

Werk

Titel: Verbände. Ringe. Körper

Ort: Berlin

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0064|log11

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

striction au complémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension relative finie est l'identité, alors tout sous-groupe propre, normal, non-central, uniformément fermé de $\mathfrak{M}_g$ est produit direct de $\mathfrak{M}_{gf(1)}$ et d'un sous-groupe du groupe des scalaires complexes non nuls.

A. Revuz.

Ganea, Tudor: Zur Multikohärenz topologischer Gruppen. II. Math. Nachr. 13, 9—18 (1955).

In a previous paper [Part I, *ibid.* 7, 323—334 (1952)] the author proved that the multicoherence degree r of a homomorphic image of a unicoherent topological group is ≤ 1 . In this paper $r \leq 1$ is established for locally unicoherent groups and locally arcwise connected groups. One of the main steps in obtaining these results consists in proving that among the covering spaces, which are conjugate to a given covering of a connected locally connected space by locally connected sets, there is a „maximal“ one which is at the same time regular. A covering space (E, f) (of a space S) is said to be conjugate to a covering U (of S) if every set from U is evenly covered by (E, f) .

W. T. van Est.

Santaló, L. A.: On geometry of numbers. J. math. Soc. Japan 7, 208—213 (1955).

Soit S un espace de points dans lequel opère un groupe transitif de transformations G . Soit G_1 un sous-groupe simplement transitif de G . Si l'on fixe un point $P_0 \in S$, il y a correspondance biunivoque entre $x \in G_1$ et $x P_0 \in S$; le groupe G peut donc être considéré comme opérant sur G_1 . On suppose G_1 localement compact, unimodulaire avec une mesure invariante relativement à G . On suppose enfin qu'il existe une partition de S en domaines fondamentaux mesurables se correspondant grâce aux éléments d'un sous-groupe discret F de G . Sous ces hypothèses, l'A. démontre des théorèmes analogues aux théorèmes classiques de Blichfeldt et de Minkowski en géométrie des nombres.

J. Dufresnoy.

Bruhat, François: Sur certaines représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 2196—2198 (1955).

Soit G un groupe de Lie réel semi-simple. L'A. construit (par une méthode qui ne peut être expliquée qu'en recopiant la Note): 1. un sous-groupe fermé Γ' de G et un sous-groupe abélien H' de Γ' ; 2. des représentations unitaires U de Γ' dépendant notamment d'un caractère χ de H' — avec la propriété suivante: la représentation unitaire de G induite par U est irréductible pour presque tout χ . Ceci résout partiellement un problème de Harish-Chandra (ce Zbl. 56, 259). Les démonstrations ne sont qu'esquissées et généralisent les méthodes antérieures de l'A. (ce Zbl. 55, 20).

J. Dixmier.

Karpelevič, F. I.: Über halbeinfache Untergruppen halbeinfacher Liescher Gruppen. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 1 (63), 196—197 (1955) [Russisch].

Gel'fand, I. M. und M. I. Graev: Ein Analogon der Plancherelschen Formel für die klassischen Gruppen. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 1 (63), 205—206 (1955) [Russisch].

Gluškov, V. M.: Über einige Klassen von Gruppen, die über einem topologischen Körper vollständig sind. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 3 (65), 187—188 (1955) [Russisch].

Verbände. Ringe. Körper:

✓ ● **Morin, Ugo:** Algebra astratta. (Algebra astratta e geometria algebraica). Parte prima. Padova: Cedam—Casa Editrice Dott. Antonio Milani 1955. XV, 262 p. L. 2200,—.

Ces éléments d'Algèbre abstraite sont destinés à fournir les fondements algébriques d'un cours de Géométrie Algébrique. Ils sont divisés en trois grandes par-

ties. La 1ère donne les éléments de théorie des ensembles et de logique mathématique qui sont nécessaires (pages 1 à 81). La 2ème expose les principales structures algébriques: treillis, groupes, anneaux et corps (pages 81 à 192). La 3ème est consacrée aux groupes et corps ordonnés (pages 193 à 261). Le tout est exposé de façon précise et claire, sans développements superflus; on remarquera le rôle important donné aux relations d'ordre et aux notions qui en dérivent: treillis, groupes et corps ordonnés, groupes et corps valués. Des exercices simples sont proposés à la fin de chaque paragraphe. Une liste d'ouvrages consultés figure au début du livre mais il n'y a pas de références précises permettant au lecteur des rapprochements ou des développements fructueux. Un index renseigne sur les symboles utilisés mais il présente certaines omissions, par exemple $a \perp b$ pour désigner deux éléments disjoints a et b ; de plus ces notations ne sont pas toujours heureuses: c'est ainsi que le signe $\vdash$ est utilisé dans deux sens différents, $\vdash A$ ou vérité de A et $a \vdash b$ pour a couvrir b ; le signe $\rightarrow$ possède trois significations, l'implication logique, l'application d'un ensemble, l'homomorphisme d'un treillis; par contre la réunion de deux ensembles est désignée de plusieurs façons. Ces détails ne sont qu'une exception à la bonne finition de l'ensemble du livre.

L. Lesieur.

• **Hermes, Hans: Einführung in die Verbandstheorie.** (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Bd. LXXIII.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag 1955. VIII, 164 S. 24 Abb. DM 19,80.

Das erste und zweite Kapitel enthalten eine Einführung in die allgemeine Verbandstheorie. Die Verbände werden als Algebren mit zwei Operationen $\cup$ und $\cap$ definiert, der Zusammenhang mit Halbordnungen wird später genau besprochen. Der Verf. führt die wichtigsten Begriffe (Isomorphismus, Homomorphismus, Teilverband und Teilbund, Vollständigkeit, Atom usw.) und die Definitionen der speziellen Typen von Verbänden (modulare, distributive und Boolesche Verbände) ein, und er beweist die Möglichkeit der Einbettung jedes Verbandes in einen vollständigen Verband. — Das dritte Kapitel wird der Theorie modularer Verbände gewidmet. Der Zusammenhang mit der projektiven Geometrie wird genau besprochen. Der Inhalt der drei letzten Paragraphen ist die Theorie der Zerlegungsverbände und vertauschbarer Äquivalenzrelationen und der abstrakte Begriff der linearen Abhängigkeit. — Das vierte Kapitel enthält die Elemente der Theorie distributiver und Boolescher Verbände, insbesondere die Darstellungen durch Mengenverbände, die algebraische und topologische Charakterisierung Boolescher Verbände und endliche Distributivität. — Das Buch ist klar geschrieben und enthält Beispiele und Übungen. Die Beweise werden ausführlich dargestellt. Die Wahl des Stoffes ist ziemlich knapp, z. B. werden σ -vollständige Boolesche Verbände nicht erwähnt.

R. Sikorski.

Andreoli, Giulio: Geometrie riducibili non lineari di un semplice e geometria booleana di un ipercubo. Giorn. Mat. Battaglini 83 (V. Ser. 3), 13—40 (1955).

Die endlichen Booleschen Algebren mit $n + 1$ Atomen werden durch ein n -dimensionales Simplex veranschaulicht.

F. W. Levi.

Paige, Lowell J.: A theorem on commutative power associative loop algebras. Proc. Amer. math. Soc. 6, 279—280 (1955).

Die Loop-Algebra einer Loop über einem Körper wird entsprechend dem Gruppenring einer Gruppe definiert. Die Loop-Algebra einer Loop über einem Körper mit Charakteristik $\neq 2$ ist dann und nur dann kommutativ und potenzassoziativ, wenn die Loop eine kommutative Gruppe ist. Bei Charakteristik 2 gilt der Satz nicht mehr.

G. Pickert.

Szász, G.: Generalization of a theorem of Birkhoff concerning maximal chains of a certain type of lattices. Acta Sci. math. 16, 89—91 (1955).

Par un exemple, l'A. montre que, dans les treillis de longueur infinie, la distributivité n'entraîne pas l'égalité des longueurs de deux chaînes maximales ayant les mêmes extrémités.

R. Croisot.

Szász, G.: On weakly complemented lattices. Acta Sci. math. 16, 122—126 (1955).

Nach Areškin [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 90, 485—486 (1953)] heißt ein Verband mit 0-Element „schwach komplementär“ (weakly complemented), wenn er zu jedem Elementpaar u, v ein Element x mit $x \cap (u \cap v) = 0$, $x \cap (u \cup v) > 0$ enthält. Verf. nannte (dies. Zbl. 50, 259) einen Verband „semikomplementär“, wenn er zu jedem $x (\neq 1)$ ein „Semikomplement“ $y \neq 0$ mit $x \cap y = 0$ enthält. — Hier wird bewiesen: Ein Verband ist dann und nur dann schwach komplementär, wenn er zu jedem Paar $u < v$ ein x enthält, welches Semikomplement von u , aber nicht Semikomplement von v ist. Jeder schwach komplementäre Verband ist semikomplementär. Jeder relativ-komplementäre Verband ist schwach komplementär. Ein Beispiel zeigt, daß ein (sogar semimodularer) komplementärer Verband nicht schwach komplementär zu sein braucht. H. Gericke.

Bruck, R. H.: Analogues of the ring of rational integers. Proc. Amer. math. Soc. 6, 50—58 (1955).

Eine algebraische Struktur mit zwei als Addition und Multiplikation bezeichneten Verknüpfungen heißt Rechts-Neoring, wenn sie bezüglich der Addition eine Loop ist, das neutrale Element 0 dieser Loop die Gleichung $x0 = 0$ für alle x erfüllt und $(x + y)z = xz + yz$ für alle x, y, z gilt, und Neoring, wenn außerdem noch $x(y + z) = xy + xz$ für alle x, y, z gilt. Die Menge der Elemente a des Rechts-Neorings R , für die $a(xy) = (ax)y$ für alle x, y aus R gilt, ist wieder ein Rechts-Neoring; dieser wird als Links-Kern von R bezeichnet. Die von einem linksneutralen Element der Multiplikation erzeugte additive Loop (im Rechts-Neoring R) ist multiplikativ abgeschlossen und im Links-Kern von R enthalten. Bei einem Neoring R bilden die Elemente a mit $ax = xa$, $a(xy) = (ax)y = x(ay)$ für alle x, y aus R einen Neoring, das Zentrum von R . Ist nun in diesem Zentrum ein Unterneoring D enthalten, der nicht nur aus 0 besteht und bei dem kein Element $\neq 0$ in R Nullteiler ist, so kann man das übliche Verfahren zur Bildung des Quotientenringes auf das Paar R, D ausdehnen. — Die additiv geschriebene freie Loop mit einer Erzeugenden wird dadurch zu einem Rechts-Neoring A , daß als Produkt yx das Bild von y bei dem Loop-Endomorphismus eingeführt wird, der das erzeugende Element 1 in x überführt. In A folgt $x = y$ aus $xz = yz$, $z \neq 0$ sowohl wie aus $zx = zy$, $z \neq 0$. Die Multiplikation von A ist assoziativ und besitzt 1 als neutrales Element. Jeder Rechts-Neoring, dessen additive Loop von einem linksneutralen Element e der Multiplikation erzeugt wird, ist homomorphes Bild von A , und zwar gibt es genau einen Homomorphismus, bei dem 1 in e übergeht. G. Pickert.

Morrison, D. R.: Bi-regular rings and the ideal lattice isomorphisms. Proc. Amer. math. Soc. 6, 46—49 (1955).

Die Menge der Idempotenten eines Ringes R bilden mit einer Addition, bei der $(a - b)^2$ die Summe von a und b ist, und der Multiplikation von R einen Booleschen Ring R^0 . Ist jedes Element eines Ringes in einem Ideal enthalten, das ein Einselement besitzt, so sagt man, der Ring besitzt lokal Einselemente. Die Ideale von R , die lokal Einselemente besitzen, bilden nun einen zum Verband der Ideale von R^0 isomorphen Verband; bei dem Isomorphismus, der das Ideal I in I^0 überführt, entsprechen den Idealen mit Einselement von R die Hauptideale von R^0 . Wird jedes Hauptideal von R durch ein idempotentes Element aus dem Zentrum von R erzeugt, so heißt R biregulär. Mit dieser Eigenschaft ist jede der beiden Aussagen gleichbedeutend: Jedes Ideal von R besitzt lokal Einselemente; jedes Hauptideal von R besitzt ein Einselement. Das Zentrum eines biregulären Ringes R ist ebenfalls biregulär, und der Verband der Ideale des Zentrums ist dann isomorph zum Verband der Ideale von R . G. Pickert.

Villamayor, Orlando: Sur les équations et les systèmes linéaires dans les anneaux associatifs. C. r. Acad. Sci., Paris 240, 1681—1683 (1955).

Es seien A ein assoziativer Ring, $W = \{x_j\}$ eine Menge von Unbestimmten, β die Mächtigkeit von W und $\Gamma_\beta(A)$ der freie Polynomring in W über A . Dann besitzt $\Gamma_\beta(A)$ einen zu A isomorphen Unterring A' , und zu jeder Erweiterung $B \supset A$ gibt es bei geeignetem β einen Homomorphismus von $\Gamma_\beta(A)$ auf B . Ein Element $b \in B$ heißt algebraisch über A , wenn es mindestens einer Gleichung $f(x) = 0$ genügt, wobei $f(x)$ ein in einem gewissen Sinne nichttriviales freies Polynom in einer Unbestimmten ist; sonst heißt b transzendent über A . Ein Gleichungssystem $f_\alpha(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots) = 0$ ($f_\alpha \in \Gamma_\beta(A)$) heißt lösbar, wenn wenigstens eine Erweiterung $B \supset A$ existiert, die dem Gleichungssystem genügende Elemente $x_i = c_i \in B$ enthält. Unter den hier angedeuteten Voraussetzungen gilt folgendes Theorem: Dann und nur dann ist ein Gleichungssystem $f_\alpha(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots) = 0$ lösbar, wenn das durch $\{f_\alpha(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots)\}$ in $\Gamma_\beta(A)$ erzeugte Ideal L der Gleichung $A' \cap L = (0)$ genügt.

F. Kasch.

Andrunakievič, V. A.: Ringe mit Minimalbedingung für zweiseitige Ideale. Uspechi mat. Nauk 10, Nr. 2 (64), 208—209 (1955). [Russisch].

Andrunakievič, V. A.: Ringe mit minimalen zweiseitigen Idealen. Doklady Akad. Nauk SSSR 100, 405—408 (1955) [Russisch].

Sätze über direkte Zerlegungen von Ringen, die die Minimalbedingung oder ähnliche Bedingungen erfüllen. Als Hauptergebnis dürfte folgender Satz anzusehen sein: Dann und nur dann, wenn jedes Hauptideal des Ringes $\mathfrak{A}$ höchstens endlich viele minimale Ideale mit Einselement enthält, ist $\mathfrak{A}$ darstellbar als direkte Summe $\mathfrak{A} = E + E^*$, wobei E die Summe aller minimalen Ideale mit Einselement und E^* den Annulator von E bedeutet. Vgl. hierzu auch eine frühere Arbeit des Verf. (dies. Zbl. 56, 29).

R. Kochendörffer.

Nakayama, Tadasi: Generalized Galois theory for rings with minimum condition. II. Amer. J. Math. 77, 1—16 (1955).

Verf. verknüpft die Untersuchungen des ersten Teils (dies. Zbl. 42, 28) mit den Methoden und Ergebnissen seiner Galoisschen Theorie für einfache Ringe (dies. Zbl. 49, 22). Es ergibt sich eine neue Galois-Zuordnung, die sich mit der Zuordnung des ersten Teils überschneidet, die aber den Anteil der inneren Automorphismen stärker berücksichtigt. Wesentlich ist die Auszeichnung gewisser „regulärer“ Automorphismengruppen, auf deren Wiedergabe wegen der umfangreichen Voraussetzungen hier jedoch verzichtet werden muß. Ist R ein primärer Ring mit Einselement, der der Minimalbedingung für Links- und Rechtsideale genügt, und ist Φ eine reguläre Automorphismengruppe von R , so besteht zwischen den regulären Untergruppen von Φ einerseits und den Zwischenringen von R und dem Invarianzring von Φ andererseits eine eindeutige Galoissche Zuordnung. Im Anschluß an die Untersuchung gewisser Faktorengruppen von regulären Automorphismengruppen wird schließlich ein Satz über die Fortsetzbarkeit von Isomorphismen bestimmter Unterringe zu Automorphismen des Gesamtringes bewiesen.

H.-J. Kowalsky.

Tominaga, Hisao: A note on matrix rings. Math. J. Okayama Univ. 4, 189—191 (1955).

Verf. nennt einen Ring R mit Einselement schwach halb-primär, wenn der Restklassenring nach dem Jacobson'schen Radikal N vollständige direkte Summe von Matrixringen $(D_\sigma)_{n_\sigma}$ endlichen Grades n_σ über Schiefkörpern D_σ ist. Ist N überdies nilpotent, so heißt R halb-primär. Ein Ring S heißt m -irreduzibel, wenn S für kein $n > 1$ darstellbar ist als Ring aller quadratischen n -reihigen Matrizen über einem anderen Ring. Satz: Sei R halb-primär, N das Radikal, $R/N = \sum_\sigma (D_\sigma)_{n_\sigma}$,

D_σ Schiefkörper, und n der g. g. T. der n_σ . Es gilt: 1. R ist voller Matrixring n -ten Grades über einem m -irreduziblen Ring. 2. Ist $R = (R_1)_{n_1} = (R_2)_{n_2}$ mit m -irreduziblen Ringen R_1 und R_2 , so ist $n_1 = n_2$ und R_1 und R_2 sind isomorph.

H. Leptin.

Tominaga, Hisao: Some remarks on π -regular rings of bounded index. Math. J. Okayama Univ. 4, 135—141 (1955).

Der Verf. betrachtet Ringe, deren Elemente gewissen Regularitätsbedingungen genügen. Derartige Ringe sind von G. Azumaya eingeführt und untersucht worden [J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. I 13, 34—39 (1954)]. Ein Element a des Ringes A heißt π -regulär, wenn eine Potenz von a im v. Neumannschen Sinne regulär ist, d. h. wenn eine natürliche Zahl l und ein Element $x \in A$ existieren, so daß $a^l x a^l = a^l$ ist. A heißt π -regulär, wenn alle Elemente von A π -regulär sind. Der kleinste Exponent n eines nilpotenten Elementes $x \in A$, für den $x^n = 0$ ist, heißt Index von x . A hat beschränkten Index, wenn die Indices sämtlicher nilpotenten Elemente von A beschränkt sind. Der Verf. untersucht im wesentlichen, wie sich Regularitäts- und Index-Eigenschaften von A auf den Ring A_r aller r -reihigen quadratischen Matrizen mit Elementen aus A übertragen. Hauptergebnis: Ist A π -regulär und von beschränktem Index, so auch A_r . Hat A beschränkten Index, so ist die Teilmenge $\Pi(A)$ aller Elemente $a \in A$, welche ein π -reguläres zweiseitiges Ideal erzeugen, ein maximales π -reguläres zweiseitiges Ideal mit folgenden Eigenschaften: 1. $\Pi(A/\Pi(A)) = 0$. 2. Ist I ein zweiseitiges Ideal aus A so ist $\Pi(I) = \Pi(A) \cap I$. 3. Im Matrixring A_r ist $\Pi(A)_r$ als maximales stark π -reguläres Ideal eindeutig bestimmt.

H. Leptin.

Leptin, Horst: Linear kompakte Moduln und Ringe. Math. Z. 62, 241—267 (1955).

Im Mittelpunkt dieser Untersuchungen steht eine, in gewissem Sinne abschließende Abrundung der Wedderburnschen Struktursätze, die von jeder Kettenbedingung befreit werden. Die halbeinfachen Ringe, d. h. die Ringe mit verschwindendem Jacobsonischen Radikal, werden als gewisse Unterringe vollständiger direkter Summen aus vollen Endomorphismenringen von (nicht notwendig endlich-dimensionalen) Vektormoduln gekennzeichnet. Dabei erweisen sich auch hier beim Verzicht auf Endlichkeitsbedingungen als zweckmäßige Mittel zur Charakterisierung die topologischen Begriffsbildungen, die in diesem Fall durch die Theorie der linear kompakten Ringe geliefert werden. Verf. behandelt daher im ersten Teil der Arbeit zunächst die Eigenschaften linear kompakter Moduln und gewisser Endomorphismenringe. Im zweiten Teil werden diese Untersuchungen auf linear kompakte Ringe spezialisiert und führen dann gerade auf die erwähnten Verallgemeinerungen der Wedderburnschen Sätze. Im dritten Teil schließlich zeigt Verf., daß sich verschiedene Zerlegungssätze linear kompakter Ringe und Prüferscher Gruppen als Spezialfälle eines allgemeinen Zerlegungssatzes auffassen lassen. — $\mathcal{A}$ sei ein System von Linksoperatoren des topologischen Moduls $\mathfrak{M}$. Der Modul $\mathfrak{M}$ heißt linear topologisch bezüglich $\mathcal{A}$, wenn seine Topologie separiert ist und wenn das neutrale Element eine Umgebungsbasis aus $\mathcal{A}$ -invarianten Untermoduln besitzt. $\mathfrak{M}$ heißt weiter linear kompakt (bezüglich $\mathcal{A}$), wenn jeder Filter aus abgeschlossenen Restklassen nach $\mathcal{A}$ -invarianten Untermoduln von $\mathfrak{M}$ einen nicht-leeren Durchschnitt besitzt. („Filter“ wird vom Verf. stets im Sinne von „Filterbasis“, „Raster“ benutzt). Die abgeschlossenen Untermoduln und die Bilder stetiger $\mathcal{A}$ -Homomorphismen eines linear kompakten Moduls sind selbst linear kompakt. Ist F ein Filter, so bedeute $\downarrow F$ die Menge $\bigcap_{R \in F} \overline{R}$ der Berührungspunkte von F . Ist dann $\mathfrak{M}$ ein linear kompakter $\mathcal{A}$ -Modul, R ein Filter abgeschlossener Restklassen und φ ein stetiger $\mathcal{A}$ -Homomorphismus, so gilt $\downarrow \varphi(R) = \varphi(\downarrow R)$. Zu jeder Topologie τ , hinsichtlich derer der $\mathcal{A}$ -Modul $\mathfrak{M}$ linear kompakt ist, gibt es genau eine grösste linear kompakte Topologie τ^* mit $\tau \leq \tau^*$. Die Eigenschaften dieser grössten Topologie werden genauer untersucht. Jeder hinsichtlich einer grössten linear kompakten Topologie stetige Isomorphismus eines $\mathcal{A}$ -Moduls ist automatisch eine offene Abbildung. Die stetigen Homomorphismen besitzen diese Eigenschaft im allgemeinen nicht. Diese Tatsache führt zu der Definition: Ein linear kompakter $\mathcal{A}$ -Modul $\mathfrak{M}$ heißt im engeren Sinne linear kompakt, wenn jeder stetige $\mathcal{A}$ -Homomorphismus

von $\mathfrak{M}$ in einen linear topologischen A -Modul eine offene Abbildung ist. Diese im engeren Sinne linear kompakten Moduln werden auf mehrfache Art durch äquivalente Eigenschaften charakterisiert. Die Eigenschaft der linearen Kompaktheit im engeren Sinne überträgt sich auf Untermoduln, stetig homomorphe Bilder und direkte Summen. Ein Endomorphismus des A -Moduls $\mathfrak{M}$ heißt hyperstetig, wenn er jeden A -Untermodul von $\mathfrak{M}$ in sich abbildet. Ist Θ ein Bereich stetiger, mit den Elementen von A vertauschbarer Rechtsoperatoren von $\mathfrak{M}$, so bilden die hyperstetigen, mit Θ vertauschbaren Endomorphismen einen topologischen Ring $R(\Theta)$ mit Einselement, der A als Unterring enthält. Dieser Endomorphismenring wird weiter untersucht. Es zeigt sich: Ist $\mathfrak{M}$ (im engeren Sinne) linear kompakt, so gilt dies auch von dem Ring $R(\Theta)$, wobei $R(\Theta)$ als $R(\Theta)$ -Linksmodul aufzufassen ist. — Bei der im zweiten Teil behandelten Spezialisierung auf linear kompakte Ringe zeigt sich zunächst, daß das (Jacobson'sche) Radikal eines linear kompakten Ringes stets abgeschlossen ist. Eine geeignete Verallgemeinerung des Begriffs des nilpotenten Ideals gestattet es sodann, bekannte Sätze über das Radikal von der Minimalbedingung zu lösen und auf linear kompakte Ringe zu übertragen: Jedem abgeschlossenen (ein- oder zweiseitigen) Ideal A des Ringes wird eine transfinite Kette von Unteridealen A_μ folgendermaßen zugeordnet: $A_0 = A$, $A_{\mu+1} = \overline{A_\mu A}$, $A_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} A_\mu$ (λ Limeszahl). Für alle $\mu > \zeta$, wobei ζ nur von der Mächtigkeit des Ringes abhängt, ist dann $A_\mu = A_\zeta = A_*$. Das Ideal A heißt transfinit r -nilpotent, wenn $A_* = 0$ ist. In ähnlicher Weise werden die Begriffe „transfinit l -nilpotent“ und „transfinit nilpotent“ erklärt. Es zeigt sich: Das Radikal eines im engeren Sinne linear kompakten Ringes ist transfinit r -nilpotent. Jedes transfinit nilpotente Linksideal eines linear kompakten Ringes ist quasiregulär, also im Radikal enthalten. Die Abrundung der Wedderburnschen Struktursätze wird durch folgende Resultate des Verf. geliefert: Die vollständigen direkten Summen voller Endomorphismenringe von Vektormoduln sind genau die halbeinfachen linear kompakten Ringe. Jeder einfache linear kompakte Ring, der kein Radikalring ist, ist voller Endomorphismenring eines Vektormoduls über einem Schiefkörper. Ein Ring ist genau dann halbeinfach, wenn er in einer direkten Summe voller Endomorphismenringe dicht liegt. — Der zentrale Begriff des letzten Teiles ist der der hyperdirekten Zerlegung: $\mathfrak{M}$ sei ein vollständiger linear topologischer Modul, A ein Linksoperatorenbereich aus hyperstetigen Endomorphismen und Θ eine Menge von beliebigen, nicht notwendig stetigen Rechtsmultiplikatoren. Eine Zerlegung $\mathfrak{M} = \sum \mathfrak{M}_\mu$ von $\mathfrak{M}$ in eine direkte Tychonoff'sche Summe von gleichzeitig A - und Θ -zulässigen Untermoduln $\mathfrak{M}_\mu$ heißt (A, Θ) -hyperdirekt, wenn jeder A -Untermodul $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ direkte Summe der A -Untermoduln $\mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_\mu$ ist. Besitzt $\mathfrak{M}$ keine eigentliche hyperdirekte Zerlegung, so heißt $\mathfrak{M}$ massiv. Jede hyperdirekte Zerlegung in massive Bestandteile ist bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Über die Möglichkeit einer solchen feinsten Zerlegung wird ein allgemeiner Satz bewiesen, der bei Spezialisierung auf die oben erwähnten Zerlegungssätze führt.

H.-J. Kowalsky.

Goheen, Harry: The Wedderburn theorem. Canadian J. Math. 7, 60—62 (1955).

The main result that there are no finite skew fields is here deduced from two lemmas; the first is a result proved by H. Cartan and also by L. K. Hua, that any invariant division subring of a skew field is contained in its centre, and the second, for which a modification of a proof by H. J. Zassenhaus is given, says that a group G is Abelian if the elements of the normaliser $N(H)$ of any Abelian subgroup H of G permute with the elements of H . Then the main result is proved by using induction on the number of elements of the finite division ring.

V. S. Krishnan.

Jacob jr., Henry G.: Coherence invariant mappings on Kronecker products. Amer. J. Math. 77, 177—189 (1955).

The reviewer introduced the concept of coherence between a pair of $n \times m$

matrices ($n, m \geq 2$) over a division ring, and established a complete characterization of the one-to-one coherence preserving mappings. [J. Chinese math. Soc. 1, 109–163 (1951).] The author extends the result to the Kronecker product of two spaces of arbitrary dimensions (not necessarily finite) over a division ring. The methods used are analogous to those of the reviewer. The paper contains also an application of the determination of the isomorphisms between primitive rings with minimal ideals.

L. K. Hua.

San Soucie, R. L.: A characterization of a class of rings. Amer. J. Math. 77, 190–196 (1955).

Ein rechts alternativer Divisionsring kann nur dann nicht alternativ sein, wenn seine Charakteristik 2 ist. Die als Beispiele für diesen Fall von Bruck konstruierten nicht alternativen Ringe R nennt der Verf. Brucksche Ringe. Sie haben die Struktur $R = K + Ks$, wo K ein mit allen Elementen von R vertauschbarer Körper ist, der das Element s aus R nicht enthält. Die Multiplikation in R ist bestimmt durch

$$(k_1 + k_2 s)(k_3 + k_4 s) = k_1 k_3 + k_2 \cdot k_4 \vartheta + (k_1 k_4 + k_2 k_3) s,$$

wo ϑ ein additiver Endomorphismus von K ist. Verf. zeigt, daß die Bruckschen Ringe R unter allen nicht alternativen rechts alternativen Divisionsringen D der Charakteristik 2 dadurch charakterisiert sind, daß in ihnen für alle w, x, y, z aus D die Identität

$$(w x, y, z) = w(x, y, z) + (w, y, z) x + (w, x, (y, z))$$

gilt, wo (x, y) zu dem aus allen k mit $(k, D, D) = 0$ bestehenden „Linkskern“ von D gehört $[(x, y, z) = (x, y) z - x(y, z); (x, y) = x y - y x]$.

E. Trost.

San Soucie, R. L.: Right alternative division rings of characteristic two. Proc. Amer. math. Soc. 6, 291–296 (1955).

Ein Rechtsalternativkörper ist ein Divisionsring, in dem das Rechtsalternativgesetz $(x y) y = x y^2$ gilt. Skornjakow bewies (dies. Zbl. 42, 35), daß jeder Rechtsalternativkörper der Charakteristik $\neq 2$ ein Alternativkörper ist, d. h. daß auch $x^2 y = x(x y)$ gilt. Mit ähnlichen Methoden wie Skornjakow beweist Verf., daß ein Rechtsalternativkörper der Charakteristik 2 genau dann ein Alternativkörper ist, wenn (*) $w[(x y) x] = [(w x) y] x$ gilt. (Bei Charakteristik $\neq 2$ ist (*) immer erfüllt.) Insbesondere folgt (*) aus der Rechtskürzungsregel $(x y) y^{-1} = x$. Als geometrische Anwendung ergibt sich daraus, daß eine Ebene, in welcher der kleine Desarguessche Satz bezüglich zweier verschiedener Geraden gilt, entweder Desarguessch oder eine Ebene über einer Cayley-Dickson-Algebra ist. In einem Anhang bringt Verf. ein von R. H. Bruck herrührendes Beispiel eines Rechtsalternativkörpers der Charakteristik 2, der kein Alternativkörper ist.

J. André.

Stöcker, Claus: Beweis eines Hilfssatzes von Bruck und Kleinfeld unter Voraussetzung beliebiger Charakteristik. Arch. der Math. 6, 296–302 (1955).

R. H. Bruck und E. Kleinfeld (dies. Zbl. 44, 22) haben für den Fall einer Charakteristik $\neq 2$ bewiesen: Ist R ein alternativer nullteilerfreier Ring, der von drei Elementen x, y, z mit nicht verschwindendem Assoziator erzeugt wird, so genügt jedes dieser drei Elemente einer quadratischen Gleichung mit passenden Koeffizienten aus dem Zentrum von R ; der Koeffizient des quadratischen Gliedes ist dabei von Null verschieden. Verf. gibt unter Heranziehung von Identitäten, die in obiger Arbeit abgeleitet wurden, einen neuen Beweis dieses Satzes, der bei beliebiger Charakteristik gültig ist.

R. Moufang.

Brown, W. P.: Generalized matrix algebras. Canadian J. Math. 7, 188–190 (1955).

Es sei $\mathfrak{A}$ eine verallgemeinerte Matrizenalgebra mit der Basis $\{e_{ij}\}$ ($1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n$) über einem Körper K und der Produkttafel $e_{ij} e_{pq} = \Phi_{jp} e_{iq}$, ($\Phi_{jp} \in K$). Dann existiert eine Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in die direkte Modulsumme $\mathfrak{A} = e \mathfrak{A} e + \text{rad } \mathfrak{A}$, wo $e \mathfrak{A} e$ einfach ist, mit e als Eins, und $\text{rad } \mathfrak{A}$ ($= \mathfrak{N}$, $e \mathfrak{N} e = 0$) das Radikal von $\mathfrak{A}$

bezeichnet, das genau dann Null ist, wenn $\mathfrak{A}$ eine Eins 1 besitzt. Denn aus $\mathfrak{A} \ni 1 = f + g$, ($f \in e\mathfrak{A}e$, $g \in \mathfrak{N}$) folgt $e = f + ege = f$, $g = 1 - e = (1 - e)^2 = g^2 = \dots = g^k = 0$, $\mathfrak{N} = e\mathfrak{N}e = 0$.

H.-J. Hoehnke.

Schafer, R. D.: Noncommutative Jordan algebras of characteristic 0. Proc. Amer. math. Soc. 6, 472—475 (1955).

A noncommutative Jordan algebra (J. a.) is defined as a linear algebra satisfying the identities (1) $(x^2a)x = x^2(ax)$ and (2) $(xa)x = x(ax)$. An algebra satisfying (2) only is called flexible and an algebra A of characteristic $\neq 2$ is called Jordan-admissible if the algebra A^+ defined on the underlying space of A by the multiplication $a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba)$ is a J. a. (necessarily commutative). The author is concerned with giving a structure theory of noncommutative J. a.s of characteristic 0, by means of Albert's method of trace-admissibility (this Zbl. 33, 154). The basic fact proved is that such algebras are trace-admissible, and from this it follows (Albert, this Zbl. 33, 154) that for any noncommutative J. a. A of characteristic zero, 1. the radical N (maximal nilideal) of A coincides with the radical of the J. a. A^+ , and A/N is semisimple (has zero radical), 2. if A is semisimple, it is uniquely expressible as a direct sum of simple ideals (simple = has no non-trivial ideal and is not a nilalgebra), 3. if A is simple, it is i) a simple commutative J. a. or ii) a simple flexible algebra of degree 2, or iii) a simple quasiassoative algebra.

P. M. Cohn.

Gluškov, V. M.: Treue Dreiecksdarstellungen der Lieschen Z -Algebren. Doklady Akad. Nauk SSSR 100, 617—620 (1955) [Russisch].

The author generalises Birkhoff's representation of nilpotent Lie algebras (this Zbl. 16, 244) by forming the analogue of a central system in a group [cf. Kuroš, Theory of groups, 2nd ed., Moscow 1953 (Russian)]. A system $\mathfrak{M} = \{A_\alpha\}$ of ideals in a Lie algebra A is called a central system if it is totally ordered, closed under unions and intersections, contains 0 and A , and for every $a \neq 0$ in A , if A_α is the greatest member of $\mathfrak{M}$ not containing a , then $[a, A] \subseteq A_\alpha$. — A Lie algebra with a central system is called a Lie Z -algebra. E. g. a locally nilpotent Lie algebra is a Z -algebra. If R is any totally ordered set, then a proper triangular R -matrix over a field F is a set of elements $a_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta \in R$) from F , such that for any fixed $\beta \in R$, $a_{\alpha\beta} \neq 0$ for only a finite number of α , all satisfying $\alpha < \beta$. — Using a suitably chosen canonical basis for A , the author proves: Any Lie Z -algebra A over an arbitrary field F has a faithful representation by proper triangular R -matrices over F , where R is a certain ordered set defined in terms of a central system of A .

P. M. Cohn.

Jacobson, N.: Commutative restricted Lie algebras. Proc. Amer. math. Soc. 6, 476—481 (1955).

A Lie algebra L is called commutative if $[a, b] = 0$ for all a and b in L . Thus it is simply a vector space; but if in addition L is of characteristic p and restricted (Jacobson, this Zbl. 25, 303), it has an operation $a \rightarrow a^p$, satisfying $(a + b)^p = a^p + b^p$, $(\alpha a)^p = \alpha^p a^p$, which is therefore a semi-linear transformation relative to the isomorphism $\alpha \rightarrow \alpha^p$ of the underlying field Φ . The author studies commutative restricted Lie algebras L of finite dimension over a field Φ which is perfect, so that the mapping $\alpha \rightarrow \alpha^p$ is an automorphism of Φ . An element $a \in L$ is called nilpotent, if $a^{p^k} = 0$ for some $k \geq 0$; L is called semisimple if it has no nilpotent element $\neq 0$, and it is called cyclic, if it has a basis of the form $(a, a^p, \dots, a^{p^{n-1}})$. If Φ is infinite as well as perfect and L is semisimple, then L is cyclic. Further, if Φ is algebraically closed and L is again semisimple then it has a basis $(h_1, \dots, h_n)$ such that $h_i^p = h_i$ ($i = 1, \dots, n$). — A result on semi-linear transformations which is proved, yields as a special case the following: If L is a commutative

restricted Lie algebra of finite dimension over a perfect field Φ , then the ring of endomorphisms of L over Φ has a finite number of elements. *P. M. Cohn.*

Herstein, I. N.: On the Lie and Jordan rings of a simple associative ring. *Amer. J. Math.* 77, 279—285 (1955).

Neben Lieschen Ringen, die mittels der Operation $[a, b] = ab - ba$ aus einem assoziativen Ring A gewonnen werden, betrachtet Verf. sog. Jordansche Ringe. Diese entstehen, indem man die Multiplikation in A durch die Verknüpfung $a \circ b = ab + ba$ ersetzt. Untersucht wird hauptsächlich die Frage, wie sich die Einfachheit von A als assoziativer Ring auf die Ideale der Lieschen und Jordanschen Ringe auswirkt. *R. Kochendörffer.*

Gurevič, G. B.: Liesche Standard-Algebren. *Uspechi mat. Nauk* 10, Nr. 1 (63), 204—205 (1955) [Russisch].

Crampton, T. H. M. and G. Whaples: Additive polynomials. II. *Trans. Amer. math. Soc.* 78, 239—252 (1955).

This paper is a continuation of G. Whaples' recent study „Additive polynomials“ (a. p.) (this Zbl. 55, 26) over a field k of characteristic $p \neq 0$; $f(x) \in k[x]$ is an a. p. if $f(x+y) = f(x) + f(y)$, and must have the form $\sum_{r \geq 0} a_r x^{p^r}$. For

any $u(x) \in k[x]$ the authors obtain all decompositions of the five types $u(x) =$ (1) $f_1(v(x))$, (2) $f_1(v(x)) + f_2(x)$, (3) $v(f_1(x))$, (4) $v(f_1(x)) + f_2(x)$, and (5) $f_1(v(f_2(x))) + f_3(x)$, where $v(x) \in k[x]$ and the $f_i(x)$ are a. p. in $k[x]$. Their main result, proved for infinite, perfect (in German „vollkommen“) k , is that there exists a maximal decomposition of each type from which each other decomposition of the same type is deducible. For (3) and (4) the proofs depend on the connection established in Whaples' first paper on a. p. between the a. p. in $k[x]$ and the additive subgroups of an algebraic closure of k . The study of (1) and (2) utilises a subtle property of the ring S of k -linear mappings S of $k[x]$ into itself of the form $Sg(x) = \sum_r g(h_r(x))$,

where $g(x)$ is generic in $k[x]$ and the $h_r(x) \in k[x]$. If L denotes the subring of S of mappings with linear $h_r(x)$ the relevant property (Theorem 1(B)) is „... let T be a finite set of integers prime to p . For $n \in T$ there is an L_n in L with $L_n x^t = 0$ for $t \in T - \{n\}$, and $L_n x^n = x^n$ “. $u(x)$ is now expressed in the form $\sum_t f_t(x^t)$, where

$(t, p) = 1$ and the $f_t(x)$ are a. p. in $k[x]$; then, for each t , $L_t \in L$ for which $L_t u(x) = f_t(x)$, and so the decompositions (1) and (2) may be deduced from the general decomposition theory of a. p. worked out by O. Ore (this Zbl. 9, 100). The maximal decompositions of each of the five types are characterised by criteria based both on Ore's theory, and also on the concepts of Whaples' previous paper. The decompositions (5) depend on (2) and (4), and the paper concludes with an example disproving the existence of unique maximal decompositions of the form $u(x) = f_1(v(f_2(x)))$. *M. C. R. Butler.*

Boughon, Pierre: Formule de Taylor pour un polynome à plusieurs indéterminées sur un anneau de caractéristique $p > 0$. Application à la détermination des surfaces ayant avec leur plan tangent générique un contact d'ordre > 2 . *C. r. Acad. Sci., Paris* 240, 720—722 (1955).

Soit A un anneau commutatif de caractéristique $p > 0$; l'A. détermine tous les polynômes $f \in A[X_1, X_2, \dots, X_n]$ tels que, dans $f(X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n)$, les termes de degré total 2 par rapport aux Y_i soient nuls. Si $p > 2$, ce sont les polynômes $\varphi_0 + \sum_{i=1}^n \varphi_i X_i$, où les φ_i appartiennent à $A[X_1^p, \dots, X_n^p]$; si $p = 2$, ils ont la même forme, les φ_i appartenant cette fois à $A[X_1^4, \dots, X_n^4]$. *J. Dieudonné.*

Beyer, Gudrun: Über die Einbettung zyklischer Körper in metazyklische. *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* 19, 127—133 (1955).

Es sei Ω/Ω_0 ein galoisscher Körper mit der endlichen Galoisgruppe g , ferner