Werk

Titel: Mengenlehre

Ort: Berlin

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0065|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

tische Geometrie, endlich über Axiomatik und Grundbegriffe der modernen Algebra. — Zahlreiche Übungen. — Die ersten fünf Abschnitte geben eine Übersicht, meistens ohne Beweise, der notwendigsten Begriffe und Ergebnisse der Analysis; im zweiten Teil wird mehr nach Präzision gestrebt, aber nur in solchem Maße, daß z. B. die ε-Definition des Grenzwerts bloß in einer Fußnote und die Definition des bestimmten Integrals als Grenzwert von Summen nur skizzenhaft als Vorbereitung des komplexen Linienintegrals auftritt. *Á. Császár.*

● **Smirnow, W. I.: Lehrgang der höheren Mathematik. Teil III, 2.** (Hochschulbücher für Mathematik Bd. 4.) Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1955. XI, 601 S. DM 24,80.

Die vorliegende deutsche Übersetzung der 5. Auflage des russischen Originals ist recht gut ausgefallen. Bezüglich Stoff und Darstellung kann auf eine frühere Besprechung der 2. Auflage (dies. Zbl. **35**, 150) verwiesen werden; bemerkt sei, daß jetzt im 3. Kapitel die Sattelpunktmethode in allgemeiner Form aufgenommen ist. Dieser Band enthält so ziemlich alles, was der theoretische Physiker an niederer und höherer Funktionentheorie braucht und ist übrigens mit einigen Grundkenntnissen über Differential- und Integralrechnung für sich leicht lesbar. Solch umfangreichen Stoff in einheitlicher Verarbeitung beisammen zu finden, ist eine Bequemlichkeit, die sicher viele Freunde finden wird. *G. Aumann.*

● **Minorskij, V. P.: Aufgabensammlung zur höheren Mathematik.** 3. Aufl. Moskau: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1955. 360 S. R. 6,10 [Russisch].

2570 Aufgaben der elementaren Algebra, Differential- und Integralrechnung mit Einschluß von Differentialgleichungen und Fourierreihen samt Lösungen. Im Anhang finden sich Tabellen für die Werte wichtiger elementarer Funktionen.

L. Schmetterer.

Karush, W. and N. Z. Wolfsohn: The distance to the origin of a certain point set in E^n. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 323—332 (1955).

The minimum of $\sum_{i=1}^{m+1} a_i^2$ under the conditions $\sum_{i=1}^{m+1} i^k a_i = 1$, $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, q < m$, is

$$1 - m(m-1)\cdots(m-q)/(m+1)(m+2)\cdots(m+q+1).$$

The problem arose in connection with a problem of smoothing of statistical data.

H. Freudenthal.

Lowan, Arnold N.: Note on an elementary method for generating inequalities. Scripta math. **21**, 218—220 (1955).

Mengenlehre:

● **Kamke, Erich: Mengenlehre.** (Sammlung Göschen, Band 999/999a.) 3. neubearb. Aufl. Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1955. 194 S. 6 Abb. DM 4.80.

Gegenüber der zweiten Auflage (Berlin 1947) wesentlich vermehrt. Neu ist in I ein Kapitel über das Rechnen mit Mengen (Formeln von Morgan, Suslin-Operation), ein Abschnitt III zur Begründung der Mengenlehre, im folgenden ein Kapitel über Zerfällung von Ordnungszahlen (nach Hessenberg). In einem letzten Abschnitt wird ausführlich der Wohlordnungssatz zusammen mit Tukeys Maximalmengensatz und den Sätzen von Hausdorff und Zorn behandelt. *H. Hornich.*

● **Bachmann, Heinz: Transfinite Zahlen.** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 1. Heft.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955. VII, 204 S. DM 29,80.

Eine gründliche, gut lesbare Darstellung unseres derzeitigen Wissens über die transfiniten Zahlen (Ordnungszahlen und Kardinalzahlen bzw. Mächtigkeiten), so weit es sich auf deren arithmetische und funktionale Theorie bezieht. Zu fast allen

Ergebnissen sind — zum Teil vom Verf. vereinfachte — Beweise angeführt. Literaturangaben zu den einzelnen Kapiteln finden sich am Schluß des Buches. — In der nachstehenden Skizze des Inhalts bedeutet: OZ = Ordnungszahl; KZ = Kardinalzahl. — Kap. I. Klassen und Mengen. Festlegung der Klassen, die Mengen sind, durch das Zermelo-Fraenkelsche Axiomensystem. — Äquivalenz, Ordnung, Ähnlichkeit, Wohlordnung, transfinite Induktion, Ordnungstyp, OZ, Mächtigkeit, KZ (= Mächtigkeit einer wohlgeordneten Menge). — Kap. II. Eigenschaften wohlgeordneter Klassen. Bezeichnungen: W = Klasse aller Ordnungszahlen, die auf Grund der Axiome existieren (W keine Menge!); $W(\alpha)$ = Menge aller OZen $\beta < \alpha$, α OZ. — Verschiedene Definitionen der OZen. — Konfinalität. — Transfinite Funktionen $f(\alpha)$ [α und $f(\alpha)$ OZen], insbesondere stetige Funktionen und Normalfunktionen [$f(\alpha) < f(\beta)$ für $\alpha < \beta$, $f(\lambda) = \lim\limits_{\nu<\lambda} f(\nu)$ für Limeszahlen λ]. — Die ordinalen Anfangszahlen Ω_ξ: $\Omega_0 = \omega = \overline{W(\omega)}$ [$W(\omega) = 1$. Zahlenklasse = Menge der natürlichen Zahlen]; $\Omega_{\xi+1}$ = erste OZ, die nicht normal bezüglich Ω_ξ ist (ξ ist normal bezüglich α, wenn alle $\eta \leqq \xi$ mit einer Zahl $\leqq \alpha$ konfinal sind); $\Omega_\lambda = \lim\limits_{\nu<\lambda} \Omega_\nu$. Ohne das Auswahlaxiom (= ($\mathfrak{A}$)) kann die Existenz der Ω_ξ mit $\xi > 0$ aus den übrigen Axiomen nicht gefolgert werden, wohl aber die von Ω_0 und der zweiten Zahlenklasse, die aus den bezüglich $\Omega_0 = \omega$ normalen Zahlen besteht. Bezeichnung: Z = Vereinigung der 1. und 2. Zahlenklasse. — Reguläre und singuläre OZen; alle $\Omega_{\xi+1}$ sind regulär. — Bänder; Eigenschaften der Normalfunktionen $f(\alpha)$; deren kritische Zahlen $\varkappa = f(\varkappa)$ bilden die Werte einer neuen Normalfunktion, der Ableitung von f. — Iterationen von Funktionen und Operationen. — Regressive Funktionen [$f(\alpha) < \alpha$ für alle α des Definitionsbereiches] und ihre überraschenden Eigenschaften („stationäre" Teilklassen). — Kap. III. Summe und Produkt von endlich oder unendlich vielen OZen, als OZen definiert. — Polynomdarstellungen von OZen. — Stammfunktionen; höhere (Finslersche) Iterationen; Theorie der Hauptzahlen; Hauptzahlen und kritische Zahlen. — Umkehrung der arithmetischen Operationen $f(\alpha, \beta)$. — Zerlegung einer Zahl (insbesondere additiv und multiplikativ) in unzerlegbare Zahlen. — Permutationen von Folgen von OZen. — Vertauschbare OZen. — Kap. IV: Arithmetik der Mächtigkeiten und KZen ohne ($\mathfrak{A}$). — Äquivalenzsatz von Bernstein. — Vergleichbare Mächtigkeiten. [Der Satz 2 von § 25: „Aus $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$ folgt die Vergleichbarkeit der Mächtigkeiten $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$" gilt nur, wenn $\mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{n}$ eine KZ ist (vgl. Def. 2, § 25 und Satz 1, Zusatz, § 30). Aber diese eingeschränkte Fassung genügt für die späteren Anwendungen des Satzes, da man $\mathfrak{n} = \aleph(\mathfrak{m})$ (s. u.) wählen kann. Ref.] — Potenzmenge. — Transfinite Skala wachsender Mächtigkeiten $\mathfrak{m}_\xi$ der Mengen $M_\xi \left(M_0 = 0,\ M_{\xi+1} = 2^{M_\xi},\ M_\lambda = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} M_\lambda\right)$. Satz von Specker: $\mathfrak{m}^2$ nicht $\geqq 2^{\mathfrak{m}}$ für $\mathfrak{m} \geqq 5$. — KZen (ohne ($\mathfrak{A}$)) vergleichbar; ihre Klasse ist wohlgeordnet; sie ist überdies mit W ähnlich in Gestalt der Alephreihe $\aleph_\xi$ ($\aleph_{\xi+1}$ = Hartogssche Funktion von $\aleph_\xi$; s. u.). Die kardinalen Anfangszahlen ω_α: $\aleph_\alpha = \overline{\omega}_\alpha$. — Alle ω_α sind ε-Zahlen. — $\Omega_\xi = \omega_{\Phi(\xi)}$, wo $\Phi(\xi) \geqq \xi$ eine Normalfunktion (soweit die Ω_ξ existieren; erst aus ($\mathfrak{A}$) folgt $\Omega_\xi = \omega_\xi$). — $\aleph_\alpha^2 = \aleph_\alpha$. — Zermelosche Ungleichung. — Die Hartogssche Funktion $\aleph(\mathfrak{m})$ existiert für jede Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ als die kleinste KZ, die nicht $\leqq \mathfrak{m}$ ist. — Kap. V: Konsequenzen aus dem Auswahlaxiom und der Alephhypothese. — Wohlordnungssatz. — Mit ($\mathfrak{A}$) gleichwertige Postulate. — Alephformeln von Bernstein, Hausdorff, Tarski. — Die Beths $\left(= \text{Mächtigkeiten der Form } \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\right)$. — Die Normalfunktion $\pi(\xi)$: $\pi(0) = 0$, $2^{\aleph_{\pi(\xi)}} = \aleph_{\pi(\xi+1)}$. — Die Funktion $p(\alpha)$ = kleinste OZ η mit $\aleph_\alpha^{\aleph_\eta} > \aleph_\alpha$. — Alephhypothese: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$. Ist zusammen mit ($\mathfrak{A}$) gleichwertig der verallgemeinerten Kontinuumhypothese: Zu keiner unendlichen Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ (d. h. $\mathfrak{m}$ > jede natürliche Zahl) gibt es eine Mächtigkeit $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{m} < \mathfrak{x} < 2^{\mathfrak{m}}$. — Gleichwertige Postulate zur Alephhypothese; Folgerungen aus dieser. — Kap. VI: Probleme des Kontinuums

und der zweiten Zahlenklasse. — Axiom der Hauptfolgen: (A) Es gibt eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda \in Z$ eine Fundamentalfolge $\lambda_i \to \lambda$ $(i < \omega)$ zuordnet. — Mit (A) gleichwertige Postulate. — Schwächeres Axiom: (A') Zu jedem $\alpha \in Z$ gibt es eine Funktion, die jeder Limeszahl $\lambda < \alpha$ eine Fundamentalfolge $\lambda_i \to \lambda$ zuordnet. — (A') ist gleichwertig der Aussage: $Z = W(\omega_1)$. [Die in § 38, 2 enthaltene Bemerkung, daß diese Gleichwertigkeit erst durch ($\mathfrak{A}$) vermittelt werde, ist ein offenbares Versehen; vgl. dazu S. 175, Z. 9 v. o. Ref.] — Alternativen zu ($\mathfrak{A}$). — Kap. VII: Unerreichbare Zahlen. — Allgemeine Definition. — Hausdorffsche exorbitante Zahlen (die regulären ω_α, α Limeszahl); Zermelosche Grenzzahlen (die regulären $\omega_{\pi(\alpha)}$, α Limeszahl). Die zugehörigen $\aleph_\alpha$ bzw. $\aleph_{\pi(\alpha)}$ als im weiteren Sinn (Kuratowski) bzw. im engeren Sinn (Tarski) unerreichbare KZen. Gleichwertige Definitionen. — Tarskis Axiom der unerreichbaren Mengen. — Schlußbemerkung über höhere unerreichbare Zahlen. *W. Neumer.*

Seki, Setsuya: On transfinite inferences. Commentarii math. Univ. St. Pauli **4**, 43—45 (1955).

Verf. gibt in kurzer, eleganter Form Herleitungen für die Äquivalenz von Auswahlaxiom (A), Zornschem Lemma (Z), Vergleichbarkeitssatz für Kardinalzahlen (C) und Wohlordnungssatz (W) untereinander im Rahmen der Gödelschen Mengenlehre ohne Auswahlaxiom [K. Gödel, The consistency of the axiom of choice ..., Ann. Math. Studies Nr. 3 (1940)] bei Verwendung der Prädikatenlogik erster Stufe. Die Schlüsse $(A) \to (Z)$ und $(C) \to (W)$ werden auf Widersprüche zurückgeführt: Aus (A) und non-(Z) wird die Existenz einer eineindeutigen Abbildung der Klasse $\mathfrak{W}$ aller Ordinalzahlen auf die betrachtete Menge hergeleitet und ähnlich aus (C) und non-(W) eine Abbildung von $\mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(A \times A)$, A die betrachtete Menge, auf $\mathfrak{W}$. Hierbei werden die folgenden zwei Hilfssätze verwandt: Zu einer Abbildung $F: \mathfrak{P}(A) \to A$ gibt es genau eine Abbildung $f: \mathfrak{W} \to A$ mit $f\alpha = F\{f\beta; \beta < \alpha\}$ $(\alpha, \beta \in \mathfrak{W})$. Zu einer binären Relation R auf A gibt es höchstens ein $\alpha \in \mathfrak{W}$ und eine eineindeutige Abbildung $f: \{\beta, \beta < \alpha\} \to A$ derart, daß aRb gleichbedeutend ist mit $f^{-1} a < f^{-1} b$. *B. Banaschewski.*

Bruns, Günter und Jürgen Schmidt: Eine filtertheoretische Formulierung der Kontinuumshypothese. Z. math. Logik Grundl. Math. **1**, 91—92 (1955).

Hat die Menge E mindestens die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$, so bezeichne $\mathfrak{C}_\alpha$ den Filter aller jener Teilmengen von E, deren Komplemente eine Mächtigkeit $< \aleph_\alpha$ haben. Folgende Aussagen sind gleichwertig: (1) E hat genau die Mächtigkeit $\aleph_\alpha$; (2) $\mathfrak{C}_\alpha$ ist unverzweigt, d. h. hat eine total geordnete Basis; (3) $\mathfrak{C}_\alpha$ ist direkt darstellbar, d. h. es gibt eine Quasiordnung von E, deren Hauptenden eine Basis von $\mathfrak{C}_\alpha$ bilden. Daraus ergibt sich die Formulierung der Kontinuumshypothese: Im Kontinuum E ist der Filter $\mathfrak{C}_1$ unverzweigt (direkt darstellbar). *G. Aumann.*

Schmidt, Jürgen: Lexikographische Operationen. Z. math. Logik Grundl. Math. **1**, 127—170 (1955).

Es handelt sich um eine eingehende und allgemeine Untersuchung der verschiedenen Möglichkeiten, die Produktmenge F eines Systems von Mengen E_i, $i \in I$, d. h. die Menge aller eindeutigen Abbildungen $f|I$ mit $f(i) \in E_i$ für $i \in I$, zu ordnen (d. h. mit einer transitiven irreflexiven binären Relation $<$ zu versehen), wenn I und die E_i selbst irgendwie geordnet sind. Im Teil I werden die Definitionen einer „lexikographischen Multiplikation" von Hausdorff, Whitehead-Russell und G. Birkhoff miteinander verglichen; dabei erweist sich nur eine von Birkhoff als allgemein brauchbar, indem sie bei beliebiger Ordnung von I und der E_i zu einer Ordnung von F führt, welche zudem feiner ist als die „kardinale" Ordnung [$f \leqq_{(K)} g$, wenn $f(i) \leqq g(i)$ für alle i]. Diese Birkhoffsche Ordnung ist die folgende: $f \leqq_{(B_1)} g$, wenn es zu jeder „kritischen" Stelle i, d. h. zu jedem i mit $f(i)$ nicht $\leqq g(i)$, eine „Ausgleichsstelle" j gibt, d. h. eine Stelle j, für die (1) $j < i$ und $f(j) < g(j)$ und (2) $f(k) \leqq g(k)$ für alle $k < j$ gilt. Verf. zeigt, daß es zwischen

(K) und (B_1) noch Ordnungen gibt, u. a. die folgende: $f \leqq_{(L_2)} g$, wenn es eine endliche Teilmenge J von I gibt derart, daß $f(j) < g(j)$ für jedes $j \in J$ und zu jeder kritischen Stelle i eine Stelle j aus J existiert mit $j \leqq i$. Im Teil II werden gewisse Forderungen betrachtet, die an eine lexikographische Multiplikation (L) gestellt werden können: gewisse Differenzenforderungen, welche die Ordnungsbeziehungen von Paaren f, g, welche sich nur in endlich vielen Stellen unterscheiden, von vorneherein festlegen, eine Isomorphieforderung, eine Relativierungsforderung [gilt $E_i' \subseteq E_i$ für alle i, so soll die (L)-Ordnung des Produktes F' der E_i' übereinstimmen mit der in F' durch die (L)-Ordnung von F induzierten Ordnung] und eine Abspaltungsordnung, welche die Ausschaltung der „unwesentlichen" Stellen (E_i einelementig) in einem geeigneten Sinne gestattet. Es wird eine Reihe von Sätzen bewiesen unter der Voraussetzung, daß (L) die eine oder andere, oder mehrere von den obigen Forderungen erfüllt, u. a. wird gezeigt: Es gibt kein (L), das der „zweiten" Differenzenforderung genügt und nicht aus dem Bereich der wohlgeordneten Mengen hinausführt. Es gibt kein (L), das der Isomorphieforderung genügt und nicht aus dem Bereich der totalgeordneten Mengen hinausführt. *G. Aumann.*

Ladner, G.: On two problems of J. Schmidt. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 647—650 (1955).

Das System $\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$ der in bezug auf ein Hüllensystem $\mathfrak{H}$ unabhängigen Mengen ist absteigend ($I \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$ und $J \subseteq I \to J \in \mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$). Die von Ref. (dies. Zbl. **49**, 166) aufgeworfene Frage, ob ein absteigendes Mengensystem $\mathfrak{J}$ stets als ein $\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$ aufgefaßt werden kann, wird durch folgendes Beispiel des Verf. negativ beantwortet: Grundmenge $E = \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$; $\mathfrak{J}$ besteht aus allen Teilmengen der Mengen $\{1, 2, 3\}$, $\{3, 4, 5\}$, $\{5, 6, 1\}$. Ließe sich dieses $\mathfrak{J}$ durch ein Hüllensystem $\mathfrak{H}$ erzeugen, so müßte im Sinne der $\mathfrak{H}$-Teilbarkeit o. B. d. A. $2 \leqq 4 \leqq 6$ gelten, ferner $1 \leqq 4$ und damit $1 \leqq 6$, oder $4 \leqq 1$ und damit $2 \leqq 1$, im Widerspruch zur Unabhängigkeit von $\{6, 1\}$ bzw. $\{1, 2\}$. — Nun ist mit $\mathfrak{H}$ auch stets $\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$ induktiv. Verf. zeigt, damit eine 2. Frage des Ref. negativ beantwortend, daß $\mathfrak{J}_{\mathfrak{H}}$ auch dann noch induktiv sein kann, wenn dies auf $\mathfrak{H}$ selbst nicht zutrifft: E sei die Zahlengerade, $\mathfrak{H}$ das System der abgeschlossenen Intervalle mit dem Mittelpunkt 0 (einschließlich der Mengen E und $\{0\}$); unabhängig sind hier außer der leeren Menge nur noch die einelementigen Mengen $\{x\}$ mit $x \neq 0$. *Jürgen Schmidt.*

Grünbaum, B.: On a theorem of L. A. Santaló. Pacific J. math. **6**, 351—359 (1955).

A family of point sets in the plane is said to have property α if, either (i) there are three sets belonging to the family which cannot be intersected simultaneously by a straight line, or (ii) there exists a straight line intersecting all the sets of the family. The author proves: I. A finite sequence $\{S_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ of connected sets in the plane, such that for every $i = 1, 2, \ldots, n-1$, there exists a straight line strictly separating the sets $\bigcup_{j \leq i} S_j$ and $\bigcup_{j > i} S_j$, has property α; II. Every finite family of connected sets in the plane, any two of which can be separated (not necessarily strictly) by a straight line of fixed direction, has property α. If the sets S_i are compact, the theorems are valid even for infinite sequences $\{S_i\}$. The assumptions made (connectedness of the sets S_i, strictly separation in theorem I, compactness for infinite sequences) are essential, as showed by examples. *L. A. Santaló.*

Mycielski, Jan: About sets with strange isometrical properties. I. Fundamenta Math. **42**, 1—10 (1955).

The paper contains complete proofs — mainly of algebraic character — of propositions announced earlier (this Zbl. **55**, 282). The main problems are the following ones (cf. Sierpinski, this Zbl. **39**, 280): II. Does there exist a set E containing two points p, q such that $E - \{p\} \simeq E \simeq E - \{q\}$? III. Does there exist a set E in R_2 or R_3 such that $E - \{x\} \simeq E$ for each $x \in E$? The answers to these problems are respectively negative for R_1, unknown for R_2 and positive for R_3. *G. Kurepa.*