Werk

Titel: Funktionalanalysis. Abstrakte Räume

Ort: Berlin

Jahr: 1961

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0061|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Keck, W. G. and W. F. Colby: The depth dependence of earth conductivity upon surface potential data. J. appl. Phys. **13**, 179—188 (1942).

Traupel, W.: Calculation of potential flow through blade grids. Sulzer tech. Rev. **1945**, Nr. 1, 25—42 (1945).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Katětov, Miroslav: Zur Theorie der topologischen Vektorräume. Acad. Tchèque Sci., Bull. internat., Cl. Sci. math. natur. Méd. **44**, 599—605 (1943).

Katětov, Miroslav: Zur Theorie der topologischen Vektorräume. Rozpravy II. Třidy České Akad. **53**, Nr. 46, 12 p. (1943) [Tschechisch].

Katětov, Miroslav: Über normierte Vektorräume. Rozpravy II. Třidy České Akad. **53**, Nr. 45, 27 p. (1943) [Tschechisch].

Katětov, Miroslav: Über normierte Vektorräume. Acad. Tchèque Sci., Bull. internat., Cl. Sci. math. natur. Méd. **44**, 594—598 (1943).

L'A. expose d'une manière nouvelle à la date de l'apparition de son ouvrage, quelques questions de la théorie des espaces vectoriels normés, en apportant aussi des résultats nouveaux. En outre, il réconstitue et élargit la théorie de F. Hausdorff des équations linéaires normalement résolubles, en utilisant les espaces quotients et les duals. La théorie de la dualité est établie dans le cadre plus général des espaces localement convexes, dont il donne une étude analogue à celle plus connue de J. Dieudonné. *G. Marinescu.*

Monna, A. F.: Sur les espaces linéaires normés. I, II, III, IV. Nederl. Akad. Wet., Proc. **49**, 1045—1055, 1056—1062, 1134—1141, 1142—1152 = Indagationes math. **8**, 643—653, 654—660, 682—689, 690—700 (1946).

Verf. behandelt normierte Vektorräume E über einem vollständigen, nichttrivial und nicht-archimedisch bewerteten Körper K. Die Norm von E genügt dabei der scharfen Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leqq \max(\|x\|, \|y\|)$, und weitgehend wird vorausgesetzt, daß die reellen Werte der Norm (außer 0) keinen Häufungspunkt besitzen. Unter diesen Voraussetzungen werden untersucht: Lokale Kompaktheit und ihr Zusammenhang mit endlicher Dimension, Reihenentwicklung der Elemente in dem Fall, daß E vollständig ist, ein Analogon zum Satz von Hahn-Banach und Projektionen in abgeschlossene Teilräume V des vollständigen Raumes E. Ein stetiger linearer Operator P heißt dabei eine Projektion von E in V, wenn für alle $x \in E$ gilt: $Px \in V$ und $\|x - Px\| \leqq \|x - y\|$ für alle $y \in V$. *H.-J. Kowalsky.*

Sirvint, U.: Convex sets and linear functionals in an abstract space. I: Convex sets. II: Linear functionals. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **6**, 143—170, 189—226 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.]

Démonstrations des résultats annoncés antérieurement (ce Zbl. **22**, 411; **23**, 130). *G. Marinescu.*

Bohnenblust, H. F. and S. Kakutani: Concrete representation of (*M*)-spaces. Ann. of Math., II. Ser. **42**, 1025—1028 (1941).

Dans les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace vectoriel normé réticulé soit isomorphe à un sous-espace de $C(\Omega)$, on peut remplacer la condition $0 \leqq x \;\&\; 0 \leqq y \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$ par la condition plus faible $x \wedge y = 0 \Rightarrow \|x \vee y\| = \max(\|x\|, \|y\|)$. *A. Revuz.*

Mackey, G. W.: Isomorphisms of normed linear spaces. Ann. of Math., II. Ser. **43**, 244—260 (1942).

Mackey, George W.: On infinite dimensional linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **29**, 216—221 (1943).

Mackey, George W.: On convex topological linear spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA **29**, 315—319 (1943); **Erratum** ibid. **30**, 24 (1944).

Mackey, George W.: On infinite-dimensional linear spaces. Trans. Amer. math. Soc. **57**, 155—207 (1945).

Mackey, George W.: On convex topological linear spaces. Trans. Amer. math. Soc. **60**, 519—537 (1946).

Les travaux de l'A. sur la dualité des espaces localement convexes ont exercé une grande influence sur le développement ultérieur de la théorie. Parmi les résultats les plus importants, citons: la caractérisation des topologies localement convexes compatibles avec une dualité et l'introduction de la plus fine de ces topologies (la „topologie de Mackey" $\tau(E, E')$, définie comme topologie de la convergence uniforme sur les parties convexes et faiblement compactes de E'); le théorème affirmant que tout ensemble faiblement borné dans E est borné pour toute topologie compatible avec la dualité entre E et E'; l'introduction et les propriétés essentielles des espaces bornologiques; le fait que les espaces localement convexes métrisables satisfont à la „première condition de dénombrabilité de Mackey" [si (A_n) est une suite d'ensembles bornés, il existe une suite de scalaires (λ_n) telle que la réunion des $\lambda_n A_n$ soit bornée]; la notion de convergence d'une suite (x_n) vers x „au sens de Mackey" [il existe une suite (μ_n) tendant vers $+\infty$, telle que $\mu_n(x - x_n)$ reste borné]. Le premier travail cité ci-dessus caractérise les couples d'espaces normés X_1, X_2 tels que leurs groupes d'automorphismes soient isomorphes. Les méthodes introduites par Mackey pour résoudre ce problème (notamment le concept de „couple minimal" d'involutions extrémales) se sont montrées depuis extrêmement fécondes dans toutes les recherches sur les groupes d'automorphismes des groupes classiques (voir p. ex. J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, ce Zbl. **67**, 261). *J. Dieudonné.*

Myers, S. B.: Arcs and geodesics in metric spaces. Trans. Amer. math. Soc. **57**, 217—227 (1945).

Braconnier, Jean et Jean Colmez: Sur les groupes d'homéomorphismes d'un espace complètement régulier. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 230—232 (1946).

Myers, S. B.: Equicontinuous sets of mappings. Ann. of Math., II. Ser. **47**, 496—502 (1946).

Arens, Richard: Topologies for homeomorphism groups. Amer. J. Math. **68**, 593—610 (1946).

Les travaux ci-dessus s'occupent de topologie sur des ensembles de fonctions, et de critères permettant d'affirmer que, pour certaines topologies, un tel ensemble est compact; en d'autres termes, il s'agit de généralisations diverses du théorème classique d'Ascoli, et, comme dans ce dernier, la notion d'ensemble équicontinu joue un rôle prépondérant. Les trois derniers travaux cités appliquent ces conditions à la recherche de critères pour qu'un groupe d'homéomorphismes soit compact ou localement compact (ou puisse être plongé dans un groupe compact ou localement compact d'homéomorphismes) lorsqu'on met diverses topologies sur l'ensemble de tous les homéomorphismes de l'espace considéré. Le premier article de Myers applique la notion d'équicontinuité aux propriétés de certains espaces métriques: un tel espace E est dit géodésique si deux points peuvent être joints par un arc rectifiable et si la distance de x et y est la borne inférieure des longueurs des arcs qui les joignent. L'A. démontre alors que si E est localement compact, deux points quelconques peuvent être joints par un arc de longueur égale à leur distance, et que l'espace est „convexe" au sens de Menger (quels que soient x, y distincts, il existe au moins un z distinct de x et de y tel que $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$). *J. Dieudonné.*

Savage, L. J.: The application of vectorial methods to metric geometry. Duke math. J. **13**, 521—528 (1946).

L'article est d'abord consacré à quelques propositions sur les espaces vectoriels V munis d'un produit scalaire (v_1, v_2) non nécessairement positivement défini,

généralisant sous forme géométrique les résultats classiques sur la réduction d'une forme quadratique. Soit $A(V)$ l'ensemble des éléments de V qui sont orthogonaux à tout élément de V; V est dit non dégénéré si $A(V) = \{0\}$; dans le cas général, le quotient V^* de V par $A(V)$, appelé espace réduit, est non dégénéré. L'auteur appelle „distance space" M un ensemble d'éléments $p, q, r, s, \ldots$ tel que soit définie sur les couples (p, q) une fonction à valeurs réelles $\sigma(p, q)$ satisfaisant aux conditions $\sigma(p, p) = 0$, $\sigma(p, q) = \sigma(q, p)$. Un espace métrique, où $\varrho(p, q)$ représente la distance de p à q, est à considérer comme „distance space" en posant $\sigma(p, q) = \varrho^2(p, q)$. Supposons que g soit une isométrie d'un espace M dans un espace V, c'est-à-dire que $\sigma(p, q) = (g(p) - g(q), g(p) - g(q))$; à tout couple ordonné (p, q) de points de M, nous faisons correspondre $\overrightarrow{pq} = g(p) - g(q)$, alors pour deux couples (p, q) et (r, s)

$$(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{rs}) = \tfrac{1}{2}\{\sigma(p, s) + \sigma(q, r) - \sigma(p, s) - \sigma(q, s)\}. \tag{E}$$

Le résultat central de l'article s'énonce ainsi. Désignons par $W(M)$ l'espace linéaire sous-tendu par $g(M)$, par $V(M)$ l'espace réduit correspondant; $V(M)$ est défini à une isomorphie près par la donnée de M; un modèle abstrait en est le suivant. A tout couple (p, q) de M nous attribuons un élément $\overrightarrow{pq}$ et nous considérons comme vecteurs les combinaisons linéaires à coefficients réels des vecteurs $\overrightarrow{pq}$, $x = \sum \alpha_{pq} \cdot \overrightarrow{pq}$; le produit scalaire de $\overrightarrow{pq}$ par $\overrightarrow{rs}$ est défini par (E) et le produit scalaire de deux vecteurs x et y par prolongement linéaire. L'espace réduit de l'espace ainsi obtenu est $V(M)$ à une isomorphie près. La correspondance entre (pq) et $\overrightarrow{pq}$ satisfait à $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$. Les propriétés d'immersion de M dans un espace V peuvent alors s'exprimer au moyen des propriétés de $V(M)$. Ainsi une condition nécessaire et suffisante pour que M puisse être plongé dans un espace hilbertien est que $V(M)$ soit défini positif, d'où découle aisément le critère de Menger: un espace M est plongeable dans un espace hilbertien dans le cas et seulement dans le cas où tout système fini de ses points est euclidien. Le critère de W. A. Wilson [Amer. J. Math. 57, 322—326 (1935); v. ce Zbl. 11, 171] est généralisé. *C. Pauc* (Math. Rev. 8, 484).

(1) **Maximoff, Isaiah: Foundation of transfinite analysis.** Tôhoku math. J. 48, 292—306 (1941).

(2) **Maximoff, Isaiah: On a problem of the transfinite analysis.** Tôhoku math. J. 48, 307—311 (1941).

Verf. untersucht verschiedene Ordnungstopologien und begründet darauf die Analysis in bezug auf die transfiniten linearen Räume $I_x^{(i)}$, bestehend aus den Punkten $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_\alpha, \ldots\}$, $(0 \leqq \alpha < \Omega_i)$, wobei $1 \leqq x_\alpha < \Omega_i$ und wobei Ω_i die Anfangszahl von der Mächtigkeit $\aleph_i$ bezeichnet. In (2) wird u. a. eine hypermeßbare Funktion eingeführt und bewiesen, daß Mengen der Mächtigkeiten $2^{\aleph_i} \neq \aleph_{i+k}$ $(0 \leqq i < \Omega_0,\ 1 \leqq k < \Omega_0)$ nicht durch hypermeßbare Funktionen dargestellt werden können. *H. Terasaka.*

Pinsker, A.: On normed *K*-spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **33**, 12—14 (1941).

Des résultats sur la structure des espace de Kantorovič, parus ulérieurement avec démonstrations, dans le livre de L. V. Kantorovič, B. Z. Vulich et A. G. Pinsker: Analyse fonctionnelle dans les espaces semi-ordonnés, Moscou (voir ce Zbl. 37, 72). *G. Marinescu.*

9103 **Pinsker, A. G.: Universal *K*-spaces.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 8—11 (1945).

Pinsker, A. G.: On separable *K*-spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 318—319 (1945).

Pinsker, A. G.: On the decomposition of K-spaces into elementary spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 168—171 (1945).

Arbitrary Kantorovič spaces are represented as direct sums of spaces each generated by an element x_ξ, the set $\{x_\xi\}$ consisting of mutually disjoint non-zero elements. The decompositions of arbitrary Kantorovič space into spaces called by the author elementary are also discussed. *A. Alexiewicz.*

Judin, A.: Sur le complètement des ensembles semi-ordonnés. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski **83** (Ser. mat. Nauk **12**), 57—61 (1941) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

On considère des espaces satisfaisant aux conditions I—III de Kantorovič ($x > 0 \to x \neq 0$; $x_1 > 0$, $x_2 > 0 \to x + y > 0$; pour tout x il existe y tel que $y - x > 0$) et aussi à la condition III_1: pour tout x, il existe sup $(0, x)$. On montre qu'un tel espace peut être complété jusqu'à un espace satisfaisant aussi à la condition V: „pour tout ensemble majoré X il existe sup X", si et seulement si aucun élément négatif n'est limite d'éléments positifs. *G. Marinescu.*

Vulich, B.: Sur la représentation analytique d'opérations linéaires multiplicatives. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **41**, 187—190 (1943).

In an earlier paper (this Zbl. **60**, 279) the author has defined multiplicative operations in Kantorovič spaces. In this paper a representation of such operations is obtained for a large class of spaces including the most important cases. *A. Alexiewicz.*

Vulikh, B.: Sur l'intégrale de Stieltjes de fonctions, dont les valeurs appartiennent à un espace semi-ordonné. Leningradsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski **83** (Ser. mat. Nauk **12**), 3—29 (1941) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

En utilisant le produit définit par lui, l'A. construit une intégrale Riemann-Stieltjes $\int_a^b x(t)\,dy(t)$ pour les fonctions à valeurs dans un espace Z de Kantorovič à élément unité. Ensuite il considère l'espace C_Z des fonctions uniformément continues, définies sur $[a, b]$ et prenant leurs valeurs dans Z, comme un module sur Z avec uné norme abstraite dont les valeurs appartiennent aussi à Z. Les applications linéaires et continues de C_Z dans Z ont la forme $U(x) = \int_a^b x(t)\,dy(t)$, où $y(t)$ est une fonction à variation bornée dont les valeurs appartiennent à Z. *G. Marinescu.*

Vulich, B.: Sur quelques opérations non-linéaires dans les espaces semi-ordonnés linéaires. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 475—478 (1946).

Let X, Y be two linear spaces satisfying the axioms I—V of Kantorovič, both having the unit element. There are considered operators U from a set $X_0 \subset X$ (composed of bounded elements) to Y satisfying the condition $U(x_1 + x_2) = U(x_1) + U(x_2)$, $|U(x_1)| \wedge |U(x_2)| = 0$ if $|x_1| \wedge |x_2| = 0$, moreover, some kinds of continuity are impose dupon U. Such operators may be represented by means of the Radon integral: $U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\lambda)\,d\varphi(e_\lambda)\,x$ where y is an uniformly continuous function from X to Y, φ is a function from the set of the quasi-units of X into that of the quasi-units of Y, satisfying the condition $\varphi(e_1 + e_2) = \varphi(e_1) + \varphi(e_2)$ if $|e_1| \wedge |e_2| = 0$, and e_λ is the characteristic element of $x - \lambda \cdot 1$. Fréchet differentiability and approximation by abstract polynomials to such operations are discussed. No proofs. *A. Alexiewicz.*

Titov, N. S.: On different kinds of convergence of elements and linear operators in Banach spaces. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 569—572 (1946).

L'A. généralise la continuité faible en considérant, au lieu des fonctionnelles linéaires, les opérateurs linéaires à valeurs dans un autre espace de Banach. On

démontre que la sphère unité dans $\mathfrak{L}(E, F)$ est faiblement compacte si E et F^* sont séparables. *G. Marinescu.*

Šmulian, V.: Sur les ensembles compacts et faiblement compacts dans l'espace du type (B). Mat. Sbornik, n. Ser. **12 (54)**, 91—98 (1943) [mit russ. Zusammenfassg.].

Soit S un ensemble borné dans un espace X de Banach et soit S un ensembe borné dans le dual X' de X. L'ensemble S [S'] est dit compact par rapport à S' [S] lorsque toute suite x_n [x'_n] d'éléments de S [S'] contient une suite partielle x_{n_i} [x'_{n_i}] telle que x' (x_{n_i}) [$x'_{n_i}(x)$] converge uniformément sur S' [S]. Si l'on remplace dans cette définition la convergence uniforme par la convergence quasi-uniforme, on obtient la définition de compacité faible d'un ensemble par rapport à l'autre. Théorème: l'ensemble S est compact [faiblement compact] par rapport à S' si et seulement si S' en est par rapport à S. L'A. présente plusieurs applications de ce théorème; p. e. le théorème deBanach sur la continuité complète de l'opérateur conjugué à l'opérateur complètement continu en découle immédiatement. *A. Alexiewicz.*

Šmulian, V.: On some problems of the functional analysis. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **38**, 157—159 (1943).

Let E be a Banach space and $\overline{E}$ its adjoint. The author proves that the following two statements are not valid in general. (A) Let $\mathfrak{M}$ be a bounded set in $\overline{E}$ closed in the weak* topology and let F be a linear functional on $\overline{E}$ continuous on $\mathfrak{M}$ for this topology; then for every $\varepsilon > 0$ there is an element $x_\varepsilon \in E$ such that $|F(f) - f(x_\varepsilon)| < \varepsilon$ for every $f \in \mathfrak{M}$. (B) Let $C(Q)$ be the space of continuous functions over a Hausdorff space Q; if a directed system x_α of bounded in norm elements of $C(Q)$ converges pointwise to 0, then x_α converges weakly to 0. The conditions for weak convergene of the x_α are discussed. *A. Alexiewicz.*

Day, Mahlon M.: A property of Banach spaces. Duke math. J. **8**, 763—770 (1941).

Criteria for reflexivity of Banach spaces in terms of weak-completeness are given. Let $\Pi = \{\pi\}$ be a directed system. A Banach space X is said to be weakly complete with respect to Π if for every directed sequence x_π of its elements $\sup_\pi \|x_\pi\| < \infty$ and existence of $\lim_\pi \xi(x_\pi)$ for every ξ in the conjugate space implies existence of x such that $\lim_\pi \xi(x_\pi) = \xi(x)$ for every ξ. Let Γ denote the system of all weak* neighbourhoods of 0 in the space biconjugate to X, ordered dually to the inclusion relation. Then for reflexivity of X weak completeness with respect to every directed system Π is necessary, and with respect to Γ is sufficient. Then criteria for reflexivity for $\aleph_\alpha$-separable spaces and all $\aleph_\alpha$-separable subspaces of X are given. *A. Alexiewicz*

(1) **Grinblum, M. M.: Biorthogonal systems in Banach space.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **47**, 75—78 (1945).

(2) **Grunblum, M. M.: Concerning my note on „Biorthogonal systems in Banach space".** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 387 (1946).

A system $\{x_i\}$ of elements of a Banach space is called minimal if no $\{x_n\}$ lies in the closed linear span L_n of the remaining elements of this system; if $\inf_n \operatorname{dist}(x_n, L_n) > 0$ the system is called strictly minimal. For every minimal system there exist bounded linear functionals f_n forming with x_n a biorthogonal sequence; if x_n is complete and $\sup_n(\|x_n\| + \|f_n\|) < \infty$, the system $\{x_n\}$ is called regular. For every regular system there exists a sequence $\{\varepsilon_n\}$ of positive numbers such that the system $x_n + y_n$ is regular whenever $\|y_n\| \leqq \varepsilon_n$. A topology for complete and strictly minimal systems is introduced and it is shown that every

system sufficiently close to a base is a base. In (2) the author aknowledges some priorities to other authors. *A. Alexiewicz.*

Markouchevitch, A.: Sur les bases (au sens large) dans les espaces linéaires. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **41**, 227—229 (1943).

If X is an F-space (in the sense of Banach) the set $\{e_\alpha\}_{\alpha \in A}$ of its elements is called strongly linearly independent (s. l. i.) if no x_α lies in the closed linear span of $\{e_\beta\}_{\beta \in A - \{\alpha\}}$ (three equivalent definitions are given). For every s. l. i. set $\{e_\alpha\}$ there exist continuous linear functionals f_α such that $\{e_\alpha, f_\alpha\}$ forms a biorthogonal system (reviewers remark: this is not valid in all F-spaces). The system $\{e_\alpha\}$ forms a base in the wide sense if it is fundamental, s. l. i., and $f_\alpha(x) = 0$ $(\alpha \in A)$ implies $x = 0$. Every separable Banach space has a countable base in the wide sense. Other properties of bases are considered too. *A. Alexiewicz.*

Marcouchevitch, A.: Sur une généralisation d'un théorème de Menchoff. Mat. Sbornik, n. Ser. **15 (57)**, 433—436 (1944) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

In a Banach space X let u_n be a sequence of elements independent linearly in the following (strong) sense: if $\sum_{k=1}^{m_n} a_{nk} u_k \to 0$ as $n \to \infty$, then $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0$ for $k = 1, 2, \ldots$. In this (and only in this case) there exists a sequence of bounded linear functionals f_n such that $\{u_n, f_n\}$ form a biorthogonal system. The author shows that every element in the closed linear hull U of the elements u_n is the sum of two elements y_1, y_2 of U whose biorthogonal developments have subsequences of partial sums convergent to y_1 and y_2 respectively. *A. Alexiewicz.*

Marcouchewitch, A.: Sur les bases dans l'espace des fonctions analytiques. Mat. Sbornik, n. Ser. **17 (59)**, 211—252 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Let E_R denote the space of functions $f = f(z)$ holomorphic in the circle $|z| < R$; with seminorms $|f|_n = \sup_{|z| \leqq r_n} |f(z)|$ $(0 < r_n \nearrow R)$ E_R becomes a B_0-space. Let E'_R be the conjugate space. The paper deals with the developments in this space, in particular the following properties are investigated: (a) the system $\{f_n\}$ of elements of E_R is "complete" (i. e. its closed linear hull contains E_R), (b) there exists a sequence L_n of elements of E'_R forming with the f_n's a biorthogonal system, (c): (b) is satisfied and the corresponding biorthogonal developments have the unicity property, (d): (b) is satisfied and orthogonal development of every f converges to f. Let the functions $f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} z^\nu \in E_R$ satisfy (a), let $z^n = \lim_{\nu\to\infty} \sum_{\lambda=0}^{\nu} \alpha_{n\nu\lambda} f_\lambda(z)$, then $\lim_{\nu\to\infty} \alpha_{n\nu\lambda} = \alpha_{n\lambda}$ exists. The system $\{f_n\}$ satisfies (b) if and only if $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\alpha_{n\lambda}|} < R$ for $\lambda = 0, 1, \ldots$ and $\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} \alpha_{m\nu} = \delta_{nm}$. The following theorem leads to usefull criteria for (a) in particular cases. Let the function $f(z, \zeta)$ be holomorphic for $|z| < R$, $|\zeta| < P$ and let the functions $f\Lambda(z) = \Lambda f(z, .)$ $\Lambda \in E'_P$ form a dense set in E_R. Then the functions $f_n(z) = \Lambda_n f(z, .)$, $\Lambda_n \in E'_P$ have the property (a) if and only if $\psi(\zeta) = L f(., \zeta)$, $L \in E'_R$ and $\Lambda_n \psi = 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ implies $\psi = 0$. If (b) satisfied, represent $L_n(f)$ as $\frac{1}{2\pi i} \oint \omega_n(\zeta) f(\zeta)\, d\zeta$. Then it is necessary for (c) that the system $\{\omega_n\}$ have the property (a). For the property (d) is necessary that $\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(\zeta) f_n(\zeta)$ the convergence being uniform for $|\zeta| \geqq R$, $|z| < r < R$. There are presented also sufficient conditions for (d). The paper contains a long deal of applications of the general results.

A. Alexiewicz.

Ditkin, V.: On the structure of ideals in certain normed rings. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski 30 (Mat. 3), 83—130 (1939) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

L'A. considère diverses algèbres de Banach, parmi lesquelles C, l'espace des fonctions continues sur un segment; B, l'espace des fonctions presque périodiques, $L(0, 2\pi)$, $L(-\infty, \infty)$, M_W l'algèbre de Wiener avec la norme $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \max_{n<t<n+1} |x(t)|$, etc. Il donne des critères pour qu'un idéal fermé soit principal, ou intersection d'idéaux maximaux. Les idéaux fermés dans C ou $L(0, 2\pi)$ sont principaux. Dans $L(-\infty, \infty)$ ou dans M_W ils sont intersections d'ideaux maximaux si l'ensemble des zéros des intégrales Fourier est réunion dénombrable de segments. En particulier on obtient un théorème tauberien de Wiener. *G. Marinescu.*

Bary, N.: Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **33**, 342—345 (1941).

Bary, Nina: Sur la stabilité de la propriété d'être un système complet de fonctions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **37**, 83—87 (1942).

Bary, Nina: Sur la stabilité de certaines propriétés des systèmes orthogonaux. Mat. Sbornik, n. Ser. **12 (54)**, 3—27 (1943) [mit russ. Zusammenfassg.].

Bary, Nina: Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales. Mat. Sbornik, n. Ser. **14 (56)**, 51—108 (1944) [mit russ. Zusammenfassg.].

Bary, N.: Sur les bases dans l'espace de Hilbert. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **54**, 379—382 (1946).

L'A. entreprend une étude des propriétés des systèmes orthogonaux dans L^2 au point de vue de leur stabilité. Deux systèmes $\{\varphi_n\}$ et $\{\psi_n\}$ sont appelés proches si $\varrho_n = \|\varphi_n - \psi_n\| \to 0$, proches au sens restreint si $\sum \varrho_n < \infty$; le système $\{\psi_n\}$ est dans le voisinage $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ de $\{\varphi_n\}$ si $\varrho_n \leqq \varepsilon_n \to 0$. Une propriété P est appelée fortement stable, resp. stable ou faiblement stable si elle est conservée pour un système proche, proche au sens restreint ou $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$-voisin. Les propriétés essentielles examinées sont l'orthogonalité, la complétitude et les divers modes de convergence des séries Fourier. Dans les démonstrations on employe les determinants infinis de Helge von Koch [Acta Math. **16**, 217—295 (1892) et **24**, 89—122 (1900)]. Ensuite on étend les recherches aux systèmes biorthogonaux. *G. Marinescu.*

Taldykin, A. T.: Minimal and regular systems of functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **39**, 125—128 (1943).

Taldykin, A. T.: Classification of certain systems of functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **39**, 170—172 (1943).

Soit $\{\varphi_i\}$ une suite bornée dans l'espace $L^2(a, b)$; elle est appelée régulière si $\sum_k \langle \varphi_i, \varphi_k \rangle < +\infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$ et la matrice $(\langle \varphi_i, \varphi_k \rangle)$ a une résolvante bornée unique. On définit divers types de minimalités qui sont caractérisées par l'existence ou la non-existence de la valeur zéro dans le spectre ou dans autres ensembles de nombres qui interviennent dans la théorie spectrale. On donne diverses conditions pour la convergence des séries biorthogonales correspondant aux systèmes considérés. *G. Marinescu.*

Pollard, Harry: Completeness theorems of Paley-Wiener type. Ann. of Math., II. Ser. **45**, 738—739 (1944).

Hilding, Sven H.: On the closure of disturbed complete orthonormal sets in Hilbert space. Ark. Mat. Astr. Fys. **32B**, Nr. 7, 3 p. (1946).

Siehe B. Sz.-Nagy (dies. Zbl. 29, 144), Hilding (dies Zbl. 31, 361) und Schäfke (dies Zbl. 35, 196). *J. Horváth.*

Tseng, Y. Y.: On generalized biorthogonal expansions in metric and unitary spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 170—175 (1942).

The announced results, expressed in the language of E. H. Moore's general analysis, are sharper than those by Paley and Wiener (this Zbl. 8, 152), and by Duffin and Eachus [Abstract in Bull. Amer. Math. Soc. 46, 415 (1940)].

K. Yosida.

Wintner, Aurel: Diophantine approximations and Hilbert's space. Amer. J. Math. 66, 564—578 (1944).

Verf. beweist: Es sei $\Re(\lambda) > \frac{1}{2}$ und entweder $\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\lambda} \cos 2\pi k t$ oder $\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\lambda} \sin 2\pi k t$. Dann bilden die Funktionen $1, \varphi(t), \varphi(2t), \ldots$ ein vollständiges System für den Hilbert-Raum (L^2) der quadratisch integrierbaren Funktionen in $0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$. Die Beweismethode liefert überdies den Satz: Die reelle Funktion $\varphi(t)$ von der Klasse (L^2) habe die Periode 1, es sei $\int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0$ und $\varphi(t)$ sei entweder gerade oder ungerade. In diesen beiden Fällen sei

$$\varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos 2\pi k t \quad \text{oder} \quad \varphi(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \sin 2\pi k t$$

die Fourier-Entwicklung von $\varphi(t)$. Dann ist die unendliche Matrix

$$\left(\int_0^1 \varphi(k\,t)\, \varphi(l\,t)\, dt\right) \quad (k, l = 1, 2, \ldots)$$

dann und nur dann beschränkt, falls die Dirichletsche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k k^{-s}$ für $\Re(s) > 0$ regulär und beschränkt ist.

H. D. Kloosterman.

Doob, J. L. and R. A. Leibler: On the spectral analysis of a certain transformation. Amer. J. Math. 65, 263—272 (1943).

Dans l'espace Ω^* des séquences, avec la mesure produit, on considère la transformation $\{x_n\} \to \{x_{n+1}\}$, qui définit un opérateur unitaire U dans $L^2(\Omega^*)$. Si $U = \exp(2\pi i A)$ et E_λ est la famille spectrale de A, la fonction $\langle E_\lambda f, g\rangle$ est absolument continue si l'on supprime le saut dans $\lambda = 0$. Cette situation est généralisée pour le cas d'un champ de probabilité Ω, et une transformation qui conserve la mesure.

G. Marinescu.

Michal, A. D.: The Fréchet differentials of regular power series in normed linear spaces. Duke math. J. 13, 57—59 (1946).

Let E_1 and E_2 be real Banach Spaces. A function $p_n(x)$ from E_1 into E_2 is a homogeneous polynomial of degree n if $p_n(t\,x) = t^n p_n(x)$ for every real t, $p_n(x + t\,y)$ is a polynomial of degree not exceeding n in t with coefficients in E_2 and the upper bound $m(p_n)$ (called the modulus of p_n) of $\|p_n(x)\|/\|x\|^n$, $x \in E_1$, is finite. The radius of analyticity of the "power series" $f(x) = \sum p_n(x)$ is the radius of convergence of $\sum m(p_n)\, t^n$. It is proved that $f(x)$ has Fréchet differentials of all orders in the sphere of analyticity $\|x\| < r$, where r is the radius of analyticity and that these can be obtained by term by term differentiation. The corresponding result for complex Banach spaces was proved earlier by R. S. Martin (California Institute of Technology, Thesis 1932).

V. Ganapathy Iyer.

Hyers, D. H.: A generalization of Fréchet's differential. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 315—316 (1941).

A Fréchet differential in convex linear topological spaces is defined, its properties and interrelations with the differentials of Michal are discussed without proofs.

A. Alexiewicz.

Zorn, Max A.: Gâteaux differentiability and essential boundedness. Duke math. J. 12, 579—583 (1945).

Zorn, Max A.: Derivatives and Fréchet differentials. Bull. Amer. math.. Soc. 52, 133—137 (1946).

X und Y seien komplexe Banachsche Räume, $S \subset X$ sei offen, $y = f(x)$ sei für $x \in S$ mit $y \in Y$ definiert und der Grenzwert $\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [f(x + t\,h) - f(x)] = \delta f(x, h)$ (t komplex) möge für $x \in S$, $h \in X$ existieren. Man betrachte die Bedingungen: (Z) S ist zusammenhängend und f ist auf $V - M$ beschränkt, wo $0 \neq V \subset S$ offen und M so beschaffen sind, daß keine Relation $X = \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n M + a_n)$ (α_n komplex, $a_n \in X$) gilt; (D) $\delta f(x, h)$ ist für $x \in S$ eine stetige lineare Transformation von $h \in X$ in Y; (P) $f(x + h) - f(x) - \delta f(x, h) = o(\|h\|)$ für $x \in S$. Es wird bewiesen, daß (D) aus (Z), (P) aus (D) folgt. *A. Császár.*

Dunford, Nelson and J. D. Tamarkin: A principle of Jessen and general Fubini theorems. Duke math. J. 8, 743—749 (1941).

$(S_\alpha)_{\alpha \in A}$ sei eine Mengenfamilie und $S^B = \underset{\alpha \in B}{\times} S_\alpha$, wenn $B \subseteqq A$. In jedem S_α liege ein Borelscher Mengenring $\mathfrak{F}_\alpha$ mit $S_\alpha \in \mathfrak{F}_\alpha$ vor, und $\mathfrak{F}^B$ bilde den kleinsten Borelschen Ring in S^B, der alle „elementaren Mengen", d. h. Mengen der Form $\underset{\alpha \in B}{\times} T_\alpha$, wobei $T_\alpha \subseteqq S_\alpha$, aber $T_\alpha \neq S_\alpha$ nur für endlich viele α, enthält. Φ_α sei eine abzählbar additive Abbildung von $\mathfrak{F}_\alpha$ in einen topologischen, Hausdorffschen Ring R mit genau zwei Idempotenten 0 und 1, wobei $\Phi_\alpha(S_\alpha) = 1$. Unter der Annahme, daß zu jeder Teilmenge B von A eine auf $\mathfrak{F}^B$ abzählbar additive Funktion Φ^B mit $\Phi^{\{\alpha\}} = \Phi_\alpha$, $\Phi^B(S^B) = 1$ und $\Phi^A\big((\underset{\alpha \in B}{\times} T_\alpha) \times (\underset{\alpha \in A-B}{\times} T_\alpha)\big) = \Phi^B(\underset{\alpha \in B}{\times} T_\alpha)$ $\Phi^{A-B}(\underset{\alpha \in A-B}{\times} T_\alpha)$ existiert, wird der folgende, von Jessen für den Fall reellwertiger Funktionen und Maße ausgesprochene Satz bewiesen: Ist die Abbildung f von S^A in einen separablen metrischen Raum E meßbar, d. h. $f^{-1}(D) \in \mathfrak{F}^A$, wenn D Borelsch in E, und hat f bei je zwei Punkten aus S^A, die sich in höchstens endlich vielen Koordinaten unterscheiden, den gleichen Wert, so bleibt f außerhalb einer Φ^A-Nullmenge konstant. — Sodann sei R die reelle Zahlengerade, E ein (nicht notwendig separabler) Banachscher Raum und L_p der Raum der in der p-ten Potenz Φ^A-integrierbaren und „stark meßbaren" Abbildungen von S^A in E (Grenze von Abbildungen, die konstant auf endlich vielen elementaren Mengen und sonst gleich Null sind). Wird $f^B = \int_{S^{A-B}} f\, d\Phi^{B-A}$ wieder als Element von L_p betrachtet, so gilt hinsichtlich der entsprechenden Norm $\lim_C f^C = f$ und $\lim_C f^{A-C} = \int_{S^A} f\, d\Phi^A$. Dabei sind f^C und f^{A-C} als Moore-Smithsche Folgen aufzufassen: C durchläuft alle endlichen Teilmengen von A, mengentheoretisch geordnet. Bei abzählbarem A läßt sich eine punktweise Konvergenz Φ^A fast überall beweisen. *K. Krickeberg.*

Macphail, M. S.: Integration of functions in a Banach space. Math. Mag. 20, 69—78 (1945).

Vereinfachung der Konstruktion des Birkhoffschen und eines Priceschen Integrals für Funktionen, deren Werte in einem Banachschen Raum liegen. *K. Krickeberg.*

Schärf, Henryk: Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques. Portugaliae Math. 4, 211—216 (1945).

Schärf, Henryk: Intégrale et mesure dans certains espaces algébriques. Supplément. Portugaliae Math. 5, 142 (1946).

Bildet G eine Halbgruppe von Abbildungen einer Menge H in sich, so folgt

aus dem Satz von Hahn und Banach die Existenz eines positiven linearen Funktionals I im Raum S aller beschränkten reellen Funktionen über H mit $I(1) = 1$, das gegenüber G invariant bleibt, wenn G abelsch ist. Hat eine Funktion f aus S ein (nach v. Neumann definiertes) Mittel, so fällt dieses mit $I(f)$ zusammen und ist invariant gegenüber G. *K. Krickeberg.*

Fréchet, Maurice: L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque. Revue sci. 82, 483—512 (1944).

Es seien E', E'' und E''' vollständige, normierte, additive abelsche Gruppen, $v(e)$ eine additive Mengenfunktion von Teilmengen einer Menge E mit Werten aus E', f eine auf E definierte Punktfunktion mit Werten aus E''. Ein Integral $\int_E f\,dv$ mit Werten aus E''' wird definiert. Übertragung auf solche Integrale von bekannten Sätzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. *Á. Császár.*

Munroe, M. Evans: A note on weak differentiability of Pettis integrals. Bull. Amer. math. Soc. 52, 167—174 (1946).

Munroe, M. E.: A second note on weak differentiability of Pettis integrals. Bull. Amer. math. Soc. 52, 668—670 (1946).

Es sei Ω ein unendlicher, kompakter metrischer Raum und $C(\Omega)$ der Banachsche Raum der auf Ω definierten stetigen Funktionen. Eine Funktion $y = f(x)$ $(x \in [0, 1],\ y \in C(\Omega))$ wird definiert, so daß das Pettissche Integral von $f(x)$ existiert, aber auf einer Menge von positivem Maß nicht schwach differenzierbar ist. Daraus folgt, daß jedes Pettissche Integral mit Werten in einem abstrakten (M)-Raum (vgl. Kakutani dies. Zbl. 60, 266) mit Einselement dann und nur dann fast überall schwach differenzierbar ist, wenn der Raum endlichdimensional ist. *Á. Császár.*

Nef, Walter: Lineare Funktionale in kompakten metrischen Räumen. Commentarii math. Helvet. 17, 214—220 (1945).

Übertragung eines Satzes von F. Riesz [C. r. Acad. Sci., Paris 150, 674—677 (1910)] auf Funktionale, die auf einem kompakten metrischen Raum definiert sind. *Á. Császár.*

McMillan, Brockway and Paco Lagerstrom: Extension of a theorem of Bochner on expressing functionals as Riemann integrals. Bull. Amer. math. Soc. 51, 251—258 (1945).

Verallgemeinerung des Satzes von Bochner (dies. Zbl. 24, 42) auf Funktionale, die nicht notwendig für die konstanten Funktionen $f = c$ definiert sind, was bei Bochner vorausgesetzt worden ist. *Á. Császár.*

Marinescu, G.: Sur l'extension des fonctionnelles bilineaires. Bull. math. Soc. Roumaine Sci. 47, 202—209 (1946).

Einem bilinearen Funktional F in einem reellen Banachschen Raum E entspricht ein lineares Funktional F^0 im Kreuzprodukt von E mit sich im Sinne von Schatten. Genügt F einer Forderung, die die Beschränktheit von F und F^0 und die Gleichheit ihrer Normen sichert, so lassen sich Sätze über die Erweiterung von F auf die üblichen Sätze über die Erweiterung linearer Funktionale zurückführen. *K. Krickeberg.*

Rey Pastor, Julio: Funktionalanalysis und die allgemeine Funktionentheorie. Accad. Ital., Fondaz. A. Volta, Atti Convegni 9 (1939), 339—372 (1943) [Spanisch].

Rassegna di risultati relativi all'Analisi funzionale con una amplissima bibliografia (lista di circa 400 lavori, dal 1900 circa in poi); consta di cinque parti: I) I tre metodi di Analisi funzionale (Pincherle, Volterra, Fréchet). II) Spazii funzionali. III) Funzionali lineari. IV) Rappresentazione dei funzionali lineari. V) Applicazioni dell'Analisi funzionale. *M. Cinquini-Cibrario.*

Belardinelli, G.: Una applicazione della convergenza in media. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **79** (III. Ser. **10**), 142—146 (1946).

Nella formula fondamentale della rappresentazione dei funzionali analitici (1) $\frac{1}{2\pi i}\int_C v(z)\,y(z)\,dz$, la parte reale e la parte immaginaria di $v(z)$ e di $y(z)$ tendano in media a due funzioni integrabili coi loro quadrati su C, se si tende a C con un sistema di curve C_n; la formula (1) dà lo stesso valore che se $v(z)$ e $y(z)$ fossero olomorfe su C. Il risultato permette una estensione del calcolo funzionale di Fantappiè. *M. Cinquini-Cibrario.*

Martis in Biddau, Silvia: I funzionali lineari algebrici e abeliani. Rend. Circ. mat. Palermo **62**, 289—358 (1941).

Les problèmes étudiés sont loin d'avoir perdu leur intérêt actuellement. Le but du travail est l'étude des fonctionelles analytiques (au sens de Fantappié) linéaires dont l'indicatrice est algébrique ou une intégrale abélienne. Etude des fonctionnelles dont l'indicatrice est une branche de fonction algébrique (à laquelle on associe un système de coupures); la représentation de ces fonctionnelles fait intérvenir des intégrales $A[y(t)] = \frac{1}{2i\pi}\int_C u(t)\,y(t)\,dt$ sur une courbe C de la surface de Riemann de la fonction algébrique u. Etude des fonctionnelles abéliennes qui demeurent invariantes par des transformations birationnelles faites sur les variables et le chemin d'intégration. Représentation comme fonctionelle algébrique relativement à certains cycles; étude d'une fonctionnelle abélienne attachée à une surface de Riemann de genre $p \geqq 1$; une décomposition relativement aux éléments d'une base des cycles est obtenue par l'auteur. *P. Lelong.*

Riss (Riesz), F.: Über einige Grundbegriffe der allgemeinen Theorie der linearen Operatoren. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. **1**, Nr. 2 (12), 147—178 (1946) [Russisch].

Übersetzt aus: Ann. of Math., II. Ser. **41**, 174—206 (1940); dies. Zbl. **22**, 318.

Murray, F. J.: The analysis of linear transformations. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 76—93 (1942).

T sei eine lineare Transformation eines Banachraumes in einen zweiten Banachraum. Verf. beleuchtet die Schwierigkeiten, die sich bei Strukturuntersuchungen von T ergeben, wenn man sie etwa in Analogie zu den bekannten Methoden in Hilbert-Räumen (spektrale Zerlegung) durchführen will. Das Hauptproblem besteht in einer geeigneten Verallgemeinerung des Begriffs der Projektion und der Konstruktion von Basen (Spektralzerlegung der Identität). Das Strukturproblem stellt sich unter diesen Gesichtspunkten in folgender Form dar: Man bestimme Projektionen E, F mit $TE = FT$ (bzw. $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ mit $TE(\lambda) = F(\lambda)\,T$), wobei diese Gleichheit noch einer geeigneten Interpretation bedarf, wie dies bereits im Falle der Hilbert-Räume erforderlich ist. Diesbezügliche Untersuchungen erfordern zunächst die Lösung spezieller Fragen, die gewisse Eigenschaften der Banachräume betreffen. Verf. stellt eine Reihe vordringlicher Probleme mit entsprechenden Erläuterungen zusammen. In einem umfangreichen Anhang werden zahlreiche Beispiele entwickelt, die die jeweiligen besonderen Verhältnisse illustrieren. *H.-J. Kowalsky.*

Dunford, Nelson: Direct decompositions of Banach spaces. Bol. Soc. mat. Mexicana **3**, 1—12 (1946).

Milman, D.: Sur une classification des points du spectre d'un opérateur linéaire. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **33**, 279—281 (1941).

Soit A un opérateur dans l'espace de Banach complexe E. La valeur spectrale λ_0 est appelée de multiplicité minimale n si (1) pour $\{x_m\} \subset E$, $\|x_m\| = 1$, $\lim_m \|(A - \lambda_0 I)^{n+1} x_m\| = 0$ implique $\lim_m \|(A - \lambda_0 I)^n x_m\| = 0$, (2) il existe

$\{x_m^0\} \subset E$ tel que $\lim_m \|(A - \lambda_0 I)^n x_m^0\| = 0$ et $\overline{\lim}_m \|(A - \lambda_0 I)^{n+1} x_m^0\| > 0$. Si l'on supprime la condition $\|x_m\| = 1$, λ_0 est appelée essentiellement de multiplicité minimale n. On énonce des conditions pour que λ_0 satisfasse à ces conditions. *G. Marinescu.*

Eidelheit, M.: On isomorphisms of rings of linear operators. Studia math. 9, 97—105 (1940) [mit ukrain. Zusammenfassg.].

X being a Banach space, let $\mathfrak{A}(X)$ denote the Banach algebra of (bounded) linear transformations of X. It is shown that every submultiplicative norm on $\mathfrak{A}(X)$ with respect to which $\mathfrak{A}(X)$ is complete, is equivalent to the usual norm. Two algebras $\mathfrak{A}(X_1)$ and $\mathfrak{A}(X_2)$ are isomorphic if and only if the spaces X_1 and X_2 are so; if Φ is the isomorphism between $\mathfrak{A}(X_1)$ and $\mathfrak{A}(X_2)$ then there exists an isomorphism F between X_1 and X_2 such that $\Phi U = F U F^{-1}$ for $U \in \mathfrak{A}(X_1)$. Some variants of this theorem are also proved. *A. Alexiewicz.*

Durañona y Vedia, A.: Über lineare Operatoren im Hilbertschen Raum. Univ. nac. La Plata, Publ. Fac. Ci. fis.-mat., Revista 2, 87—123 (1941) [Spanisch].

Zaanen, A. C.: Transformationen im Hilbert-Raum, die von einem Parameter abhängen. Mathematica, Zutphen B 13, 13—22 (1944) [Holländisch].

Itô, Kiyosi: A screw line in Hilbert space and its application to the probability theory. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 203—209 (1944).

Hille, Einar: On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings. Proc. nat. Acad. Sci. USA 30, 58—60 (1944).

Slight strengthening of a theorem of Gel'fand (this Zbl. 24, 323). *E. Hewitt.*

Hille, Einar and Max Zorn: Open additive semi-groups of complex numbers. Ann. of Math., II. Ser. 44, 554—561 (1943).

Les A.A. démontrent que tout semigroupe ouvert et connexe dans l'espace R^2 est de la forme $\{\xi a + y b\}$ où $a, b \in R^2$ sont fixes et (1) $\xi > 0$, $\xi < 0$ ou $-\infty < \xi < \infty$, (2) $\eta > \Phi(\xi)$ où Φ est une fonction réelle supérieurement semi-continue, convexe et $\lim_{\xi \to 0} \Phi(\xi) \leqq 0$. Ils appliquent ce résultat pour trouver des sémigroupes d'opérateurs dans les espaces de Banach. *G. Marinescu.*

Dunford, Nelson and I. E. Segal: Semi-groups of operators and the Weierstrass theorem. Bull. Amer. math. Soc. 52, 911—914 (1946).

Basés sur la représentation $T_s x = \lim_{h \to 0} e^{sAh} x$ des semigroupes d'opérateurs unitaires [dont ils donnent une démonstration plus simple que celle de E. Hille, Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 175—178, 421—424 (1942)] les A.A. démontrent le théorème de Weierstrass pour les fonctions continues sur un compact de l'espace à n dimensions et la généralisation de M. H. Stone (ce Zbl. 17, 135). *G. Marinescu.*

Gelfand, I. and D. Raikov: Irreducible unitary representations of locally bicompact groups. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 42, 199—201 (1944).

Zu jedem Element $g \neq 1$ einer im Kleinen kompakten Gruppe gibt es eine irreduzible unitäre Darstellung (nicht notwendig endlich-dimensional) U, so daß $U(g) \neq 1$ ist. *H. Freudenthal.*

(1) **Gelfand, I. and M. Neumark: Unitary representations of the Lorentz groups.** Acad. Sci. USSR, J. Phys. 10, 93—94 (1946).

(2) **Gelfand, I. M. and M. A. Neumark: On unitary representations of the complex unimodular group.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 54, 195—198 (1946).

Siehe die ausführlichen Darstellungen: Zu (1) dies. Zbl. 37, 153, zu (2) dies. Zbl. 29, 5. *H. Freudenthal.*

Dirac, P. A. M.: Unitary representations of the Lorentz group. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 183, 284—295 (1945).

The transformations of the „expansors" A_{nrst} induced by Lorentz transformations of the ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 in the power series $\sum A_{nrst} \xi_0^{-n-1} \xi_1^r \xi_2^s \xi_3^t$ are

unitary if squared length of A_{nrst} is defined by $\sum n!^{-1} r!\, s!\, t!\, A_{nrst}^2$. For every value of $r + s + t - n$ a representation of the Lorentz group results, even if $n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots$ (n_0 *real*); for $n_0 > -1$ the length is still real. Special expansors and applications to quantum theory are studied. *H. Freudenthal.*

Courtois, Jacques: Les expanseurs. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 377—378 (1946).

Courtois, Jacques: Réductibilité des expanseurs. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 480—482 (1946).

Verwendung der Expansoren von P. A. M. Dirac zur Konstruktion von Darstellungen der affinen Gruppe in unendlich-dimensionalen Räumen. Vorläufige Mitteilung, auf die keine endgültige Darstellung gefolgt ist. *H. Freudenthal.*

Hurevitsch, Anna: Unitary representation in Hilbert space of a compact topological group. Mat. Sbornik, n. Ser. **13 (55)**, 79—86 (1943) [Englisch mit russ. Zusammenfassg.].

Zerlegung unitärer Darstellungen kompakter Gruppen im Hilbertschen Raum in irreduzible Bestandteile. *H. Freudenthal.*

Godement, Roger: Sur une généralisation d'un théorème de Stone. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 901—903 (1944).

On construit la décomposition spectrale faible d'une représentation unitaire d'un groupe abélien localement continu dans un espace de Hilbert. *G. Marinescu.*

Arnous, Edmond: Sur les représentations unitaires des groupes abéliens localement compacts dans l'espace de Hilbert. Une extension d'un théorème de M. H. Stone. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 215—217 (1946).

Raikov, D.: On absolutely continuous set functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 34, 239—241 (1942).

Soit Φ l'ensemble des fonctions complètement additives $\varphi(E)$, définies sur le corps borélien, engendré par les ensembles strictement ouverts $\varphi(E) \in \Phi$; $\varphi(E)$ est absolument continue à droite, au sens de Plessner, si $\lim_{g \to 1} \mathrm{Var} |\varphi(E\,g) - \varphi(E)| = 0$ et continue à droite si $\lim_{g \to 1} |\varphi(E\,g) - \varphi(E)| = 0$. S'il existe une mesure de Haar μ, invariante à droite, l'A. démontre que $\varphi(E)$ est absolument continue par rapport à μ (condition nécessaire et suffisante). *A. Froda.*

Raikov, D.: A new proof of the uniqueness of Haar's measure. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 34, 211—212 (1942).

L'A. donne une démonstration simple du théorème d'unicité de la mesure de Haar sur un groupe localement compact (voir aussi: D. Raikov, Mémoire et traduction allemande annoncés ci-dessous). *A. Froda.*

● **Raikov, D. A.: Harmonic analysis on commutative groups with the Haar measure and the theory of characters.** Trudy mat. Inst. Steklov 14, 86 p. (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Deutsche Übersetzung dieser Arbeit s. Sowj. Arb. Funktionalanalysis, Beiheft zur Sowjetwiss. 44, 11—87 (1954).

Ambrose, Warren: Spectral resolution of groups of unitary operators. Duke math. J. 11, 589—595 (1944).

Für eine schwach stetige im Kleinen kompakte Abelsche Gruppe unitärer Operatoren U_x im Hilbertschen Raum wird die Spektraldarstellung $U_x = \int [x, \xi]\, E(d\xi)$ abgeleitet ($[x, \xi]$ = Charakterprodukt). Siehe auch M. Neumark (nachfolgendes Sammelreferat, 2. Arbeit). *H. Freudenthal.*

Neumark, M. A.: On a representation of additive operator set functions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 41, 359—361 (1943).

Neumark, M.: Positive definite operator functions on a commutative group. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. 7, 237—244 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Arnous, Edmond: Sur les groupes continus de transformations unitaires de l'espace de Hilbert: Une extension d'un théorème de M. H. Stone. Commentarii math. Helvet. **19**, 50—60 (1946).

Liapounoff, A.: Sur les fonctions-vecteurs complètement additives. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 277—279 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

M. Neumark démontre d'une manière très simple que toute fonction $B(\Delta)$ additive, définie sur un corps de sous ensembles d'un ensemble X et prenant les valeurs dans l'ensemble des opérateurs hermitiens positifs dans un espace hilbertien et telle que $B(\Phi) = 0$, $B(X) = 1$, est de la forme $B(\Delta)\, x = P E(\Delta)\, x$, $x \in H$, où $E(\Delta)$ est une fonction spectrale orthogonale dans un espace $H' \supset H$ et P est la projection de H' sur H. L'espace H' construit est minimal. Le cas particulier ou X est le groupe des caractères d'un groupe abélien localement compact a été démontré par le même auteur en utilisant les propriétés des fonctions positivement définies sur un groupe. Le même problème est étudié plus tard par une méthode analogue par E. Arnous. A. Liapounoff démontre par un exemple que l'ensemble des valeurs d'une fonction complètement additive, prenant les valeurs dans un espace de Banach de dimension infinie n'est pas toujours convexe.

G. Marinescu.

Godement, Roger: Sur les partitions finies des fonctions de type positif. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 36—37 (1946).

Godement, Roger: Sur certains opérateurs définis dans l'espace d'une fonction de type positif. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 213—215 (1946).

Godement, Roger: Sur quelques propriétés des fonctions de type positif définies sur un groupe quelconque. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 529—531 (1946).

Bochner, S.: On a theorem of Tannaka and Krein. Ann. of Math., II. Ser. **43**, 56—58 (1942).

Ist L ein additives Funktional über die Klasse C_0 der endlichen linearen Kombinationen der Koeffizienten der irreduziblen Darstellungen einer Gruppe G, so folgt aus der Bedingung $L(|g|^2) \geqq 0$ (für alle $g \in C_0$), daß L positiv und beschränkt ist und eindeutig auf die Klasse C aller fastperiodischen Funktionen auf G fortgesetzt werden kann.

B. Sz.-Nagy.

Lewitan, B.: Normed rings generated by the generalized operation of translation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **47**, 3—6 (1945).

Im Raume L der absolut integrablen komplexwertigen Funktionen $f(t)$ in einem lokal-kompakten Raum Z wird mit Hilfe verallgemeinerter Translationsoperatoren $T_t^s f(t)$ durch die Faltung $f g(t) = \int_Z T_t^s f(t)\, g(s)\, dm(s)$ eine Multiplikation eingeführt, durch die L in einen normierten Ring verwandelt wird. Ein-eindeutige Beziehung zwischen den von L verschiedenen Maximalidealen des aus L durch Hinzunahme eines Einheitselementes erzeugten Ringes R und den charakteristischen Funktionen φ der Operatoren, d. h der den Relationen $T_s^t \varphi(t) = \varphi(s)\, \varphi(t)$ genügenden Funktionen.

H. Schwerdtfeger.

Lewitan, B.: The theorem on the representation of positively definite functions for the generalized operation of translation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **47**, 159—161 (1945).

Eine Funktion $p(t)$ auf Z (vgl. vorst. Referat) heißt positiv definit, wenn für irgend n Punkte $t_1, \ldots, t_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die hermitesche Form mit der Matrix $\tilde{T}_{t_i}^{t_j} p(t)$ nicht negativ ausfällt. Für eine derartige Funktion wird in Verallgemeinerung eines Satzes von Bochner eine Integraldarstellung angegeben, wobei der Kern eine stetige charakteristische Funktion des Operators T^s ist; Integration über $\mathfrak{M} - L$, wo $\mathfrak{M}$ der Raum der Maximal-Ideale in R ist.

H. Schwerdtfeger.

Lewitan, B.: Plancherel's theorem for the generalized translation operator. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **47**, 318—321 (1945).

Verallgemeinerung von Plancherels Satz unter Benutzung der Resultate der beiden vorstehend referierten Noten. *H. Schwerdtfeger.*

Lewitan, B.: The duality law for the generalized operation of translation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **47**, 387—389 (1945).

Spezifizierung von Bedingungen, unter denen man aus der obigen Form von Plancherels Satz den Pontrjaginschen Dualitätssatz herleiten kann. *H. Schwerdtfeger.*

Lewitan, B.: Integral equations and operations of generalized translation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **51**, 659—661 (1946).

Untersuchung von Integralgleichungen mit dem Kern $\tilde{T}_t^s f(t)$. *H. Schwerdtfeger.*

Lewitan, B.: Rings of operators and operattion of generalized translation. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 99—101 (1946).

Untersuchung des Ringes aller hermiteschen Operatoren A von der Form $A\varphi = \int \tilde{T}_t^s f(t)\,\varphi(s)\,dm(s)$. Darstellung der Spektralfunktion gewisser solcher Operatoren in der Form $T_t^s \varphi(t, \lambda)$ mit einer in t stetigen Funktion, die in λ von beschränkter Schwankung ist. *H. Schwerdtfeger.*

Lewitan, B. and A. Powsner: Differential equations of the Sturm-Liouville type on the semi-axis and Plancherel's theorem. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **52**, 479—482 (1946).

Untersuchung des linearen Operators T_x^y, der sich ergibt, wenn man die Lösung des Randwertproblems $u(x, 0) = f(x)$, $u_y'(x, 0) = 0$ für die Gleichung $u_{xx} - u_{yy} - (\varphi(x) - \varphi(y))\,u = 0$ mit geraden $\varphi(x)$, $f(x)$ in der Form $u(x, y) = T_x^y f(x)$ schreibt. *H. Schwerdtfeger.*

Powsner, A.: On equations of the Sturm-Liouville type on a semi-axis. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **53**, 295—298 (1946).

Anwendung von Methoden der Theorie der normierten Ringe auf Sturm-Liouvillesche Gleichungen auf der Halbachse. *B. Sz.-Nagy.*

(1) **Julia, Gaston: Détermination des adjoints de quelques opérateurs linéaires non bornés de l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris **216**, 221—224 (1943).

(2) **Julia, Gaston: Remarques géométriques sur le problème des moments dans l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris **216**, 257—260 (1943).

(1): Der mit Hilfe eines vollständig orthonormalen Systems e_k und einer Vektorenfolge A_k, $k = 1, 2, \ldots$ durch die Vorschrift $A\,x = \sum_1^n x_k A_k$ für $x = \sum_1^n x_k e_k$ definierte Operator A eines Hilbertraumes H besitzt mit seinen starken und schwachen Abschließungen gemeinsam dieselbe Adjungierte; es ist $A^* x = \sum e_i (A_i, x)$ erklärt für x mit $\sum |(A_i, x)|^2 < \infty$. (2): Gemeinsamer Beweis der Rieszschen und der E. Schmidtschen Bedingung für die Lösbarkeit des Momentenproblems im Hilbertraum. Riesz: $(X_k, X) = \xi_k$ ist für eine bestimmte Folge ξ_k genau dann lösbar, wenn $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k\right| \left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right\|^{-1} < \infty$ für beliebige λ_k, die nicht alle Null sind. E. Schmidt: $(X_k, X) = \xi_k$ ist genau dann für jedes (ξ_k) mit $\sum |\xi_k|^2 < \infty$ lösbar, wenn $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left\|\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k\right\| \left(\sum |\lambda_k|^2\right)^{-\frac{1}{2}} > 0$. Für die Lösbarkeit des Problems für alle $\sum |\xi_k|^2 < \infty$ bei fest vorgegebenen X_k sind, so wird ausgeführt, beide Bedingungen äquivalent. Anwendung zur Konstruktion eines zu vorgegebener Folge biorthogonalen Systems. *H. O. Cordes.*

(1) **Julia, Gaston: Sur la convergence dans l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris 218, 376—380 (1944).

(2) **Julia, Gaston: Sur les convergences faible et forte dans l'espace d'Hilbert.** Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 6, 255—272 (1946).

(2) ist eine ausführlicher gehaltene Zusammenfassung von (1) und einer bereits referierten Note (dies. Zbl. 28, 233). Aus dem noch nicht referierten Inhalt: Starke Konvergenz ist gleichbedeutend mit schwacher Konvergenz gleichmäßig auf der Einheitskugel. Das Landausche Resultat (Aus der Konvergenz von $\sum a_n x_n$ für alle $\sum |x_n|^2 < \infty$ folgt $\sum |a_n|^2 < \infty$) wird folgendermaßen erweitert interpretiert: Wenn $\sum a_n x_n$ konvergent ist für alle $x = \sum x_k e_k$ einer abgeschlossenen, linearen Untermannigfaltigkeit V von H (e_k eine orthonormierte Basis von H), dann ist $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} a_k e'_k$ mit $e'_k = P_V e_k$ (P_V die Projektion von H auf V) schwach konvergent gegen ein $\alpha \in V$. Wenn V oder $\mathfrak{H} \ominus V$ endlichdimensional ist, dann ist α_n auch stark konvergent. Sonst ist dies nicht notwendig der Fall. Dazu Angabe zweier Beispiele. *H. O. Cordes.*

(1) **Julia, Gaston: Sur les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris 218, 892—895 (1944).

(2) **Julia, Gaston: Les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien et les opérateurs bornées.** C. r. Acad. Sci., Paris 219, 8—11 (1944).

(3) **Julia, Gaston: Sur la représentation analytique des opérateurs bornés ou fermés de l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris 219, 225—227 (1944).

Ein System $A_k \in H$, das Projektion eines orthonormalen Systems $\varepsilon_k \in H$ auf den Unterraum h ist, wird (1) charakterisiert durch folgende Eigenschaften: Der wie in (1) des vorletzten Sammelreferates mit A_k und einer orthonormierten Basis e_k von h definierte Operator A des Raumes h ist beschränkt und es gilt $\|A\| \leqq 1$. Wenn ε_k in H vollständig ist, dann gilt $AA^* = 1$, $A^*A = P_W$, wo P_W Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum w von h ist, für den gilt $\mathrm{Dim}(h \ominus w) = \mathrm{Dim}(H \ominus h)$. Wenn ε_k in H nicht vollständig ist, so gilt $A = I_1 J_1$, wo I_1 und J_1 zwei beschränkte Operatoren des Raumes h sind mit $I_1 I_1^* = 1$, $I_1^* I_1 = P_W$, $J_1^* J_1 = 1$, $J_1 J_1^* = P_{W_1}$. In (2) wird nach anderem Verfahren bewiesen, daß jeder beschränkte Operator A von h mit $\|A\| \leqq 1$ in den Vektoren $A_k = A e_k$ ein System von Vektoren erzeugt, das als Projektion eines orthonormalen Systems gedeutet werden kann. Aus (1) und (2) zusammen folgt, daß jeder beschränkte Operator A mit $\|A\| \leqq 1$ eine Zerlegung der Form $A = I_1 J_1$ besitzt mit Operatoren I_1 und J_1 die wie oben charakterisiert sind. Jeder beschränkte Operator A in h mit $\|A\| \leqq 1$ ist (3) zerlegbar in der Form $A = P_h U$, wo P_h Projektion auf h, U isometrischer Operator jeweils des h enthaltenden Raumes $H = h \times h_1$ ist (v. Neumannsches cartesisches Produkt). Dies Resultat wurde inzwischen von Halmos (dies. Zbl. 41, 232) neu veröffentlicht. Betr. einer Erweiterung vgl. ferner B. v. Sz. Nagy (dies. Zbl. 52, 122). Jeder abgeschlossene Operator eines Hilbertraumes kann dargestellt werden in der „Parameterdarstellung" $x = Bz$, $Ax = Cz$ wo z ganz h durchläuft und $\|B\| \leqq 1$, $\|C\| \leqq 1$ gilt (3). *H. O. Cordes.*

(1) **Julia, Gaston: Les symétries dans l'espace hilbertien.** C. r. Acad. Sci., Paris 221, 81—83 (1945).

(2) **Julia, Gaston: Décomposition des opérateurs unitaires ou isométriques en produit de symétries.** C. r. Acad. Sci., Paris 221, 265—267 (1945).

Das Produkt zweier Spiegelungen S und S' an den Räumen V bzw. V' ist dann und nur dann wieder Spiegelung, wenn die beiden Räume $V_1 = V' \ominus (V \cap V')$ und $V_2 = V' \ominus (V \cap V')$ zueinander orthogonal sind (1). Für paarweise orthogonale Mannigfaltigkeiten $V_1, V_2, \ldots$ gilt $-S_{V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots} = \prod_k - S_{V_k}$, wo

bei das Produkt im Falle unendlich vieler V_k stark konvergiert (1). (X_n) und (Y_n) sind genau dann durch eine Spiegelung ineinander überführbar, wenn gilt $(X_i, X_k) = (Y_i, Y_k)$ und $(X_i, Y_k) = (Y_i, X_k)$ (1). Für jeden isometrischen Operator U in h gilt eine Zerlegung $U = \prod_1^\infty S_k \cdot \Omega$ (2). Darin sind S_k Spiegelungen an je einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit, während Ω sich bezüglich der Basis e_k von h darstellt als $\Omega e_k = e^{i\vartheta_k} e_k$. Das auftretende Produkt ist stark konvergent. Wenn die Matrix von U bezüglich e_k reell ist, sind alle S_k reell und es ist $\Omega = 1$. Im n-dimensionalen, euklidischen Raum tritt an die Stelle des unendlichen Produktes ein endliches Produkt. *H. O. Cordes.*

Julia, Gaston: Sur deux propriétés des matrices infinies, hermitiennes positives. C. r. Acad. Sci., Paris 221, 317—319 (1945).

Das Toeplitzsche Resultat, jede hermitesche, positiv definite Matrix H sei durch eine rekursive Matrix T $[(e_i, T e_k) = t_{ik} = 0,\ i < k]$ darstellbar in der Form $H = T^* T$, wird wiedergewonnen durch Anwendung des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens auf die Menge der Vektoren $B e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, wo B die positive Quadratwurzel von H sei. Dann und nur dann können zu gegebenem Skalaren g_{ik} $(g_{ik} = \bar{g}_{ki})$ Vektoren X_i aus h gefunden werden mit $(X_i, X_k) = g_{ik}$, wenn die quadratische Form $\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, x_i\, x_k$ für jedes $n = 1, 2, \ldots$ positiv definit ist. *H. O. Cordes.*

(1) **Julia, Gaston: Sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif donné.** C. r. Acad. Sci., Paris 222, 707—709 (1946).

(2) **Julia, Gaston: Remarques sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif borné.** C. r. Acad. Sci., Paris 222, 829—832 (1946).

(3) **Julia, Gaston: Sur la représentation spectrale des racines hermitiennes d'un opérateur hermitien positif donné.** C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1019—1022 (1946).

(4) **Julia, Gaston: Sur les racines carrées self-adjointes d'un opérateur self-adjoint positif non borné.** C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1061—1063 (1946).

(5) **Julia, Gaston: Sur les racines n-ièmes hermitiennes d'un opérateur hermitien donné.** C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1465—1468 (1946).

Jede hermitesche Quadratwurzel eines beschränkten, hermiteschen positiven Operators K ergibt sich als Produkt der positiven hermiteschen Quadratwurzel mit einer Symmetrie, deren zugehörige Mannigfaltigkeit K reduziert. Angabe der Spektralzerlegung derselben (trivial). Jede Spektralschar $E_1(\lambda)$ mit monoton nicht zunehmendem $E_1(\lambda) - E(\lambda) \geqq 0$ ($E(\lambda)$ die Spektralschar der positiv definiten Quadratwurzel von K) definiert in $Q = \int \lambda\, dE_1(\lambda) - \int \lambda\, dE_2(\lambda)$ mit $E_2(\lambda) = E(\lambda) + 1 - E_1(\lambda)$ eine hermitesche Quadratwurzel von K. Die von allen Eigenvektoren von K aufgespannte abgeschlossene Mannigfaltigkeit und ihr orthogonales Komplement bleiben beim Wurzelziehen invariant (3). Verschiedene weitere einfache Bemerkungen. Zurückführung des Problems für unbeschränkte selbstadjungierte Operatoren auf den Fall beschränkter Operatoren (4). Untersuchung der n-ten Wurzel mit gleichen Methoden (5). *H. O. Cordes.*

(1) **Hamburger, Hans Ludwig: Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency index (m, m).** Ann. of Math., II. Ser. 45, 59—99 (1944).

(2) **Hamburger, H. L.: Contributions to the theory of closed Hermitian transformations of deficiency-index (m, m).** Quart. J. Math., Oxford Ser. 13, 117—128 (1942).

(3) **Hamburger, H. L.: Hermitian transformations of deficiency-index (1,1), Jacobi matrices and undetermined moment problems.** Amer. J. Math. 66, 489—522 (1944).

(4) **Hamburger, H. L.: On a class of Hermitian transformations containing self-adjoint differential operators.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **31**, 185—189 (1945).

(5) **Hamburger, H. L.: On a class of Hermitian transformations containing self-adjoint differential operators.** Ann. of Math., II. Ser. **47**, 667—687 (1946).

Diese Untersuchung abgeschlossener, hermitescher Operatoren der Defektindizes (m, m) geht davon aus, daß jede solche Transformation in die direkte Summe einer selbstadjungierten und einer sogenannten Primtransformation zerlegbar ist, welche dadurch definiert wird, daß sie in keinem sie reduzierenden Unterraum selbstadjungiert ist. Folgende Resultate betreffen zumeist Primtransformationen: a) Dafür, daß sich das Spektrum einer beliebigen selbstadjungierten Fortsetzung von H in $a < \lambda < b$ nicht häuft, ist notwendig und hinreichend, daß gewisse Funktionen $\Phi_\mu(\lambda)$ in einem das Intervall $a \leqq \lambda \leqq b$ enthaltenden achsenparallelen abgeschlossenen Rechteck der komplexen λ Ebene stetig sind (1, Th. 5). Die Funktionen $\Phi_\mu(\lambda)$, $\mu = 1, \ldots, m$, spannen für $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ den Eigenraum von H^* zum Eigenwert λ auf und sind durch die Gleichungen $(x - y)\, R_y\, \Phi_\mu(x) = \Phi_\mu(x) - \Phi_\mu(y)$ normiert. (R_z die Resolvente der selbstadjungierten Fortsetzung.) b) Bestimmung aller Transformationen mit Defektindizes (m, m), die Einschränkungen einer vorgegebenen selbstadjungierten Transformationen sind (2, § 6). c) Bei der Fortsetzung einer (m, m)-Primtransformation zur selbstadjungierten Transformation können m Punkteigenwerte willkürlich vorgegeben werden (2, Th. 12). d) Analytische Darstellung der Resolventen aller selbstadjungierten Fortsetzungen einer (1,1)-Primtransformation wenn irgendeine dieser Fortsetzungen diskretes Spektrum besitzt (3, Th. 1), Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen dafür, daß eine (1,1)-Primtransformation durch eine Jacobimatrix dargestellt werden kann (3, Th. 3). e) Charakterisierung von abgeschlossenen, hermiteschen Operatoren, die eine Darstellung als gewöhnliche Differentialoperatoren besitzen durch die Eigenschaft, nach passender Einschränkung mit einer gewissen Schar von Projektionen vertauschbar zu sein (neben anderen Bedingungen) (4, Main Theorem). Z. B. ist $\frac{d}{dx}$ mit folgenden Projektionen P_s vertauschbar: $P_s f = f(x)$, $x \leqq s$, $= 0$, $x > s$, sofern der Definitionsbereich auf die Funktionen eingeschränkt wird, die für $x = s$ verschwinden. Operatoren mit der erwähnten Vertauschungseigenschaft werden „von der Klasse P" genannt. Nicht alle Operatoren von der Klasse P sind durch Differentialoperatoren darstellbar, vielmehr muß eine Differenzierbarkeitsbedingung für die Vektoren der Defekträume erfüllt sein. Gilt diese nur in abgeschwächter Form, so genügt statt dessen $f = R_i g$ einer gewissen Differentialgleichung $L f = D g$ mit zwei linearen Differentialausdrücken L und D. f) Angabe eines Kriteriums für Unbestimmtheit des Momentenproblems $c_k = \int_{+\infty}^{+\infty} \lambda^\nu \, d\varrho(\lambda)$ (3, Th. 4). (1) und (4) sind im wesentlichen Zusammenfassungen von (2) bzw. (5). *H. O. Cordes.*

Livshitz, M. S.: On a certain class of linear operators in Hilbert space. Mat. Sbornik, n. Ser. **19 (61)**, 239—262 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Soit A un opérateur hermitien ayant les indices de défaut (1,1) et A^* son adjoint. L'opérateur B est appelé quasi-hermitien si $A < B < A^*$. Par la transformation $V = (A - iE)(A + iE)^{-1}$ on passe aux opérateurs quasi-unitaires, définis par $T_a f = V f$ ($f \in D_V$) et $T_a g = a g'$ où $g \in D_V$, $g' \in V(D_V)$, $g \perp g'$, sont fixés. On suppose de plus que $|a| \leqq 1$ et V n'est pas unitaire sur un sous-espace de D_V. A l'opérateur V' on fait correspondre la fonction caractéristique $W(\zeta, a) = \langle T_a g_\zeta, \bar{g} \rangle - \zeta \langle g_\zeta, \bar{g} \rangle$ où $g_\zeta = (E - \zeta T_a^*)^{-1} g$, $\bar{g}_\zeta = (E - \bar{\zeta} T_a)^{-1} g'$. Le spectre de T_a est formé par les zéros de l'équation $W(\zeta, 0) = a$ si $|\zeta| < 1$ et par les sin-

gularités de la fonction $W(\zeta, 0)$ sur $|\zeta| = 1$. On applique ces résultats aux opérateurs $y'' + \varrho(x)\, y$, $y(0) = 0$, $c_1\, y(a) + c_2\, y'(a) = 0$ et $\frac{1}{i}\, y'$, $y(0) = y(a) = 0$.
G. Marinescu.

Lifshitz, I. M.: On the theory of regular perturbations. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **48**, 79—81 (1945).

On étudie des opérateurs de la forme $T = L + t\,\Lambda$ où L et Λ sont des opérateurs hermitiens et t nombre réel, avec des conditions concernant les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ de L et les nombres $l_{pq} = \langle \Lambda\, \psi_p, \psi_q \rangle$, où $\psi_1, \psi_2, \ldots$ sont les éléments propres normés de L. On donne l'équation des valeurs propres et l'expression des éléments propres de T, si la série $\sum l_{pq}^2 / |\lambda_p\, \lambda_q|$ est convergente.
G. Marinescu.

v. Sz. Nagy, Béla: Störungen im Hilbertschen Raume. I, II. Math. Naturw. Anz. Ungar. Akad. Wiss. **61**, 755—775 (1942); **62**, 63—79 (1943) [Ungarisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Vgl. dies. Zbl. **35**, 200, erstes Referat.

Alonso, Marcelo: Einige Eigenschaften Hermitescher Operatoren. Revista Soc. Cubana Ci. fís. mat. **2**, 87—91 (1946) [Spanisch].

1. Sind alle Eigenwerte des Operators A reell, sind die Eigenvektoren von A paarweise orthogonal und spannen den ganzen Raum auf, dann ist A hermitesch. 2. Sind A und B hermitesch, dann ist $AB + BA$ hermitesch. *J. Horváth.*

Pontrjagin, L.: Hermitian operators in spaces with indefinite metric. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **8**, 243—280 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

L'A. considère dans l'espace hilbertien H_k des suites $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots)$ le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = -\sum_{i=1}^{k} x_i\, \bar{y}_i + \sum_{i=k+1}^{\infty} x_i\, \bar{y}_i \tag{1}$$

et étudie les opérateurs symétriques et hermitiens définis à l'aide de (1). Un opérateur symétrique peut avoir valeurs propres non-réelles, mais on a

$$\varrho(\lambda_1) + \varrho(\lambda_2) + \cdots + \varrho(\lambda_n) \leqq k$$

où $\varrho(\lambda_i)$ désigne le nombre de dimensions du sous-espace propre correspondant à λ_i et $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_j$ (n étant quelconque). Tout opérateur hermitien A admet un sous-espace invariant I sur lequel $\langle x, x \rangle \leqq 0$ et dont les valeurs propres correspondantes ont les parties imaginaires non-négatives. La forme $\langle x, x \rangle$ est non-dégénérée sur la somme directe K des sous-espace propres correspondants aux valeurs propres non-réelles de A. L'espace H_k se décompose ainsi sous la forme $H_k = K \oplus H_{k'}$.
G. Marinescu.

Neumark, M. A.: On spectral functions of a symmetric operator. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **7**, 285—296 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Neumark, M. A.: On extremal spectral functions of a symmetric operator. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **54**, 7—9 (1946).

Les fonctions spectrales d'un opérateur symétrique fermé sont représentées à l'aide de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(u)\, g}{u - \lambda}$. L'ensemble de ces fonctions est convexe. Les fonctions extrémales sont caractérisées en termes de l'extension autoadjointe, H', qui définit la fonction spectrale: $B(\Delta)$ est extrémale si tout opérateur A hermitien positif dans H', permutable avec H' et satisfaisant à la condition $\langle Af, g \rangle = \langle f, g \rangle$, est réduit par H (H étant l'espace de Hilbert initial et H' son extension minimale qui permet la construction de $B(\Delta)$). *G. Marinescu.*

(1) **Cooper, J. L. B.: The spectral analysis of self-adjoint operators.** Quart. J. Math., Oxford Ser. **16**, 31—38 (1945).

(2) **Eberlein, William F.: A note on the spectral theorem.** Bull. Amer. math. Soc. **52**, 328—331 (1946).

(1) Anstatt der üblichen Selbstadjungiertheit wird folgende Bedingung (a) als Ausgangspunkt zum Beweis des Spektralsatzes für Operatoren H eines Hilbertraumes benutzt: (a) H ist symmetrisch; für alle φ einer überall dichten Mannigfaltigkeit ist das Anfangswertproblem $i^{-1}\, d\,\psi(t)/dt = H\,\psi(t), \psi(0) = \varphi$, die „Schrödingergleichung", auflösbar. Der Beweis benutzt sehr wesentlich die Fourierzerlegung und insbesondere als Haupthilfsmittel zur Gewinnung der Spektralschar den Bochnerschen Darstellungssatz für positiv definite Funktionen. Die Bedingung (a) wird als im wesentlichen äquivalent zur Bedingung der Selbstadjungiertheit erkannt. (2) Zurückführung des Spektralsatzes für beschränkte selbstadjungierte Operatoren H auf den Rieszschen Darstellungssatz für lineare Funktionale, die auf dem Banachraum der stetigen Funktionen $p(t)$ eines endlichen Intervalls erklärt sind. Das Funktional wird gewonnen durch Betrachtung von $(p(H)\,f, g)$ als Funktional von p. *H. O. Cordes.*

Wavre, Rolin: Le spectre et la théorie du rang. C. r. Soc. Physique Genève **60**, 194—196 (1943).

Wavre, Rolin: Sur la décomposition spectrale des opérateurs hermitiens. C. r. Soc. Physique Genève **61**, 154—155 (1944).

Wielandt, Helmut: Das Iterationsverfahren bei nicht selbstadjungierten linearen Eigenwertaufgaben. Math. Z. **50**, 93—143 (1944).

Analyse spectrale utilisant les itérées des opérateurs. R. Wavre étudie le carré d'un opérateur hermitien et H. Wielandt opérateurs algébriques et opérateurs intégrales correspondant aux problèmes aux limites. *G. Marinescu.*

Zitlanadze, E. S.: On certain problems concerning eigenvalues for non-linear operators in the Hilbert space. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **53**, 307—309 (1946).

L'A. généralise le problème en considérant les éléments critiques sur une variété H_0 définie par les relations $\varphi_i(x) = 0$ où $\varphi_i (i = 1, \ldots, n)$ sont des fonctionnelles. *G. Marinescu.*

Soboleff, V. I.: Sur les éléments caractéristiques de certains opérateurs non linéaires. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **31**, 735—737 (1941).

On applique la méthode variationnelle initiée par L'A. et Lusternik aux opérateurs qui sont les dérivées de certaines fonctionnelles définies sur l'espace de Hilbert H (les AA. appellent ces opérateurs symmétriques). Soient f une fonctionnelle définie sur H, $f' : x \to f'x$ sa dérivée (définie par la relation $df(x, h) = \langle f'x, h\rangle$). L'A. démontre l'existence d'une infinité de valeurs propres pour f, ayant des éléments propres sur la sphère unité, moyennant les hypothèses: $\langle f'x, x\rangle > 0$ pour $x \neq 0$, $f'(-x) = -f'x$, $\|f'x - f'y\| = M\|x - y\|$. *G. Marinescu.*

Shin, D.: Quasi-differential operators in Hilbert space. Mat. Sbornik, n. Ser. **13 (55)**, 39—70 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

L'A. étend aux opérateurs différentiels d'ordre n la méthode employée par M. H. Stone pour les opérateurs du deuxième ordre. On définit l'opérateur $f^{[n]}$ et son adjoint $g^{\{n\}}$ par les formules $f^{[0]} = P_{00}\, f$,

$$f^{[j]} = i\,P_{jj}\frac{d}{dx}\,f^{[j-1]} + \sum_{k=1}^{j-1} P_{jk}\,f^{[k]}, \qquad g^{\{j\}} = i\,Q_{jj}\frac{d}{dx}\,g^{\{j-1\}} + \sum_{\nu=0}^{n-1} Q_{j\nu}\,g^{\{\nu\}}$$

où $Q_{j\nu} = \overline{P}_{n-\nu,n-j}\,\overline{P}_{n-j,n-\nu} / P_{n-\nu,n-\nu}$ et l'on démontre la formule de Lagrange

$$\langle f^{[n]}, g\rangle - \langle f, g^{\{n\}}\rangle = \sum_{j=1}^{n} f^{[n-j]}\,\overline{g}^{\{j-1\}}\,|_a^b.$$

On étudie l'équation $f^{[n]} - \lambda f$ dans le cas où $f^{[n]}$ est autoadjoint et l'on détermine le nombre des solutions linéairement indépendantes avec des conditions de la forme $\int_a^c |f|^2 dx < \infty$ ou $\int_c^b |f|^2 dx < \infty$ $(a < c < b)$. *G. Marinescu.*

Friedrichs, K. O.: The identity of weak and strong extensions of differential operators. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 132—151 (1944).

Der Differentialoperator $E = A_\mu \partial/\partial x_\mu + B$ ($A_\mu, \mu = 1, \ldots, n$, und $B = s \times t$-Matrizen mit stetig differenzierbaren bzw. stetigen Koeffizienten) wird durch zwei Verfahren der starken und schwachen Fortsetzung hinsichtlich der L_p-Metrik aus dem Raum C^1 aller in einem Gebiet R des $(x_1, \ldots, x_n)$-Raumes stetig differenzierbaren Funktionen auf die Räume $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ fortgesetzt. Hauptresultat: $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$. Die starke Fortsetzung entspricht dem gewöhnlichen starken Abschließen im L_p, wenn der starke Konvergenzbegriff im L_p folgendermaßen variiert wird: $f_n \to f$ heißt $\|f_n - f\|_{R'} \to 0$ für jedes R', das in einem kompakten Unterbereich von R enthalten ist. Die schwache Fortsetzung dagegen kann etwa im Falle des Hilbertraumes L_2 definiert werden als Adjungierte des Operators $E^* = (\partial/\partial x_\mu) A_\mu^* + B^*$ im Bereich aller stetig differenzierbaren Funktionen, die in einer Umgebung des Randes verschwinden. Betreffend inzwischen erfolgter Anwendungen dieses Resultats vgl. z. B. Friedrichs (dies. Zbl. **51**, 327). Einige weitere Sätze mit verwandten Aussagen. *H. O. Cordes.*

Kondrachov, W.: Sur certaines propriétés des fonctions dans l'espace. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **48**, 535—538 (1945).

Die von F. Rellich (vgl. Courant-Hilbert, Methoden d. Math. Physik II) für zweidimensionale spezielle Gebiete G bewiesene Auswahleigenschaft von Funtionenmengen mit $\int_G |u|^2 dx \leqq c$, $\int_G |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \leqq c$ wird auf den Fall der L_p-Metrik und höhere Ableitungen sowie allgemeinere Klassen von Gebieten verallgemeinert. Ergebnis: Die Einheitskugel im Raum L_p^ν aller Funktionen, die mit ihren Ableitungen bis zur ν-ten Ordnung einschließlich im L_p liegen, ist kompakt im Raum $L_q^{\nu-k}$, falls $q^{-1} > p^{-1} - k n^{-1}$, $n k^{-1} \geqq p \geqq 1$. (Von S. Soboleff wurde früher bewiesen, daß jede Kugel im L_p^ν einer Kugel in jedem $L_q^{\nu-k}$ angehört, wenn $q^{-1} > p^{-1} - k n^{-1}$, $n k^{-1} \geqq p \geqq 1$ gilt.) Die Beweise sind nur angedeutet. Im Verein mit der Friedrichschen Ungleichung sollen sich ferner Abschätzungen von Funktion und Ableitungen durch ihre Werte auf $(n-1)$-dimensionalen Untermannigfaltigkeiten, wie sie bei Existenzbeweisen für Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen wichtig sind, ergeben. *H. O. Cordes.*

Ville, Jean: Sur l'opérateur $\exp\{x + (d/dx)\}$. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 529—530 (1945).

Aronszain, N.: La théorie des noyaux réproduisants et ses applications. I. Proc. Cambridge philos. Soc. **39**, 133—153 (1943).

Zu gewissen Hilberträumen, deren Elemente Funktionen sind (Klassen hinsichtlich eines Maßes äquivalenter Funktionen sind in diesem Zusammenhang keine Funktionen) existieren Funktionen $N(x, y)$, so daß $N(x, y)$ für jedes feste x Element aus H ist und daß gilt $f(x) = [N(x, y), f(y)]_y$, wo $[.,.]$ das Skalarprodukt in H bezeichne. Der gewöhnliche L_2 kommt für obige Untersuchungen nicht in Betracht, dagegen wohl der Raum aller totalstetigen $f(x)$ mit $\int |f'|^2 dx < \infty$, die einer Randbedingung genügen. Es werden für solche $N(x, y)$ (noyaux réproduisants) gewisse Eigenschaften hergeleitet. *H. O. Cordes.*

Fortet, R.: Quelques théorèmes relatifs au calcul du rayon polaire d'une opération linéaire. Rev. sci. **77**, 496—498 (1939).

Démonstration de résultats énoncés dans la thèse de l'A. (ce Zbl. **21**, 338). *A. Revuz.*

Persson, Karl: Sur un système d'équations linéaires. Ark. Mat. Astr. Fys. 32A, Nr. 12, 8 p. (1945).

Wintner, Aurel: A solution theory of the Möbius inversion. Amer. J. Math. 68, 321—339 (1946).

Den für die analytische Zahlentheorie wesentlichen linearen Gleichungssystemen $\sum_{m=1}^{\infty} x_{mn} = y_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} \mu(m)\, y_{mn} = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (μ bedeutet die Möbiusfunktion) entsprechen die Matrizen $E = (\varepsilon_{ik})$ bzw. $M = (\mu_{ik})$ mit $\varepsilon_{ik} = 1$ und $\mu_{ik} = \mu(k/i)$, wenn i Teiler von k, und $\varepsilon_{ik} = \mu_{ik} = 0$ sonst. Für die Auflösungstheorie dieser Gleichungssysteme ergibt sich jedoch folgende vom Verf. bewiesene Schwierigkeit: Die Produkte ME und EM dieser unendlichen Matrizen existieren zwar und liefern die Einheitsmatrix, jedoch sind diese Matrizen nicht zu einander invers. M ist zwar die einzige Matrix, für die ME die Einheitsmatrix I ist, und entsprechend ist E einzige Matrix mit $EM = I$; umgekehrt ist jedoch M nicht die einzige Matrix mit $EM = I$ und E nicht die einzige Matrix mit $ME = I$. Verf. nennt eine Lösung x des ersten Gleichungssystems regulär, wenn $\sum |x_n| < \infty$; hyperregulär, wenn x außerdem durch das zweite System geliefert wird. Verf. beweist eine Reihe von Sätzen über die Existenz solcher Lösungen (entsprechend bei Vertauschung der Rollen beider Systeme) und über das irreguläre Verhalten von Lösungen. Z. B. wird gezeigt: Notwendig für die Existenz einer regulären Lösung ist $\lim y_n = 0$; nicht notwendig hingegen ist die Konvergenz der Reihe $\sum y_n$. Umgekehrt ist $\sum |y_n| < \infty$ auch nicht hinreichend, während $\sum 2^{\nu(n)} |y_n| < \infty$ ($\nu(n)$ = Anzahl der verschiedenen Primteiler von n) eine hinreichende Bedingung darstellt. Im letzten Fall gibt es dann sogar eine eindeutig bestimmte hyperreguläre Lösung. *H.-J. Kowalsky.*

● **Hellinger, E. D.: Spectra of quadratic forms in infinitely many variables.** Northwestern University Studies in Mathematics and the Physical Sciences, Nr. 1: Mathematical Monographs, vol. 1, p. 133—172. Graduate School, Northwestern University, Evanston, Ill., 1941. $ 2,25.

Darstellung (ohne Beweise) der Spektraltheorie unendlicher Matrizen an Hand von Beispielen. *D. Morgenstern.*

Kantorovitch, L. V.: On an effective method of solving extremal problems for quadratic functionals. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 455—460 (1945).

Das jetzt in der UdSSR als Methode von Kantorovitch bekannte Verfahren: $I(f)$ sei (quadratisches) Funktional im linearen normierten Raume. Die Extremalfolge $f_0, f_1, \ldots$ wird folgendermaßen konstruiert: f_0 beliebig; $f_1 \overset{\text{def}}{=} f_0 + \varepsilon_1 g$, wobei g der Ableitung $\frac{d}{d\alpha} I(f_0 + \alpha g)|_{\alpha=0} = 0$ bei $\|g\| = \text{const}$ ein Extremum erteilt; $I(f_0 + \varepsilon g_1) = \text{extr.}$ für $\varepsilon = \varepsilon_1$. Dieselbe Prozedur wird für f_1 (statt f_0) wiederholt usw. [keine allgemeinen Konvergenzkriteria (Ref.)]. Anwendungen: Lineare Gleichungen mit symmetrischem Operator, 1) im endlichdimensionalen unitären Raume, 2) im Hilbertschen Raume; 3) Fredholmsche Integralgleichung; 4) Randwertaufgaben für formal selbstadjungierte Differentialgleichungen 2. Ordnung. Konvergenz für 1)—4) wird untersucht. *K. Maurin.*

Nikolsky, S.: Linear equations in normed linear spaces. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 7, 147—166 (1943) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Es werden Funktionalgleichungen von der Form $x - \lambda A x = y$ betrachtet, wo x, y Elemente eines Banachraumes E und A ein linearer Operator in E sind. Insbesondere werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß die Riesz-Schaudersche Theorie sich auf diese Gleichung ausdehnen läßt. (Dort wird nur der Fall behandelt: A vollstetig.) *Béla Sz.-Nagy.*

Monna, A. F.: Lineare Funktionalgleichungen in nichtarchimedischen Banach-Räumen. Nederland. Akad. Wet., Verslag Afd. Natuurk. 52, 654—661 (1943) [Holländisch mit deutsch., engl. und französ. Zusammenfassg.].

Schönberg, Mario: Grundlagen einer Theorie der Greenschen Funktionen. Anais. Acad. Brasil. Ci. 13, 85—96 (1941) [Portugiesisch].

Hyers, D. H.: On the stability of the linear functional equation. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 222—224 (1941).

An operation f from one Banach space into another is called δ-additive (in the paper δ-linear) if $\|f(x+y)-f(x)-f(y)\|<\delta$ for every x, y. It is proved that for every δ-additive operation f there exists an unique additive operation g such that $\|f(x)-g(x)\| \leqq \delta$ for every x; if in addition f is continuous at one point, g is continuous everywhere; if $f(t\,x)$ is only continuous as function of the numerical variable t for every x, then g is homogeneous. The operation is defined simply as $g(x)=\lim_{n\to\infty} 2^{-n} f(2^n x)$. *A. Alexiewicz.*

San Juan, R.: Eine Anwendung diophantischer Approximationen auf die Funktionalgleichung $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$. Univ. nac. Litoral, Inst. Mat., Publ. 6, 221—224 (1946) [Spanisch].

Alexiewicz, A. et W. Orlicz: Remarques sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Fundamenta Math. 33, 314—315 (1945).

Ridder, J.: On the additive functional equation and an additive functional congruence. Euclides, Groningen 18, 84—92 (1941).

Montel, Paul: Sur deux systèmes d'équations fonctionnelles. Mathematica, Timişoara 21, 10—11 (1945).

Etude d'un système d'équations fonctionnelles satisfaites par $\sin x$ et $\cos x$. *M. Hukuhara.*

Alaci, V.: Sur deux équations fonctionnelles. Mathematica, Timişoara 19, 23—25 (1943).

Etude des équations fonctionnelles satisfaites par $(1+\cot a\,x)^{-1}$, $(1+\tan b\,x)^{-1}$. *M. Hukuhara.*

Haruki, Hiroshi: On a certain simultaneous functional equation concerning the elliptic functions. Proc. phys.-math. Soc. Japan 24, 450—454 (1942).

Etude des équations fonctionnelles satisfaites par $\mathrm{sn}\,x$, $\mathrm{cn}\,x$, $\mathrm{dn}\,x$. *M. Hukuhara.*

Van der Lyn, G.: Sur l'équation fonctionnelle $f(x+y)+f(x-y)=f(x)\,\varphi(y)$. Mathematica, Cluj 16, 91—96 (1940).

En supposant que f et φ sont finies et ont la propriété de Baire dans le complémentaire d'un ensemble de première catégorie, la seule solution non banale est $f(x)=\alpha e^{\sqrt{a}\,x}+\beta e^{-\sqrt{a}\,x}$, $\varphi(x)=\frac{1}{2}(e^{\sqrt{a}\,x}+e^{-\sqrt{a}\,x})$, où α, β, a sont arbitraires. *G. Marinescu.*

Bagchi, Hari Das: On a class of functional equations. Sankhyā 5, 71—78 (1940).

Intégration de certaines équations fonctionnelles, en supposant quelques solutions particlières connues. *M. Hukuhara.*

Angheluta, Th.: Kreistransformationen charakterisiert durch eine Funktionalgleichung. Gaz. mat., Bucureşti 51, 94—98 (1946) [Rumänisch].

Etude de l'équation fonctionnelle satisfaite par des fonctions de $(a\,t+b)/(c\,t+d)$. *M. Hukuhara.*

van der Corput, J. G.: A remarkable family. Euclides, Groningen 18, 50—78 (1941).

Etude des équations fonctionnelles suggérées par des fonctions circulaires. *M. Hukuhara.*