}, \mathfrak{G})$-Moduln, welche keine Torsion bezüglich $\mathfrak{i}$ besitzen; im Falle z. B. des rationalen Zahlkörpers läuft das auf die Betrachtung der Darstellungen von $\mathfrak{G}$ durch Matrizen mit ganzrationalen Koeffizienten zurück. Es sei $\mathfrak{S}$ eine volle Klasse von $(\mathfrak{i}, \mathfrak{G})$-Moduln $\mathfrak{M}$, welche zueinander K-äquivalent sind, d. h. für welche die Erweiterungsmoduln $K\mathfrak{M}$ zueinander $(K, \mathfrak{G})$-isomorph sind. Ist $\mathfrak{p}$ ein Primdivisor von K, und bedeutet $\mathfrak{i}_\mathfrak{p}$ den Integritätsbereich der $\mathfrak{p}$-ganzen Zahlen aus K, so zerfällt $\mathfrak{S}$ in zueinander fremde Klassen von $\mathfrak{i}_\mathfrak{p}$-äquivalenten Moduln; sei $r_\mathfrak{p}(\mathfrak{S})$ deren Anzahl. Man rechnet zwei Moduln aus $\mathfrak{S}$ zu demselben Geschlecht, wenn sie $\mathfrak{i}_\mathfrak{p}$-äquivalent sind für alle $\mathfrak{p}$; sei $r_0(\mathfrak{S})$ die Anzahl der Geschlechter in $\mathfrak{S}$. Verf. beweist zunächst die Produktformel:

$$r_0(\mathfrak{S}) = \prod_\mathfrak{p} r_\mathfrak{p}(\mathfrak{S}).$$

Hierbei ist $r_\mathfrak{p}(\mathfrak{S}) = 1$, wenn $\mathfrak{p}$ nicht in der Gruppenordnung N von $\mathfrak{G}$ aufgeht, so daß in dem obigen Produkt höchstens die $\mathfrak{p} | N$ wirklich vorkommen. — Bedeutet nun $r(\mathfrak{S})$ die Anzahl der $\mathfrak{i}$-Äquivalenzklassen aus $\mathfrak{S}$, so beweist Verf. weiter unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß für $\mathfrak{M} \in \mathfrak{S}$ der $(K, \mathfrak{G})$-Modul $K\mathfrak{M}$ absolut irreduzibel ist, die Formel

$$r(\mathfrak{S}) = h \cdot r_0(\mathfrak{S}),$$

wobei h die Klassenzahl von K ist. Die $r_\mathfrak{p}(\mathfrak{S})$ erweisen sich auf Grund früherer Resultate des Verf. als endlich (vgl. dies. Zbl. **52**, 261); daraus ergibt sich nach den obigen Formeln auch ein Beweis für die Endlichkeit von $r(\mathfrak{S})$, in Verallgemeinerung und Ergänzung von Resultaten von Zassenhaus (dies. Zbl. **21**, 300). — Verf. führt die Untersuchung gleich allgemeiner, indem für $\mathfrak{i}$ ein beliebiger Dedekindscher Ring (= Integritätsbereich mit multiplikativer Idealtheorie) der Charakteristik 0 zugrunde gelegt wird. *P. Roquette.*

Mostowski, A. W. and E. Sasiada: On the bases of modules over a principal ideal ring. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **3**, 477—478 (1955).

Ein Satz des Ref. (eine abelsche Gruppe G ist direkte Summe zyklischer Gruppen, falls nG für eine ganze Zahl $n \neq 0$ diese Eigenschaft besitzt, dies. Zbl. **49**, 155) wird (mit einem einfacheren Beweis) für Moduln verallgemeinert: Es sei R ein Hauptidealring und G ein R-Modul; ist für irgendein $\alpha \in R$ $(\alpha \neq 0)$ der Untermodul αG die direkte Summe von zyklischen R-Moduln, so gilt dasselbe auch für G. Als Anwendung werden der Hauptsatz über abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden und ein Satz von Prüfer bewiesen. *L. Fuchs.*

Chevalley, Claude: Invariants of finite groups generated by reflections. Amer. J. Math. **77**, 778—782 (1955).

V denotes a n-dimensional vector space over a field K of characteristic zero and G a finite group of automorphisms of V which is generated by reflections (i. e. involutions keeping pointwise fixed a subspace of dimension $n-1$). Let S be the algebra of polynomials over V, J the subalgebra formed by the invariants of G, and F the ideal generated in S by the homogeneous elements of strictly positive degree

in J. The author proves that: (A) J is generated (as K-algebra) by the unit and n algebraically independent homogeneous elements $I_1, \ldots, I_n$. (B) Let m_i be the degree of I_i $(1 \leq i \leq n)$. Then the order N of G is equal to the product of the m_i; the quotient S/F has dimension N and the natural representation of G in it is equivalent to the regular one. Moreover the dimension of the space of elements of degree k in S/F is equal to the coefficient of t^k in the quotient of $\Pi\,(1 - t^{m_i})$ by $(1 - t)^n$. Coxeter (this Zbl. **44**, 256) had checked (A) case by case when K is the field of real numbers. When moreover G is the Weyl group of a compact connected Lie group $\mathfrak{G}$, these results are in close connection with topological properties of $\mathfrak{G}$ and of its quotient by a maximal torus discovered by the author and Leray (see the reviewer's thesis, this Zbl. **52**, 400). *A. Borel.*

Dynkin, E. B. und A. L. Oniščik: Kompakte Liesche Gruppen im Großen. Uspechi mat. Nauk **10**, Nr. 4 (66), 3—74 (1955) [Russisch].

This paper develops the theory of the diagram of a compact Lie group (in the sense of Stiefel, this Zbl. **26**, 386) but using now exclusively the Cartan-Weyl theory of root forms. The centers of the simply connected compact simple Lie groups are determined, and the kernels of these groups under a unitary representation are determined. The result is stated in terms of the dominant weights of the irreducible components. Among the other results we mention a criterion for an irreducible linear representation of a compact Lie group to be equivalent to a symplectic or orthogonal representation. *W. T. van Est.*

Cohn, P. M.: A non-nilpotent Lie ring satisfying the Engel condition and a non-nilpotent Engel group. Proc. Cambridge philos. Soc. **51**, 401—405 (1955).

Die Frage, ob Liesche Ringe bzw. Gruppen, welche der Bedingung von Engel (siehe K. W. Gruenberg, dies. Zbl. **50**, 19) genügen, auch nilpotent sein müssen, wird mit Hilfe zweier Beipiele negativ beantwortet. Zunächst wird ein Liescher Ring über einem Körper der Charakteristik p konstruiert, der auflösbar ist und die Engel-Bedingung der Ordnung $p + 1$ erfüllt, aber nicht nilpotent ist. Mit Hilfe dieses Ringes erhält Verf. auch eine auflösbare nicht nilpotente Gruppe, deren Kommutatorgruppe eine abelsche p-Gruppe ist und die der Engel-Bedingung der Ordnung $p + 1$ genügt. In einem Nachtrag wird auf eine Arbeit von R. Baer hingewiesen (dies. Zbl. **23**, 300), in der in einem anderen Zusammenhang eine ähnlich gebaute Gruppe mit den verlangten Eigenschaften konstruiert wurde. *F. W. Levi.*

Laugwitz, Detlef: Über unendliche kontinuierliche Gruppen. I. Grundlagen der Theorie; Untergruppen. Math. Ann. **130**, 337—350 (1955).

Es sei B ein Banachraum. Verf. nennt dann einen Gruppenkeim K eine B-lokale Gruppe, wenn das neutrale Element von K eine Umgebung besitzt, die zu einer Umgebung des Nullpunktes von B homöomorph ist, und wenn bei dieser Homöomorphie das neutrale Element auf den Nullpunkt abgebildet wird. Eine solche Homöomorphie heißt ein Koordinatensystem. K heißt B-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe, wenn die Gruppenoperation im Koordinatensystem durch eine im Sinne von Fréchet differenzierbare (analytische) Abbildung beschrieben wird. Eine topologische Gruppe heißt differenzierbare (analytische) B-Gruppe, wenn sie die entsprechenden lokalen Eigenschaften besitzt. Die Eigenschaft, eine differenzierbare (analytische) Banachsche Gruppe zu sein, ist erblich bei Bildung endlicher direkter Produkte. Nach vorbereitenden Untersuchungen über eingliedrige Untergruppen und kanonische Koordinatensysteme, für die ein Existenzsatz bewiesen wird, wendet sich Verf. den Differenzierbarkeitseigenschaften von Untergruppen zu. Es wird ein Kriterium für die Differenzierbarkeit und differenzierbare Einbettung von abgeschlossenen zusammenhängenden Untergruppen bewiesen. Weiter zeigt Verf.: K sei eine B-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe. Ist H eine lokalkompakte Untergruppe von K, so ist die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements von H eine B'-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe, und die Ein-

bettung ist ebenfalls differenzierbar (analytisch). Beim Beweis wird ein verallgemeinertes Orthogonalisierungsverfahren für Banachräume benutzt, das in einem Anhang bewiesen wird und ein selbständiges Interesse verdient. Ob der genannte Untergruppensatz auch allgemein für lediglich abgeschlossene Untergruppen gilt, ist nicht entschieden. Jedoch zeigt Verf., daß das Zentrum einer B-lokalen differenzierbaren (analytischen) Gruppe eine B'-lokale differenzierbare (analytische) Gruppe ist (B' linearer Unterraum von B). Die Ergebnisse werden auf Banach-Algebren und lineare Transformationsgruppen von Banachräumen angewandt. Grundlegend für die vorliegenden Untersuchungen ist eine vorangehende Arbeit des Verf. (dies. Zbl. **56**, 151). *H.-J. Kowalsky.*

Leptin, Horst: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen. II. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 221—243 (1955).

(Teil I, dies. Zbl. **56**, 260.) In diesem Teil II seiner Untersuchung über die Prüferschen Gruppen beschäftigt sich der Autor mit Homomorphismen (§ 4), Zerlegungssätzen (§ 5) und Charakteren (§ 6) solcher Gruppen. In dem Paragraphen 4 entwickelt er eine Methode, in der er mit Homomorphismen der untersuchten Gruppe auf eine direkte Summe arbeitet. Es sei M ein System von abelschen topologischen Gruppen $\mathfrak{g}$, und man setze für jede Teilmenge M_0 von M $\mathfrak{S}_{M_0} = \Sigma\, \mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g} \in M_0)$; mit M^Δ bezeichne man das System aller solcher Gruppen $\mathfrak{S}_{M_0}$. Die kanonische Abbildung von $\mathfrak{S}_{M'}$ $(= \mathfrak{S}_{M' \cap M_0} \oplus \mathfrak{S}_{M'-M_0})$ auf $\mathfrak{S}_{M' \cap M_0}$ bezeichnen wir als Projektion π_{M_0}. Dann ist das System $\Phi = \Phi(\mathfrak{G}, M)$ aller Homorphismen einer Prüferschen Gruppe $\mathfrak{G}$ auf Gruppen aus M^Δ induktiv geordnet, wenn man $\varphi > \psi$ setzt, falls es eine Projektion π gibt, derart daß $\psi = \pi\varphi$ gilt. Es sei nun $\mathfrak{G}$ eine Prüfersche Gruppe, M bestehe aus lauter einrangigen primären Gruppen. Ein Homomorphismus φ der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf eine direkte Summe $\sum_\lambda \mathfrak{g}_\lambda$ soll rein heißen, wenn zu jedem Summanden $\mathfrak{g}_\lambda$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}_\lambda$ in $\mathfrak{G}$ enthalten ist, die durch φ isomorph auf $\mathfrak{g}_\lambda$ abgebildet wird; eine Untergruppe $\mathfrak{R}$ der Prüferschen Gruppe $\mathfrak{G}$ heiße rein, wenn für alle natürlichen Zahlen n gilt: $p^n \mathfrak{R} = \mathfrak{R} \cap (p^n \mathfrak{R})$. Mit diesen vorbereitenden Definitionen gilt dann unter anderem, daß das System $\Phi_0 = \Phi_0(\mathfrak{G}, M)$ der reinen Homomorphismen von $\mathfrak{G}$ auf Gruppen aus M^Δ induktiv geordnet ist. Im nächsten Paragraphen § 5 beweist der Verf. eine Reihe von Sätzen über Abspaltung von direkten Summanden und gewinnt die (bekannten) Sätze über die direkte Zerlegbarkeit: (a) Jede torsionsfreie Prüfersche Gruppe ist direkte Summe einrangiger Gruppen, (b) Eine periodische Prüfersche Gruppe ist direkte Summe endlich vieler zu P^* $(= P/Z\infty =$ Restklassengruppe der additiven Gruppe aller p-adischen Zahlen nach der additiven Gruppe der ganzen p-adischen Zahlen) isomorpher Gruppen und einer einrangig direkt zerlegbaren Gruppe von endlichem Exponenten. Im letzten Paragraphen wird der Dualitätssatz Pontrjaginscher Art für die Prüferschen Gruppen diskutiert. *T. Tannaka.*

Edwards, R. E.: On factor functions. Pacific J. Math. **5**, 367—378 (1955).

Sei G eine lokal kompakte abelsche Gruppe und (E, F) ein Paar topologischer Vektorräume, für welche durch $x \to t_x$, $x \in G$, eine Darstellung von G durch stetige Automorphismen t_x von E, bzw. F definiert ist. Mit $L_t(E, F)$ werde die Menge aller stetigen mit den Automorphismen t_x vertauschbaren linearen Abbildungen von E in F bezeichnet. Der Verf. stellt das Problem, für die Elemente aus $L_t(E, F)$ Darstellungen (etwa in Form von Faltungsintegralen) zu geben und löst es für einige Spezialfälle. Das allgemeine Problem ergibt sich aus der folgenden Fragestellung: Sei für E und F in geeigneter Weise eine Fouriertransformation $f \to \hat{f}$ definiert. Eine Funktion Φ auf der Charaktergruppe $\hat{G}$ heißt Faktorfunktion oder kurz Faktor der Klasse (E, F), wenn zu jedem $f \in E$ ein $g \in F$ existiert, derart daß $\hat{g} = \Phi \hat{f}$ ist. Das Faktorproblem besteht in der Kennzeichnung aller Faktoren der Klasse (E, F). Da in wichtigen Fällen durch $f \to g$ (falls $\hat{g} = \Phi \hat{f}$ ist) eine Abbildung $u \in L_t(E, F)$