Werk

Titel: Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1961

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0061|log24

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Jackson, F. H.: q^θ-equations and Fibonacci numbers. Quart. J. Math., Oxford Ser. **12**, 211—215 (1941).

Sei $|q| < 1$, $q^\theta = \exp[(\log q)\, x(d/dx)]$. Verf. zeigt, daß die Funktionalgleichung $(q\, x^2 q^{2\theta} + x\, q^\theta - 1)\, y = 0$ eine Lösung der Gestalt $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n x^n$ hat, deren Koeffizienten mit Hilfe der Fibonaccischen Zahlen F_r in der Gestalt $A_n = q^{n(n-1)/2}(F_{n-1} A_0 + F_n A_1)$ dargestellt werden können. Eine analoge, aber kompliziertere Darstellung gilt für die Lösung einer speziellen Funktionalgleichung 3. Ordnung. *W. Hahn.*

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Petrovskij, I. G.: Über einige Probleme der Theorie der partiellen Differentialgleichungen. Uspechi mat. Nauk., n. Ser. **1**, Nr. 3—4 (13—14), 44—70 (1946) [Russisch].

Bericht.

Gillis, Paul: Sur les formes différentielles et la formule de Stokes. Acad. roy. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8°, II. Sér. **20**, Nr. 3, 95 p. (1943).

Beweise zu einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 28, 63).

Martinelli, Enzo: Sopra un teorema fondamentale della teoria dei sistemi di equazioni alle forme differenziali. Atti Accad. Italia, Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur. **14**, 175—190 (1943).

L'A. dà una nuova dimostrazione del così detto „primo teorema di esistenza di Cartan" che stabilisce l'esistenza di una varietà integrale di dimensione $p+1$, passante per un'assegnata varietà integrale di un sistema $\omega^{(1)} = 0$, $\omega^{(2)} = 0, \ldots,$ $\omega^{(r)} = 0$ di forme differenziali di gradi arbitrari, di dimensione p. Di questo teorema di E. Cartan, dimostrato nel caso generale da J. M. Thomas [questo Zbl. 9, 109] e da E. Kaehler [questo Zbl. 11, 161] l'A. mostra quali siano gli elementi essenziali per l'acquisizione del risultato. L'A. premette per la forma differenziale $\omega = \sum_{i_1, \ldots, i_k} a_{i_1, \ldots, i_k}(x_1, \ldots, x_n)\, d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ di grado k, definnita sopra una varietà orientabile V_{k+1} a $k+1$ dimensioni di contorno $C(V_{k+1})$ una dimostrazione del teorema di Green-Stokes $\int_{C(V_{k+1})} \omega + \int_{V_{k+1}} d\omega = 0$ fondata sull'applicazione del principio di Severi „dell'estensione dal reale al complesso [questo Zbl. 2, 342] e successivamente passa al teorema di Cartan. Acuta e sottile l'indagine per precisare i caratteri di regolarità della generica faccetta a p dimensioni della V_p prefissata, che bastano ad assicurare la validità del teorema; si dimostra che tali caratteri coincidono con quelli richiesti, per le sue deduzioni, da E. Kaehler. *G. Sansone.*

Fichera, Gaetano: Sulle condizioni necessarie e sufficienti per l'integrabilità in grande delle forme differenziali esterne. Matematiche, Catania **2**, 20—24 (1946).

Trattasi di un chiaro riassunto dei risultati di una Memoria successivamente pubblicata dall'A. nel 1947 [questo Zbl. 36, 65]. *G. Sansone.*

Debever, R.: Quelques problèmes d'équivalence de formes différentielles alternées. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **31** (1945), 262—277 (1946).

Riblet, Henry J.: Symmetric differential expressions. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 871—873 (1942).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 25, 105) zeigte Verf., daß sich jedes symmetrische Differentialpolynom durch die elementarsymmetrischen Funktionen, ihre Ableitungen und gewisse negative Potenzen der Diskriminante ausdrücken läßt. Es wird ein Exhaustionsverfahren angegeben, daß eine einfachere

effektive Berechnung dieser Darstellung gestattet und unnötige Potenzen der Diskriminante vermeidet. *H.-J. Kowalsky.*

Ritt, J. F.: On the manifolds of partial differential polynomials. Ann. of Math., II. Ser. 46, 102—112 (1945).

Ritt, J. F.: Analytic theory of singular solutions of partial differential equations of the first order. Ann. of Math., II. Ser. 46, 120—143 (1945).

F sei ein algebraisch irreduzibles partielles Differentialpolynom mit Koeffizienten aus einem partiell differenzierbaren Körper der Charakteristik Null. Σ sei das von F erzeugte perfekte Ideal. Weiter bedeute S die hinsichtlich einer fest gewählten Anordnung der Unbestimmten und ihrer Ableitungen gebildete Separante von F ($S = \partial F/\partial p$, wobei p die höchste Ableitung in der gewählten Anordnung ist). Ist dann Σ_1 die Menge aller Differentialpolynome A mit $SA \subsetneq \Sigma$, so erweist sich Σ_1 als unabhängig von der gewählten Anordnung, und die zu Σ_1 gehörende Lösungsmannigfaltigkeit heißt die allgemeine Lösung von F. Das Hauptergebnis der ersten Arbeit ist der Satz: Jede wesentlich irreduzible Komponente der Lösungsmannigfaltigkeit von F ist allgemeine Lösung eines Differentialpolynoms. Oder gleichwertig: Das dieser Komponente entsprechende Primideal wird von einem einzigen Differentialpolynom erzeugt. — Diese Ergebnisse und Methoden werden in der zweiten Arbeit herangezogen, um Aussagen über die singulären Lösungen einer (algebraisch irreduziblen) partiellen Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q) = 0$ erster Ordnung zu gewinnen. Singuläre Lösungen können wesentlich sein, oder sie können in der allgemeinen Lösung enthalten sein. Die ersteren werden durch in z algebraische Gleichungen $A(x, y, z) = 0$ gegeben; und umgekehrt kann entschieden werden, wann solche Lösungen wesentlich singulär sind. Diese Kriterien fußen auf einer Reihenentwicklung der Lösung nach (im allgemeinen gebrochenen) Potenzen von q mit Koeffizienten, die von x, y und p/q abhängen. Es werden diejenigen singulären Lösungen gekennzeichnet, die Enveloppen von nichtsingulären Lösungen sind. Und auch die singulären Lösungen, die nicht als Enveloppen darstellbar sind, erfahren eine vollständige Charakterisierung. Der Fall von mehr als zwei unabhängigen Variablen wird abschließend in gedrängter Form besprochen. *H.-J. Kowalsky.*

Levi, Howard: The low power theorem for partial differential polynomials. Ann. of Math., II. Ser. 46, 113—119 (1945).

F und A seien zwei algebraisch irreduzible partielle Differentialpolynome, und die allgemeine Lösung von A sei in der Lösungsmannigfaltigkeit von F enthalten. Verf. gibt ein notwendiges und hinreichendes Kriterium (low power theorem) dafür an, daß die allgemeine Lösung von A in der zu F gehörenden Lösungsmannigfaltigkeit eine wesentliche Mannigfaltigkeit darstellt. Dieses Kriterium stellt eine Verallgemeinerung des entsprechenden Resultats für gewöhnliche Differentialgleichungen dar. *H.-J. Kowalsky.*

Snapper, Ernst: Partial differentiation and elementary divisors. Ann. of Math., II. Ser. 46, 388—408 (1945).

Es sei S ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen in einer abhängigen und n unabhängigen Variablen t_ν mit konstanten Koeffizienten aus einem Körper der Charakteristik Null. Ersetzt man in den zu S gehörenden Differentialpolynomen die Operatoren $\partial/\partial t_\nu$ durch Unbestimmte x_ν, so erhält man Polynome in diesen Unbestimmten, die ein Ideal $\mathfrak{a}$ im entsprechenden Polynomring aufspannen. Verf. zeigt, daß jedes dem Ideal $\mathfrak{a}$ zugeordnete Primideal eine Exponentiallösung von S bestimmt. Jeder solchen Lösung wird ein Exponent δ zugeordnet, der der um eins vermehrte Höchstgrad derjenigen Polynome ist, mit denen die Exponentiallösung multipliziert werden darf, um wieder auf eine Lösung von S zu führen. Die Beziehungen des Exponenten δ zu anderen algebraischen Größen wird untersucht. Im Fall des Körpers der komplexen Zahlen

wird außerdem die Anzahl der möglichen Anfangsbedingungen berechnet. Abschließend werden die Abweichungen im Falle eines Grundkörpers von Primzahlcharakteristik behandelt. *H.-J. Kowalsky.*

Lopatinsky, J.: Linear differential operators. Mat. Sbornik, n. Ser. **17 (59)**, 267—288 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Sei π der Ring der endlichen Differentialoperatoren $\sum a_{i_1 \ldots i_n} D_1^{i_1} \ldots D_n^{i_n}$ in denen die $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ und die $a_{i_1 \ldots i_n}$ Elemente aus dem Quotientenkörper $C(x)$ des Ringes der formal gebildeten Potenzreihen in den $x_1, \ldots, x_n$ mit komplexen Koeffizienten sind. Unter einem linken k-Modul wird eine Menge M von einzeiligen Matrizen mit k-Elementen aus π verstanden, so daß mit λ und μ auch $\lambda + \mu$ und $\alpha \mu$ für alle α aus π in M liegen. Eine einspaltige Matrix u mit k-Elementen aus dem Ring der Potenzreihen in $x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n$ mit Koeffizienten aus $C(x)$ heißt Integral von M, falls $\lambda \mu = 0$ für alle λ aus M. Die Menge aller dieser Integrale bildet die Integralmannigfaltigkeit von M. [Die Definitionen weichen ab von denen bei I. F. Ritt (dies. Zbl. 5, 394).] Sätze über π, über die M und ihrer Integralmannigfaltigkeiten. *Adam Schmidt.*

John, Fritz: Linear partial differential equations with analytic coefficients. Proc. nat. Acad. Sci. USA **29**, 98—104 (1943).

L'A. considère une équation linéaire aux dérivées partielles non homogène, d'ordre m, à n variables indépendantes réelles et examine particulièrement l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour une telle équation ainsi que leur caractère fonctionnel. Les coefficients de l'équation et les données initiales sont des fonctions analytiques régulières des variables indépendantes. L'A. utilise une identité fondamentale du type de l'idendité de Green pour l'équation considérée et pour une famille d'hypersurfaces S_λ dépendant du paramètre λ. En choisissant convenablement S_λ, il montre que si les données initiales sont connues sur une hypersurface analytique S_0, elles déterminent univoquement la solution du problème de Cauchy en tout point qui peut être atteint en déformant S_0 de telle manière que le bord de S_0 restant fixe, aucun élément de surface ne possède une normale caractéristique. Ce résultat ne suppose pas la connaissance préalable des variétés caractéristiques; mais, appliqué à des cas particuliers, il conduit à considérer divers types d'équations suivant la nature des variétés caractéristiques. De son résultat général, l'A. déduit quelques renseignements sur l'impossibilité du problème de Cauchy pour certaines hypersurfaces analytiques Σ; en particulier, le problème de Cauchy n'est pas résoluble localement en général s'il existe une variété linéaire à deux dimensions passant par la normale en P à Σ et ne contenant aucune direction caractéristique passant par P. Enfin, l'A. étend le théorème classique de Picard-Bernstein sur l'analyticité des solutions des équations elliptiques à coefficients analytiques. *F. Bureau.*

Trjizinsky, W. J.: Analytic theory of parametric linear partial differential equations. Mat. Sbornik, n. Ser. **15 (57)**, 179—242 (1944) [Englisch mit russ. Zusammenfassg.].

Verf. behandelt partielle Differentialgleichungen, deren Koeffizienten außer von den unabhängigen Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ noch von einem Parameter λ abhängen. Der Variabilitätsbereich der x_ν ist im wesentlichen eine offene, beschränkte und einfach zusammenhängende Teilmenge des n-dimensionalen Euklidischen Raumes, während λ einen unbeschränkten Bereich der komplexen Ebene durchläuft, der entsprechend den Anwendungen noch verschiedenen Bedingungen unterworfen wird. Von den Koeffizienten wird neben entsprechenden Differenzierbarkeitseigenschaften noch vorausgesetzt, daß sie analytische Funktionen von λ sind und eine asymptotische Darstellung als Produkt aus einer λ-Potenz und einer formalen Potenzreihe in $1/\lambda$ gestatten. Untersucht wird die Existenz

von formalen Lösungen in Reihendarstellung, wie sie in einfacheren Fällen bereits von G. D. Birkhoff und vom Verf. behandelt wurden (dies. Zbl. 8, 89, 255; 14, 348). Hierzu wird ein Existenztheorem bewiesen. Anschließend wendet sich Verf. den konkreten (actual) Lösungen zu, die asymptotisch zu den formalen Lösungen sind. Hier werden der elliptische und der hyperbolische Fall zweiter Ordnung behandelt und entsprechende Existenztheoreme hergeleitet. λ wird dabei auf reelle Werte beschränkt. Die russische Zusammenfassung ist eine gekürzte Wiedergabe der Einleitung. *H.-J. Kowalsky.*

Azevedo do Amaral, Ignacio M.: Über die Integration linearer partieller Differentialgleichungen. Anais Acad. Brasil. Ci. **14**, 83—86 (1942) [Portugiesisch].

Bochner, S.: Linear partial differential equations, with constant coefficients. Ann. of Math., II. Ser. **47**, 202—212 (1946).

Solutions faibles d'équations aux dérivées partielles. Ceci a intérêt à être regardé maintenant du point de vue de L. Schwartz (Théorie des distributions, ce Zbl. **37**, 73; **42**, 114). *J. L. Lions.*

Mitrinovitch, D. S.: Sur une équation linéaire aux dérivées partielles. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. **1**, 168—181, 209—226 (1946) [Serbisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ostrowski, Alexander: On the definition of contact transformations. Bull. Amer. math. Soc. **47**, 760—763 (1941).

Abkürzung: $g(z, x_\nu, u_\nu) = g(z, x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_n)$; $p_\nu = \partial z/\partial x_\nu$, $P_\nu = \partial Z/\partial X_\nu$. — Vor. Aus (a) $X_\nu = X_\nu(z, x_\nu;\ p_\nu)$, $Z = Z(z, x_\nu;\ p_\nu)$ folgt (b) $x_\nu = x_\nu(Z, X_\nu;\ P_\nu)$, $z = z(Z, X_\nu;\ P_\nu)$; und umgekehrt. Geeignete Differenzierbarkeitsannahmen über X_ν und Z. — Beh. Es ist (a) eine Berührungstransformation. — Für Transformationen mit mehreren Variablen z_ϱ bzw. Z_ϱ, $\varrho = 1, \ldots, r$ und $r > 1$ gilt dieser Satz nicht, auch nicht für $n = 1$. *Otto Haupt.*

Saltykow, N.: Transformations tangentielles linéaires. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., Sér. A **7**, 71—87 (1941).

L'avantage des transformations considérées se manifeste dans le fait que leurs formes impliquent plus de coefficients que de conditions qui doivent être vérifiées. Par conséquence il est aisé d'en profiter pour simplifier les équations transformées. L'A. indique deux procédés pour un nombre quelconque des variables indépendantes. *C. Orloff.*

Bateman, H.: The transformation of partial differential equations. Quart. appl. Math. **1**, 281—296 (1944).

Übersichtliche Zusammenstellung zahlreicher wichtiger Transformationen partieller Differentialgleichungen. Vornehmlich sind solche Transformationen berücksichtigt, die gewisse lineare Differentialformen in spezielle Typen überführen. Bemerkenswert ist das umfangreiche Literaturverzeichnis.
H.-J. Kowalsky.

Stohler, G.: Über eine Klasse von einparametrigen Differential-Transformationsgruppen. Commentarii math. Helvet. **18**, 76—121 (1946).

Die Arbeit handelt über einparametrige Gruppen von Transformationen der folgenden Gestalt $\xi = \xi(x, y_1, y_2, p_1, p_2, a)$; $\eta_\nu = \eta_\nu(x, y_1, y_2, p_1, p_2, a)$, wo $y_i = y_i(x)$, $p_i = dy_i/dx$ und a der Parameter ist. Diese R-Transformationen sind auch von A. Ostrowski untersucht worden (dies. Zbl. **25**, 329). Es wird gezeigt, daß eine R-Gruppe sich aus einer Lieschen Gruppe in 4 Variabeln herleiten läßt (L-Gruppe). Mittels einer Charakterisierung dieser L-Gruppen gelingt es, diejenigen Differentialgleichungssysteme zu charakterisieren, welche R-Gruppen definieren. Die R-Gruppen lassen sich auch aus besonderen Berührungstransformationsgruppen ableiten. *J. Haantjes.*

Saltykow, N.: Généralisation des recherches de Jacobi sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., Sér. A 6, 71—90 (1939).

L'A. analyse les premières recherches de Jacobi sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, en expliquant son obstinence de publier l'Oeuvre „U. d. Integration d. part. Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen vier Variabeln" (Ges. Werke, Bd. VI), paru que posthumement. Jacobi voulait le garder en reserve, car ce Travail contenait, en fait, bien plus des résultats qu'il ne fallait pour résoudre le problème posé; d'autre part, le texte n'était pas encore mis au point. Le but de l'A. est d'en extraire et de coordonner, dans un ensemble harmonieux, les éléments nécessaires pour composer la théorie qui devait, selon le désir de Jacobi, généraliser la méthode d'intégration de Lagrange et Charpit pour le cas des trois variables indépendantes; celle-ci est étendue, ensuite, sur un nombre quelconque des variables indépendentes. L'A. met en évidence, de cette manière, que la méthode généralisée d'intégration de Jacobi, qui vient d'être exposée, devient le précurseur de son Oeuvre magistrale „Nouvelle Méthode". C'est à l'occasion de son centenaire que le travail de l'A. fut présenté à l'Académie Serbe des Sciences. *N. Saltykow.*

Saltykow, N.: Méthodes immédiates d'intégration d'équations aux dérivées partielles du second ordre. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., Sér. A 6, 215—246 (1939).

L'A. résume ses conférences de Belgique d'introduction dans la théorie générale d'équations aux dérivées partielles du second ordre, inspirées par les idées de Euler. Dans l'Oeuvre de l'illustre géomètre „Institutiones Calculi Integralis" t. III sont inaugurées les méthodes immédiates, évidentes d'intégration des dites équations. Elles sont souvent négligées, et il y a des savants qui, exposant les méthodes connues d'intégration, appliquent ces dernières, à titre d'illustration à d'équations, dont les intégrales sont évidentes. Ainsi, G. Darboux [Leçons s. l. th. d. surfaces (Paris 1894) t. III, no 716] applique la méthode de Monge-Ampère à quatre exemples d'équations immédiatement intégrables. A l'exemple des intégrales indéfinies, les procédés d'intégrabilite s'appliquent, aux équations en question. Le travail analysé est divisé, à cette fin, en plusieurs parties: réduction aux éq. dif. ordinaires; réduction aux éq. aux dér. part. du 1-er ordre; réduction aux dérivées exactes; réduction aux éq. intégrables par groupement des termes; intégration de quelques équations usuelles; généralisation des méthodes exposées. Citons à titre d'exemples l'équation d'Ampère, $z\,s + z\,t/q^2 + p\,q = 0$, qui est une dérivée exacte $\partial(z\,p - z/q)/\partial y + 1 = 0$. L'équation de la théorie mécanique de la chaleur, $r\,t - s^2 + a^2 = 0$ qui s'écrit

$$\frac{\partial(p \pm a\,y)}{\partial x} \cdot \frac{\partial(q \mp a\,x)}{\partial y} - \frac{\partial(p \pm a\,y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial(q \mp a\,x)}{\partial x} = 0$$

et admet deux intégrales intermédiaires, $p + a\,y = \varphi'(q - a\,x)$, $p - a\,y = \psi'(q + a\,x)$, φ' et ψ' désignant les dérivées des fonctions arbitraires φ et ψ. L'intégration de l'équation de Euler, $t - P^2 r = 0$, où $P_y - P\,P_x = 0$, est poussée jusqu'aux quadratures, en nouvelles variables:

$$z_1 = \sqrt{x_1^2 + 2}\,\{\int f(x_1)\,(x + 2)^{-3/2}\,dx_1 + \varphi\,[y_1(x_1^2 + 2)^{-1/2} + \int (x_1^2 + 2)^{-3/2}\,dx_1]\}.$$

f et φ étant deux fonctions abitraires. Voir pour le même sujet N. Saltykow (ce Zbl. 23, 391), A. Buhl, Nouveaux Eléments d'Analyse, t. IV (1943) p. 81.
N. Saltykow.

Saltykow, N.: Équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur réductibles aux celles du premier ordre. Acad. Serbe. Bull. Acad. Sci. math. natur., Sér. A 7, 161—190 (1941).

Pour compléter ses recherches sur les méthodes immédiates d'intégration (voir le rapport ci-dessns) l'A. étudie en I Chap. les équations aux dérivées partielles du second ordre s'exprimant par les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction impliquant les dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue et réductibles aux équations de Charpit. Le II Chap. traite des équations aux dérivées partielles du troisième ordre. On y trouve l'intégrale générale à trois fonctions arbitraires des équations de J. Bertrand et de P. Humbert [J. Math. pur. appl., IX. Sér. 8, 175 (1929)]. Le III Chap. étudie les équations aux dérivées partielles du quatrième ordre. Les intégrales générales à quatre fonctions arbitraires sont données pour l'équation biharmonique généralisé et pour l'équation de M. Ghermanesco [Compt. rendus des Séances de la Soc. Math. de France LIX (1931) p. 42]. Le dernier Chap. considère les équations aux dérivées partielles d'ordres supérieurs à plusieurs fonctions inconnues des deux variables indépendantes aux équations de Charpit.

C. Orloff.

Saltykow, N.: Équations aux dérivées partielles du premier ordre intégrables par séparation des variables. Acad. Serbe, Bull. Acad. Sci. math. natur., Sér. A **7**, 135—159 (1941).

Une nouvelle méthode pour former les équations aux dérivées partielles du premier ordre intégrables par séparation des variables épuisant tout les cas d'intégrabilité. En appliquant la dite théorie aux équations différentielles de dynamique à deux paramètres l'A. établit trois types d'équations intégrables qui généralisent les cas connus d'intégrabilité de Liouville, Stäckel et Levi-Civita. Dans le cas d'un nombre quelconque de variables les équations intégrables sont reparties en plusieurs types singulières et de la forme générale. Ainsi dans le cas de trois variables, il existe trois types d'équations singulières de première classe, autant de seconde classe, une équation de troisième classe et une de la forme générale. Ces résultats généralisent considerablement les théorie connues de P. Brugatti [Atti Accad. reale Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V- Ser. 20_{I}, 108—111 (1911)] et de F. Dall'Acqua [Rend. Circ. mat. Palermo **33**, 341—351 (1912)].

C. Orloff.

Saltykow, N.: Forme générale des équations différentielles de dynamique, à deux paramètres, intégrables par séparation des variables. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **32** (1946), 576—587 (1947).

L'A. applique sa méthode de formation des équations intégrables par séparation des variables (voir le rapport ci-dessus) pour démontrer qu'il n'existe qu'une seule forme générale des équations différentielles hétérogènes de dynamique intégrable par séparation des variables. Deux formes singulières correspondantes sont données dans le mémoire qui vien d'être cité.

C. Orloff.

Saltykow, Nicolas: Généralisation des théorèmes de Jacobi et de Poisson. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 127—128 (1946).

Etant donné un système complet (1) $X_\alpha(f) = 0 (\alpha = 1, \ldots, m')$, et un système d'opérateurs $X_h(f)$ $(h = 1, \ldots, m)$ permutables entre eux et avec $X_\alpha(f)$ on dit que X_α et X_h constituent un système semi-normal. Si f est une solution de (1) alors $X_h(f)$ est aussi une solution. On montre comment cette propriété des systèmes semi-normaux s'étendent aux systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires $F_\alpha(x^1, \ldots, x^n, p_1, \ldots, p_n) = 0$ $(p_i = \partial f/\partial x^i)$.

G. Vranceanu.

Stojadinovitch, M.: Equations aux dérivées partielles de dynamique, à trois paramètres, intégrables par séparation des variables. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **32** (1946), 588—591 (1947).

L'A. applique la théorie de N. Saltykow (v. le deuxième rapport ci-dessus) à la recherche des formes intégrables d'équations de dynamique, à trois paramètres x_1, x_2, x_3, dont la fonction caractéristique est homogène du second degré. Considérant les quatre premiers types correspondant aux cas dits singuliers

de la troisième et seconde classe, on a l'expression suivante de la fonction caractéristique de la troisième classe

$$H \equiv X_1^2(X_3 Z_2^2 + 2 Y_3 Z_2 + Z_3)\,\mu_1^2 + 2X_1 X_2(X_3 Z_2 + Y_3)\,\mu_1 \mu_2 + X_2^2 X_3^2 \mu_2^2 + 2X_1(W_3 Z_2 + \theta_3)\,\mu_1 \mu_3 + 2X_2 W_3 \mu_2 \mu_3 + \Psi_3 \mu_3^2, \quad \mu_i = \partial z/\partial x_i,$$

X_1; X_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3, W_3, θ_3 et Ψ_3 désignant des fonctions arbitraires, chacune d'une seule variable indépendante affectée du même indice. Quant aux équations de la seconde classe, il existe trois types suivants:

1° $H \equiv X_1^2(Y_2^2 X_3 + 2 Y_2 Y_3 + Z_3)(Y_1 + Y_2)^{-2} \mu_1^2 + 2X_1 X_2[Y_1 Y_2 X_3 + (Y_1 - Y_2) Y_3 - Z_3](Y_1 + Y_2)^{-1} \mu_1 \mu_2 + X_2^2(Y_2^2 X_3 - 2Y_2 Y_3 + Z_3)(Y_1 + Y_2)^{-2} \mu_2^2 + 2X_1(Y_2 V_3 - U_2)(Y_1 + Y_2)^{-1} \mu_2 \mu_3 + 2X_2(Y_2 V_3 + U_3)(Y_1 + Y_2)^{-1} \mu_2 \mu_3 + W_3^1 \mu_3$;

2° $H \equiv (a Y_3^2 + 2b Y_3 + c)[X_1(V_3 - V_2) \mu_1 - X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3]^2 (Y_2 + Y_3)^{-2} - 2[X_1(a Y_3 V_3 + b V_3 + d Y_3 + e) \mu_1 + X_3(a Y_3 + b) \mu_3][X_1(V_3 - V_2) \mu_1 - X_2 \mu_2 + X_3 \mu_3](Y_2 + Y_3)^{-1} + X_1^2(a V_3^2 + 2d V_3 + g) \mu_1^2 + 2X_1 X_3(a V_3 + d) \mu_1 \mu_3 + a X_3^2 \mu_3^2$;

X_1, X_2, X_3, Y_2, Y_3, V_2 et V_3 désignant des fonctions arbitraires chacune d'une seule variable indépendante du même indice; a, b, c, d, e, g étant des constantes arbitraires.

3° $H \equiv X_1^2 X_3 \mu_1^2 + 2X_1 X_2 Y_3 \mu_1 \mu_2 + c X_2^2 \mu_2^2 + 2X_1 Z_3 \mu_1 \mu_3 + 2X_2 U_3 \mu_2 \mu_3 + V_3 \mu_3^2$,

les désignations étant analogues aux précédentes. *N. Saltykow.*

Donder, Th. de et J. Géhéniau: Théorie variationnelle des perturbations. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **29**, 637—644 (1943).

On suppose donné un système d'équations aux dérivées partielles $E_\alpha = 0$ à m inconnues y^α et n variables indépendantes x^i. On suppose en outre que les E_α dépendent explicitement d'un paramètre σ par rapport auquel on peut développer les E_α et les y^α en séries de Maclaurin. On obtient ainsi un système infini d'équations aux dérivées partielles en les fonctions y^α et leurs dérivées successives par rapport à σ, pour $\sigma = 0$. Les AA. appliquent ensuite ce résultat au cas particulier d'équations lagrangiennes provenant d'un principe variationnel. *F. Bureau.*

Potier, Robert: Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et du premier ordre, à quatre variables, invariants dans toute transformation de Lorentz. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 638—640 (1946).

On montre que tout système aux dérivées partielles linéaires et du premier ordre à quatre variables invariant par les rotations et les retournements de Lorentz se laisse décomposer en trois types dont on donne la forme. On utilise les notations du livre de E. Cartan Leçons sur la théorie des spineurs (ce Zbl. **19**, 363; **22**, 171). *G. Vranceanu.*

Buhl, Adolphe: Ondes. Analyse. Géométrie. Arithmétique. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **21**, 123—139 (1942).

Ausbreitungsvorgänge bei Erhaltung des Flächeninhaltes (zweidimensional). Die zu untersuchenden Differentialgleichungen sind (1) $z_x^2 + z_y^2 = \lambda(x, y)$ mit gegebenem λ sowie (2) $z_x^2 + z_y^2 = w_x^2 + w_y^2$. Für $\lambda = \mu(x) + \nu(y)$ ist (1) integrierbar. Bei $\lambda = e^{2F}$ wird der Ansatz $z_x = e^F \cos \Phi$, $z_y = e^F \sin \Phi$ gemacht. Das liefert eine quasi-lineare Differentialgleichung für Φ, deren charakteristische Grundkurven einer Differentialgleichung 2. Ordnung genügen, welche in anderem Zusammenhang von Darboux angegeben wurde. — Stellt w eine Schraubenfläche der Gestalt $w = \theta - f(r)$ dar, (r, θ Polarkoordinaten), so besitzt (2) eine Lösung z desselben Typs. *Joachim Nitsche.*

Chiellini, A.: Studio del sistema differenziale $p^2 + q^2 = A(x, y)$, $r + t = 0$. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **12**, 53—68 (1942).

Das Differentialgleichungssystem tritt bei der Behandlung von Kurven auf, bei denen die Krümmung gegenüber einer konformen Transformation nur um einen konstanten Faktor verändert wird. $A(x, y)$ ist dabei als bekannt anzusehen. Die Integrabilitätsbedingung lautet mit $B = A^{-2}$: $B_x^2 + B_y^2 - B(B_{xx} + B_{yy}) = 0$.
Joachim Nitsche.

Bouligand, Georges: Sur les multiplicités caractéristiques de certaines équations aux dérivées partielles. Revue Sci. **79**, 110—112 (1941).

Coutrez, Raymond: Sur les variétés caractéristiques d'un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque. I, II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **29**, 15—30, 71—78 (1943).

L'A. considère un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre p à n variables indépendantes et se propose de rechercher les conditions nécessaires et suffisantes pour que le problème local posé sur une variété V_{n-1} à $n - 1$ dimensins soit „bien posé". Ce problème se ramène à rechercher les conditions pour que les valeurs de certaines fonctions en tout point de V_{n-1} soient univoquement déterminées par les valeurs prises par une solution du système étudié. Si un certain déterminant D est $\neq 0$, le problème local a une solution. Si $D = 0$, V_{n-1} est une caractéristique du système. L'A. montre qu'il est toujours possible de déterminer une solution locale unique par des données supplémentaires sur V_{n-1}. Si les données déterminant la solution sont définies différemment sur les deux faces de V_{n-1}, la solution du système a des singularités sur V_{n-1}. L'A. considère particulièrement ce cas et étudie les discontinuités des dérivées de la solution le long de V_{n-1}. *F. Bureau.*

Baiada, Emilio: Sul problema di Cauchy per le equazioni alle derivate parziali Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. Ser. **12** (1943), 185—188 (1947).

Faedo, Sandro: Ulteriori contributi alla teoria del metodo variazionale. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., II. Ser. **12**, 99—116 (1943).

Si dimostra che, nell'applicazione del metodo variazionale di M. Picone, l'errore quadratico medio tende a zero, nella sola ipotesi che esista una soluzione dell'equazione proposta (o del sistema di equazioni), che soddisfa le condizioni al contorno assegnate. Si estende il metodo a problemi non lineari.
M. Cinquini-Cibrario.

Baiada, E.: Alcune considerazioni sull'esistenza della soluzione delle equazion alle derivate partiali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 296—301 (1946).

Si costruisce un semplice esempio di equazione a derivate parziali $\partial z/\partial x = f(x, y, z, \partial z/\partial y)$ (con $f(x, y, z, q)$ continua), che non ammette soluzione nel campo delle funzioni con derivate parziali limitate. *M. Cinquini-Cibrario.*

Nagumo, Mitio: Über das Anfangswertproblem partieller Differentialgleichungen. Japanese J. Math. **18**, 41—47 (1942).

Si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema dei valori iniziali per il sistema di equazioni a derivate parziali $\partial u_i/\partial t = F_i(t, x_1, \ldots, x_k, u_1, \ldots, u_m, p_{11}, \ldots, p_{mk})$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ p_{ij} = \partial u_i/\partial x_j)$, con le F_i continue in (t, x, u_i, p_{ij}) e analitiche in (x, u_i, p_{ij}); l'esistenza è dimostrata col metodo funzionale di Schauder, l'unicità con metodi simili a quelli tenuti per equazioni differenziali ordinarie. *M. Cinquini-Cibrario.*

Volpato, Mario: Sull'applicazione del metodo degli operatori funzionali all'integrazione di un particolare sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali del prim'ordine lineare. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti., Atti, Cl. Sci. mat. natur. **103**, 37—47 (1944).

Mychkis, A.: Sur les domaines d'unicité pour les solutions des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles. Mat. Sbornik, n. Ser. **19 (61)**, 489—522 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Zum System $\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} + \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(x, y)\, u_k \quad (i = 1 \ldots n)$ werden Aussagen im Großen über Unitätsgebiete gemacht unter Verwendung der von Zaremba und Marchaud untersuchten Verallgemeinerungen gewöhnlicher Differentialgleichungen [dies. Zbl. **14**, 157; **10**, 258]. *Adam Schmidt.*

Meltzer, L. A.: On the correct statement of Goursat's problem. Mat. Sbornik, n. Ser. **18 (60)**, 59—104 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Unter dem Goursatschen Problem versteht man die Aufgaben, zum System

$$\sum_{k=1}^{l+m} f_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{k=1}^{l+m} g_{ik}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} = h_i(x, y, u_1 \ldots u_{l+m}) \quad (i = 1, \ldots, l+m)$$

in einem im ersten Quadranten gelegenen Bereich B eine Lösung mit stetigen ersten Ableitungen zu finden, so daß für $y = 0$, $0 \leqq x \leqq a$ und $1 \leqq j \leqq l$ die Randbedingungen $u_j = \varphi_j(x)$ und für $x = 0$, $0 \leqq y \leqq b$, $l < j \leqq l + m$ die Randbedingungen $u_j = \psi_j(y)$ erfüllt sind. Das Problem heißt korrekt gestellt, falls die Lösung in B eindeutig bestimmt ist und falls kleinen Änderungen der φ_j und ψ_j kleine Änderungen der u_k entsprechen, wofür Bedingungen aufgestellt werden. *Adam Schmidt.*

Ingram, W. H.: Forced oscillations of continuous dynamical systems. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 153—162 (1942).

Le système différentiel

$$(*) \qquad \partial u_i / \partial x = \sum a_{ij}(x)\, \partial u_j / \partial t + \sum b_{ij}(x)\, u_j + e_i(x, t)$$

avec conditions aux limites $\sum [\alpha_{ij}\, u_j(a, t) + \beta_{ij}\, u_j(b, t)] = 0$ se transforme en un système différentiel ordinaire (**) si les $e_i \equiv 0$, en posant $u_i = \exp(\mu t)\, y_i(x)$; la solution de (*) peut alors être donnée si les e_i satisfont à une relation liée aux solutions propres de (**). *Ch. Blanc.*

Mangeron, D. I.: Sur les solutions par composition des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur. Bull. École polytechn. Jassy **1**, 295—303 (1946).

On démontre l'existence des solutions obtenues par les compositions de seconde espèce au sens de V. Volterra des équations aux dérivées partielles d'ordre n qui se réduisent pour $n = 2$ aux équations classiques des potentiels, des ondes et de propagation de la chaleur. Après avoir établi quelques schémas de composition pour certains „triplets" d'équations indéfinies, on se propose d'étudier au sens de G. Doetsch [ce Zbl. **23**, 41] les liaisons entre les valeurs à la frontière des fonctions composantes. *G. Vranceanu.*

Mangeron, Dumitru Ion: Spektralprobleme und Randwertprobleme für eine Klasse linearer Differentialgleichungen mit partiellen Ableitungen höherer Ordnung. Revista ştii. „V. Adamachi" **31**, 4 S. (1945) [Rumänisch mit französ. Zusammenfassg.].

Verf. hat früher (dies. Zbl. **16**, 25 u. 212) Eigenwertprobleme für

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial x^n \partial y^n}\left(Q(x, y) \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^n \partial y^n}\right) - \lambda A(x, y)\, u = 0$$

behandelt. Er untersucht jetzt die reduktiblen Fälle im Piconeschen Sinne für analoge Gleichungen der Ordnung $m + n$. Gegeben ist das Charakteristikenrechteck $R(a \leqq x \leqq a';\ b \leqq y \leqq b')$ mit verschiedenen Randbedingungen. Die Probleme werden auf einige Fredholmsche Integralgleichungen mit symmetrisierbaren Kernen zurückgeführt. Verallgemeinerungen für andere Differentialgleichungen einer geraden und ungeraden Anzahl unabhängiger Veränderlichen oder andere Randbedingungen werden angedeutet. *G. Vranceanu.*

Mangeron, D.: New method for determining the integrals of linear partial differential equations by application of the multiple Laplace transformation with finite domain of integration. Revista ştii. „V. Adamachi" **32**, 38—40 (1946) [Rumänisch mit engl. Zusammenfassg.].

The author applies the Laplace multiple transforms on a finit domain, used by him (this Zbl. 24, 201) to the study of certain boundary problems in linear partial differential equations of order n with two independent variables x and t, to show the uniqueness and the existence of the solutions of certain classes of boundary problems in linear partial differential equations of order n with $p+q$ independent variables $X(x_1, \ldots, x_p)$ and $T(t_1, \ldots, t_p)$. *G. Vranceanu.*

Mangeron, D.: Green's function of order p in the theory of total differential equations of higher order. Revista ştii. „V. Adamachi" **32**, 40—42 (1946) [Rumänisch mit französ. Zusammenfassg.].

En introduisant la notion de fonction de Green d'ordre p pour les équations aux dérivées totales au sens de M. Picone (ce Zbl. 27, 68), l'auteur démontre qu'une fonction u, définie dans le domaine $R[x_i' \leqq x_i \leqq x_i'']$ $(i = 1, \ldots, n)$ est parfaitement déterminée par les valeurs que cette fonction et ses $p-1$ premières dérivées totales prennent sur la frontière FR de ce domaine et par les valeurs que la p-ième dérivée totale prend dans R. *G. Vranceanu.*

Cinquini-Cibrario, Maria: Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **23**, 1—23 (1944).

Resultat, das Verf. später verallgemeinert hat (dies. Zbl. 29, 398). *G. Cimmino.*

Cinquini-Cibrario, Maria: Intorno ad un sistema di equazioni alle derivate parziali del primo ordine. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **76** (III. Ser. 7), 177—184 (1943).

Cinquini-Cibrario, Maria: Sul problema misto per l'equazione del tipo iperbolico non lineare. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **76** (III. Ser. 7), 247—255 (1943).

Existenz- und Eindeutigkeitssätze der Lösungen für Probleme vom Cauchyschen, Goursatschen und gemischten Typus für die hyperbolische partielle Differentialgleichung $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. *G. Cimmino.*

Cinquini-Cibrario, Maria: Sopra la teoria delle caratteristiche per le equazioni di ordine n di tipo iperbolico non lineari. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **79** (III. Ser. **10**), 147—154 (1946).

Questa Nota è un riassunto dei principali risultati contenuti in una Memoria pubblicata successivamente dall'A. [questo Zbl. **30**, 358]. *G. Sansone.*

Petrovsky, I.: Dependence of solutions of Cauchy's problem on initial conditions. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **38**, 151—153 (1943).

Petrowsky, I.: Sur la diffusion des ondes et les lacunes pour les systèmes d'équations hyperboliques. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **8**, 101—106 (1944) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Petrowsky, I.: On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations. Mat. Sbornik, n. Ser. **17** (59), 289—307 (1945) [Englisch mit russ. Zusammenfassg.].

Beim Cauchyschen Problem zum System

$$\frac{\partial^{n_h} u_h}{\partial t^{n_h}} = F_h\left(t, x_i, u_j, \frac{\partial^k u_e}{\partial t^{k_0}\, \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_m^{k_m}}\right)$$

hängt die Lösung im hyperbolischen Fall am Punkte $P(t, x_1 \ldots x_m)$ nur von den Anfangswerten in beschränkten Punktmengen der Ebene $t = 0$ ab, die durch einen Schnitt mit einem „Kegel" gegeben sind, dessen Mantellinien die Charakteristiken durch P sind. Im linearen Fall, auf den die allgemeinen Untersuchungen

zurückgeführt werden können, ist die Schnittkurve algebraisch. Sie schneidet endlich viele Gebiete aus der Ebene $t = 0$. Ein solches Gebiet heißt lacuna, falls die Lösung in P nicht von den Anfangswerten in seinem Innern abhängt. Die Struktur der Lösung (Diffusion der rückwärtigen Wellenfronten) ist verschieden, je nachdem ob solche lacunae auftreten oder nicht. Vgl. Mathisson [dies. Zbl. 22, 228] und Hadamard [Ann. of Math., II. Ser. 43, 510—522 (1942)].

Adam Schmidt.

Zwirner, Giuseppe: Teoremi di confronto per l'equazione differenziale $\partial^2 z/\partial x\,\partial y = f(x, y, z)$. Atti Mem. Accad. Sci. Lett. Arti Padova, Mem. Cl. Sci. fis. mat., n. Ser. 59, 45—55 (1943).

Zwirner, Giuseppe: Condizioni sufficienti per l'esistenza degli integrali di una equazione differenziale a derivate parziali di tipo iperbolico. Ist. Veneto Sci. Lett. Arti, Atti, Cl. Sci. mat. natur. 102, 329—350 (1943).

Zwirner, Giuseppe: Sopra il problema di Nicoletti per una particolare classe di equazioni differenziali a derivate parziali. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 14, 17—36 (1943).

Erste Ergebnisse über die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n\,\partial y^m} = f\left(x, y, z, \ldots, \frac{\partial^{h+k} z}{\partial x^h\,\partial y^k}, \ldots\right), \quad (h = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

welche vom Verf. weiter verarbeitet wurden (dies. Zbl. 29, 397; 45, 201; 48, 75) und analoge wohlbekannte Resultate der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ausdehnen.

G. Cimmino.

Magnaradze, Leo: Über effektive Lösungen des Cauchyschen Problem für gewisse lineare partielle Differentialgleichungen von hyperbolischem Typ. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 5, 247—251 (1944) [Georgisch und Russisch].

Magnaradze, Leo: Über die asymptotische Darstellung von Lösungen gewisser linearer partieller Differentialgleichungen von normalem hyperbolischen Typ für große Parameterwerte. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 5, 667—676 (1944) [Georgisch und Russisch].

Amerio, Luigi: Sull'applicazione della trasformata di Laplace all'integrazione di equazioni a derivate parziali senza alcun vincolo sul comportamento all' infinito della soluzione. Rend. Circ. mat. Palermo 63, 21 p. (1942) = Ist. naz. Appl. Calcolo, II. Ser. Nr. 135.

Servendosi della trasformazione di Laplace, l'A. risolve il problema di Cauchy per una equazione di ordine n di tipo iperbolico a coefficienti costanti in due variabili indipendenti, e il problema della propagazione del calore in una dimensione, e mostra come (in accordo coi classici teoremi di esistenza) le consuete ipotesi sul comportamento all'infinito della soluzione possano essere eliminate, senza alterare sostanzialmente il procedimento risolutivo.

M. Cinquini-Cibrario.

200 **Ince, E. L.: Simultaneous linear partial differential equations of the second order.** Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 61, 195—209 (1942).

Per il sistema: $a\,r + b\,c_1\,s + d\,p + e_1\,q + f\,z = 0$, $a_1\,t + b_1\,c\,s + d_1\,q + e\,p + f_1 z = 0$ (a, b, c, d, e, f polinomi in x; $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$ polinomi in y) si cercano condizioni per la compatibilità e l'esistenza di almeno una soluzione analitica.

M. Cinquini-Cibrario.

Géhéniau, J.: Sur les formules d'Hadamard relatives aux équations aux dérivées partielles. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 29, 591—607 (1943).

L'A. considère une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre du type hyperbolique normal et se propose d'expliciter les parties finies et les parties logarithmiques intervenant dans la solution du problème de Cauchy pour cette equation. Il rattache ses formules à la théorie des formes intégrales et des invariants intégraux. Il étudie en particulier la différentiation des intégrales

dépendant d'un paramètre lorsque le domaine d'intégration subit une transformation infinitésimale donnée. *F. Bureau.*

Géhéniau, J.: Sur une propriété de la dérivée par rapport à t d'une intégrale p-uple. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 144—150 (1945).

Dans un espace à n dimensions (x), on considère une famille de variétés $V_p(t)$ dépendant d'un paramètre t et une forme différentielle A_p définie sur $V_p(t)$. L'A. donne une expression nouvelle de la dérivée par rapport à t de l'intégrale p-uple $\int_R A_p$ où R est une partie fermée de $V_p(t)$. Dans cette expression ne figurent que les éléments déterminant le mouvement de V_p et de la frontière de R. *F. Bureau.*

Donder, Th. de: Simplification de la méthode d'intégration d'Hadamard. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 763—765 (1943).

Donder, Th. de: Une manière simplifiée pour résoudre le problème de Cauchy dans le cas d'un système d'équations linéaires aux dérivées partielles. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 30, 8—10 (1945).

L'A. indique comment moyennant un changement simple de la fonction inconnue, on peut ramener le problème de Cauchy avec données initiales non nulles à un problème de Cauchy avec données initiales nulles, l'équation étant non homogène. Ce résultat est aussi valable pour un système d'équations. *F. Bureau.*

Aquaro, G.: Su un problema riducibile di integrazione di una particolare equazione a derivate parziali. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 530—534 (1946).

Ein auf eine Integralgleichung zurückführbares Randwertproblem für eine Lösung $u(x, y)$ der Gleichung $u_{xxy} = u_y + a(x, y)\, u_{xx} + b(x, y)\, u_x + c(x, y)\, u + f(x, y)$ im Rechteck $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $y_1 \leqq y \leqq y_2$. *G. Cimmino.*

(1) **Soboleff, S.: Sur quelques groupes de transformations de l'espace n-dimensionnel.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 380—382 (1941).

(2) **Soboleff, S.: Sur la stabilité en moyenne des solutions du problème limite de l'équation du type hyperbolique.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 383—385 (1941).

(3) **Soboleff, S.: Sur le problème de la stabilité des solutions du problème limite pour les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 459—462 (1941).

(4) **Soboleff, S.: Quelques problèmes nouveaux pour les équations aux dérivées partielles.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 32, 463—466 (1941).

(5) **Soboleff, S.: Quelques problèmes limites nouveaux pour les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique.** Mat. Sbornik, n. Ser. 11 (53), 155 bis 203 (1942) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

(1): Die Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ gehöre zur Klasse $N(\tau, l)$, wenn es ein A gibt, so daß für $k \leqq l$, $0 < k + \tau < n$, $\sum \alpha_i = k$ gilt

$$\left[\int_\Omega \left|\frac{\partial^k \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_1^{\alpha_n}}\right|^{\frac{n}{k+\tau}} d\Omega\right]^{\frac{k+\tau}{n}} < A.$$

Es wird eine Gruppe von Transformationen charakterisiert, die die Klasse $N(\tau, l)$ in sich transformiert. (2): Hinreichende Bedingung dafür, daß die Lösungen sowie ihre ersten Ableitungen der selbstadjungierten hyperbolischen Differentialgleichung $\sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} + C u = \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \varrho F$ mit den Anfangsbedingungen $u = u_0$, $\partial u/\partial t = u_1$ und den Randbedingungen $u_s = 0$ oder $\partial u/\partial \nu|_s = 0$ im Mittel quadratisch beschränkt bleiben. In (3) wird dies auf höhere Ableitungen ausgedehnt. In (4) werden zur Differentialgleichung nur die Rand-

bedingungen vorgeschrieben und die Anfangsbedingungen ersetzt durch die Forderung, daß die Lösung und gewisse ihrer Ableitungen im Mittel quadratisch beschränkt bleiben. Auf dieses Problem läßt sich durch eine Transformation der abhängigen und unabhängigen Variabeln das folgende zurückführen: Auf einem Kegel $\Phi\left(\frac{x_1}{t}, \frac{x_2}{t}, \ldots, \frac{x_n}{t}\right)$ sei für die $(n+1)$-dimensionale Wellengleichung der Wert der Lösung vorgeschrieben. Existenznachweis. In (5) werden die gleichen Probleme behandelt. *Adam Schmidt.*

(1) **Vranceanu, G.: Sur l'équivalence des équations de Laplace.** Bull. math. Soc. Roumaine Sci. **46**, 155—180 (1944).

(2) **Vranceanu, G.: Geometrische Eigenschaften der partiellen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung.** Mathematica, Timişoara **20**, 98—112 (1944).

(1): Mit Hilfe eines begleitenden n-Beins werden für Differentialgleichungen

$$a^{rs}\,\partial^2 z/\partial x^r\,\partial x^s + a^r\,\partial z/\partial x^r + a\,z = 0 \qquad (r, s = 1, \ldots, n)$$

die Invarianten gegenüber Variablentransformationen $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$ und Faktormultiplikationen $z' = \lambda(x^1, \ldots, x^n)\,z$ bestimmt sowie das Äquivalenzproblem gelöst. (2): Ausführliche Behandlung derselben Fragen für $x_{uv} + a\,x_u + b\,x_v + c\,x = 0$ bei den Transformationen $u = f(u')$, $v = f(v')$, $x = \lambda(u, v)\,x'$. *Joachim Nitsche.*

Owens, Glynn: An explicit formula for the solution of the ultrahyperbolic equation in four independent variables. Duke math. J. **9**, 272—282 (1942).

Frankl, F.: On Cauchy's problem for partial differential equations of mixed elliptico-hyperbolic type with initial data on the parabolic line. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **8**, 195—224 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Lösung des folgenden Cauchy-Problems

$$(*) \qquad y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x,y)\,z = 0,$$

$y \leqq 0$; $z(x,0) = \varphi(x)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x,0) = \psi(x)$ (a, b, c analytisch; φ, ψ nicht analytisch) mittels der Formel:

$$z(x,y) = \int_0^1 g(\lambda,\mu;t)\,\varphi[\lambda + (\mu-\lambda)\,t]\,dt + \int_0^1 h(\lambda,\mu;t)\,\psi[\lambda + (\mu-\lambda)\,t]\,dt,$$ wobei

$g(\lambda,\mu;t) = O(1)\,t^{-5/6}(1-t)^{-5/6}$ $\quad h(\lambda,\mu;t) = O(1)\,t^{-1/6}(1-t)^{1/6}$; $\quad \lambda \equiv x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$, $\mu \equiv x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$. Die Gleichung $f(y)\,z_{xx} + z_{yy} + a\,z_x + b\,z_y + c\,z = 0$, wobei $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ ist durch die Substitution $\bar{y} = \int_1^y \frac{1}{4}[f(t)]^{-1/2}\,dt$ auf (*) zurückführbar. Das Problem ist im „hyperbolischen" Gebiet sachgemäß gestellt. *K. Maurin.*

Green, George: Corresponding problems in periodic and steady flow. Philos. Mag., VII. Ser. **33**, 102—114 (1942).

Preliminary study of the relations between periodic solutions of $d^2v/dt^2 = \nabla^2\nabla^2(v)$ or $dv/dt = r\,\nabla^2(v)$ and solutions of $\nabla^2(v) = 0$ by means of the integral theorem of Fourier. *A. van Heemert.*

Bureau, Florent: Sur l'intégration de l'équation des ondes. I, II. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **31** (1945), 610—624, 651—658 (1946).

Per ottenere la soluzione dell'equazione (1) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, soddisfacente le $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = u_0\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\partial u(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0)/\partial t = u_1\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (problema di Cauchy per la (1)), si cerca di ricondursi all'equazione in due variabili indipendenti, calcolando successivamente il valore medio su una ipersfera e introducendo un operatore conveniente. *M. Cinquini-Cibrario.*

Olevsky, M.: Solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes dans un espace à n dimensions à courbure constante. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **46**, 3—6 (1945).

Es handelt sich um die mit dem zweiten Beltramischen Differentiator Δ_2 gebildete Differentialgleichung $\Delta_2 u = \partial^2 u/\partial t^2$. *Adam Schmidt.*

Soboleff, S. L.: Sur la presque périodicité des solutions de l'équation des ondes. I—III. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **48**, 542—545, 618—620; **49**, 12—15 (1945).

Im Anschluß an Muckenhoupt [J. Math. Physics 8, 163—199 (1929)], Bochner und Bochner und J. v. Neumann (dies. Zbl. **7**, 112; **9**, 163; **11**, 20) wird in I gezeigt: Die Lösungen von $\Delta u - \partial^2 u/\partial t^2 = 0$ sind fast periodisch in bezug auf t, falls auf einer das Lösungsgebiet begrenzenden Hyperfläche $u = 0$ oder $\partial u/\partial n = 0$ gefordert wird. In III wird das Resultat auf „verallgemeinerte" Lösungen ausgedehnt, in II auf Differentialgleichungen $\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} - C u = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, wobei die Koeffizienten Funktionen der x_i sind. *Adam Schmidt.*

Copson, E. T.: Some applications of Marcel Riesz's integrals of fractional order. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **61**, 260—272 (1943).

Fremberg, Nils Erik: Proof of a theorem of M. Riesz concerning a generalization of the Riemann-Liouville integral. Fysiogr. Sällsk. Lund Förhdl. **15**, Nr. 27, 265—276 (1945).

Fremberg, Nils Erik: A study of generalized hyperbolic potentials with some physical applications. Meddel. Lunds Univ. mat. Sem. **7**, 1—100 (1946).

Applications de la méthode de M. Riesz du prolongement analytique (par rapport au paramètre) de l'integrale de Riemann Liouville. A signaler les articles postérieurs de M. Riesz (ce Zbl. **33**, 276) et L. Gårding (ce Zbl. **29**, 216). *J. L. Lions.*

Oseen, C. W.: Le principe de Huygens et les équations de Maxwell pour le vacuum. Ark. Mat. Astr. Fys. **31 A**, Nr. 4, 17 p. (1944).

Utilisation d'une suite de fonctions convergent dans l'espace des mesures de Radon vers la mesure de Dirac, pour obtenir une solution élémentaire; ceci est maintenant classique avec la théorie des distributions de Schwartz. *J. L. Lions.*

Erougine, N.: Sur les solutions fonctionnellement invariantes. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **42**, 371—372 (1944).

Es handelt sich um solche Lösungen u der zwei- bzw. dreidimensionalen Wellengleichung $\Delta u = a^2 \partial^2 u/\partial t^2$, für die mit zweimal stetig differenzierbarer, sonst willkürlicher Funktion F auch $F(u)$ eine Lösung ist. *Adam Schmidt.*

Michlin, S.: Propagation des ondes dans les domaines limités par des courbes. Acad. Sci. URSS, Publ. (Trudy) Inst. Séismolog. Nr. **110**, 50 p. (1941) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Die Differentialgleichung $\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 = (1/a^2)\partial^2 U/\partial t^2$ wird unter der Anfangsbedingung $U = F(x, y)$ und $U_t = F_1(x, y)$ für $t = 0$ und der Randbedingung $U = \varphi(x, y, t)$ (oder $\partial U/\partial n = \varphi(x, y, t)$) für alle t auf der analytischen Kurve $G(x, y) = 0$ gelöst. *Adam Schmidt.*

Drăganu, Mircea: Sur la résolution de l'équation différentielle des mouvements vibratoires d'une membrane rectangulaire par la méthode de la transformation multiple de Laplace. Mathematica, Timişoara **22**, 206—207 (1946).

L'auteur considère l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$ avec les conditions initiales $z(x, y, 0) = g(x, y)$, $(\partial z/\partial t)(x, y, 0) = h(x, y)$ et celles aux limites

$z(a, y, t) = z(-a, y, t) = 0$, $z(x, b, t) = z(x, -b, t) = 0$, correspondant aux données dans le cas d'une membrane rectangulaire et en indique la solution moyennant la transformation spatiale multiple de Laplace. *C. Iacob.*

Mindlin, J. A.: Propagation of waves on the surface of an infinitely long circular cylinder conceived as a cut-out portion of an infinitely elastic space. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 42, 151—155 (1944).

Es werden ebene harmonische Störungen untersucht, die symmetrisch zur Achse eines Zylinders sind und im umgebenden Medium rasch abklingen.

Adam Schmidt.

Caldirola, Piero e Pietro Sillano: Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate col calcolo operatorio. Acta Pont. Acad. Sci. 10, 229—242 (1946).

Caldirola, Piero e Pietro Sillano: Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate col calcolo simbolico. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 79 (III. Ser. 10), 55—68 (1946).

Trattasi di uno stesso lavoro pubblicato nelle due Riviste. A. Tonolo [questo Zbl. 7, 210)] col metodo di Volterra-Tedone ha dato la formula risolutiva esplicita del seguente problema: Data una superficie chiusa σ che limita un campo S determinare una soluzione $u(x, y, z, t)$ dell'equazione $\partial^2 U/\partial t^2 - (\partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2) = k\,U + X$ noti per $t = t_0$ in S i valori di $u(x, y, z, t)$ e della sua derivata rispetto a t, ed i valori che la u e la sua derivata normale assumono per $t > t_0$ nei punti della superficie S. Gli AA. ritrovano la formula di Tonolo con il procedimento della trasformata di Laplace. *G. Sansone.*

Powsner, A.: Sur les équations du type de Sturm-Liouville et les fonctions „positives". C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 43, 367—371 (1944).

Die Lösungen der Differentialgleichung $\partial^2 u/\partial x^2 - \partial^2 u/\partial y^2 - c\big(\varrho(x) - \varrho(y)\big)\,u = 0$, die der Bedingung $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = 0$ genügen, $c = \text{konst.}$, $\varrho(x)$, $f(x)$ gerade, können mit Hilfe der Riemannschen Methode in der Form $u_{c,f}(x, y) = \frac{1}{2}[f(x + y) + f(x - y)] - \int_0^\infty f(t)\,\omega_c(t, x, y)\,dt$ dargestellt werden. Dafür, daß es eine Konstante k so gibt, daß $\sup\limits_{\substack{-\infty < x < +\infty \\ -\infty < y < +\infty}} |u_{c,f}(x, y)| \leqq k \sup\limits_{-\infty < x < +\infty} |f(x)|$, ist notwendig und hinreichend, daß ein Randwertproblem der Differentialgleichung $d^2\varphi/dx^2 - c\,\varrho(x)\,\varphi(x) = 0$ lösbar ist. Die geraden für $-\infty$ bis $+\infty$ summierbaren Funktionen $f(x)$ bilden einen Ring, wenn ein Produkt durch

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - t)\,g(t)\,dt - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x, \xi, \eta)\,f(\xi)\,g(\eta)\,d\xi\,d\eta$$

eingeführt wird. Die Eigenschaften dieses Ringes und seiner Ideale werden diskutiert unter Benutzung einer Lösung $\varphi(x, \lambda)$ der Differentialgleichung $d^2\varphi/dx^2 + \big(\lambda^2 - c\,\varrho(x)\big)\,\varphi = 0$. Die gleiche Lösung $\varphi(x, \lambda)$ wird noch benutzt, um einen Satz von Bochner über positive Funktionen zu verallgemeinern; dabei heißt $f(x)$ L-positiv, sofern $f(x) = \int_0^\infty \varphi(x, \lambda)\,d\alpha(\lambda)$ mit einer uneigentlich monoton wachsenden Funktion $\alpha(\lambda)$ ist. *Adam Schmidt.*

Magnaradze, L. G.: Das Dirichletsche Problem als Grenzfall des Cauchy-Dirichletschen Problems für die Wellen-, Wärmeleitungs- und ähnliche Gleichungen. Trudy Tbiliss. mat. Inst. 11, 73—96 (1942) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Zur Differentialgleichung

$$\Delta U \equiv \partial^2 U/\partial x^2 + \partial^2 U/\partial y^2 + \partial^2 U/\partial z^2 = a_1\,\partial^2 U/\partial t^2 + a_2\,\partial U/\partial t + A(x, y, z, t)$$

werden Anfangsbedingungen für U und U_t in einem einfach zusammenhängenden

Gebiet D mit der Randfläche S und auf S Randbedingungen: $U(P,t) \to f(Q,t)$ für $P \to Q$ auf S so gegeben, daß für geeignetes $A(x,y,z,t)$ die Grenzfunktion $\lim_{t\to\infty} U = V$ existiert und der Differentialgleichung $\Delta V = 0$ sowie der Randbedingung: $V(P) \to \lim_{t\to\infty} f(Q,t)$ für $P \to Q$ auf S genügt. *Adam Schmidt.*

Draganu, Mircea: Sur une solution opératoire de l'équation de la propagation des ondes. Mathematica, Timişoara 20, 69—72 (1944).

L'auteur considère l'équation des télégraphistes

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2b\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u + 4\pi w(x,y,z,t),$$

où a et b sont des constantes, avec les données initiales $u(x,y,z,0) = F(x,y,z)$, $u_t(x,y,z,0) = G(x,y,z)$. En appliquant la transformation de Laplace par rapport à t, il parvient à l'équation $\nabla^2 V + \chi^2 V + 4\pi M(x,y,z) = 0$ dont la solution classique fournit, après établissement de certaines correspondances, celle du problème posé. Les considérations de l'auteur étendent au cas tridimensionnel celles de A. N. Lowan (ce Zbl. 19, 260). *C. Iacob.*

Petrashen, G. I.: Solutions of vector boundary problems of mathematical physics for the sphere. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 46, 266—269 (1945).

Petrashen, G. I.: The oscillations of an isotropic elastic sphere. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 47, 172—176 (1945).

Petrashen, G.: The establishment of oscillatory wave regimes and the resonance phenomenon in the case of a spherical domain. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 13—16 (1946).

Petrahsen, G.: Wave processes in a spherical domain in the case of normal absorption. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 187—190 (1946).

Petrahsen, G.: The application of the method of spherical vectors to problems of diffraction of elastic disturbances. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 51, 587—590 (1946).

Petrashen, G.: Lord Rayleigh's problem for surface waves on a sphere. C. r Acad. Sci. URSS, n. Sér. 52, 757—760 (1946).

Aus den Kugelflächenfunktionen $Y_{l,m}(\vartheta,\varphi)$ läßt sich ein System von Vektoren ableiten, das die Entwicklung eines Vektors $\mathfrak{v}(\vartheta,\varphi)$ in eine Reihe nach diesen Vektoren gestattet. Läßt man die Koeffizienten dieser Reihe von r und der Zeit t abhängen, so können die in den Titeln genannten Probleme behandelt werden. *Adam Schmidt.*

Gavrilov, A. F.: Anwendung der Methode der kleinen Parameter für die Integration gewisser partieller Differentialgleichungen (nichtlineare Verallgemeinerungen der Telegrafengleichung). Trudy Tbiliss. mat. Inst. 13, 55—78 (1944) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Untersuchungen über das System

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(L + \mu\lambda(x,t)\right)\frac{\partial i}{\partial t} + \left(R + \mu\varrho(x,t)\right) i = 0,$$
$$\frac{\partial i}{\partial x} + \left(C + \mu\beta(x,t)\right)\frac{\partial u}{\partial t} + \left(G + \mu\gamma(x,t)\right) u = 0$$

bei kleinem μ, wobei L, C und G konstant sind, aber R der Integralgleichung $R = R_0 + \varepsilon\int_0^t i^2 R\,dt$ genügt. *Adam Schmidt.*

Teofilato, Pietro: Integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine. Commentationes, Pontificia Acad. Sci. 8, 35—60 (1944).

Si tratta della determinazione di una soluzione $y(t,x)$ dell'equazione alle derivate parziali (1) $\partial^2 y/\partial t^2 + a(t)\,\partial y/\partial t + b(t)\,y = c(t)\,\partial^2 y/\partial x^2 + \varphi(t,x)$ con le condizioni iniziali $y(0,x) = \sum_1^\infty f_n \operatorname{sen} n\pi x/l$, $y_t(0,x) = \sum_1^\infty g_n \operatorname{sen} n\pi x/l$,

e le condizioni agli estremi $y(t,0)=0$, $y(t,l)=0$. Effettuando la sostituzione $y(t,x)=z(t,x)\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t a(s)\,ds\right)$ e posto $B=b-\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}\frac{da}{dt}$, $\psi(t,x)=\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t a(s)\,ds\right\}\varphi(t,x)$ si ottiene l'equazione $[\partial^2/\partial t^2+B-c\Delta^2]\,z=\psi(t,x)$ dove Δ sta per $\partial/\partial x$. Considerando Δ come una costante l'equazione può scomporsi nel prodotto di fattori $(\partial/\partial t+\alpha(t,\Delta))\,(\partial/\partial t+\beta(t,\Delta))\,z(t,x)=\psi(t,x)$ da cui si ricava formalmente $z(t,x)=(\partial/\partial t+\beta(t,\Delta))^{-1}\,(\partial/\partial t+\alpha(t,\Delta))^{-1}\,\psi(t,x)$, e quindi $y(t,x)$. Con questo procedimento l'A. arriva ad un'espressione formale di $y(t,x)$ mediante uno sviluppo in serie di Fourier i cui coefficienti si determinano in funzione delle costanti f_n e g_n. Ponendosi in un caso particolare l'A. prova la convergenza delle serie ottenute per $y(t,x)$. *G. Sansone.*

Teofilato, Pietro: Integrazione di una classe di equazioni alle derivate parziali del quarto ordine e applicazione allo studio delle vibrazioni di una trave. Commentationes, Pontificia Acad. Sci. 8, 63—75 (1944).

L'A. applica i metodi della Memoria precedente alla determinazione di una soluzione formale dell'equazione del 4° ordine $\partial^2 y/\partial t^2+a(t)\,\partial y/\partial t+b(t)\,y+A_2(t)\,\partial^2 y/\partial x^2+A_4(t)\,\partial^4 y/\partial x^4=\varphi(t,x)$ con le condizioni iniziali $y(0,x)=\sum_1^\infty f_n \operatorname{sen} n\pi x/l$, $y_t(0,x)=\sum_1^\infty g_n \operatorname{sen} n\pi x/l$, $f_n=O(1/n^2)$, $g_n=O(1/n^2)$, e le condizioni agli estremi $y(t,0)=y_{x,x}(t,0)=0$, $y(t,l)=y_{x,x}(t,l)=0$. La convergenza della serie ottenuta è verificata per il caso particolare della vibrazione di una trave. *G. Sansone.*

● **Campbell, James Dow: The parametric theory of singular parabolic partial differential equations.** Abstract of a Thesis, University of Illinois, 1946. II; 11 p.

Krzyżański, Mirosław: Sur les solutions de l'équation linéaire du type parabolique déterminées par les conditions initiales. Ann. Soc. Polon. Math. 18, 145—156 (1945).

Teilweise neue Formulierung früher vom Verfasser bewiesener Eindeutigkeitssätze (dies. Zbl. 27, 400). Beweis eines Eindeutigkeitssatzes für die zugehörige inhomogene lineare Gleichung bei Anfangswerten $u=0$ für $y=0$. *H. Witting.*

Brook, S.: On Cauchy's problem for parabolic systems of differential equations. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 105—120 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

L'A. étend le théorème de Petrowsky (ce Zbl. 24, 37) sur les conditions pour que le problème de Cauchy soit posé correctement, aux équations paraboliques linéaires de la forme plus générale que celle considérée par Petrowsky et aux équations quasilinéaires

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=\sum_{j,m_1,\ldots,m_n} A_{ij}^{(m_1,\ldots,m_n)}(t)\,\frac{\partial^M u_j}{\partial^{m_1}x_1\ldots\partial^{m_n}x_n}+F_i,$$

où F_i dépendent de $t, x_1,\ldots,x_n, u_1,\ldots,u_N$ et des dérivées des $u_k (k=1,\ldots,N)$ d'ordre inférieur à M. Les conditions initiales imposées à la solution sont de la forme $u_i|_{t=t_0}=\varphi_i(x_1,\ldots,x_n)$, les fonctions φ_i étant bornées. On dit que le problème de Cauchy est correctement posé, lorsque la solution de ce problème existe, est unique et dépend de manière continue uniformément (par rapport à t_0) des conditions initiales. *M. Krzyżański.*

Amerio, L.: Sull'equazione del calore. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 346—352, 544—548 (1946).

Anwendung der Greenschen Formel auf die parabolische Gleichung $\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i}-u_y=f(x_1,\ldots,x_n,y)$. Relationen für die Fundamentallösung; Formu-

lierung der Umkehrsätze. Beweise hierzu wurden in der nachstehend besprochenen Arbeit veröffentlicht. *H. Witting.*

Amerio, Luigi: Sull'equazione di propagazione del calore. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **5**, 84—120 (1946).

Questa quarta Memoria dell'A. sulle equazioni alle derivate parziali contiene le dimostrazioni relative ai problemi al contorno dell'equazione di propagazione del calore (1) $E(u) \equiv \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} = f$, $\left(\Delta_2 u = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\right)$ di tipo parabolico, in $m+1$ variabili $(x_1, \ldots, x_m, y)$, i cui enunciati furono pubblicati in due Note (v. la recensione precedente). La trattazione è al solito basata sulla dimostrazione che la così detta prima formula fondamentale di Green (quella cioè in cui il punto potenziato si suppone esterno al campo τ di integrazione) costituisce l'equazione di compatibilità fra i valori assegnati sul contorno σ di τ di un integrale u della (1) e della sua derivata normale. L'A. passa da questa equazione ad un sistema di Fischer-Riesz che gli permette di trovare una soluzione della (1) che quasi ovunque su σ soddisfa le assegnate condizioni ai limiti. L'A. indica infine delle condizioni sufficienti atte ad assicurare la validità per l'integrazione della (1) del metodo della trasformata di Laplace a dominio di integrazione limitato, ideato da M. Picone. *G. Sansone.*

Minakshisundaram, S.: Studies in Fourier Ansatz and parabolic equations. J. Madras Univ. **14**, 73—142 (1942).

Minakshisundaram, S.: Studies in Fourier Ansatz and parabolic equations. J. Indian math. Soc., n. Ser. **6**, 41—50 (1942).

Minakshisundaram, S.: Fourier Ansatz and non-linear parabolic equations. J. Indian math. Soc., n. Ser. **7**, 129—142 (1943).

Existenzsätze für die Lösung der Anfangsrandwertaufgaben der Differentialgleichungen $u_{xx} + u_{yy} - u_t = f(x, y, t, u)$ bzw. $= f(x, y, t, u, u_x, u_y)$ in einem Zylinder über einem beschränkten Bereich der (x, y)-Ebene mit vorgegebenen Randwerten auf diesem, wenn $|f(\ldots)| \leq \varphi(t)$ ist, wobei φ eine positive, nichtfallende Funktion von t ist mit $\varphi(0) = 0$. — Für die homogene Gleichung $u_{xx} - u_t = 0$ sowie die Gleichungen $u_{xx} - u_t = f(x, t)$ bzw. $= f(x, t, u, u_x)$ mit in x 2π-periodischem $f(\ldots)$ werden Existenz und Eigenschaften der Lösungen hergeleitet unter den Randbedingungen: $u(0, t) = u(2\pi, t)$, $t > 0$, $u_x(0, t) = u_x(2\pi, t)$, $t > 0$, $u(x, 0_+) = u_0(x)$, wobei $u_0(x)$ 2π-periodisch und L-integrabel die Fourier-Entwicklung $u_0(x) \sim \sum_n A_n(x)$ besitzt. Eigenschaften der Lösung der homogenen Gleichung: $u = \sum_n A_n(x)\, e^{-n^2 t}$. Begriff der (schwachen) Lösung von $u_{xx} - u_t = f(x, t)$ in R: $0 \leqq x \leqq 2\pi$, $0 \leqq t \leqq T$, wenn die Gleichung $\iint_{R_1} f(x, t)\, dx\, dt = \int_{S_1} (u\, dx + u_x\, dt)$ für jedes in R gelegene achsenparallele Rechteck R_1 mit dem Rande S_1 erfüllt ist. Ist f integrierbar in R, so ist jede Lösung auch schwache Lösung und jede schwache Lösung genügt fast überall in R auch der Differentialgleichung. Existenzsätze für schwache Lösungen mit absolut konvergierenden Fourier-Entwicklungen unter obigen Randbedingungen. — Unter denselben Randbedingungen werden für die Gleichung $u_{xx} - u_t = f(x, t, u, u_x)$ Lösbarkeitsaussagen für kleine t gemacht, wenn f Bedingungen der Form $|f(\ldots)| \leqq \varphi(t + |u| + |u_x|)$ genügt. Hingewiesen sei noch auf die Darstellung und Anwendung funktionalanalytischer Methoden sowie auf Bemerkungen zur Eindeutigkeitsfrage. *H. Witting.*

Ljubov, B. Ja. and B. N. Finkelštejn: Bestimmung unstationärer Temperaturfelder in Körpern einfachster Gestalt. I, II. Žurn. éksper. teor. Fiz. **13**, 35—41, 42—49 (1943) [Russisch].

(1) **Karimoff, Dj.: Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires de type parabolique.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **46**, 175—178 (1945).

(2) **Karimov, Dsh. H.: Sur les solutions périodiques des équations différentielles non-linéaires du type parabolique.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **54**, 293—295 (1946).

(3) **Karimov, Dsh. H.: On the periodical solutions of non-linear equations of the fourth order.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 618—621 (1945).

Les travaux (1) et (2) concernent la recherche de la solution de l'équation (I) $Z_t - a^2 Z_{xx} = \Phi(x,t) + \mu f(Z, Z_x)$, satisfaisant aux conditions $Z(0,t) = Z(\pi,t) = 0$ et périodique par rapport à t. Dans (3) l'A. résoud le problème analogue pour l'équation $Z_{tt} + \frac{(2k+1)^2}{\pi^2} Z_{xxxx} = \Phi(x,t) + \mu f(Z, Z_{xx})$ en cherchant une solution $Z(x,t)$ telle que $Z(0,t) = Z_{xx}(0,t) = 0$, $Z(1,t) = Z_{xx}(1,t) = 0$, et que Z et Z_t soient périodiques par rapport à t. Dans (1) l'équation (I) est sous la forme générale, f satisfait par hypothèse à la condition de Lipschitz; l'A. démontre l'existence de la solution du problème pour les valeurs de μ assez voisines de 0. Dans (2) la fonction f ne dépend que de Z, mais μ est arbitraire. Le réf. trouve que les formules pour $T_n^0(t)$ dans (1) et (2) sont inexactes, mais on peut écarter ce défaut. *M. Krzyżański.*

Copson, E. T.: On an elementary solution of a partial differential equation of parabolic type. I, II. Proc. roy. Soc. Edinburgh, Sect. A **61**, 37—53, 54—60 (1941).

L'A. détermine la solution fondamentale de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - l(x)\,u = g(x)\frac{\partial u}{\partial t}$$

de la forme $\Gamma(x,\xi;t-\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)\,y_n(\xi)\,e^{-\lambda_n(t-\tau)}$, $y_n(x)$ étant les fonctions caractéristiques et λ_n les valeurs caractéristiques de l'équation

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dy}{dx}\right] - l(x)\,y = -\lambda\,g(x)\,y,$$

relatifs à un intervalle (a,b), tels que $y_n(a) = y_n(b) = 0$ (note I). L'allure de la fonction Γ pour $t-\tau \to 0$ est analogue à celle de la solution fondamentale de l'équation de la chaleur $u_{xx} = u_t$ (note II). *M. Krzyżański.*

Dressel, F. G.: The fundamental solution of the parabolic equation. II. Duke math. J. **13**, 61—70 (1946).

Beweis der Existenz einer Fundamentallösung $\Gamma(x,y,\xi,\eta)$ der allgemeinen linearen parabolisch Differentialgleichung (Definition vgl. dies. Zbl. **24**, 317) für den Fall eines unendlichen Integrationsbereichs $-\infty < x_i < +\infty$, $y' \leqq y \leqq y''$. Γ ist auch als Funktion von ξ, η Lösung der adjungierten Differentialgleichung. *H. Witting.*

Ivanzov, G. P.: Résolution du problème de refroidissement d'un semi-espace rempli d'une matière dont les propriétés sont dépendantes de la température. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 175—176 (1945).

Si la conductibilité λ et la chaleur spécifique c sont des fonctions de la température t, celle-ci satisfait à l'équation (1) $t_\tau = a\,t_{xx} + (1/c\,\gamma)\,\lambda_t(t_x)^2$. L'A. cherche une solution de (1) de la forme $t = F\left(\frac{x}{\beta\sqrt{\tau}}\right)$; pour déterminer F on a à résoudre une équation différentielle ordinaire. On procède d'une manière analogue, lorsque λ et c sont des fonctions de x et τ. *Krzyżański.*

Ivantzov, G. P.: Solution du problème de refroidissement d'un semi-espace occupé par une matière à n points critiques dont les intervalles sont caractérisés

par des propriétés physiques différentes. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 49, 248—249 (1945).

L'A. étend la méthode de recherche de la distribution de température au processus de congélation (voir Ph. Frank und R. Mises, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. II) au cas d'une substance à n points critiques. *M. Krzyżański.*

Shvez, M.: On the problem of unstationary distribution of air temperature near the underlying surface. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **40**, 144—147 (1943).

L'A. fait l'étude de la distribution de la température dans deux couches contigues. Ceci conduit à la recherche des fonctions τ et τ_1 satisfaisant resp. aux équations $\partial\tau/\partial t = \partial(k\,\partial\tau/\partial z)/\partial z$, $\partial\tau_1/\partial t = \partial(k_1\,\partial\tau_1/\partial z)/\partial z$ et à certaines conditions aux limites pour $z = 0$, le coefficient k_1 étant constant et k étant de la forme $k = c\,z^n$ $(n < 1)$. L'A. cherche les fonctions τ et τ_1 sous la forme des intégrales analogues aux potentiels et ramène le problème à la résolution des équations intégrales analogues à celle de Abel. *M. Krzyżański.*

Dressel, F. G. and E. R. Elliott: A class of solutions for the heat equation and associated boundary value problems. Amer. J. Math. **65**, 408—422 (1943).

Lösung der linearen Wärmeleitungsgleichung $u_y = u_{xx}$ in einem Bereich $h \leqq y \leqq g$, dessen seitliche Begrenzungen $x_1(y)$, $x_2(y)$ nicht geradlinig sind und auf denen (a) die Randbedingungen in gewisser Integralform bzw. (b) die gewöhnlichen Randbedingungen 1. Art vorgegeben sind. Beweise für Existenz- und Eindeutigkeit der Lösung, die durch Stieltjes-Integrale ausgedrückt wird. Bei (b) wird eine „parabolische" Approximation des Randes vorgenommen. *H. Witting.*

Widder, D. V.: Positive temperatures on an infinite rod. Trans. Amer. math. Soc. **55**, 85—95 (1944).

Beitrag zum Eindeutigkeitsproblem der Lösung von $u_{xx} = u_t$, $u(x, 0) = f(x)$ in $-\infty < x < +\infty$, für nicht-negative Lösungen $u(x, t)$. Zunächst allgemeiner Überblick über die bisherigen Eindeutigkeitsaussagen unter den verschiedenartigen Forderungen für $u(x, t)$. Aufbauend auf Arbeiten von Tychonoff (dies. Zbl. **12**, 355) und Täcklind (dies. Zbl. **14**, 22), deren wesentliche Teile kurz dargestellt werden, wird bewiesen: 1. Es sei $u(x, t) \in H$ (d. h. zweimal stetig differenzierbare Lösung von $u_{xx} = u_t$) in $0 \leqq t < c$; $u(x, t) \geqq 0$ in $0 \leqq t < c$ und $u(x, 0) = 0$ in $-\infty < x < +\infty$; dann ist $u(x, t) = 0$ in $0 \leqq t < c$. 2. Notwendig und hinreichend für $u(x, t) \in H$ und $u(x, t) \geq 0$ in $0 < t < c$ ist $u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} k(y - x, t)\,d\alpha(y)$, wobei $k(x, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-x^2/4t}$, $\alpha(y)$ eine nicht-abnehmende Funktion ist und das Integral in $0 < t < c$ konvergiert. 3. Wenn $u(x, t) \in H$ für $0 < t < c$, $u(x, t) \geqq 0$ für $0 < t < c$ und $u(x, 0_+) = 0$ für $-\infty < x < +\infty$, dann ist $u(x, t) = 0$ in $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < c$. *H. Witting.*

Shklover, A. M.: Use of complex numbers in solving problems of heat transfer by plane thermal waves. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **45**, 106—110 (1944).

L'A. détermine la solution du problème de propagation de la chaleur dans une sorte de substance stratifiée en partant de la solution de l'équation $\partial t/\partial\tau = a\,\partial^2 t/\partial x^2$ de la forme $t = e^{-2\pi\tau i/z}(A \operatorname{ch} x\sqrt{2\pi i/az} + B \operatorname{sh} x\sqrt{2\pi i/az})$. D'après le réf., il faut remplacer $\sqrt{x}$ par x dans la formule (7) du travail référé. *M. Krzyżański.*

Vernotte, Pierre: Valeur, à l'extérieur d'un système matériel, de la série de Fourier représentant une distribution initiale de températures à l'intérieur de ce système. C. r. Acad. Sci., Paris **217**, 364—366 (1943).

Vernotte, Pierre: Extension, aux milieux illimités, de la méthode générale d'intégration de Fourier, relative aux milieux limités. C. r. Acad. Sci., Paris **217**, 441—443 (1943).

Entwicklung einer Methode zur Fortsetzung einer in $[0, l]$ gegebenen Funk-

tion $F(x) = \sum_i A_{n_i} \cos\left(n_i \frac{x}{l} - \varphi_{n_i}\right)$ über die Intervallgrenzen hinaus, wenn 0 die einzige Singularität ist. n_i sind die Wurzeln einer transzendenten Gleichung, wie sie bei der Separation des Randwertproblems der linearen Wärmeleitung auftritt, mit $\lim_{i\to\infty} n_i = \infty$. $x = 0$ einzige Singularität. Die Methode beruht auf der Zerlegung in cos- und sin-Anteile und deren Bestimmung aus linearen Differentialgleichungen. Drei Beispiele. *H. Witting.*

Vernotte, Pierre: Methode très générale pour étudier le début des perturbations régies par les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique. Application à la chaleur et à l'hydrodynamique. C. r. Acad. Sci., Paris 210, 42—44 1940).

Equations à deux variables x (espace) et t (temps); recherche de solutions de la forme $\sum x^n f(t\, x^{-p})$. *Ch. Blanc.*

Lidjaev, S.: Über die Darstellbarkeit der Lösung der Wärmeleitungsgleichung durch das Poissonsche Integral. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 5, 263—268 (1941) [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Jaeger, J. C.: Radial heat flow in circular cylinders with a general boundary condition. J. Proc. roy. Soc. New South Wales 74, 342—352 (1940).

Shapiro, Z.: On elliptical systems of partial differential equations. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 46, 133—135 (1945).

Verf. konstruiert eine Fundamentallösung des elliptischen Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten $\sum_{j=1}^{2n} \sum_{k=1}^{3} a_{ij}^k\, \partial u^j/\partial x_k = 0$ mit Hilfe Abelscher Integrale, und löst dann das erste Randwertproblem für den Halbraum und konvexe Bereiche. [Bem. des Ref.: In den letzten Jahren wurden wichtige Verallgemeinerungen erzielt, über welche z. B. der Ergebnisse-Band von C. Miranda (dies. Zbl. 65, 85) informiert.] *K. Maurin.*

Chabate, B.: Sur les solutions généralisées des systèmes elliptiques linéaires. Mat. Sbornik, n. Ser. 17 (59), 193—210 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Existenz und Eigenschaften der verallgemeinerten Lösungen (v. L.) des elliptischen Systems (S) $a_1 u_{x_2} + a_2 u_{x_2} - v_{x_2} = 0$, $a_3 u_{x_1} + a_4 u_{x_2} - v_{x_1} = 0$ werden untersucht. Definitionen: Das Paar (u, v) heißt die v. L. von (S) in D wenn: 1. u, v fast überall (f. ü.) in D ein totales Differential im Stolzschen Sinne besitzen und f. ü. in D die Gl. (S) erfüllen. 2. $u_{x_i}, v_{x_k} \in L^2(D)\, i, k = 1, 2$. 3. $f(z) \equiv u + iv$ transformiert perfekte Nullmengen der Intervalle $x_1 = \dot{x}_1 (x_2 = \dot{x}_2)$ (mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler Intervalle) auf Nullmengen. 4. Die Transformation $w = f(z)$ ist stetig, offen und führt kein sich nicht auf einen Punkt reduzierendes Kontinuum in einen Punkt über. Hauptergebnisse: 1. Voraussetzung: $a_j \in C_\gamma^m(D)\, j = 1, \ldots, 4$ (γ-Hölderexponent) Behauptung: Die v. L. $(u, v) \in C_\gamma^{m+1}(D)$. 2. Die v. L. von (S) ist äquivalent einer quasikonformen Abbildung von etwas allgemeinerem Typus als diejenige von Lavrentieff. *K. Maurin.*

Pleijel, Åkè: Sur les opérateurs différentiels de type elliptique. Ark. Mat. Astron. Fys. 32A, Nr. 14, 14 p. (1946).

Magnaradze, Leo: Über die allgemeine Darstellung regulärer Lösungen von gewissen partiellen Differentialgleichungen mit imaginären Charakteristiken. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR 5, 365—372 (1944) [Georgisch und Russisch].

Eichler, Martin: Eine Verallgemeinerung des Rungeschen Satzes. Math. Z. 49, 565—575 (1944).

Verallgemeinerung für Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen mit analytischen Koeffizienten in n Variablen. *A. v. Heemert.*

Amerio, Luigi: Teoremi di esistenza per le equazioni lineari del secondo ordine, di tipo ellittico, nei domini illimitati. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 12 p. (1943) = Ist. naz. Appl. Calcolo, II. Ser. Nr. **151.**

Amerio, Luigi: Sull'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico. Acta Pont. Acad. Sci. 9, 213—227 (1945).

La materia di questa Nota riguardante una seconda ricerca dell'A. sulle equazioni del 2° ordine di tipo ellittico è ampiamente e completamente trattata dall'A. in una Memoria successiva (questo Zbl. 34, 202). *G. Sansone.*

Amerio, L.: Sull'integrazione delle equazioni lineari di tipo ellitico. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 175—182 (1946).

Amerio, L.: Sul calcolo delle autosoluzioni dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari a derivate parziali. I, II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur, VIII. Ser. 1, 352—359, 505—509 (1946).

S. das Referat über einen Vortrag des Verf. über den Gegenstand dieser Arbeiten in dies. Zbl. 33, 275. *G. Cimmino.*

Kodaira, Kunihiko: Über die Rand- und Eigenwertprobleme der linearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 262—268 (1944).

Verf. löst mit Hilfe der Zaremba-Weylschen Methode der orthogonalen Projektion (M. d. o. P.) das erste Rand- und Eigenwertproblem für formal selbstadjungierte elliptische Gleichungen zweiter Ordnung in n-Dimensionen. Es wird hier zum erstenmal die Lösung des inhomogenen Problems mit Hilfe des Frechet-Rieszschen Satzes erreicht. [Bem. d. Ref.: Diese Abhandlung bildet einen wichtigen Markstein auf dem Entwicklungswege der jetzt sehr vollkommenen M. d. o. P. Die hier erreichten Ergebnisse wurden inzwischen in den Abhandlungen von Kodaira, Višik, Gårding, Browder auf ziemlich allgemeine Gleichungssysteme beliebiger Ordnung übertragen. Die allgemeinste Fassung des Weylschen Lemmas findet sich bei Maurin. Der Zusammenhang der M. d. o. P. mit der Methode von Trefftz und Ritz wurde in der Abhandlung d. Ref. (dies. Zbl. 64, 347) gezeigt. *K. Maurin.*

Sauer, Ludwig: Parametrixmethode zur Lösung von Randwertproblemen. I: Auflösung von Integralgleichungen zweiter Art. II: Bildung und Eigenschaften der Parametrix. Math. Ann. 118, 385—440 (1942); 119, 67—130 (1943).

I. Dans ce premier article sur la méthode de la paramétrix de Hilbert appliqueé à la résolution des équations aux dérivées partielles du type elliptique, l'A. étudie les équations intégrales de seconde espèce, dont les noyaux possèdent des singularités analogues à celles des „paramétrix", en utilisant à cet effet, la méthode classique des noyaux itérés. L'A. donne tout d'abord la fonction et les propriétés de la paramétrix, en vue d'application à la détermination des solutions des équations aux dérivées partielles de la forme $E\,U \equiv A\,U_{xx} + 2B\,U_{xy} + C\,U_{yy} + A_0\,U_x + B_0\,U_y + C_0\,U = F$ $(AC - B^2 \equiv 1,\ A > 0)$, qui s'annulent sur la frontière d'une région b. Une paramétrix est une fonction $P(t, t')$ $(t = (x, y), t' = (x', y'))$ satisfaisant les conditions suivantes: (I) P est de la classe C'', pour $t \neq t'$; $|P| \leqq K_1(1 + |\log R|)$, et $|P_x|$, $|P_y|$, $|P_{x'}|$, $|P_{y'}|$, $|EP|$, $|\bar{E}'P| \leqq K_2/R$ $(R^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2)$, où $\bar{E}$ est l'opérateur adjoint à l'opérateur E. (II) Pour $R \to 0$, P a une singularité, telle que $\int_b P(E'U')\,dt' = \int_b (E'P)\,U'\,dt' - U$, $E(\int_b PF'\,dt') = \int_b (EP)\,F'\,dt' - F$; $(F' = F(t'), \text{etc.})$. (III) $\int_b PF'\,dt'$ a les mêmes propriétés de differentiabilité que les fonctions U. En d'autres mots, P possède toutes les propriétés d'une fonction de Green, sauf si $EG = \bar{E}'G = 0$ pour $R > 0$. Toute solution de l'équation différentielle, est, compte tenu de (II), une solution de l'équation intégrale $U - \int_b (E'P)\,U'\,dt' = -\int_b PF'\,dt'$. — II.

Représentation explicite de la paramétrix: 1. Pour l'équation générale définie dans un domaine b limité par une frontière d, ayant une normale intérieure à variation continue, mais pouvant avoir des points doubles. 2. Pour les équations telles que $A \equiv C \equiv 1$, $B \equiv 0$, la frontière ayant un nombre fini de points anguleux. Enfin, des propriétés de la paramétrix P, telles que: bornes des dérivées, propriétés des noyaux itérés, etc. *S. Vasilache.*

Simonov, N. I.: Solution of some boundary problems for elliptical systems of linear equations. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 44, 259—261 (1944).

Verf. löst mit Hilfe der Fouriertransformation eine Randaufgabe für ein System elliptischer Gleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. *K. Maurin.*

Simonoff, N.: Résolution de certains problèmes limites pour les systèmes elliptiques linéaires d'ordre quelconque. Moskovsk. gosudarst. Univ., učenye Zapiski 100, Mat. Tom 1, 53—84 (1946) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Cinquini-Cibrario, Maria: Una proprietà degli integrali delle equazioni ellittico-paraboliche del secondo tipo misto. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 3, 502—510 (1942).

Untersuchung über die Analytizität und die Fortsetzbarkeit durch die y-Achse der Lösungen der Differentialgleichung $(x^{2(k+1)}/k^2)\, z_{xx} + z_{yy} = 0$. *G. Cimmino.*

Frankl, F.: On the theory of the equation $y\,\partial^2 z/\partial x^2 + \partial^2 z/\partial y^2 = 0$. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 10, 135—166 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

D ist ein Gebiet der oberen Halbebene mit dem Rande: $\partial D = L + [0, 1]$ (L ein in der oberen Halbebene liegender die x-Achse orthogonal schneidender Kurvenbogen). Es werden zwei Randwertaufgaben (1°, 2°) für die Gleichung $y\,\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$ gelöst: 1° $u|_L = f$, $u|_{[0,1]} = h$. 2° $u|_L = f$, $\partial u/\partial y|_{[0,1]} = g$ (f, g, h gegeben). Mit Hilfe der Grundlösungen werden die genannten Probleme auf auflösbare Fredholmsche Gleichungen zweiter Art zurückgeführt. Bei 2° wird noch eine die Eindeutigkeit sichernde Bedingung hinzugefügt. *K. Maurin.*

Fortet, Robert: Les progrès récents de la théorie du potentiel et de ses applications à l'analyse et la théorie des fonctions sous-harmoniques. Revue Sci. 80, 137—139 (1942).

Ein zusammenfassender Bericht. *A. Pfluger.*

Brelot, Marcel: Fonctions sousharmoniques, presque sousharmoniques ou sousmédianes. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. 21, 75—90 (1946).

Étude de nombreuses classes de fonctions liées aux fonctions sousharmonigues. Théorèmes de convergence. *J. Deny.*

Cartan, Henri: Capacité extérieure et suites convergentes de potentiels. C. r. Acad. Sci., Paris 214, 944—946 (1942).

Cartan, Henri: Sur les suites de potentiels de masses ponctuelles. C. r. Acad. Sci., Paris 214, 994—997 (1942).

Cartan, Henri: Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels. Bull. Soc. math. France 73, 74—106 (1945).

Reconsidération des fondements de la théorie du potentiel newtonien, qu'on fait reposer presqu'entièrement sur deux résultats nouveaux: 1° (théorème de H. Cartan): l'espace des mesures positives d'énergie finie, normées par la racine carrée de l'énergie, est complet; 2° (second principe du maximum ou principe de H. Cartan): si μ et ν sont des mesures positives d'énergie finie dont les potentiels vérifient $U^\mu \leqq U^\nu$ presque partout pour μ, alors $U^\mu \leqq U^\nu$ partout. Utilisation systématique de la notion de capacité extérieure. Parmi les nombreuses applications: pour qu'un ensemble E soit de capacité extérieure nulle, il faut et il suffit qu'il

soit polaire (i. e. il existe un potentiel $\not\equiv \infty$, $= \infty$ en tout point de E); la borne inférieure d'une famille quelconque de potentiels de mesures positives est „quasi-partout" égale à un tel potentiel; d'où diverses améliorations d'un théorème de Brelot sur la convergence des suites de potentiels (M. Brelot, ce Zbl. 19, 351). *J. Deny.*

Cartan, Henri: Théorie générale du balayage en potentiel newtonien. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. 22, 221—280 (1946).

Les notions précédentes permettent de développer, par de nouvelles méthodes, la théorie de la capacité et du balayage des mesures positives (de potentiel $\not\equiv \infty$) pour des ensembles quelconques. On envisage d'abord le cas des mesures d'énergie finie et on applique les techniques de l'espace de Hilbert. On introduit 4 sortes de convergence (forte, faible, fine, vague) pour les mesures positives, d'où 4 topologies sur l'espace des mesures positives d'énergie finie. On passe ensuite au cas général. Une place importante est réservée à l'étude de l'effilement et de la topologie fine dans l'espace euclidien (topologie la moins fine rendant continues les fonctions surharmoniques). Les applications aux problèmes intérieurs et extérieurs de Dirichlet ne sont pas traitées explicitement, mais peuvent s'en déduire facilement. Les mémoires analysés ci-dessus constituent encore à l'heure actuelle l'exposé le plus moderne et le plus clair de la théorie newtonienne; ils n'ont guère besoin d'être complétés que sur un point: l'identité des capacités intérieure et extérieure pour un borélien, démontrée ultérieurement par G. Choquet (Theory of capacities, University of Kansas, Lawrence, 1954). *J. Deny.*

Deny, Jacques: Sur l'espace des distributions d'énergie finie et un théorème de H. Cartan. C. r. Acad. Sci., Paris 222, 1374—1376 (1946).

Voir la thèse ultérieure de l'A. (ce Zbl. 34, 362). *J. Deny.*

Kametani, Syunzi: On some properties of Hausdorff's measure and the concept of capacity in generalized potentials. Proc. imp. Acad. Tokyo 18, 617—625 (1942).

Kametani, Syunzi: On Hausdorff's measures and generalized capacities with some of their applications to the theory of functions. Japanese J. Math. 19, 217—257 (1945).

Kametani, Syunzi: A remark on the note "On some properties of Hausdorff's measure and the concept of capacity in generalized potentials". Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 15 (1944).

Relations entre mesure de Hausdorff et Φ-capacité pour les ensembles d'un espace métrique séparable (extension des théorèmes de Erdös-Gillis et de Ugaheri). Applications àl'étu de de la mesure α-dimensionnelle des ensembles W (compacts du plan, tels que toute fonction analytique bornée sur le complémentaire soit constante). *J. Deny.*

Kametani, Syunzi: Positive definite integral quadratic forms and generalized potentials. Proc. imp. Acad. Tokyo 20, 7—14 (1944).

Introduction d'une norme-énergie et application aux fondements de la théorie du potentiel par rapport à un noyau $G(p, q)$ positif, symétrique et de type positif, satisfaisant aux conditions usuelles de continuité; on s'est placé dans un espace métrique séparable. *J. Deny.*

Vasilesco, Florin: Sur une notion nouvelle de capacité d'un ensemble. C. r. Acad. Sci., Paris 216, 191—193 (1943).

This note introduces a generalization of the notion of capacity due to several authors. Let E be an arbitrary point set in the space R^3, μ a positive distribution of masses in R^3 whose newtonian potential is v, assumed to be bounded in $\bar{E}$, let further $\{\nu\}$ denote a family of distributions whose supports are in $\bar{E}$ and whose potentials are $\leqq v$ on E. If m stands for the total mass of the distribution ν the

lower upper bound of the family $\{m\}$ is called v-capacity. If $v = 1$ this is the very definition of C. de la Vallée-Poussin. Now when $E = \bar{E}$ the sweeping out of the distribution μ on E yields a distribution called „v-capacitaire", namely of total mass equal to the v-capacity. This distribution is unique and its potential equal to v on E except at points of a set of capacity zero. The main problem whose solution is announced in this note is that of proving the existence and the uniqueness of the v-capacity and of a „v-capacitaire" distribution when $E \neq \bar{E}$. The main tool of the demonstrations is that of a class (C) of positive distributions, each one being limit of positive distributions whose supports are closed subsets of E. The author makes use also of „fundamental sequences" of closed subsets of E whose „v-capacitaire" potentials tend to v at the regular points of E. *C. Racine.*

Brelot, M.: Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. Ann. Sci. École norm. sup., III. Sér. **61**, 301—332 (1944).

On note $\bar{R}_\tau$ l'espace compact obtenu en adjoignant à R_τ un point à l'infini. On étend les résultats fondamentaux de la théorie du potentiel (problème de Dirichlet, représentation potentielle des fonctions sousharmoniques, suites de potentiels, etc.) aux ouverts de $\bar{R}_\tau$ grâce à une définition appropriée de la sous-harmonicité à l'infini et à l'introduction d'un noyau convenable h_Q. Explication des divergences entre les cas $\tau = 2$ et $\tau \geqq 3$ par le fait que le point à l'infini constitue un ensemble polaire dans le second cas, non dans le premier. Ces notions sont utilisées dans la plupart des publications ultérieures de l'A. *J. Deny.*

Brelot, Marcel: Minorantes sous-harmoniques, extrémales et capacités. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **24**, 1—32 (1945).

Théorie générale du balayage sur ensembles quelconques, parallèle à celle de H. Cartan (ce Zbl. **61**, 227), mais d'un point de vue assez différent: on étudie directement les potentiels (plus généralement les fonctions sousharmoniques), et ensuite les masses associées; cela permet d'éviter le passage intermédiaire par les distributions d'énergie finie; la méthode utilisée (enveloppes de familles de fonctions sousharmoniques) exige une amélioration préalable d'un résultat de Sjöberg sur les minorantes sousharmoniques, obtenu grâce au théorème de convergence de Cartan. *J. Deny.*

Brelot, Marcel: Sur la mesure harmonique et le problème de Dirichlet. Bull. Sci. math., II. Sér. **69**, 153—156 (1945).

Les mesures harmoniques de deux ensembles-frontière e et e' ne sont pas toujours dans un rapport borné au voisinage d'un point-frontière régulier non adhérent à e et e'. *J. Deny.*

Brelot, M.: Sur l'approximation et la convergence dans la théorie des fonctions harmoniques ou holomorphes. Bull. Soc. math. France **73**, 55—70 (1945).

On approfondit une étude entreprise par Keldych et Lavrentieff (ce Zbl. **16**, 402). Le problème de Dirichlet pour compacts et la notion de point instable jouent un rôle essentiel dans ces questions d'approximation. *J. Deny.*

Brelot, Marcel: Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. **22**, 205—219 (1946).

Démonstration du principe des singularités positives de Picard-Bouligand en un point-frontière irrégulier d'un domaine plan. Extension partielle et contre-exemples pour l'espace. *J. Deny.*

Brelot, Marcel: Sur l'allure des fonctions harmoniques à la frontière. C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 676—678 (1945).

Étude en un point irrégulier. *J. Deny.*

Brelot, Marcel: Sur le problème de Dirichlet. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 654—656 (1945).

Brelot, Marcel: Sur le problème de Dirichlet ramifié et la représentation conforme. C. r. Acad. Sci., Paris **222**, 851—852 (1946).

Brelot, Marcel: Le problème de Dirichlet „ramifié". Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. math. phys., n. Sér. **22**, 167—200 (1946).

Décomposition des points-frontière d'un domaine de $\bar{R}_\tau$ selon l'accessibilité (utilisation de la métrique de Mazurkiewicz). Résolution du problème de Dirichlet correspondant (déjà étudié dans des cas moins généraux, notamment par Perkins et De La Vallée Poussin) pour données-frontière discontinues. Mise en évidence d'une mesure harmonique ramifiée permettant la représentation de la solution du problème ramifié au moyen d'une intégrale de Daniell. Relations avec la mesure conforme. *J. Deny.*

Lelong, Pierre: Sur la définition des fonctions harmoniques d'ordre infini. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 372—374 (1946).

Ausdehnung auf den Fall von mehreren Variablen eines Resultats von D. V. Widder (dies. Zbl. 27, 392). *G. Cimmino.*

Friedrichs, K. O.: An inequality for potential functions. Amer. J. Math. **68**, 581—592 (1946).

If φ is harmonic in euclidian N-space, $\varphi_k = \partial\varphi/\partial x_k$, $\int_R \sum_1^N \varphi_k^2\, dv < \infty$, $\int_R \varphi_1\, dv = 0$ (dv = element of volume) then a universal constant Γ exists, such that $\int_R \varphi_1^2\, dv \leqq \Gamma \int_R \sum_2^N \varphi_k^2\, dv$. Γ depends only on the character of R. *A. v. Heemert.*

Seward, D. M.: Harmonic continuation in space. Amer. J. Math. **66**, 255—267 (1944).

Sufficient conditions are stated for analytic continuation across an analytic surface in 3-space. Conditions concern either the behaviour of the function itself or of its normal derivative at the surface. *A. v. Heemert.*

Fedoroff, W. S.: Sur les fonctions harmoniques conjuguées dans l'espace. Mat. Sbornik, n. Ser. **13 (55)**, 287—300 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Fedoroff, V. S.: Sur les fonctions harmoniques. Mat. Sbornik, n. Ser. **12 (54)**, 161—183 (1943) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Fedoroff, V.: Sur la monogénéité dans l'espace. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 257—274 (1945) [Russisch mit französ. Zusammenfassg.].

Questions of monogeneity are considered in three-dimensional space: If $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ are real harmonic functions in a domain D of 3-space, it is shown that a necessary and sufficient condition that any analytic function $f(\zeta)$ where $\zeta = \varphi + i\psi$, be a (complex-valued) harmonic function of x, y, z is that $|\nabla\varphi| = |\nabla\psi|$, $\nabla\varphi\,\nabla\psi = 0$, at every point of D. If E is a perfect, disconnected set in D which is reduced (i. e., that part of E lying in any neighborhood of any point of E has positive measure), there exists a function $f(x, y, z)$ of class C in D and harmonic in $D - E$. Most of the results have been superseded by later papers of the author (this Zbl. **38**, 324; **43**, 153; **57**, 133). *A. J. Lohwater.*

Stepanoff, W.: Sur l'équation de Laplace et certains systèmes triples orthogonaux. Mat. Sbornik, n. Ser. **11 (53)**, 204—238 (1942) [Französisch mit russ. Zusammenfassg.].

In this paper all systems of curvilinear coordinates are found in which the three-dimensional Laplace equation is separable. *A. Lohwater.*

Temliakov, A.: Harmonic functions and solutions of the wave equation with three independent variables. Mat. Sbornik, n. Ser. **14 (56)**, 133—154 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

A method is given for the determination of the poles of the wave equation *A. Lohwater.*

Tsuji, Masatsugu: On the boundary value of a harmonic function in space. Japanese J. Math. **19**, 111—137 (1944).

Δ sei ein Gebiet im Raum. Der Rand S von Δ bestehe aus endlich vielen glatten Flächenstücken, die paarweise von stückweise glatten Jourdankurven L begrenzt werden. Außerdem soll für $\delta > 0$ eine Funktion $a(\delta) > 0$ und eine Zahl a_0 existieren, so daß 1. die Kugel vom Radius $a(\delta)$ die S in einem Punkt $P \in S$ berührt, ganz zu Δ gehört, wobei P von L einen Abstand $\geqq \delta$ hat und 2. eine Kugel vom Radius a_0 die in einem Punkt $P \in S - L$ die Fläche S tangiert, ganz außerhalb Δ liegt. Verf. untersucht die Randwerte einer in Δ harmonischen Funktion sowie die Darstellbarkeit einer solchen Funktion mit Hilfe von Belegungen auf S. *Joachim Nitsche.*

Liénard, Alfred: Problème de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel. C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 427—428 (1945).

Rocco Boselli, Anna: Le funzioni di Green per gli iperstrati sferici. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **14**, 5—16 (1943).

Explizite Ausdrücke durch Reihenentwicklungen der im Titel genannten Funktionen. *G. Cimmino.*

Caligo, D.: Sul problema di Dirichlet per l'iperstrato. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 534—539 (1946).

Untersuchung über die Eindeutigkeit einer Lösung $u(x_1, \ldots, x_n, y)$ der Poissonschen Gleichung $\Delta u = f$ in der Schicht $0 \leqq y \leqq \alpha$ mit vorgegebenen Werten für $y = 0$ und $y = \alpha$, in bezug auf das Verhalten für $(x_1, \ldots, x_n) \to \infty$ bei festem y. *G. Cimmino.*

Rosenblatt, Alfred: Über die Greensche Funktion beschränkter Gebiete im dreidimensionalen Euklidischen Raum. Revista Ci. **43**, 291—318 (1941) [Spanisch].

Beweise zu der in Actas Acad. na. Ci. exact., fis. natur. Lima **4**, 42—52 (1941) erschienenen Arbeit.

Segal, B. I.: Some three-dimensional problems of the potential theory and their applications. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 323—358 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Mitra, Samarendra Kumar: A new method of solution of the boundary value problems of Laplace's equation relating to two spheres. I. Bull. Calcutta math. Soc. **36**, 31—39 (1944).

Mitra, Samarendra Kumar: On the boundary value problems of Laplace's equation relating to two spheres. A new method of solution. Science and Culture **9**, 397—398 (1944).

Jackson, Dunham: The harmonic boundary value problem for an ellipse or an ellipsoid. Amer. math. Monthly **51**, 555—563 (1944).

The solution of the first boundary problem for the ellipse is given. The boundary values and the searched solution are written in the form of trigonometical series. *J. Gorski.*

Zaremba, S.: On a mixed problem for Laplace's equation. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. **1**, Nr. 3—4 (13—14), 125—146 (1946) [Russisch].

Übersetzt aus: Bull. Acad. Sci. Cracovie, Cl. Sci. math. natur. Sér. A **1910**, 313—344 (1910).

● **Bilger, Gérard: Sur les polygones et les polyèdres de même potentiel.** Thèse, Univ. Genève, 1942. 39 p.

Delange, H.: Sur l'unicité de la distribution de masses produisant un potential donné. Bull. Sci. math., II. Sér. **69**, 7—12 (1945).

Grünberg, G. A.: Some theorems relating to the evaluation of potentials and charges induced on conductors placed in a given external electric field. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **38**, 203—205 (1943).

Zagar, Francesco: Attrazione e potenziale di ellissoidi. Rend. Sem. mat. Univ. Padova **13**, 57—77 (1942).

(1) **Landkof, N.: On some characteristics of irregular points in the generalized problem of Dirichlet.** Mat. Sbornik, n. Ser. **19 (61)**, 175—182 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(2) **Landkoff, N.: On the position of irregular points in the generalized problem of Dirichlet.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **39**, 335—337 (1943).

(3) **Keldych, M.: Sur le problème de Dirichlet.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **32**, 308—309 (1941).

(4) **Stožek, Wladimir: Deux théorèmes sur le potentiel de simple couche.** Mat. Sbornik, n. Ser. **16 (58)**, 121—124 (1945) [Französisch russ. Zusammenfassg.].

(5) **Uspensky, J. V.: Sur la méthode de Laplace dans la théorie de l'attraction des ellipsoides homogènes.** Univ. nac. Litoral, Inst. mat., Publ. **5**, 63—71 (1945).

(6) **Gavrilov, L.: Solution of the direct and inverse potential problem for the paraboloid of rotation and the infinite parabolic cylinder.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz. **9**, 521—528 (1945); **Addition.** Ibid. **10**, 499—500 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(1), (2): Methods are discussed for the possible characterization of irregular points of the Dirichlet problem; it is shown that the irregular points on a certain Jordan curve lying on the frontier of a domain in 3-space form a set of the first category. In (3) the difference between the „generalized" Dirichlet problem and the „classical" Dirichlet problem is discussed, and some general properties of the former are given. (4)—(6): Necessary and sufficient conditions are given in order that the logarithmic (Newtonian) potential due to a simple distribution on the boundary of an ellipse (ellipsoid) be constant in the interior of the ellipse (ellipsoid); these conditions relate the density and curvature. In (5) a simplication is made in the proof of a theorem concerning the attractions of two homogeneous confocal ellipsoids on an exterior point, and this result is extended in (6) to the case of paraboloids and parabolic cylinders. *A. J. Lohwater.*

Monna, A. F.: Sur un principe de variation de Gauss dans la théorie du potentiel. Nederl. Akad. Wet., Proc. **49**, 54—62 = Indagationes math. **8**, 18—26 (1946).

● **Soudan, Robert: Étude de la déformation d'un corps à potentiel constant.** Thèse, Univ. Genève, 1940. 43 p.

Soudan, Robert: Expression nouvelle de la densité de balayage d'un corps homogène. C. r. Soc. Physique Genève **62**, 26—27 (1945).

Transue, W. R.: Representation of subharmonic functions in the neighborhood of a point. Amer. J. Math. **65**, 335—340 (1943).

Verf. gibt eine Darstellung von in der ganzen Ebene subharmonischen Funktionen $u(z)$, die der Weierstraßschen Produktdarstellung ganzer Funktionen entspricht: Ist $\mu(e)$ die zu u gehörige Massenverteilung und $\int_{|z|>1} |z^{-1-p}|\, d\mu(e_z) < \infty$, so gilt $u(z) = \int_{|\zeta|>1} \log |E(z/\zeta, p)|\, d\mu(e_\zeta) + h(z)$, wo $h(z)$ in $|z| > 1$ harmonisch ist und $E(z/\zeta, p)$ den Weierstraßschen Primfaktor bedeutet. *A. Pfluger.*

Wolf, František: On majorants of subharmonic and analytic functions. Bull. Amer. math. Soc. **48**, 925—932 (1942).

Verf. gibt einen neuen Zugang zu einer Reihe von Majorisierungsproblemen für subharmonische Funktionen. Sein zentrales Resultat lautet: Es sei $u(x, y)$ im Rechteck $R[|x| < c,\ |y| < d]$ subharmonisch, $\psi(x) \in L(-c, c)$ mit $\psi(\pm c)$ endlich und $u(x, y) < e^{\psi(x)}$ in R. Dann hat u im Rechteck $R_\delta[|x| < c, |y| < d \pm \delta]$ eine nur von $\psi(x)$ und $\delta(>0)$ abhängige obere Schranke. Daraus ergeben sich

ziemlich leicht 1. eine Verschärfung eines Satzes von N. Levinson (dies. Zbl. 26, 216; insbes. theorem 43), 2. ein Resultat von N. Sjöberg (dies. Zbl. 22, 239) und 3. die vom Verf. gegebene Verallgemeinerung eines Satzes von Phragmén-Lindelöf (dies. Zbl. 21, 240). *A. Pfluger.*

Wolf, František: On harmonic and analytic functions. Bull. Amer. math. Soc. 49, 602—605 (1943).

Biernacki, Mieczyslaw: Sur les valeurs moyennes des fonctions sousharmoniques. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A 1, 13—17 (1946) [Französisch mit poln. Zusammenfassg.].

Soit $u(r, \theta)$ une fonction sousharmonique positive dans le cercle $r < R$. L'auteur examine la relation entre les moyennes

$$I(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \theta)\, d\theta, \quad \Phi(r, u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_{0 \leqq t \leqq r} u(t, \theta)\, d\theta$$

et démontre les inégalités

$$\Phi(r, u) \leqq \left[\frac{1}{\pi}\log\frac{R+r}{R-r} + \frac{5}{2}\right] I(r, u),$$

$$\Phi(r, u) \leqq A\, I(r, u) + \frac{B}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r, \theta)\log^+ u(r, \theta)\, d\theta$$

et pour $p > 1$ $\Phi(r, u^p) \leqq A\, C(p)\, I(r, u^p)$, où A et B sont des constantes et $C(p)$ dépend de p. Dans la démonstration l'A. utilise certains résultats dûs à Hardy, Littlewood, Stein, Zygmund et F. Riesz. *F. Leja.*

Gabriel, R. M.: A note upon functions positive and subharmonic inside and on a closed convex curve. J. London math. Soc. 21, 87—90 (1946).

Verf. verallgemeinert und präzisiert ein Resultat von H. Frazer (J. London math. Soc. 20, 199 (1945)): Ist $u(z)$ in einem konvexen Bereich und auf dessen Rand Γ positiv und subharmonisch und z_0 ein Punkt im Bereich im Abstand l von Γ, so gilt $u(z_0) \leqq \frac{1}{\pi l}\int_\Gamma u(z)\cdot|dz|$. Die Ungleichung ist scharf und die Konvexität eine notwendige Bedingung. *A. Pfluger.*

Hardy, G. H. and W. W. Rogosinski: Theorems concerning functions subharmonic in a strip. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 185, 1—14 (1946).

Die Verff. beweisen das folgende Hauptresultat: Ist $f(x, y)$ in einem vertikalen Streifen subharmonisch und nach oben beschränkt, so ist 1. $\Phi(x) = \limsup_{y\to\infty} f(x, y)$ entweder $\equiv -\infty$ oder stetig und konvex, 2. $I(x, y) = \int_{-y}^{y} f(x, t)\, dt$ subharmonisch, und falls dieses nach oben beschränkt ist, $J(x) = \limsup_{y\to\infty} I(x, y)$ wie $\Phi(x)$ entweder $\equiv -\infty$ oder stetig und konvex. Daraus ergeben sich Sätze vom Phragmén-Lindelöfschen Typus und Verallgemeinerungen durch konforme Übertragung auf Winkelräume und andere Gebiete. *A. Pfluger.*

Lelong, P.: Les fonctions plurisousharmoniques. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 62, 301—338 (1945).

Eine reellwertige Funktion u in einem Gebiet D des n-dimensionalen Raumes C^n der komplexen Variabeln $z_1, z_2, \ldots, z_n$ heißt plurisubharmonisch (p. s. h.), wenn a) $-\infty \leqq u < \infty$, aber $u \not\equiv -\infty$ ist, b) u lokal endliche obere Schranken hat und c) auf jeder analytischen Ebene durch D die Spur von u eine subharmonische Funktion oder die Konstante $-\infty$ ist. Beispiele solcher Funktionen sind (1) $u = \log|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$, wo f in D analytisch ist, (2) $u = u(\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$, wo $u(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ eine beliebige konvexe Funktion ist, (3) $-\log\delta(z)$, wo $\delta(z)$ den Abstand eines Punktes z in D vom Rande des Gebietes D bedeutet,

sofern D ein Regularitätsbereich ist. Der Begriff der p. s. h. Funktion ist gegenüber analytischen Abbildungen invariant und läßt sich auf beliebige komplexanalytische Mannigfaltigkeiten übertragen. Ist u in $D \subset C^n$ p. s. h., so ist seine Spur auf einer komplexanalytischen Mannigfaltigkeit M auf M noch p. s. h. Eine p. s. h. Funktion als Funktion der $2n$ reellen Variabeln $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ist subharmonisch. Die p. s. h. Funktionen haben eine Reihe zu den s. h. analoge Eigenschaften. Die obere Hülle endlich vieler p. s. h. Funktionen ist wieder p s. h.; die Grenzfunktion einer fallenden Folge von p. s. h. Funktionen ist wieder p. s. h. oder die Konstante $-\infty$. Der Mittelwert von u auf der Kante eines Polyzylinders in D ist nicht kleiner als der Wert von u im Zentrum. Ist u zweimal stetig differenzierbar, so ist u dann und nur dann p. s. h., wenn die Hermitesche Form $\sum_{i,j} s_{ij}\, dz_i\, \overline{dz_j}$, $s_{ij} = \partial^2 u/\partial z_i\, \partial z_j$, in jedem Punkte des Gebietes nicht-negativ ist. Die Dichte $\sum_i s_{ii}$ definiert die zu u als subharmonischer Funktion gehörige Massenverteilung. Die vom Verf. entwickelte Theorie liefert für die analytischen Funktionen mehrerer komplexer Variabeln das, was die subharmonischen Funktionen in der Ebene für die analytischen Funktionen einer komplexen Variabeln leisten.

A. Pfluger.

Iacob, Caius: Über einige harmonische Funktionen von zwei Veränderlichen. Pozitiva 1, 81—89 (1940) [Rumänisch mit französ. Zusammenfassg.].

Ridder, J.: Über harmonische Funktionen. Mathematica, Timişoara 21, 5—9 (1945).

Ridder, J.: Über harmonische Funktionen. Nieuw Arch. Wiskunde, II. R. 22, 162—170 (1946).

Wenn die für $(x, y) \in B$ (B beschränkt) definierte Funktion $u(x, y)$ in jedem achsenparallelen Rechteck I, das ganz in B liegt, endliche partielle Ableitung besitzt, die über I und (linear) bezüglich x und bezüglich y summierbar sind und die Beziehung $\int_{\mathrm{Rd}(I)} u_y\, dx - u_x\, dy = 0$ erfüllen, so ist u in B harmonisch.

Joachim Nitsche.

Loomis, L. H. and D. V. Widder: The Poisson integral representation of functions which are positive and harmonic in a half-plane. Duke math. J. 9, 643—645 (1942).

Direkter Beweis von: Die Darstellbarkeit einer Funktion $u(x, y)$ für $y > 0$ durch ein Poisson-Integral mit positiver Massenbelegung längs $y = 0$ ist notwendig und hinreichend dafür, daß u in $y > 0$ positiv und harmonisch ist.

Joachim Nitsche.

Loomis, Lynn H.: The converse of the Fatou theorem for positive harmonic functions. Trans. Amer. math. Soc. 53, 239—250 (1943).

Zamorev, A.: Untersuchung der zweidimensionalen inversen Aufgabe der Potentialtheorie. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz. 1941, 487—500 (1941) [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].

Zamorev, A. A.: Determination of the form of a body by the derivatives of the external gravitational potential. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz. 1942, 48—54 (1942) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

(*) **Tikhonov, A. N.: On the stability of inverse problems.** C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 39, 176—179 (1943).

Duboshin, G. N.: Expansion of reciprocal distance in the theory of potential. Priklad. Mat. Mech. 10, 407—420 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Let $\varphi(x, y)$ be the two-dimensional potential of a mass lying in the upper half-plane, and let $\varphi_y = \partial\varphi/\partial y$ be known on the x-axis. If γ is the density of the mass and $\iint \gamma\, z^n\, dx\, dy = a_n + i\, b_n$ its moments, it is shown how to determine these moments from φ_y and how to extend φ_x and φ_y into the upper and lower half-planes. Approximation methods are applied in (*) to the problem of finding

that mass distribution below a given surface which is produced by a given potential on the surface. *A. J. Lohwater.*

Walsh, J. L.: Note on the location of the critical points of harmonic functions. Bull. Amer. math. Soc. **52**, 346—347 (1946).

Sadosky, Manuel: Über das Grenzverhalten der Ableitung einer harmonischen Funktion. Revista Un. mat. Argentina 8, 70 (1942) [Spanisch].

Beispiel einer im Einheitskreis harmonischen Funktion mit beschränkter Ableitung der Randwerte, für die nicht alle Richtungsableitungen am Rande beschränkt sind. *Joachim Nitsche.*

Radon, J.: Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. Uspechi mat. Nauk, n. Ser. **1**, Nr. 3—4 (13—14), 96—124 (1946) [Russisch].

Übersetzt aus: S.-Ber. math. naturwiss. Kl. Akad. Wiss. Wien, Abt. IIa **128**, 1123—1167 (1920).

Birindelli, Carlo: Nuova trattazione dei problemi al contorno di una striscia per l'equazione di Laplace in due variabili. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **25**, 155—195 (1946).

Beweise zu den Resultaten, die in der in dies. Zbl. **29**, 265 besprochenen Arbeit veröffentlicht wurden. *M. J. De Schwarz.*

Tsuji, Masatsugu: On the Green's function. Japanese J. Math. **18**, 379—383 (1942).

Rosenblatt, Alfred: Über die Greensche Funktion für ebene Gebiete. Revista Ci. **46**, 473—493 (1944) [Spanisch].

Several properties and estimations for the Green's function for bounded plane domains are given. *J. Gorski.*

Rosenblatt, Alfred: On the gradient of Green's function in the plane. Summa Brasil. Math. **1**, Nr. 12, 241—246 (1946) [Englisch mit portugies. Zusammenfassg.].

Verallgemeinerung der Greenschen Formel im Kreise mit Anwendung auf die konforme Abbildung. *J. Ma. Orts.*

Hällström, Gunnar af: Reguläre und irreguläre Randpunkte der Greenschen Funktion in der Ebene. Acta Soc. Sci. Fennicae, n. Ser. A **3**, Nr. 5, 22 S. (1944).

The paper contains several known and new criteria for the regularity of a boundary point in the Dirichlet problem. *J. Gorski.*

Amerio, Luigi: Sui problemi di Cauchy e di Dirichlet per l'equazione di Laplace in due variabili. Atti Accad. Italia., Mem., Cl. Sci. fis. mat. natur. **14**, 393—425 (1943).

Siehe das Referat einer gleichbetitelten Arbeit des Verf. in diesem Zbl. **33**, 184. *G. Cimmino.*

Amerio, Luigi: Sul problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace in alcuni campi piani. Commentationes, Pontificia Acad. Sci. **7**, 59—74 (1943).

Der Grundgedanke dieser speziell auf den Fall des Kreises und der Ellipse zugeschnittenen Arbeit, nämlich den Übergang vom Cauchyschen zum Dirichletschen Problem in der Weise zu bewerkstelligen, daß die Normalableitung am Rand so bestimmt wird, daß sich die lokale Lösung des Cauchyschen Problems im ganzen Gebiet fortsetzen läßt, findet sich in zwei Arbeiten des gleichen Verf. (s. vorsteh. Ref. u. dies. Zbl. **33**, 184) weiterentwickelt. *M. J. De Schwarz.*

Sansone, G.: Condizioni sufficienti di esistenza e limitazioni delle derivate normali al contorno nel problema di Dirichlet per un cerchio. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 1042—1045 (1946).

Elementarer Beweis der im Titel genannten Bedingungen und Beschränkungen. *G. Cimmino.*

Consiglio, A.: Su la risoluzione in termini finiti dei problemi di Schwarz e di Dirichlet relativi al cerchio. Matematiche **2**, 1—8 (1946).

Einige Umformungen der klassischen Formel von Schwarz zum Zweck

praktischer Auswertung. Ähnliche Zielsetzungen finden sich in weiteren Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 18, 93; 33, 366; 39, 324). *M. J. De Schwarz.*

● **Seth, B. R.: Two dimensional potential problems connected with rectilinear boundaries.** (Lucknow University Studies, Nr. 13.) Allahabad, India: Allahabad Law Journal Press, 1939. V, 124 p.

Einige Probleme der Elastizitätstheorie und Hydrodynamik führen auf die Bestimmung der Funktion $V(x, y)$, die im Innern des durch einen Polygonzug begrenzten Gebietes harmonisch und längs der Berandung vorgegeben ist. Die Arbeit baut auf einer Erweiterung der von E. Trefftz [Math. Ann. 82, 97—112 (1920)] für das St. Venantsche Torsionsproblem vorgeschlagenen Methode auf. An dieser Stelle sei auch auf die Veröffentlichung von P. P. Kufarev [Priklad. Mat. Mech., n. Ser. 1, 43—76 (1937)] hingewiesen, in der eine strenge Behandlung desselben Problems erfolgt. *H. Bufler.*

Charny, I. A.: On a modification of Forchheimer's problem. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 27—30 (1945).

L'étude de la distribution stationnaire de la température dans un sol, où l'on a instalé un tube cylindrique, conduit à la recherche d'une fonction $T(x, y)$ harmonique dans le complément D d'un cercle au demi-plan $y > 0$, s'annulant à l'infini, et satisfaisant aux conditions: $T = T_0$ (T_0 const) sur la circonférence du cercle, $k\,T = \lambda\,T'_y$ pour $y = 0$. L'A. cherche une fonction analytique $W(z) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)$, telle que $\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{Re}\,(W)$ constitue la solution du problème. Pour déterminer la fonction $W(z)$, l'A. effectue la représentation conforme du domaine D sur un anneau. *M. Krzyżański.*

Ghizzetti, A.: Sopra due particolari problemi misti di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 1, 40—44 (1946).

Ghizzetti, Aldo: Sopra un particolare problema misto di Dirichlet-Neumann per l'equazione di Laplace, trattato col metodo delle trasformate parziali. Rand. Mat. e Appl., V. Ser. 5, 131—168 (1946).

Explizite Auflösungsformeln durch Integraldarstellungen des Problems, eine harmonische Funktion $u(x, y)$ in einem winkelförmigen oder kreisförmigen Gebiet zu bestimmen, wenn die Randwerte von u auf einem Schenkel und die von $\partial u/\partial n$ auf dem anderen und ein gegebenes Verhalten im Unendlichen, bzw. die Werte von u und die von $\partial u/\partial n$ auf zwei Komplementärbögen vorgeschrieben sind. *G. Cimmino.*

Fichera, Gaetano: Sul problema di Dini-Neumann nel piano. Bull. École polytechn. Jassy 1, 281—288 (1946).

Bestimmung einer mehrdeutigen harmonischen Funktion $u(x, y)$ in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet mit gegebenen Perioden und vorgeschriebenen Randwerten der Normalableitung. *G. Cimmino.*

Heins, Albert E.: A mixed boundary value problem. Some remarks on a problem of A. Weinstein. Bull. Amer. math. Soc. 49, 130—133 (1943).

Sokolnikoff, I. S. and R. D. Specht: Two-dimensional boundary value problems in potential theory. J. appl. Phys. 14, 91—95 (1943).

Sherman, D. I.: Certain problems of the theory of potential. Priklad. Mat. Mech. 9, 479—488 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Obreschkoff, Nicola: Sulle funzioni armoniche sopra la sfera. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 133—136 (1943).

Obreschkoff, Nicola: Intorno alle funzioni armoniche sopra le superficie. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 420—423 (1943).

Obreschkoff, Nikola: Sulle funzioni armoniche sopra l'ipersfera. Atti Accad. Italia, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. Ser. 4, 359—362 (1943).

Untersuchung der Gleichung $\Delta_2\varphi = 0$ auf einer Fläche (Δ_2 zweiter Beltrami-

scher Differentialparameter), Aufstellung der Gaußschen und Greenschen Integralformeln, Diskussion des Dirichlet-Problems, spezielle Durchführung für Kugeln bzw. Hyperkugeln. *Joachim Nitsche.*

Magnus, W. und F. Oberhettinger: Über einige Randwertprobleme der Schwingungsgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im Falle ebener Begrenzungen. J. reine angew. Math. **186**, 184—192 (1945).

Es wird eine punktförmige Lichtquelle, ein elektrischer oder magnetischer Dipol, betrachtet, der zwischen zwei parallelen, vollkommen leitenden Ebenen liegt, an denen sie gespiegelt wird. Die Gesamtwirkung ergibt sich durch Überlagerung der Strahlung der Quelle und den wiederholten Spiegelungen an den begrenzenden Ebenen. Dabei bilden also die „Quellen" zwei lineare Gitter. Das resultierende Vektorpotential läßt sich als über die beiden Gitter zu erstreckende Summe ausdrücken, die indessen nicht absolut konvergent ist und nur schwach konvergiert. Die Verff. zeigen aber, daß die Reihen in schnell konvergierende umgeformt werden können, indem man die Poissonsche Summationsformel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} F(y + n\,d) = d^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi\, n\, i\, y/d)\, f(2\pi\, n/d)$$

mit $f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\,\xi\,\eta)\, F(\eta)\, d\eta$ benutzt. So ergibt sich z. B.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-i\,k\,\sqrt{x^2 + (y - n\,d)^2})}{\sqrt{x^2 + (y - n\,d)^2}} = -\pi\, i\, d^{-1} \sum_{-\infty}^{+\infty} H_0^{(2)}(k_n |x|) \exp(-2\pi\, n\, i\, y/d)$$

mit $k_n = \sqrt{k^2 - 4n^2\pi^2/d^2}$. Ist k reell, so sind nur wenige k_n reell, der Rest dagegen komplex mit negativ-imaginärem Anteil. — Die Methode läßt sich auch anwenden auf eine lineare Quelle zwischen parallelen Platten sowie auf eine punktförmige Quelle in einem Wellenleiter von rechteckigem Querschnitt. *J. Picht.*

(1) **Feshbach, Herman: On the perturbation of boundary conditions.** Phys. Review, II. Ser. **65**, 307—318 (1944).

(2) **Wassermann, G. D.: On the theory of boundary perturbations.** Philos. Mag., VII. Ser. **37**, 563—571 (1946).

Solutions of $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$ satisfying boundary conditions of the form $\partial \varphi / \partial n = F \varphi$, ($F$ given at the boundary) are considered. In (1) the cases of small and large F are reduced to the boundary conditions $\partial \varphi / \partial n = 0$ and $\varphi = 0$ respectively using Green's functions whereby the problem transfers in that of the solution of an integral equation. In (2) a method of series development gives similar results. Moreover this method is applied to perturbations of the boundary and of the differential equation. *A. v. Heemert.*

Scherman, D.: Sur la réduction d'une classe de problèmes à l'équation intégrale de Fredholm. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **32**, 603—605 (1941).

Sherman, D.: On the reduction of the plane problem of the theory of potential to an integral equation. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 357—362 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Sherman, D.: On some problems of the theory of stationnary oscillations. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **9**, 363—370 (1945) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

Scherman, D. J.: On Poincaré's problem in the theory of potential. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **49**, 636—639 (1945).

Sherman, D.: On the general problem of the potential theory. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **10**, 121—134 (1946) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

In a domain S whose boundary L consists of a finite number of Jordan curves with continuous curvature, the solution of the equation $\Delta u + \lambda^2 u = 0$

(where λ is permitted to be 0) together with the condition $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} a_{kj}(s) \frac{\partial^k u}{\partial x^{k-j} \partial y^j} = f(s)$ (where $a_{kj}(s)$ and $f(s)$ are certain functions of the arclength s on L) can be reduced to the solution of a Fredholm equation. *A. J. Lohwater.*

Kupradze, V. D.: Einige neue Sätze über die Schwingungsgleichung und ihre Anwendungen auf Randwertprobleme. Trudy Tbilissk. gosudarst. Univ. **26 A**, 1—11 (1945) [Russisch mit georgisch. Zusammenfassg.].

Mecchvarišvili, Ja. G.: Über gewisse Eigenschaften regulärer Lösungen der Schwingungsgleichung. Trudy Tbilissk. gosudarst. Univ. **26 A**, 13—22 (1945) [Russisch mit georg. Zusammenfassg.].

Amerio, Luigi: Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in un dominio di connessione qualsiasi. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. **78** (III. Ser. 9), 79—102 (1945).

È un lavoro sull'integrazione dell'equazione (1) $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ in m variabili e in un dominio τ di connessione qualsiasi, condotto secondo un metodo dovuto ad M. Picone [questo Zbl. **23**, 231]. Indicando con σ il contorno di τ e supposto che A e B siano rispettivamente i valori assunti su σ da un integrale u della (1) e dalla sua derivata normale, si hanno le formule

$$(2) \qquad 0 = \int_\sigma \left[A(M) \frac{\partial v(\overline{MQ})}{\partial n} - B(M)\, v(\overline{MQ}) \right] d\sigma - \int_\tau f(M)\, v(\overline{MQ})\, d\tau,$$

$$(3) \qquad k_m\, u(P) = \int_\sigma \left[A(M) \frac{\partial v(\overline{MP})}{\partial n} - B(M)\, v(\overline{MP}) \right] d\sigma - \int_\tau f(M)\, v(\overline{MP})\, d\tau,$$

dove nella (2) v è la soluzione fondamentale dell'equazione $\Delta_2 u - \lambda^2 u = 0$, Q è un punto esterno a τ, e nella (3) P è un punto interno a τ, k_m una costante ben determinata, ed M indica in entrambe queste formule il punto di σ o di τ rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni. La $u(P)$ definita dalla (3) soddisfa la (1) in τ e quasi ovunque su σ le relazioni $\lim_{P \to M} u(P) = A(M)$, $\lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial n} = B(M)$, i limiti essendo presi lungo la normale n a σ. A seconda che sia assegnata $A(M)$ (problema di Dirichlet) oppure $B(M)$ (problema di Dini-Neumann) l'A. ricava dalla (2) rispettivamente $B(M)$ od $A(M)$ passando secondo il metodo di Picone dalla (2) ad un sistema di Fischer-Riesz. Il problema nel caso di un campo semplicemente connesso è completamente risolto. A questo lavoro ne fanno seguito due altri, uno sulle equazioni lineari del 2° ordine di tipo ellittico, uno sull'equazione $\Delta_{2k} = f$. *G. Sansone.*

Ghizzetti, A.: Sul metodo della trasformata parziale di Laplace a intervallo di integrazione finito. Atti Accad. naz. Lincei., Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **1**, 691—696 (1946).

È il riassunto di una Memoria dello stesso A., avente lo stesso titolo [questo Zbl. **32**, 283]. *G. Sansone.*

Wassermann, Gerhard: Sur quelques problèmes de fonctions propres relatifs à l'hexagone régulier. C. r. Acad. Sci., Paris **223**, 537—539 (1946).

● **Bleuler, Konrad: Über den Rolleschen Satz für den Operator $\Delta u + \lambda u$ und die damit zusammenhängenden Eigenschaften der Greenschen Funktion.** Diss. Eidg. Techn. Hochsch. Zürich, 1942. 37 S.

Walker, A. G.: Note on pseudoharmonic functions in space of constant curvature. J. London math. Soc. **20**, 32—39 (1945).

Mean value theorems for solutions of $(\nabla^2 - \lambda) v = 0$ reducing to classical results for curvature zero (isolated singularities are allowed). *A. v. Heemert.*

Wasow, Wolfgang: Asymptotic solution of boundary value problems for the differential equation $\Delta U + \lambda\, \partial U/\partial x = \lambda f(x, y)$. Duke math. J. **11**, 405—415 (1944).

Biben, Georges: Sur une extension du principe de É. Picard. C. r. Acad. Sci., Paris 214, 989—991 (1942).

Biben, Georges: À propos du principe de É. Picard. C. r. Acad. Sci., Paris 215, 12—13 (1942).

The uniqueness of the solution of the first boundary problem for the equation $\Delta\psi + 2\delta\,\partial\psi/\partial x + 2\varepsilon\,\partial\psi/\partial y + 2f\,\partial\psi/\partial z + g\,\psi = 0$ is discussed. *J. Gorski.*

Bergman, Stefan: Boundary values of functions satisfying a linear partial differential equation of elliptic type. Proc. nat. Acad. Sci. USA 26, 668—671 (1940).

Verf. hat gezeigt (dies. Zbl. 18, 262), daß jede in $x^2 + y^2 < 2$ reguläre Lösung $U(z, \bar{z})$ von $L[U] \equiv U_{z\bar{z}} + 2\mathrm{Re}[A(z, \bar{z})\, U_z] + C(z, \bar{z})\, U = 0$, wobei A eine komplexe, C eine reelle analytische Funktion der zwei Variabeln z und $\bar{z}$ bezeichnet ($z = x + i\,y$, $\bar{z} = x - i\,y$, $U_z = \frac{1}{2}(U_x - i\,U_y)$, $U_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(U_x + i\,U_y)$), mit Hilfe eines nur vom Operator L abhängigen Kernes E sich darstellen läßt in der Form (A) $U(z, \bar{z}) = \mathrm{Re}\big[\int_{-1}^{+1} E(z, \bar{z}; t)\, f[\frac{1}{2} z(1 - t^2)]\,(1 - t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt\big]$. Dabei bezeichnet $f(\zeta)$ eine für $|\zeta| < 1$ definierte analytische Funktion. Umgekehrt liefert jede derartige Funktion $f(\zeta)$, in (A) eingesetzt, eine Lösung von $L[U] = 0$. Es sei nun $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ regulär in $|\zeta| < 1$ und es gelte $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2\, n^{-1} < \infty$. Dann besitzt die entsprechende Funktion U fast überall auf $|z| = 2$ radiale Randwerte. *A. Huber.*

Nath Sharma, Prithvi: On some vibrational problems. Math. Student 14, (1946), 63—64 (1948).

Ghermanescu, Michel: Sur les valeurs moyennes des fonctions. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 12, 17—48 (1945).

Etude des relations entre les moyennes

$$\mu_k(u, P) = \frac{p + 2k - 2}{R^{p+2k-2}} \int_0^R \mu_{k-1}(u, P)\, t^{p+2k-2}\, dt, \qquad \mu_0(u, P) = u(P),$$

d'une fonction $u(P)$, continue, de l'espace R^p, lorsque u est solution d'une équation (1) $\Delta^m u + h_1 \Delta^{m-1} u + \cdots + h_m u = 0$, h_k constante, Δ^k laplacien itéré d'ordre k. Une relation $u(P) = \varphi_1(\varrho)\, \mu_1(u, P) + \cdots + \varphi_m(\varrho)\, \mu_m(u, P)$ ($4\varrho = R^2$) entraîne (1) et les φ_k sont nécessairement solutions d'une certaine équation différentielle linéaire. En particulier pour que u soit solution de $\Delta_m u = 0$, il faut et il suffit qu'il existe une combinaison linéaire homogène à coefficients constants des μ_k, ($1 \leqq k \leqq m$), qui soit égale à u. Le travail se place à un point de vue élémentaire, négligeant notamment l'étude systématique de la classe de mesures de Radon $d\lambda$ associées aux solutions de (1), c'est à dire telles que $\int d\lambda(P)\, u(P) = 0$ pour toute solution u de (1); on trouvera cette étude faite pour les fonctions solutions de $\Delta^m u = 0$ dans un travail de G. Choquet et J. Deny [Bull. Soc. math. France 72, 118—140 (1944)] paru un peu antérieurement. *P. Lelong.*

Vekua, I. N.: Sur un certain développement des fonctions métaharmoniques. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. 48, 3—6 (1945).

Jede Lösung u der metaharmonischen Gleichung $\sum_{\alpha=0}^{n} a_\alpha \Delta^\alpha u = 0$, $\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{N} \partial^2/\partial^2 x_i$, kann man in jedem beschränkten sternartigen Gebiete in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe $u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)\, |x - x_0|^{2k}$, wo $\Delta u_k = 0$, entwickelt werden. *K. Maurin.*

Diaz, Joaquin, B.: On a class of partial differential equations of even order. Amer. J. Math. 68, 611—659 (1946).

Applicazione del metodo delle variabili ipercomplesse allo studio di equazioni alle derivate parziali del tipo $L^N u = 0$, con $L u = \Delta u + \varphi(x)\, u_x + \psi(y)\, u_y$,

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$. Anzitutto viene trattato il caso dell'equazione $\Delta^N u = 0$, secondo il procedimento usato per $N = 2$ da Sobrero (questo Zbl. 8, 395), mediante lo studio dell'algebra generata dall'unità j_N definita da $(1 + j_N{}^2)^N = 0$, ciò che costituisce una estensione delle funzioni monogene, avendosi queste per $N = 1$. Ci si riattacca poi alla teoria delle funzioni Σ-monogene di Bers e Gelbart (questo Zbl. 29, 400) per dare una estensione di queste, passando dal caso $N = 1$ al caso $N > 1$, analoga alla estensione delle funzioni monogene prima ottenuta. Si hanno così delle funzioni dette (Σ, N)-monogene $f(x + i\,y) = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k\, j_N{}^k$, per le quali sono stabilite fra l'altro le nozioni di differenziazione, integrazione, potenze formali, e viene provato un teorema di sviluppo in serie di potenze formali, analogo dello sviluppo di Taylor; le $a_k(x, y)$ che definiscono le $f(x + i\,y)$ (Σ, N)-monogene saranno soluzioni dell'equazione $L^N u = 0$ detta in principio. *G. Cimmino.*

Meyman, N.: Sur un problème limite pour les équations polyharmoniques. C. r. Acad. Sci. URSS, n. Sér. **33**, 275—278 (1941).

(1): Let D be a domain in n-space bounded by a regular hypersurface of dimension $n - 1$. Let $\varphi_\mu(P)$, $P \in S$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$ be defined on S with derivatives of order $1, 2, \ldots, m - \mu$. It is then shown that there exists a solution of the m-harmonic equation, i. e., $\Delta^m u = 0$, which, together with its first $m - 1$ normal derivatives, tend to $\varphi_1(P), \ldots, \varphi_m(P)$, respectively, as boundary values. *A. J. Lohwater.*

(1) **Bremekamp, H.: Über die Eindeutigkeit der Lösungen von $\Delta^k u = 0$.** Nederl. Akad. Wet., Proc. 48, 222—228 = Indagationes math. 7, 27—33 (1945) [Holländisch.]

(2) **Bremekamp, H.: Eigenschaften der Lösung von $\Delta^k u = 0$.** Nederl. Akad. Wet., Proc. 48, 229—236 = Indagationes math. 7, 34—41 (1945) [Holländisch].

(3) **Bremekamp, H.: Über die Existenz einer Lösung von $\Delta^k u = 0$ die zugleich mit ihren $k - 1$ ersten normalen Ableitungen in den Punkten einer gegebenen geschlossenen Kurve gegebene Werte annimmt. I—III.** Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 185—193, 302—311, 312—318 = Indagationes math. 8, 82—90, 171—180, 181—187 (1946) [Holländisch].

(4) **Bremekamp, H.: Über die Lösungen der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ die gewissen Randbedingungen genügen.** Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 319—330 = Indagationes math. 8, 188—199 (1946) [Holländisch].

(5) **Bremekamp, H.: On the partial differential equations occurring in the theory of the elastic plate.** Nieuw Arch. Wiskunde, II. R 22, 189—199 (1946).

(6) **Bottema, O. and H. Bremekamp: Über die Lösungen der Gleichung $\Delta^r u = 0$, die gewisse Randbedingungen befriedigen. I, II.** Nederl. Akad. Wet., Proc. 49, 424—435, 436—443 = Indagationes math. 8, 279—290, 291—298 (1946) [Holländisch].

In (1), (2) the proof is given for given boundary values of $u, \partial u/\partial n, \ldots, \partial^{k-1} u/\partial n^{k-1}$ for $m = 2$ and 3 (m = number of independent variables). The case of arbitrary m is similar. It is further proved: (I) $\Delta u = 0$ implies $\Delta^k r^{2k-2} u = 0$. (II) Each solution of $\Delta^k u$ is of the form $u = r^{2k-2} u_0 + \cdots + r^2 u_{k-2} + u_{k-1}$ with $\Delta u_i = 0$. Using the results of (1), (2), the existence problem is reduced in (3), (4) to the similar case for $k = 1$. Defining Green functions the case $k + 1$ is reduced to the case k. It is indicated how the theory can be generalized to $m = 3$. Applications are given to the explicit construction of the Green function for the circle ($m = 2$) and the sphere ($m = 3$) for $k = 2$. An analogon of the Poisson integral is obtained in these cases. The problem of generalizing the last results ($m = 2$, $k = 2$) to an arbitrary boundary curve leads to a discussion of the solution of the fourth order equation whose fourth order part is of the form $\Delta\Delta u$, which

is treated in (5). Finally in (6) generalization of the results of (3), (4) is obtained by letting $k > 2$ and in some cases also $m > 2$ for circle, sphere and hypersphere again leading to generalizations of the Poisson integral. *A. v. Heemert.*

Soudan, R.: Sur les polydromies des fonctions biharmoniques. Commentarii math. Helvet. 18, 52—58 (1945).

Soudan, Robert: Sur les polydromies des fonctions biharmoniques. C. r. Soc. Physique Genève 62, 49—51 (1945).

Ausdehnung auf den Fall der biharmonischen Funktionen einiger Ergebnisse von R. Wavre (dies. Zbl. 7, 410; 16, 256) über harmonische Funktionen. *G. Cimmino.*

Soudan, Robert: Indéformabilité d'un corps homogène à potentiel polyharmonique constant. C. r. Soc. Physique Genève 62, 87—88 (1945).

Das polyharmonische Potential $\int_V \sum_{-1}^{2n-2} C_\alpha \overline{M P^\alpha}\, d\tau_M$ kann nicht unverändert bleiben, bei einer maßtreuen Änderung des Gebietes V. *G. Cimmino.*

Teissier du Cros, F.: Sur une propriété des fonctions biharmoniques. C. r. Acad. Sci., Paris 218, 957—959 (1944).

Teissier du Cros, F.: Sur l'ensemble des fonctions biharmoniques, régulières dans un cercle. C. r. Acad. Sci., Paris 219, 355—357 (1944).

Bedingung für das identische Verschwinden einer biharmonischen Funktion und eine kennzeichnende Eigenschaft der biharmonischen Funktionen im Ideenkreis, in dem sich Verf. im Falle der subharmonischen Funktionen früher bewegt hat (dies. Zbl. 28, 362). *G. Cimmino.*

Amerio, Luigi: Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_4 u = 0$ in due variabili. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 77, (III. Ser. 8), 377—419 (1944).

Methode für die Bestimmung einer biharmonischen Funktion $u(x, y)$ in einem ebenen Gebiet mit gegebenen Randbedingungen, durch Benutzung einer konformen Abbildung und Zurückführung auf eine Integralgleichung. Das Verfahren ist dem von N. Muschelišvili (dies. Zbl. 5, 358) verwandt. *G. Cimmino.*

Amerio, Luigi: Sull'integrazione dell'equazione $\Delta_{2k} u = f$. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 24, 119—138 (1945).

In questa sua terza Memoria sulle equazioni alle derivate parziali l'A. si occupa della risoluzione dei problemi ai limiti relativi all'equazione $\Delta_{2k} = f$, fondandosi sull'impiego della formula di Green, così come egli ha fatto in precedenza per i problemi relativi al calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del 2° ordine di tipo ellittico. L'ultima parte del lavoro, nel caso che il contorno sia formato da un'unica ipersuperficie è dedicata a dare le condizioni di validità, per i problemi considerati, del metodo di M. Picone della trasformata di Laplace a dominio di integrazione limitato. *G. Sansone.*

Massonnet, Charles: Sur le problème aux limites fondamental relatif aux fonctions biharmoniques. Bull. Soc. roy. Sci. Liège 14, 308—312 (1945).

Poritsky, Hillel: Application of analytic functions to twodimensional biharmonic analysis. Trans. Amer. math. Soc. 59, 248—279 (1946).

Aronszajn, Nathan and Alexander Weinstein: Existence, convergence and equivalence in the unified theory of eigenvalues of plates and membranes. Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 188—191 (1941).

Ergänzung zu der in dies. Zbl. 18, 216 besprochenen Monographie des zweiten Verfassers. *M. J. De Schwarz.*

Sugawara, Masao: On the theory of harmonic functions in the general Poincaré-space. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 5, 1—32 (1944).

Les théorèmes princip aux de la théorie des fonctions harmoniques sont établies dans un espace matriciel, composé des matrices complexes Z de type

m, n de norme $\leqq 1$, la norme étant définie par $n(Z) = \text{l. u. b.}_{|x|=1} |Z\,x|$. Cet espace n'est plus isotrope, et les point de sa frontière ne sont pas transitifs par déplacement. *H. Guggenheimer.*

Ascoli, Guido: Sopra i sistemi lineari isotropi e le loro proprietà integrali. Commentationes Pontificia Acad. Sci. 7, 207—281 (1943).

Sia $(x_1, \ldots, x_n)$ un punto dello S_n euclideo e posto $\varrho = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$ sia P il punto della sfera Ω_n di raggio unitario con centro nell'origine di coordinate $(x_1/\varrho, \ldots, x_n/\varrho)$. Una funzione definita nei punti di uno strato sferico Σ possiamo indicarla con uno dei simboli $f(x_1, \ldots, x_n)$, $f(\varrho; P)$ e se μ indica una sostituzione ortogonale dello S_n con $\mu\,P$ indicheremo il trasformato di P per la sostituzione μ, e con $f(\varrho; \mu\,P)$ il corrispondente valore di $f(\varrho; P)$. L'A., premessa una suggestiva rappresentazione geometrica delle sostituzioni ortogonali, chiama „sistema lineare isotropo" una classe di funzioni definite in Σ, ivi continue, mutata in sè da ogni μ destrorsa, contenente $c_1 f(\varrho; \mu_1\,P) + c_2 f(\varrho, \mu_2\,P)$ qualunque siano le sostituzioni μ_1 e μ_2 e le costanti c_1 e c_2, ed infine tale che se $\varphi(\mu)$ è continua la funzione $\int_{\Omega_n} f(\varrho; \mu\,P)\,\varphi(\mu)\,d\Omega_n(\mu) = g(\varrho, P)$ è anch'essa contenuta nella classe. A questa classe appartiene un teorema generale di media ed un interessante criterio di ortogonalità. Le funzioni ipersferiche formano un sistema lineare isotropo sulla sfera unitaria e l'A. ne costruisce una elegante teoria, concettualmente più elementare di quella corrente. L'A. passa poi allo studio delle equazioni alle derivate parziali isotrope, cioè di quelle equazioni alle derivate parziali, lineari ed omogenee, a coefficienti continui nello strato Σ che rimangano invariate, o al più vengano moltiplicate per un fattore non nullo nello strato, quando alle variabili si fa subire una sostituzione ortogonale destrorsa. Determinate le forme caratteristiche di queste equazioni l'A. ne trova le soluzioni semplici, nel senso della Fisica-Matematica, della forma $g(\varrho)\,Y(P)$ e trova che la $g(\varrho)$ dipende dall'integrazione di un'equazione differenziale ordinaria. Seguono infine alcune considerazioni sugli sviluppi in serie di funzioni semplici. Trattasi di uno studio estremamente sintetico che permette di ritrovare sistematicamente alcune proprietà integrali delle soluzioni di certe classi di equazioni alle derivate parziali, ed utilissimo in molteplici questioni riguardanti queste soluzioni. *G. Sansone.*

Lozinski, S.: On subharmonic functions and their application to the theory of surfaces. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 8, 175—194 (1944) [Russisch mit engl. Zusammenfassg.].

It is shown that the isoperimetric characterization of surfaces of non-positive Gaussian curvature given by Beckenbach and Radó (this Zbl. 7, 130) may be given with less restrictive differentiability conditions. *A. J. Lohwater.*

Weinberg, Alvin M.: Green's functions in biological potential problems. Bull. math. Biophys. 4, 107—115 (1942).

Castelluccio, Domenico: Il metodo dell'onda di spessore infinitesimo per l'analisi dei fenomeni di propagazione per onde. Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur. 79 (III. Ser. 10), 273—307 (1 plate) (1946).

Ammesso il principio di sovrapposizione degli effetti e noti, in ogni punto, la velocità di propagazione, il coefficiente di riflessione e di attenuazione, la propagazione unidimensionale delle onde viene descritta con mezzi analitici molto semplici. *D. Graffi.*

Awbery, J. H.: The periodic flow of heat in a hollow cylinder. Philos. Mag., VII. Ser. 28, 447—451 (1939).

Leibenson, L.: Die Bewegung einer gashaltigen Flüssigkeit in einem porösen Mittel. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. geograf. geofiz. 1941, 411—422 [Russisch mit deutsch. Zusammenfassg.].