Werk

Titel: Geometrie

Ort: Berlin

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0058|log82

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Das Klassifizierungsproblem (Verf.: „Quoten"-Problem, $N = \sum q_j$) ist — ebenso wie das Transport-Problem („Frequenz"-Problem, $\sum f_i = \sum q_j$) — ein solches des linearen Programmierens und kann deshalb z. B. mit der Simplex-Methode gelöst werden. Doch sind die a_{ij} beim Klassifizierungsproblem gleich 1 (bzw. natürliche Zahlen) oder gleich 0; deshalb ist eine einfachere Methode angemessen, nämlich die der optimalen Regionen: Parallel-Verschiebung von Hyperebenen, bis die geforderten Quoten q_j erfüllt sind. Dieses Verfahren führt z. B. bei 1152 Personen und 7 jobs mit hochkorreliertem C_{ij} in acht Schritten zum Ziel. *H. Härlen.*

Blachman, Nelson M.: Minimum-cost encoding of information. Transaction of the IRE, Professional group on information theory **3**, 139—149 (1954).

Problèmes sans motivation concrète. Solutions formelles. Pas de bibliographie. *B. Mandelbrot.*

Drobot, S. and M. Warmus: Dimensional analysis in sampling inspection of merchandise. Rozprawy mat. **5**, 1—46, russ. Zusammenfassg. 47—53 (1954).

Jedem Teil Ω_i einer Warenmenge Ω seien zwei distributive Maße N_i (Größe), W_i (Wert) zugeordnet, jedem Teil ω_i einer Stichprobe ω von Ω zwei distributive Maße n_i (Größe) und w_i (Wert). Es wird postuliert, daß N, W, n, w „dimensional unabhängig" sind (und ein „System von Einheiten" mit den Dimensionen PIECE, GUINEA, piece und guinea bilden), d. h. $N^{a_1} W^{a_2} n^{a_3} w^{a_4} = \alpha$, a_i reell, α positiv reell, gilt nur für $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$, $\alpha = 1$. Alle N_i, W_i, n_i, w_i sind gleicher Dimension, d. h. $N_i = \alpha_1 N_j$, $W_i = \alpha_2 W_j$, $n_i = \alpha_3 n_j$, $w_i = \alpha_4 w_j$. Der Preis $C = W/N$ von Ω mit der Dimension PIECE^{-1} GUINEA^1, der Preis c von ω mit der Dimension piece^{-1} guinea^1, der Konversions-Koeffizient q mit der Dimension PIECE^{-1} piece^1 GUINEA^1 guinea^{-1}, die Streuung des Wertes von Ω mit der Dimension PIECE$^{-1/2}$ GUINEA^1, des Wertes von ω mit der Dimension piece$^{-1/2}$guinea^1, die Untersuchungskosten für die Stichprobe k mit der Dimension piece^{-1} GUINEA^1 werden definiert. Die Dimensionen der Streuungen können postuliert werden; sie können aber auch aus zwei Postulaten abgeleitet werden, die dem zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und einer abgeschwächten Bedingung über die Zufallsunabhängigkeit der Teile äquivalent sind. — Mit Hilfe von Dimensionsbetrachtungen und einfacher dimensions-analytischer Sätze (zwei Beispiele: 1. jede dimensionale Größe eines Systems kann in den Einheiten X_i des Systems eindeutig in der Form $\prod_i X_i^{a_i}$ dargestellt werden; 2. die m Größen $A_j = \prod_{i=1}^{m} X_i^{a_{ij}}$, $j = 1 \cdots m$, sind dann und nur dann dimensional unabhängig, wenn die Exponenten-Determinante nicht verschwindet), werden lediglich aus der Dimension der fraglichen Größen Formeln für den Stichprobenumfang abgeleitet. Zum Beispiel ist $n = \alpha\,(N\,q\,s/k)^{2/3}$, wenn n nur von N, q, s und k abhängig ist, oder $n = \delta\,S\,N^{1/2}/k$, wenn n nur von S, N, k abhängt (bei der Herleitung wird hilfsweise angenommen, n sei auch von q abhängig; q fällt aber von selber wieder heraus), oder $n = \psi(\beta)\,S\,N^{1/2}/k$, speziell $n = \delta_0\,SN^{1/2}/k + \delta_1\,C\,N/k$, oder $n = \varepsilon\,(s/c)^2$. $\alpha, \beta \ldots$ sind theoretisch nicht feststellbare Konstante, ψ eine theoretisch ebensowenig feststellbare numerische Funktion (die beiden ersten Glieder der Potenzreihenentwicklung von ψ führen zu der Formel in den Konstanten δ_0 und δ_1). Die Konstanten müssen experimentell bestimmt werden. Wie das geschieht, zeigen Verff. im Schlußkapitel V der Arbeit. *H. Härlen.*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

Tits, Jacques: Sur les R-espaces. C. r. Acad. Sci., Paris **239**, 850—852 (1954).

Suite des remarques faites récemment (v. ce Zbl. **55**, 383), spécialement sur le plongement de R-espaces dans des espaces projectifs. Voir l'exposé détaillé (v. ce Zbl. **67**, 123). *H. Freudenthal.*

Nordhaus, E. A. and Leo Lapidus: Brouwerian geometry. Canadian J. Math. **6**, 217—229 (1954).

Wie bei Untersuchungen von Ellis, Blumenthal und Elliott (vgl. dies. Zbl. **42**, 27; **49**, 226; **52**, 265) werden auch hier Räume untersucht, in denen die Entfernungen durch Elemente eines Verbandes gegeben sind. Ist jedem Elementepaar a, b einer Menge S ein Element $a * b$ eines Verbandes L mit 0 so zugeordnet, daß (1) $a * b = b * a$, (2) $a * b = 0$ genau dann, wenn $a = b$, (3) $(a * b) + (b * c) > a * c$ (für $\cup$ wird $+$ und für $\cap$ wird kein Zeichen gesetzt) gilt, so wird S ein L-metrisierter Raum genannt. Verff. nennen einen Verband L mit 0 und 1 eine Brouwersche Algebra, wenn es zu $a, b \in L$ stets ein kleinstes $x \in L$ gibt, so daß $b + x > a$ (x wird mit $a - b$ bezeichnet) ist. Eine Brouwersche Algebra heißt Brouwersche Geometrie, wenn sie durch die „symmetrische Differenz" $a * b = (a - b) + (b - a)$, die im Falle einer Brouwerschen Algebra stets den Bedingungen (1), (2), (3) genügt, „autometrisiert" wird (hier ist $S = L$). Die Eigenschaften dieser Geometrien werden aufgezeigt und mehrere Charakterisierungen angegeben, wann eine Brouwersche Geometrie bzw. Algebra eine Boolsche Geometrie (hier ist $L = S$ eine Boolsche Algebra) bzw. Algebra ist. Weiterhin werden Untergeometrien Brouwerscher Geometrien betrachtet, sowie zwei Zwischenbegriffe eingeführt, die auf ihr Zusammenfallen hin untersucht werden. Abschließend wird noch die Kongruenzordnung (im Sinne von Menger vgl. Blumenthal, dies. Zbl. **50**, 385) dieser Metrik erörtert.

H. Karzel.

Castrucci, Benedito: Grundpostulate der projektiven Geometrie. Soc. Paranaense Mat., Anuário **1**, 1—9 (1954) [Portugiesisch].

Nach einem historischen Rückblick folgt eine Untersuchung eines Systems von grundlegenden Postulaten der projektiven Geometrie, ausgehend von den Arbeiten von O. Veblen. Je nachdem, ob der Desarguessche Dreieckssatz gilt oder nicht gilt, gibt es Desarguessche oder nicht Desarguessche projektive Geometrien. Drei Modelle verschiedener Geometrien werden angegeben: A. Eine projektive, ebene, endliche, Desarguessche Geometrie. — B. Eine projektive, unendliche, Desarguessche Geometrie. — C. Eine projektive, allen Postulaten genügende und nicht Desarguessche Geometrie, Beispiel von F. R. Moulton [Trans. Amer. math. Soc. **3**, 192—195 (1902)]. Es folgen Sätze über das vollständige Viereck, über Einführung von Koordinaten in der projektiven Desarguesschen Geometrie und über den Staudtschen Satz (so nennt Verf. den Satz, daß eine Projektivität, in der drei Elemente sich selbst entsprechen, die Identität ist).

M. Zacharias.

Castrucci, Benedito: Grundlagen der endlichen n-dimensionalen projektiven Geometrie. Bol. Soc. Mat. São Paulo **7**, 1—83 (1954) [Portugiesisch].

Expository paper.

G. Ancochea.

Kuiper, N. H.: Eine ebene Geometrie. Simon Stevin **30**, 94—105 (1954) [Holländisch].

Eine synthetische Untersuchung der zur Gruppe derjenigen ebenen affinen Transformationen gehörenden Geometrie, die eine Richtung (die isotrope Richtung) invariant lassen. Die Einführung des Begriffes „Winkel" leitet zur Behandlung der zu einem Dreieck gehörenden Kreise, u. a. des Sechspunktekreises, dem Analogon des Neunpunktekreises in der euklidischen Geometrie.

J. J. Seidel.

Fadini, Angelo: Geometrie affini e geometrie metriche generalizzate. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **5**, Nr. 4, 18—26 (1954).

Verf. untersucht einige Eigenschaften des verallgemeinerten affinen Raumes, den man aus einem projektiven dreidimensionalen Raum dadurch erhält, daß man als uneigentliche Punkte alle diejenigen annimmt, die auf zwei reellen, windschiefen Geraden liegen. Im Rahmen der Untersuchungen wird auf die Existenz metrischer Invarianten in solchen affinen Räumen hingewiesen.

R. Permutti.

Hjelmslev, Johannes: Einleitung in die allgemeine Kongruenzlehre. Danske Vid. Selsk., mat.-fysiske Medd. **25**, Nr. 10, 27 S. (1949).

This paper is a continuation of the third and fifth communications in this series (this Zbl. **26**, 339; **60**, 326). Like the cited papers, it deals with plane geometry in which two points can always be connected by a straight line, but the intersection of several straight lines may be a whole segment („osculating straight lines"). Congruence is defined by means of a group C of incidence-preserving transformations, which is transitive both with respect to the points and the straight lines. To every straight line a there is one and only one transformation in C different from the identity which leaves all the points of a fixed; it has no other fixed points („reflection a"). The reflections serve to define the orthogonality of two straight lines and to introduce the midpoints of segments. Let a and b be two straight lines intersecting at a point O. Suppose a and b are not almost orthogonal, i. e., b and the normal of a at O are neither identical nor osculating. By mapping each point P on the midpoint of the segment connecting P with its image under the „rotation" $a\,b$, we obtain the „half-rotation" (a, b) about O. The half-rotations about O and their inverses generate a commutative group S. If two nonosculating straight lines a and b intersect at O, then $a\,b\,c$ is an involution if and only if O lies on c; the straight lines through O are said to form a real pencil. Let a and b be two nonintersecting straight lines such that the straight lines connecting the points of a with those of b are always uniquely determined. Then the set of all the straight lines c such that $a\,b\,c$ is an involution forms an „ideal pencil". Through each point there exists exactly one straight line of an ideal pencil. To each pencil of this kind we associate an ideal point that lies on all the straight lines of the pencil. The point associated to the ideal pencil of all the normals of a straight line is called the pole of that line. Let O be a given point („fundamental point"). If any ideal pencil π is given, let a be its straight line through O. The pencil π and its ideal point are called regular if π contains a straight line b whose normal a' through O is not almost orthogonal to a. In that case any three straight lines of π are in involution and the half-rotation (a, a') transforms π into a real pencil. The „enlarged plane" Ω of all the real and the regular ideal points is invariant under S. The same holds true of the „fundamental straight line" ω, i. e., the set of the poles of all the straight lines through O. A „regular ideal straight line" is transformed into a real straight line through a suitable half-rotation about O. Thus the set of the real and of the regular ideal straight lines is also invariant under S. By means of ω and of S various concepts can be defined in or extended to Ω: parallelism, angles and their equality, similarity, orthogonality, reflection, and congruence. The group C of all congruences can also be enlarged and Ω becomes a plane „of Euclidean type" in which rectangular coordinate systems can be introduced. The coordinates are elements of a ring in which every sum of nonzero squares is a nonzero square. The straight lines are represented by linear equations.

P. Scherk (Math. Rev. **11**, 124).

Blanuša, Danilo: Plongement isométrique de l'espace hyperbolique à n dimensions à distance finie d'un point dans l'espace de Hilbert. Bull. internat. Acad. Yougolave Sci. Beaux-Arts, n. Ser. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. **4**), 25—30 (1954).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **53**, 109) hat Verf. eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des n-dimensionalen hyperbolischen Raumes in den Hilbertschen Raum diskutiert. In dieser Arbeit wird eine neue Lösung derselben Aufgabe mitgeteilt. *J. C. H. Gerretsen.*

Est, W. T. van: Gruppenerweiterungen und Begriff des Flächeninhalts in der Elementargeometrie. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW **1954—014**, 4 S. (1954) [Holländisch].

Der Dreiecksinhalt in der hyperbolischen Ebene als Funktion der Eckpunkte ist ein nullkohomologer 2-Kozykel. Bei der Projektion der hyperbolischen Bewegungs-

gruppe G auf die hyperbolische Ebene entspricht ihm ein Kozykel auf G, der eine zentrale Erweiterung von G durch A (Additionsgruppe der reellen Zahlen) definiert. Da G halbeinfach ist, muß der Kozykel nullkohomolog sein. Das läßt sich interpretieren als die Tatsache der Gleichheit von Inhalt und Winkeldefekt. — In der elliptischen Geometrie muß man A ersetzen durch die Additionsgruppe mod 2π.

H. Freudenthal.

Elementargeometrie:

Matsumura, Sōji: Über Zerlegungsbeweise des Pythagoreischen Lehrsatzes. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I **5/6**, 49—50 (1954).

Durch Diskussion der drei möglichen Unterteilungen eines Rechtecks (Quadrats) in drei Teildreiecke wird gezeigt, daß die Zerlegungsgleichheit des größeren Kathetenquadrats (a^2) mit dem zugeordneten Hypothesenrechteck ($p\,c$) mindestens vier Paare kongruenter Dreiecke beansprucht. Daß vier Paare stets genügen, ist bekannt. *W. Süss.*

Beatty, S.: Upper and lower estimates for the area of a triangle. Trans. Roy. Soc. Canada, Sect. III, III. Ser. **48**, 1—5 (1954).

Verf. diskutiert einige vom Ref. mit elementargeometrischen Mitteln gefundenen Ungleichungen im Dreieck [Nieuw Tijdschr. Wiskunde **41**, 1—7 (1953)], indem er die Sache analytisch darstellt. Es gelingt ihm eine Verschärfung zu finden. Sein Ergebnis ist das folgende. Bezeichnet man mit s, H, K die symmetrischen Funktionen $\frac{1}{2}(a+b+c)$, $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$, $a\,b+b\,c+c\,a$ der Seiten und mit Δ den Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat man

$$\tfrac{1}{12}(K-H)^2 \geqq \Delta^2 \geqq \tfrac{1}{12}(K-H)^2 - \tfrac{1}{6}(K-H)(2H-K).$$

J. C. H. Gerretsen.

● **Guitel, Geneviève: Étude métrique des familles de tétraèdres et de figures apparentées. Préface par Georges Bouligand.** (Études pratiques d'accès à la recherche. A. Section des actualités géométriques.) Paris: Centre de Documentation Universitaire 1954. VI, 139 p.

Der erste Teil der Arbeit befaßt sich mit der Klassifikation der Dreikante und der Tetraeder nach dem Geschlecht. Dabei ist das Geschlecht eines Dreikants die Anzahl stumpfwinkliger Stücke und das Geschlecht eines Tetraeders wird durch seine vier begrenzenden Dreikante bestimmt. Es gibt sieben Geschlechter von Dreikanten, die im ersten Kapitel eingehend besprochen werden, ebenso die aus ihnen hervorgehenden Parallelepipede. Im zweiten Kapitel wird die 27 Geschlechter der Tetraeder behandelt, deren Konstruktion erörtert und eine Zusammenfassung zu Familien vorgenommen. Kapitel drei behandelt spezielle Tetraeder, Kapitel vier die Tetraederwinkel (= Gesamtheit der Halbstrahlen durch einen Punkt, die senkrecht zu den vier Tetraederebenen stehen). Der zweite Teil handelt von der graphischen Analyse von Beweisen nnd Lehrgängen. Es werden u. a. folgende Arbeiten analysiert: Van der Corputs Beweis des Primzahlsatzes, van der Waerdens Moderne Algebra Teil II, Beweis des kleinen Fermatschen Satzes, Satz von Feuerbach. *J. J. Burckhardt.*

Finoulst, J.: Merkwürdige Identitäten im Zusammenhang mit regelmäßigen Vielecken. Simon Stevin **30**, 79—89, französ. Zusammenfassg. 89 (1954) [Holländisch].

Es seien n, p ganz, $0 < p < n$. Verf. definiert $(n, p) = 2\sin(p\pi/n)$ und zeigt für diese Funktion zweier ganzzahliger Veränderlicher einige Identitäten auf. Wenn k eine beliebige natürliche Zahl ist, gilt z. B. $(n, p) = \prod_{\lambda=0}^{k-1} (k\,n, \lambda\,n + p)$.

H. J. Kanold.

Bilinski, Stanko: Eine Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios. Simon Stevin **30**, 90—93 (1954).

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ sei eine gegebene Punktmenge im Raum, und es sei $A_i\,A_j =$

$a_{ij} \gtreqless 0$, je nachdem $i \lesseqgtr j$, also immer $a_{ij} = -a_{ji}$. Die Verallgemeinerung des Satzes von Ptolemaios lautet dann: Liegen die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in dieser zyklischen Folge auf einem Kreis, d. h. ist $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ein einfaches konvexes Sehnenvieleck, so ist der Rang der Matrix $M_n \equiv ||a_{ij}||$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ gleich 2. — Es gilt auch die Umkehrung. Falls sich n gegebene Punkte des Raumes so numerieren lassen, daß der Rang der Matrix M_n gleich 2 wird, so liegen diese Punkte auf einem Kreis in zyklischer Folge der ausgeführten Numerierung, d. h. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ist dann ein einfaches konvexes Sehnenvieleck. — Durch Nullsetzen der Determinante $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$ erhält man den Sonderfall $a_{12}\,a_{34} + a_{13}\,a_{42} + a_{14}\,a_{23} = 0$, d. h. den Satz von Ptolemaios. *M. Zacharias.*

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

Bilo, J.: On Schäfli sets of lines issued from the vertices of a simplex in a linear space of n dimensions. Simon Stevin **30**, 1—4 (1954).

$n + 1$ gerade Linien l_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ des projektiven R_n bilden einen „Schläflischen Wurf", wenn jeder lineare Treff-R_{n-2} von n dieser Geraden auch die restliche Gerade trifft. Notwendig und hinreichend hierfür ist bekanntlich, daß die Matrix der Graßmann-Koordinaten der l_i den Rang n hat. — Seien nun A_i die auf den l_i gelegenen Ecken eines regulären Simplex; α_{rs} sei die $(n-2)$-dimensionale Gegenseite der Kante $a_{rs} = A_r\,A_s$, ferner bezeichne C_i^{rs} $(i \neq r, s)$ die Projektion von l_i aus α_{rs} auf a_{rs}. Verf. folgert dann aus dem oben genannten Kriterium, daß bei ungeradem n die $(n^2 - 1)\,n/2$ Punkte C_i^{rs} auf einer Hyperfläche $(n-1)$-ter Ordnung liegen und daß die projizierenden Hyperebenen eine Hyperfläche $(n-1)$-ter Klasse berühren. Im Falle gerader Dimension n sind die Punkte C_i^{rs} durch die bezüglich A_r, A_s harmonischen zu ersetzen. *W. Wunderlich.*

Barsotti, Leo: Gleichung der regulären, gesternten und Sternpolygone. Soc. Paranaense Mat., Anuário **1**, 11—14 (1954) [Portugiesisch].

Mit Benutzung der Funktion $E(x)$ (≡ größte in x enthaltene ganze Zahl) werden in Polarkoordinaten Gleichungen für die Umfänge regelmäßiger Sternvielecke abgeleitet. *M. Zacharias.*

Stephanides, N. K.: Einige Bemerkungen über Fußpunktkurven. Bull. Soc. math. Grèce **29**, 74—76 (1954) [Griechisch].

Verf. bestimmt Kurven C mit Fußpunktkurven C^* von der Eigenschaft, daß die entsprechenden Bogenelemente von C und C^* aufeinander senkrecht stehen, und zeigt, daß die Fußpunktkurven einer konischen Schraubenlinie wieder konische Schraubenlinien sind, deren entsprechende Bogenelemente einen konstanten Winkel miteinander bilden. *O. Volk.*

Lorent, H.: Courbes ou surfaces associées à des faisceaux de courbes ou de surfaces données. Anais Fac. Ci. Porto **38**, 81—105 (1954).

Dem 1. Teil der Arbeit liegt folgende Erzeugungsweise ebener Kurven zugrunde: Punkt $P'(x', y')$ bewegt sich auf einer festen Kurve C_1. Durch P' geht eine bestimmte Kurve C_2 eines gegebenen Büschels mit Parameter a. Der Kurve C_2 ist durch $b = f(a)$ eine Kurve C_3 eines zweiten gegebenen Büschels mit Parameter b zugeordnet. Die Schnittpunkte $P(x, y)$ von C_3 mit der Geraden $O\,P'$ beschreiben dann die zu erzeugende Kurve. Dies wird an 36 sehr speziellen Beispielen durchexerziert. (Verwendete Kurven: Gerade, Kegelschnitte, Neilsche Parabel, Kissoiden, Strophoiden u. a.) $f(a)$ ist linear oder $\sqrt{c^2 - a^2}$. Unter den erzeugten Kurven sind 11 von der 5. Ordnung, die Ordnungen der übrigen gehen von 2 bis 22. Die meisten Kurven sind ein- oder mehrfach zirkular. — Im 2. Teil führt Verf. die entsprechende Erzeugung von Flächen an 13 Beispielen durch, wobei Flächen der Ordnungen 4, 5, 6, 8, 10 und 12 entstehen. (Verwendete Flächen: Kugel, hyperbolisches Paraboloid, eine Fläche 3. Ordnung, ein Zylinder und eine Rotationsfläche der Ordnung 4 bzw. 6). —

An jede der erhaltenen Gleichungen schließt Verf. einige Bemerkungen über die Singularitäten und sonstige gestaltliche Eigenschaften der betreffenden Kurve bzw. Fläche an, die jedoch zahlreiche Unrichtigkeiten enthalten. — Die Rechnung gestaltet sich dadurch sehr einfach, daß Verf. in allen Beispielen des 1. Teiles C_1 und C_2 in der Form $p(x', y') = q(x', y')$ bzw. $P(x', y') = a \cdot Q(x', y')$ wählt, wo p, q sowie P, Q homogene, in der Ordnung nur um 1 oder 2 differierende Polynome sind. Infolgedessen stellt sich a oder a^2 als rationale Funktion von x, y dar, und die Erzeugung läuft auf die einfachere mittels zweier durch $b = f(a)$ aufeinander bezogener Büschel algebraischer Kurven hinaus. Dasselbe gilt sinngemäß für den 2. Teil.

E. Schönhardt.

Algebraische Geometrie:

Nakai, Yoshikazu: Notes on Chow points of algebraic varieties. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 125—127 (1954).

Two properties of Chow points are proved. First: Let V be a projective variety and k_0 be the prime field. Let M^λ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) be a sequence of independent generic points of V over a field of definition for V. Then for a sufficiently large n the Chow point of V is rational over $k_0(M_1, \ldots, M_n)$. Second: Let k be a field of definition for V and denote by X a divisor on V. Then it is characterized the dimension of the Chow point of X over k as the maximal number of independent generic points of V over k lying in Supp (X). This theorem may be sometimes useful when we treat Chow points of divisors. This theorem is proved as an immediate corollary of the first, though one can prove it without using that. *Y. Akizuki.*

Rosenlicht, Maxwell: Generalized jacobian varieties. Ann. of Math., II. Ser. **69**, 505—530 (1954).

Let C be an absolutely non-singular curve, let k be a field of definition of C and let $K = k(C)$ be the function field of C over k. Let $\mathfrak{o}$ be a semilocal subring of K (with quotient field K). In a preceding paper (see this Zbl. **47**, 145), the author introduced notions such as $\mathfrak{o}$-equivalence relation, $\mathfrak{o}$-genus and $\mathfrak{o}$-differentials of 1st kind. Divisors $\mathfrak{o}$-equivalent to zero are divisors of functions in $\mathfrak{o}$ which are inversible in $\mathfrak{o}$. Everything is preserved by constant field extensions. Now, the generalized jacobian variety $J(\mathfrak{o})$ is a commutative group variety (i. e. quasi-abelian variety) isomorphic to the quotient group of those divisors of degree zero which contain no place in $\mathfrak{o}$ modulo the divisors $\mathfrak{o}$-equivalent to zero. Its dimension is equal to the $\mathfrak{o}$-genus π of K. In the classical case, $J(\mathfrak{o})$ is the quotient group of the additive group $(k)^\pi$ by the discrete subgroup of periods of $\mathfrak{o}$-differentials of 1st kind on C (where k is the complex number field). After preparing some results on group varieties, the author constructs, under the assumption that C has infinitely many k-rational points, $J(\mathfrak{o})$ as an abstract variety over k by the method of A. Weil. (We may note that $J(\mathfrak{o})$ can also be constructed over k by Chow's method without any restriction on k.) The canonical mapping φ is regular at each point of C except the places of $\mathfrak{o}$. If $\mathfrak{o}$ and $\mathfrak{o}'$ are semilocal subrings of K such that $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}'$, then there exists a homomorphism $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'}$ of $J = J(\mathfrak{o})$ onto $J' = J(\mathfrak{o}')$ such that $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \varphi_{\mathfrak{o}} = \varphi_{\mathfrak{o}'}$ for suitable choice of the canonical mappings. $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'}$ is an isomorphism if $\pi = \pi'$. The kernel H of $\tau_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'}$ is an irreducible group variety over k, and if k is infinite then H is a rational variety over k. Moreover, J is birationally equivalent to $J' \times H$. Hence $J(\mathfrak{o})$ is an abelian variety if and only if it is an ordinary jacobian variety. Moreover, under the conditions that $\mathfrak{o}$ and $\mathfrak{o}'$ have the same places and that $\mathfrak{o}'$ modulo each of its maximal ideal is precisely k, the kernel H is a group of the form $(G_m)^t \times H_1$, where G_m is the multiplicative group of the universal domain, t is the number of local rings of $\mathfrak{o}'$ minus the number of local rings of $\mathfrak{o}$, and H_1 is a group which is as a variety biregularly equivalent to a whole affine space. If the characteristic is zero, H_1 is of the form $(G_a)^s$, where G_a is the additive group of the

universal domain. Taking the integral closure $\bar{\mathfrak{o}}$ of $\mathfrak{o}$, we get the ordinary jacobian variety $J_0 = J(\bar{\mathfrak{o}})$. If $\dim J > \dim J_0$, there exists no regular cross section of J_0 in J. The generalized jacobian varieties may be as useful as the ordinaries, especially to the class field theory of function fields and to the theory of differentials of 3rd kind, on a curve. *Y. Akizuki.*

Barsotti, Iacopo: Il teorema di dualità per le varietà abeliane ed altri risultati. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 98—114 (1954).

In seinen früheren Untersuchungen über algebraische Geometrie nach dem Standpunkt von A. Weil hatte der Verf. bereits einige Sätze über abelsche Mannigfaltigkeiten bewiesen [s. Rend. Circ. mat. Palermo, II. Ser. **2**, 236—257 (1953)]. In der vorliegenden Arbeit wird unter Benutzung von Resultaten von Matsusaka und von einigen noch nicht erschienen Ergebnissen des Verf. gezeigt: (1) der Dualitätssatz einer abelschen Mannigfaltigkeit über einem Körper der Charakteristik Null bezüglich ihrer Picardschen Mannigfaltigkeit; (2) der Basissatz der abelschen Mannigfaltigkeiten über beliebigen Körpern; (3) der Satz, nach dem die Torsionszahl σ einer abelschen Mannigfaltigkeit über einem Körper der Charakteristik Null den Wert 1 hat. In Übereinstimmung mit dem Geiste der modernen algebraischen Geometrie werden die Beweise nur mit algebraischen Mitteln geführt [(1) und (3) wurden von anderen Verff. mit transzendenten oder topologischen Methoden bewiesen]. Verf. bemerkt, daß der Beweis des Satzes (1) im Falle eines Körpers der Charakteristik $\neq 0$ große Schwierigkeiten bietet; er vermutet sogar, daß der Satz in diesem Falle nicht richtig ist. Ob (3) im Falle einer Charakteristik $\neq 0$ gilt, ist noch nicht entschieden. *M. Rosati.*

Franchetta, Alfredo: Sulle forme algebriche di S_4 aventi l'hessiana indeterminata. Rend. Mat. e Appl., V. Ser. **14**, 252—257 (1954).

Caractérisation géométrique des V_3 du S_4 pour lesquelles la hessienne devient indéterminée (v. ce Zbl. **43**, 362). *G. Ancochea.*

Spampinato, Nicolò: Sulla V_8^7 dell'S_{11} contenente tutte le $V_6^{2(n+m)}$ rispondenti alle curve di ordine n e classe m dell'S_2. Rend. Accad. Sci. fis. mat. Napoli, IV. Ser. **21 (93)**, 157—165 (1954).

Etant donnés dans un S_{11} quatre plans $S^{(1)}$, $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ ne se rencontrant pas deux à deux et projectifs à un plan S, l'A. associe à un élément de contact (P, p) de S l'espace S_5 déterminé par les points P_1 de $S^{(1)}$, P_2 de $S^{(2)}$ homologues de P et par les droites p_3, p_4 de $S^{(3)}$, $S^{(4)}$ homologues de p. Lorsque les éléments de contact appartiennent à une courbe d'ordre n et de classe m, l'espace S_5 engendre une variété $V_6^{2(n+m)}$. Lorsque la courbe varie dans S, cette variété décrit une variété V_8^7 dont l'A. étudie les propriétés. *L. Godeaux.*

Manara, Carlo Felice: Questioni di esistenza di curve algebriche piane con caratteri assegnati. Rend. Sem. mat. fis. Milano **24**, 66—77 (1954).

In questa conferenza l'A. si trattiene sul problema (studiato da vari Autori) di dimostrare l'esistenza di curve piane algebriche aventi certi caratteri plückeriani ed espone alcuni procedimenti seguiti a tale scopo. *M. Villa.*

Hély, Jean: Une généralisation du théorème de Pascal; le théorème des trois courbes. Revue sci. **92**, 32—33 (1954).

Es gilt folgender Satz: Numeriert man die Seiten eines einem Kegelschnitt K eingeschriebenen $2n$-Ecks fortlaufend und faßt die geraden und die ungeraden Seiten je als eine ausgeartete Kurve C_n und C_n' der Ordnung n auf, so haben C_n und C_n' gewiß die gegebenen $2n$ Punkte auf K gemein. Die weiteren $n^2 - 2n$ gemeinsamen Punkte von C_n und C_n' liegen dann auf einer Kurve der Ordnung $n - 2$. Für $n = 3$ ist dies der Satz des Pascal. Verf. bringt aber noch folgende weiteren Verallgemeinerungen davon: a) Wenn 3 ebene Kurven A, B, C der Ordnungen l, m, n mit $l \leq m \leq n$ und $l + m - n > 0$ insgesamt p Punkte gemein haben, wobei $p \geq$

$l\,m - \frac{1}{2}\,(l + m - n - 1)\,(l + m - n - 2)$ ist, so haben sie von selber auch $l\,m$ Punkte gemein, und bei $l < n$ bestimmen diejenigen $m\,(n-1)$ Punkte, die auf B und C, aber nicht notwendig auf A liegen, eine Kurve A' der Ordnung $n - l$. Bei $m < n$ bestimmen die nicht auf B gelegenen Schnittpunkte von A und C eine Kurve B' der Ordnung $n - m$. Die gemeinsamen Punkte von A' und B' liegen auf C. b) Bei $l + m - n \leq 0$ und $p = l\,m$ gehen auch durch die unter a) erklärten Punktgruppen je Kurven der Ordnung $n - l$ und $n - m$. Diese sind jedoch nicht eindeutig bestimmt, aber man errechnet leicht die Dimension der zugehörigen Linearsysteme. Die Beweise dieser Sätze werden in dieser Note nur angedeutet: nach Ansicht des Ref. wären hierzu zweckmäßig mehrdimensionale Betrachtungen heranzuziehen. *W. Burau.*

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● **Convegno internazionale di geometria differenziale. Italia, 20—26 Settembre 1953.** Roma: Edizioni Cremonese della Casa Editrice Perrella 1954. XV, 340 p.

Die Arbeiten werden in diesem Zbl. einzeln angezeigt.

Crommelin, C. A. et W. van der Woude: Quelle courbe est égale à sa développée? Un cas simple. Simon Stevin **30**, 17—24 (1954).

Die in der Überschrift dieser Arbeit angegebene Fragestellung nach ebenen Kurven, die zu ihren Evoluten kongruent sind, ist schon im letzten Jahrhundert von Puiseux und Binet eingehend behandelt worden. Die beiden einfachsten, bekannten Kurven mit dieser Eigenschaft sind die Zykloide und die logarithmische Spirale. Aus „Freude an der Figur" stellen die Verf. den allgemeinen Resultaten von Puiseux das Beispiel einer weiteren expliziten Kurvenklasse zur Seite, welche Eigenschaften der beiden angegebenen Kurven in sich vereint. *K. Leichtweiß.*

Bakel'man, I. Ja.: Die Bestimmung einer glatten Fläche durch die erste und die verallgemeinerte zweite quadratische Form. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 4 (62), 155—162 (1954) [Russisch].

Verf. zeigt die eindeutige Bestimmtheit einer Fläche durch ihre erste und verallgemeinerte zweite Grundform. *Joachim Nitsche.*

Šulikovskij, V. I.: Eine invariante Kennzeichnung der Liouvilleschen Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 29—32 (1954) [Russisch].

V. Vagner (dies. Zbl. **60**, 361) hat gezeigt, daß das Auffinden des quadratischen Integrals $a_{ik}\,(du^i/ds)\,(du^k/ds) = C$ der geodätischen Linien einer Fläche durch Lösung eines Systems von Differentialgleichungen mit einer unbekannten Funktion herbeigeführt wird. Die Diskussion der Anzahl der Lösungen dieses Systems von Gleichungen führt zu einer invarianten Kennzeichnung der Liouvilleschen Flächen. *W. Wrona.*

Blanuša, Danilo: Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace R_5. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 7—10 (1954).

Ein unendliches Möbiussches Band entsteht, wenn man die Randpunkte eines ebenen Parallelstreifens identifiziert, die bezüglich eines auf der Mittellinie liegenden Punktes diametral liegen. Verf. zeigt, daß die Fläche isometrisch und singularitätenfrei in einem 5-dimensionalen Raum eingebettet werden kann. Die eingebettete Fläche läßt sich darstellen durch die Formeln $x_1 = f(\varrho)$, $x_2 = \varrho \cos \frac{1}{2} u$, $x_3 = \varrho \sin \frac{1}{2} u$, $x_4 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \varrho^2 \cos u}$, $x_5 = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \varrho^2 \sin u}$, wobei $f(\varrho)$ eine gewissen Bedingungen genügende Funktion bedeutet. Wenn man $f(\varrho) = 1/(4 - \varrho^2)$ nimmt, dann wird die Fläche sogar algebraisch. *J. C. H. Gerretsen.*

Blanuša, Danilo: Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique à quatre

dimensions. Bull. internat. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts, n. Sér. **12** (Cl. Sci. math. phys. techn. 4), 19—23 (1954).

Die in der oben referierten Arbeit besprochene Einbettung wird benutzt, um eine singularitätenfreie und isometrische Einbettung des unendlichen Möbiusschen Bandes in einem 4-dimensionalen Raume zu finden. Die Metrik des Raumes darf hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch sein. *J. C. H. Gerretsen.*

Aoki, Kiyoshi: On symbolic representation. Proc. Japan Acad. **30**, 160—164 (1954).

Aoki, Kiyoshi: Note on topological transitivity. Proc. Japan Acad. **30**, 428—430 (1954).

In diesen beiden Noten werden auf Grund von Theoremen von M. Morse und G. A. Hedlund Sätze über geodätische Linien in zweidimensionalen geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht $\geqq 1$ bewiesen, die die Voraussetzung erfüllen, daß es auf keiner ihrer Geodätischen Paare konjugierter Punkte gibt. *F. Löbell.*

Green, L. W.: Surfaces without conjugate points. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 529—546 (1954).

Verf. betrachtet zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeiten M der Klasse 3 mit folgenden Eigenschaften: 1. M ist vollständig, 2. M ist einfach zusammenhängend, 3. die Gaußsche Krümmung ist nach unten beschränkt, 4. auf keiner Geodätischen von M existieren Paare konjugierter Punkte, 5. zu keinem Punkt einer beliebigen Geodätischen existiert ein Fokalpunkt. Man sagt, zwei geodätische Strahlen (bzw. zwei Geodätische) seien vom gleichen Typ, wenn der Abstand eines beliebigen Punktes des einen Strahls von dem andern Strahl beschränkt ist. Das erste Ergebnis der Arbeit besteht in folgendem Satz: Genügt M den Bedingungen 1. bis 4., so sind keine zwei verschiedene vom gleichen Punkt ausgehende geodätische Strahlen vom gleichen Typ. Das zweite Ergebnis lautet: Genügt M den Bedingungen 1. bis 5. und sind g und h zwei Geodätische von gleichem Typ, so ist für jeden Punkt zwischen g und h die Gaußsche Krümmung gleich Null. Es folgt daraus, daß M isometrisch der euklidischen Ebene ist, wenn M den Bedingungen 1. bis 5. genügt und außerdem noch analytisch ist. Verf. erhält diese Sätze, indem er Eigenschaften im großen der Lösungen der Jacobischen Differentialgleichung studiert. Im letzten Abschnitt benutzt Verf. seine Ergebnisse, um die Sätze von M. Morse, G. A. Hedlund (dies. Zbl. **28**, 88) und T. Salenius (dies. Zbl. **38**, 344) über topologische Transitivität unter allgemeineren Voraussetzungen zu beweisen. *W. Rinow.*

Gorowara, K. K.: On certain ruled surfaces. Ganita **5**, Nr. 2, 105—112 (1954).

Verf. betrachtet im ersten Teil die zu einer beliebigen Regelfläche gehörigen Scharen der Zentraltangenten und Zentralnormalen, sowie die von den Krümmungsachsen gebildete Fläche und deren Zentraltangenten- und Zentralnormalenflächen. Für diese Regelscharen werden die einfachsten Differentialinvarianten berechnet und gezeigt: Hat die Ausgangsfläche und die Fläche der Krümmungsachsen die gleiche Striktionslinie, so ist diese auch Asymptotenlinie und umgekehrt. Im zweiten Teil werden die Differentialinvarianten der Regelflächen ermittelt, die das begleitende Dreibein eines beliebigen Flächenstreifens erzeugt. *H. R. Müller.*

Saban, Giacomo: Sur les congruences cylindriques. Revue Fac. Sci. Univ. Istanbul, Sér. A **19**, 108—118 (1954).

Bilden $\mathfrak{G}(u)$, $\mathfrak{N}(u)$, $\mathfrak{T}(u)$ das duale begleitende Dreibein einer Regelfläche, so kann man ein zylindrisches Strahlensystem darstellen durch

$$\mathfrak{A}(u, v) = \mathfrak{G}(u) - \varepsilon v\,[\sin\varphi(u, v)\,\mathfrak{N}(u) + \cos\varphi(u, v)\,\mathfrak{T}(u)].$$

Verf. zeigt: 1. Ist φ Funktion von u allein, dann sind die Zylinder des Systems Ebenen. 2. Ist $\varphi \equiv 0$, dann ist das Strahlensystem parabolisch. 3. Ist $\varphi \equiv 1$, dann

ist das System ein Normalensystem. Die Arbeit des Ref. über allgemeine zylindrische Strahlensysteme (dies. Zbl. 5, 24), in der die obigen Sonderfälle als Entartungen ausgeschlossen werden, scheint Verf. nicht bekannt zu sein. *W. Haack.*

Bhattacharya, P. B. and Ram Behari: Congruences of Guichard. Ganita 5, Nr. 2, 237—249 (1954).

Bekanntlich ist eine Kongruenz von Guichard als eine Geradenkongruenz definiert, bei der die Torsallinien ihrer Brennflächen mit den Krümmungslinien dieser Flächen zusammenfallen. In der vorliegenden Arbeit werden sowohl analytische als auch geometrische Bedingungen dafür hergeleitet, daß eine gegebene Fläche Brennfläche einer Kongruenz von Guichard ist. Ebenso lassen sich derartige Bedingungen für das sphärische Bild einer Guichardschen Kongruenz herleiten, welches durch zu den Kongruenzgeraden parallele Einheitsvektoren gebildet wird. Verf. gewinnt so eine Reihe bekannter Resultate, bei denen u. a. die Evoluten der Brennflächen eine besondere Rolle spielen. *K. Leichtweiß.*

Kovancov, N. I. Anwendung der Ideen der anholonomen Geometrie auf einen Linienkomplex. Ukrain. mat. Žurn. 6, 270—281 (1954) [Russisch].

In den Zentralpunkt $\mathfrak{a}$ des Komplex-Strahles wird ein Dreibein gelegt, dessen Einheitsvektoren $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \mathfrak{F}_3$ in die Richtungen der Haupt-, der Binormalen- und in Richtung des Komplexstrahles fallen. Dann ist $d\mathfrak{a} = \sum \omega_i \mathfrak{F}_i$. Die drei Differentialformen ω_i wählt Verf. als Grundformen des Komplexes. In einer früheren Arbeit hat Verf. die Flächenscharen $\omega_i = 0$ untersucht für den Fall, daß ein ω_i integrabel, also $[d, \omega_i] = 0$ ist (dies. Zbl. 50, 382). Jetzt wird die Integrabilitätsforderung fallen gelassen; im Sinne der anholonomen Differentialgeometrie werden die Kurvenscharen bzw. die anholonomen Flächenelemente studiert, die $\mathfrak{a}$ beschreibt, wenn ein $\omega_i = 0$ ist. Dabei wird im Falle $\omega_1 = 0$ der Punkt $\mathfrak{a}$ als Zentralpunkt des Hauptnormalenkomplexes, im Falle $\omega_2 = 0$ des Binormalen- und im Falle $\omega_3 = 0$ des Grundkomplexes angesehen. Verf. berechnet die Krümmungslinien I. und II. Art, die Gaußsche und die totale Krümmung (die in der anholonomen Geometrie nicht übereinstimmen). Zwischen der Gaußschen und der totalen Krümmung besteht eine einfache Beziehung, die nur von der Krümmung des Grundkomplexes abhängt. Zwischen den Gaußschen Krümmungen der drei Flächen gilt die Beziehung $K_3 + K_1 = K_2$. — Zum Schluß werden spezielle Klassen von Komplexen behandelt. Die Arbeit des Ref. (dies. Zbl. 34, 91) scheint Verf. nicht bekannt zu sein. *W. Haack.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Santaló, L. A.: Fragen der affinen Differentialgeometrie der Flächen. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 21—33 (1954) [Spanisch].

L'A. adotta per una superficie $X = X(u, v)$ dello spazio ordinario un riferimento mobile $(X; I_1, I_2, I_3)$ legato ad essa da proprietà affini che consentono solo trasformazioni del tipo: (1) $I_1^* = \lambda I_1$, $I_2^* = \lambda^{-1} I_2$, $I_3^* = I_3$. Determina quindi per detto riferimento le formule di derivazione esprimenti le componenti relative dei vettori dX, dI_i rispetto alla terna I_1, I_2, I_3 : le combinazioni di dette componenti che rispetto alle trasformazioni consentite (1) risultano indipendenti da λ sono invarianti affini della superficie. Seguono alcune formule integrali e applicazioni. *P. Buzano.*

Čachtauri, A. J.: Anwendungen der inneren Geometrien ebener Netze in der Flächentheorie. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 20, 89—130 (1954) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird die projektive Differentialgeometrie der Flächen des P_3 völlig in der Art behandelt, wie sie in den bekannten Werken von Fubini-Čech

dargestellt ist (vgl. Fubini-Čech, Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces, Paris 1930) und in vermutlich schwer zugänglichen Arbeiten von Norden (vgl. Norden, dies. Zbl. **41**, 502) und vom Verf. (s. Čachtauri, Innere Geometrien ebener Netze, Diss. Kasan 1946) weitergeführt wurde, während die in den Büchern von Bol niedergelegte Behandlung der projektiven Differentialgeometrie (s. Bol, Projektive Differentialgeometrie II, Göttingen 1954, 450 S.) leider völlig unbekannt zu sein scheint. Der wesentliche, zuerst von Norden stammende Gedanke, der in der vorliegenden Arbeit weiter ausgesponnen wird, ist folgender: Man ordne der Fläche F_2 des P_3 zwei Geradenkongruenzen, die sogenannten Normalen 1. und 2. Art, zu. Hiervon gehen die Normalen 1. Art durch die Flächenpunkte, während diejenigen 2. Art in den Tangentialebenen liegen. Diese Kongruenzen, kurz Normalenkonfiguration genannt, definieren zwei affine Zusammenhänge auf F_2, zwischen denen, je nach der Wahl der Konfiguration, mannigfache Beziehungen bestehen können. Ein wichtiger Sonderfall ist der, wo die Normalen 1. und 2. Art konjugiert in bezug auf die Liequadriken der Punkte sind. Zunächst wird folgender Zusammenhang zwischen der Geometrie auf F_2 und der Geometrie ebener Netze hergestellt: Man projiziere F_2 von irgendeinem Punkt O des P_3 auf eine Ebene P_2, dann gehen die Asymptotenlinien von F_2 in die Kurven eines ebenen Netzes N über. Die besondere Struktur von N liegt darin, daß die Laplaceschen Geraden von N eine äquiaffine Geometrie definieren. Netze dieser Art heißen Asymptotennetze, ein dazu duales Gebilde wird erhalten, wenn man die Tangentialebenen einer Fläche mit einer Ebene P_2 schneidet und die entstehenden Geraden von P_2 nach Maßgabe der Asymptotenlinien von F_2 zu $2\,\infty^1$ Hüllkurven zusammenfaßt. Hiermit ergibt sich eine wichtige Normalenkonfiguration auf F_2, die sog. Laplacekonfiguration: Alle Normalen 1. Art gehen dabei durch einen festen Punkt O, während die Normalen 2. Art dadurch festgelegt werden, daß man die Laplacegeraden eines ebenen Asymptotennetzes N von O aus je auf die Tangentialebenen der Fläche projiziert. Hiervon ist wiederum ein Sonderfall, daß die genannten Laplacegeraden von N ihrerseits wieder das Duale zu einem Asymptotennetz bez. F_2 oder einer anderen Fläche bilden. Es wird ausgerechnet, daß dies genau dann der Fall ist, wenn N ein kanonisches Netz im Sinne von Fubini-Čech ist. Besondere Aufmerksamkeit erfahren die Fälle, daß die Konfiguration ganz oder teilweise aus den bekannten projektiven Normalen 1. und 2. Art von Wilczynski u. a. besteht, die ja ihrerseits den bekannten mit den Flächenpunkten verbundenen kanonischen Büscheln angehören. In der zweiten Hälfte der Arbeit werden vor allem die Beziehungen der vorher eingeführten Begriffe zu Fragen der projektiven Deformierbarkeit herausgearbeitet. Es ist z. B. für die projektive Deformierbarkeit zweier Flächen notwendig und hinreichend, daß sich auf beiden Flächen Normalenkonfigurationen mit affinen Zusammenhängen finden lassen, die übereinstimmen, wenn man die Flächen unter Zuordnung der Asymptotenlinien zuvor eineindeutig aufeinander bezogen hat. *W. Burau.*

Mastrogiacomo, Pasquale: Trasformazioni puntuali tra spazi proiettivi osculabili con trasformazioni quadratiche di seconda specie particolari. Ricerca, Rivista Mat. pur. appl. **5**; Nr. 1—2, 27—32; Nr. 3, 40—49 (1954).

È noto (M. Villa, questo Zbl. **27**, 129) che una transformazione puntuale T fra due spazi S_3, in una coppia regolare O, O' di punti corrispondenti, si può osculare (cioè approssimare fino all'intorno del 2° ordine) con ∞^9 trasformazioni cremoniane cubiche mentre, in generale, non si può osculare con trasformazioni quadratiche. I casi particolari in cui T ammette in O, O' trasformazioni quadratiche osculatrici (∞^3) sono stati studiati da G. Martini (questo Zbl. **41**, 492), A. Cossu (questo Zbl. **44**, 363), P. Mastrogiacomo (questo Zbl. **56**, 407). Nel lavoro attuale l'A. considera il caso in cui le trasformazioni quadratiche osculatrici sono di 2ª specie particolari. *M. Villa.*

Grigorev, I. N.: Die asymptotische Transformation von p-orthogonal-konjugierten Systemen im n-dimensionalen Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 765—767 (1954) [Russisch].

Verf. bringt einen Satz über p-orthogonal-konjugierte Systeme. Ein solches besteht aus p paarweise orthogonalen $(p-1)$-dimensionalen Flächen, bei denen die Schnittkurven auf den Flächen jeweils konjugiert sind. (Liegen die Flächen im n-dimensionalen Raum, so ist für $p = n$ die Bedingung der konjugierten Schnitte von selbst erfüllt.) In Verallgemeinerung eines Satzes der klassischen Differentialgeometrie (für $p = n = 3$), auf den Verf. am Anfang besonders eingeht, gilt hier: Gestattet ein solches System asymptotische Transformationen, so besteht es aus einer Schar pseudosphärischer dreifach orthogonaler Systeme, von denen jedes in einem dreidimensionalen euklidischen Raum liegt. *Joachim Nitsche.*

Matsumura, Sōji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. LXII. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I **5/6**, 47—48 (1954).

Matsumura, Sōji: Beiträge zur Geometrie der Kreise und Kugeln. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I **5/6**, 55—60 (1954).

Copal, Sofia: Sur quelques propriétés remarquables des congruences de sphères. Acad. Republ. popul. Române, Fil. Iaşi, Studii Cerc. şti. **2**, 83—87, russ. und französ. Zusammenfassg. 87—88 (1951) [Rumänisch].

Etant donnée une famille ∞^2 de sphères, soient M le centre d'une de ces sphères, M_1, M_2 les points des nappes focales correspondant à M, $d\sigma_1$, $d\sigma_2$ des aires infinitésimales décrites respectivement par M_1, M_2, dv_1, dv_2 des volumes infinitésimaux décrits respectivement par $M\,M_1$, $M\,M_2$, θ l'angle de MM_1 avec $M_1\,M_2$. $d\sigma_1 + d\sigma_2$, $dv_1 + dv_2$, θ sont invariants pour les déformations de la surface décrite par M. *M. Haimovici.*

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

● **Yano, Kentaro: Gruppi di trasformazioni in spaci geometrici differenziali.** Roma: Istituto Matematico dell'Università di Roma 1954. 281 p. [In litografia].

Die Vorlesungsausarbeitung deckt sich der Sache nach mit Teilen des späteren Buches des Verf. (K. Yano, The theory of Lie derivatives and its applications, Amsterdam 1957). Sie enthält (durchweg in Kern-Index-Schreibweise der Tensorrechnung) Einführungen in Riemannsche Geometrie, affinen Zusammenhang, Wegegeometrie, konforme Riemanngeometrie und die Grundlagen der lokalen Theorie der Lie-Gruppen; der Stil entspricht etwa dem von Schoutens Ricci-Calculus, (dies. Zbl. **57**, 378), doch ist die Darstellung dem Zwecke entsprechend ausführlicher. Die Lie-Ableitung wird am Beispiel der Bewegungen in Riemannschen Räumen eingeführt und dann für beliebige geometrische Objekte definiert. Es folgen dann ausführliche Kapitel über Bewegungen in den obengenannten Räumen, die sich oft nahezu wörtlich mit den entsprechenden Kapiteln des Buches decken. Ein Anhang befaßt sich mit pseudo-analytischen Vektorfeldern in Kählerschen Räumen. *D. Laugwitz.*

● **Lichnerowicz, André: Geometria differenziale in grande. Gruppo d'olonomia e omologia.** Roma: Istituto Matematico dell'Università di Roma 1954. Pp. 132—IV—4 [in litografia].

Ce cours expose les éléments de la géométrie différentielle de manière à amener rapidement le lecteur en présence de problèmes concernant notamment les groupes d'holonomie et d'homologie des variétés. Il contient: I. Cartes; espace vectoriel tangent. Formes différentielles extérieures. — II. Connexion affine; courbure. Dérivée de Lie. — III. Variétés à connexion affine; transport parallèle, groupe d'holonomie. — Variétés riemanniennes, groupes d'holonomie, réductibilité. — IV. Formes harmoniques; homologie, opérateurs K_h. — V. Structures complexes et quasi-complexes. Ce cours est à rapprocher de l'ouvrage imprimé de l'A.: „Théorie

globale des connexions et des groupes d'holonomie" (Rome 1955). Si l'étendue des matières traitées n'a pas toujours permis de faire figurer les démonstrations, le lecteur trouvera cependant dans ce cours une introduction de valeur aux méthodes de la géométrie différentielle et de la relativité. *P. Lelong.*

Lense, Josef: Zum Einbettungssatz der Differentialgeometrie. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1953**, 69—75 (1954).

Unter dem Einbettungssatz versteht der Verf. die Aussage, daß es immer $N = \frac{1}{2} n (n + 1)$ analytische Funktionen ξ^λ der n komplexen Veränderlichen x^ν gibt, so daß identisch in den x^ν und dx^ν die Beziehung

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = \sum_1^N (d\xi^\lambda)^2$$

bei vorgegebenen analytischen Funktionen $g_{\mu\nu}(x^1, \ldots, x^n)$ gilt. Im Fall $\mathrm{Rg}\,(g_{\mu\nu}) = n$ hat E. Cartan (1927) einen Beweis des Satzes angegeben, während ein Induktionsbeweis von M. Janet (1926), der keine Voraussetzungen über den Rang der Koeffizientenmatrix macht, unvollständig blieb, da das Nichtverschwinden einer gewissen Determinante nicht allgemein geklärt werden konnte. Verf. beschäftigt sich mit dem Janetschen Ausnahmefall des identischen Verschwindens dieser Determinante für $n = 2$ und zeigt, daß dadurch unter den Flächen die isotropen Ebenen charakterisiert werden. *K. H. Weise.*

Ôtsuki, Tominosuke: Isometric imbedding of Riemann manifolds in a Riemann manifold. J. math. Soc. Japan **6**, 221—234 (1954).

Verf. verallgemeinert die Ergebnisse von S. S. Chern und N. K. Kuiper (dies. Zbl. **52**, 176) über die Einbettbarkeit einer kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit in den euklidischen Raum auf die isometrische Einbettbarkeit in eine beliebige andere Riemannsche Mannigfaltigkeit. Er benützt hierzu Hilfsmittel, die S. B. Myers (dies. Zbl. **45**, 110) entwickelt hat. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit können hier nicht im einzelnen wiedergegeben werden. Es werde daher nur auf die folgende Aussage hingewiesen: Eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Krümmung jedes Flächenelementes negativ ist, kann nicht isometrisch eingebettet werden in eine $(2n - 2)$-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Krümmung jedes Flächenelementes nicht negativ ist. *W. Rinow.*

Nash, John: C^1 isometric imbeddings. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 383—396 (1954).

Die Realisierung einer Einbettung einer gegebenen Riemannschen Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum hängt in hohem Maße davon ab, eine wie hohe Regularitätsklasse der eingebetteten Mannigfaltigkeit verlangt wird. Es zeigt sich, daß im Falle, daß nur C^1-Einbettung (d.h. von der Klasse C^1) verlangt wird, die Dimension m des euklidischen Raumes, in welchen die Einbettung erfolgt, bedeutend herabgesetzt werden kann im Vergleich zum allgemeinen Fall. Der Verf. behandelt den Fall, daß die eingeprägte Metrik der Riemannschen Mannigfaltigkeit von der Klasse C^0 ist, und versucht diese Mannigfaltigkeit in einen euklidischen Raum E_m einzubetten bzw. „einzutauchen" (imbedding bzw. immersion). Der letztgenannte Begriff ist gemeint im Sinne von H. Whitney (dies. Zbl. **15**, 320). Negative Resultate bezüglich der Einbettung bei gegebener Klasse C^k sind jüngst von Tompkins und Chern-Kuiper angegeben. Die verwendete Methode beruht auf den sukzessiven Perturbationen der erzielten Einbettung, und die unendliche Folge der Einbettungen führt schließlich zu der gewünschten Einbettung. Der Verf. bedient sich einer Operation der „short imbedding", bei welcher die Abstände verkürzt werden. Das Hauptergebnis der Arbeit ist in den folgenden zwei Sätzen enthalten: Jede geschlossene V_n besitzt eine isometrische C^1-Einbettung in einen E_{2n}. Jede V_n besitzt ein C^1-isometrisches Eintauchen in einen E_{2n} und eine isometrische C^1-Einbettung in einen E_{2n+1}. *S. Gołąb.*

Takizawa, Seizi: On the Stiefel characteristic classes of a Riemannian manifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 1—10 (1953).

Takizawa, Seizi: On the primary difference of two frame functions in a Riemannian manifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 11—14 (1953).

Takizawa, Seizi: On the characteristic classes of a submanifold. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 241—251 (1954).

C. B. Allendoerfer (dies. Zbl. **40**, 381) hat die Stiefelschen charakteristischen Klassen einer Riemannschen Mannigfaltigkeit R^n mit Hilfe von gewissen Differentialformen Π_r, Ω_r dargestellt. Verf. gibt eine neue mehr geometrische Herleitung dieser Formeln, indem er zeigt, daß sie mittels der Homotopietheorie der gefaserten Räume aus Ergebnissen von S. Chern [Ann. of Math. II. Ser. **45**, 747—752 (1944); dies. Zbl. **60**, 381] hergeleitet werden können. Im Anschluß hieran wird die Deformationskokette zweier r-Bein-Felder im R^n vermöge der Formen Π_r, Ω_r berechnet. Diese Differentialformen verwendet Verf. schließlich dazu, die charakteristischen Kohomologieklassen der Tangenten- und Normal-Bündel einer in R^n eingebetteten Untermannigfaltigkeit darzustellen. *W. Rinow.*

Yagyu, Toshikazu: On the Whitney characteristic classes of the normal bundle. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A **28**, 15—17 (1953).

Mit den Methoden der vorstehend besprochenen Arbeiten von Tikazawa leitet Verf. eine Integralformel für die Whitneyschen charakteristischen Klassen des Normalbündels einer in R^n eingebetteten Mannigfaltigkeit her. Er erhält so eine Verallgemeinerung der Formel von S. Chern für die Whithneysche Invariante [Ann. of Math. II. Ser. **46**, 674—684 (1945), dies. Zbl. **60**, 381]. *W. Rinow.*

Aragnol, André: Classes caractéristiques et formes différentielles. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2387—2389 (1954).

T sei ein Faserraum über einem m-dimensionalen Komplex K. Die Faser von T sei der n-dimensionale euklidische Vektorraum E_n. T sei orientiert, d. h. die Strukturgruppe reduziere sich auf die Gruppe der Drehungen des E_n. Ferner werde T als differenzierbar von der Klasse $r \geqq 4$ vorausgesetzt. $R^+(O)$ bezeichne den Raum der positiv orientierten orthonormierten n-Beine. In $R^+(O)$ sei ein euklidischer Zusammenhang w_{ij} gegeben. Denn lassen sich Differentialformen Ω^p und Π^p definieren, mit deren Hilfe Integralformeln abgeleitet werden können, die die Whitneyschen charakteristischen Klassen zu berechnen gestatten. *W. Rinow.*

Ishihara, Shigeru: Fibred Riemannian spaces with isometric parallel fibres. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 243—252 (1954); **Correction.** Ibid. **8**, 333 (1956).

Im Anschluß an Y. Mutô (Sci. Rep. Yokohama nat. Univ. Sec. 1, **1**, 1—14 (1952)] und A. G. Walker (dies. Zbl. **51**, 129) betrachtet Verf. differenzierbare Faserbündel (E, B, F). Totalraum E, Basis B und Faser F sind zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten. In E und damit in allen Fasern sei eine Riemannsche Metrik eingeführt. Dann hat man in E das „Orthogonalfeld", das jedem Punkt $x \in E$ das zu der durch x gehenden Faser orthogonale und komplementäre Ebenenelement zuordnet. Ein stückweise differenzierbarer Weg in B, der von b_0 nach b_1 geht, induziert mittels der über ihm in E im Orthogonalfeld verlaufenden Wege einen Diffeomorphismus von F_{b_0} auf F_{b_1}. Wenn alle diese Diffeomorphismen Isometrien sind, dann sagt man, daß E isometrische Fasern hat. In diesem Falle ist also die Holonomiegruppe H_0 (Diffeomorphismen von F_{b_0} auf F_{b_0} induziert durch geschlossene Wege in B von b_0 nach b_0) eine Gruppe von Isometrien. Die Strukturgruppe des Faserbündels ist immer auf H_0 reduzierbar. Wenn E isometrische Fasern hat und wenn außerdem das Orthogonalfeld vollständig integrierbar ist, dann spricht man von einem IPF-Bündel (isometric parallel fibres). Für ein IPF-Bündel gilt nach Mutô und Walker folgendes (0): Die Riemannsche Metrik von E ist lokal nach Fasern und Orthogonalflächen zerlegbar. (1): F und B haben natürliche Riemannsche Metriken. (2): Die Strukturgruppe ist eine Liesche Gruppe G von Isometrien der Faser. (3): Die

„transition functions“ f_{ij}: $U_i \cap U_j \to G$ können als konstant gewählt werden, d. h. das Bündel rührt her von einem Homomorphismus $\pi_i(B) \to G$. Verf. nimmt jetzt an, daß umgekehrt ein differenzierbares Faserbündel (E, B, F) gegeben sei, für das (1)—(3) erfüllt sind. Dann läßt sich in E eine Riemannsche Metrik so einführen, daß E zu einem IPF-Bündel wird. — Verf. untersucht jetzt weiter die IPF-Bündel für den Fall, daß E, B, F kompakt und orientierbar sind. Er beweist, daß die reellen Homologiegruppen von E zu denen von $B \times F$ isomorph sind (unter der Annahme, daß die Strukturgruppe G in (2) zusammenhängend ist). Schließlich beweist Verf. folgenden Satz: Es sei (E, B, G) ein Prinzipal-Faserbündel mit der kompakten Lieschen Gruppe G als Strukturgruppe. (E, B, G) besitzt dann und nur dann einen infinitesimalen Zusammenhang (connexion), der lokal „flat“ ist, wenn man für (E, B, G) konstante „transition functions“ f_{ij} einführen kann (siehe (3)). Vgl. S. S. Chern, Topics in differential geometry, dies. Zbl. **54**, 68. *F. Hirzebruch.*

Igusa, Jun-ichi: On the structure of a certain class of Kaehler varieties. Amer. J. Math. **76**, 669—678 (1954).

Verf. betrachtet kompakte n-dimensionale Kählersche Mannigfaltigkeiten, die in einem bestimmten Sinne von „konstanter Krümmung“ k sind, was nach Bochner äquivalent auch so ausgedrückt werden kann, daß die Kählersche Metrik in bezug auf geeignete lokale Koordinaten ein lokales Potential

$$U(z, \bar{z}) = \frac{1}{k} \log\left(1 + k \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j z_j\right) \quad (k \neq 0), \qquad = \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{z}_j \quad (k = 0)$$

hat. Für positives k spricht man von elliptischen, für negatives k von hyperbolischen und für $k = 0$ von parabolischen Mannigfaltigkeiten. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man für $k \neq 0$ annehmen, daß $k = 1$ oder $k = -1$ ist. Die universelle Überlagerung $\overline{X}$ einer (kompakten) elliptischen bzw. hyperbolischen bzw. parabolischen Mannigfaltigkeit X ist komplex-analytisch und isometrisch äquivalent mit dem komplexen projektiven Raum (Fubinische Metrik), der Hyperkugel im C^n (Bergmannsche Metrik) bzw. mit dem C^n (Euklidische Metrik). Im elliptischen Fall ist $\overline{X} = X$. Verf. zeigt mit Hilfe automorpher Formen, daß jede hyperbolische Mannigfaltigkeit algebraisch ist, d. h. in einen komplexen projektiven Raum geeigneter Dimension eingebettet werden kann. [Inzwischen hat Kodaira einen allgemeineren Satz bewiesen, dies. Zbl. **57**, 141; vgl. auch H. Cartan, Princeton math. Series **12** (Algebraic geometry and topology. A Symposium in honor of S. Lefschetz), 90—102 (1957)]. Eine parabolische Mannigfaltigkeit läßt in kanonischer Weise eine endliche Überlagerung zu, welche ein komplexer Torus ist. Die Gesamtheit der parabolischen Mannigfaltigkeiten der Dimension n zerfällt in eine endliche Anzahl von analytischen Familien, derart, daß zwei Mannigfaltigkeiten derselben Familie reell-analytisch äquivalent sind; diejenigen parabolischen Mannigfaltigkeiten, welche algebraisch sind, bilden also eine endliche Anzahl von Unterfamilien. Die hyperbolischen Mannigfaltigkeiten und die algebraischen parabolischen Mannigfaltigkeiten sind minimale Modelle im Sinne von A. Weil. Der Körper der meromorphen Funktionen einer hyberbolischen Mannigfaltigkeit läßt nur endlich viele Automorphismen zu; das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz-Klein. — Verf. erhält einige weitere interessante Resultate, z. B. zeigt er, daß die Euler-Poincarésche Charakteristik einer n-dimensionalen hyperbolischen Mannigfaltigkeit X gleich dem arithmetischen Geschlecht $\chi(X)$ $\left(= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j g_j\right)$ multipliziert mit $n + 1$ ist. Der Beweis ergibt sich aus der Tatsache, daß der Krümmungstensor von X sich von demjenigen des komplexen projektiven Raumes $P_n(C)$ nur um das Vorzeichen unterscheidet. Man kann daraus schließen, daß X und $P_n(C)$ im folgenden Sinne proportional sind: Es existiert eine Zahl a $(a \neq 0)$,

derart, daß jede Chernsche Zahl von X gleich dem a-fachen der entsprechenden Chernschen Zahl von $P_n(C)$ ist. Da das arithmetische Geschlecht eine Linearkombination von Chernschen Zahlen ist (Toddsches Polynom, vgl. Ref., Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Berlin 1956; dies. Zbl. **70**, 163) und da ferner das arithmetische Geschlecht von $P_n(C)$ gleich 1 ist, folgt, daß die Proportionalitätskonstante a gleich $\chi(X)$ ist. Da die Eulersche Zahl eine Chernsche Zahl ist, folgt die Behauptung des Verf. Die Proportionalitätsaussage wird vom Verf. nicht so explizit formuliert, sie war aber für Ref. Anregung zu einem Proportionalitätssatz, der nicht nur hyperbolische Mannigfaltigkeiten betrifft, sondern allgemeiner kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, deren universelle Überlagerung ein beschränktes homogenes symmetrisches Gebiet ist (Vortrag auf dem Symposium on Algebraic Topology, Mexico 1956). *F. Hirzebruch.*

Yano, K.: On pseudo-kählerian spaces of constant holomorphic curvature. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW **1954-012**, 5 p. (1954).

A complete exposition with proofs has appeared meanwhile (this Zbl. **64**, 163). *H. Guggenheimer.*

Sasayama, Hiroyoshi: On the extended cohomology of higher order. Tensor, n. Ser. **3**, 123—127 (1954).

Zugrunde gelegt sei eine kompakte, zusammenhängende und orientierbare n-dimensionale Basispunktmannigfaltigkeit $\overset{\circ}{M}_n$ von der Klasse C^k ($k \geqq M+2$). In einer vorangehenden Arbeit (s. dies. Zbl. **49**, 231) hat Verf. den Begriff der äußeren Differentialform, der äußeren Ableitung $\overset{M}{d}$ einer solchen Form, sowie die damit verknüpften Integralformeln vom Stokesschen Typus auf Räume von Linienelementmannigfaltigkeiten übertragen. Diese Räume lassen sich dabei durch Erweiterung aus Punkträumen gewinnen. Hier wird nun noch ein weiterer von H. V. Craig herrührender Differentialoperator (M) eingeführt. Auf dem vom Verf. eingeschlagenen Wege ergibt sich derselbe formal auf folgende Weise. Falls $\overset{\circ}{A}_p$ eine gewöhnliche auf einer Kette von $\overset{\circ}{M}_n$ erklärte p-Form ist, und die lokalen Koordinaten x^i von $\overset{\circ}{M}_n$ formal als Funktionen eines Parameters t betrachtet werden, so führt eine M-fache Differentiation nach t, wegen des Eingehens höherer Ableitungen der x^i nach t, zu einer auf der erweiterten Mannigfaltigkeit definierten, erweiterten äußeren Form. Die Koeffizienten der erweiterten Form sind genau die Craigschen Ableitungen des Feldes, auf dem die ursprüngliche Form $\overset{\circ}{A}_p$ definiert war. Für beide Sorten von erweiterten Formen bzw. Feldern kann die Untermenge der geschlossenen Formen und der nullkohomologen Formen erklärt werden. Werden diese für den Differentialoperator $\overset{M}{d}$, mit $\overset{M}{Z}_p$ bzw. $\overset{M}{B}_p$ bezeichnet, so führt die Quotientenbildung $\overset{M}{H}_p \equiv \overset{M}{Z}_p / \overset{M}{B}_p$ zu den erweiterten Kohomologiegruppen. Für diese kann unter der Voraussetzung $M_1 < M_2 \leqq M$ ein natürlicher Homomorphismus $\overset{\circ}{H}_p \to \overset{M_1}{H}_p \to \overset{M_2}{H}_p$ erklärt werden. Im Falle des Craigschen Operators (M) sind die erweiterten Kohomologiegruppen mit den entsprechenden Kohomologiegruppen der Basismannigfaltigkeit $\overset{\circ}{M}_n$ isomorph. Dies ergibt sich aus der Erklärung dieses Operators, sowie der vom Verf. bewiesenen Vertauschbarkeit der Operatoren $\overset{M}{d}$ und (M). *O. Varga.*

Sasayama, Hiroyoshi: On the space of line-elements of fractional order with derived metric extensors. Tensor, n. Ser. **4**, 91—106 (1954).

Sasayama, Hiroyoshi: On generalized spaces with metric of fractional order. Tensor, n. Ser. **4**, 107—121 (1954).

In der ersten dieser beiden Arbeiten gibt der Verf. die Analogien mit den Ergebnissen von Y. Katsurada (dies. Zbl. **45**, 434) nur formelhaft an, im Raum von

Linienelementen bruchzahliger Ordnung, der vom Verf. definiert geworden ist (dies. Zbl. **51**, 381). In der zweiten wird die Analogie mit der Theorie von Kawaguchischen Räumen, besonders dem Syngeschen Vektor, der intrinseken Ableitung usw. (vgl. A. Kawaguchi, dies. Zbl. **15**, 275) in demselben Raum in ganz derselben Weise angegeben. *A. Kawaguchi.*

Sasayama, Hiroyoshi: On the extended harmonic and invariant multiple integrals of higher order. Tensor, n. Ser. **4**, 122—127 (1954).

Wird die differenzierbare Punktmannigfaltigkeit, die mit einer Riemannschen Metrik ausgestattet ist, zu einer Mannigfaltigkeit von Linienelementen höherer Ordnung erweitert, so induziert das auch eine Erweiterung des Fundamentaltensors. Für den so erweiterten Riemannschen Raum soll der Begriff der harmonischen Form erklärt werden. Nachdem in einer vorangehenden Arbeit (s. dies. Zbl. **49**, 231) der Begriff der erweiterten p-Form und des äußeren Differentials derselben eingeführt wurde, muß nur ein dazu entsprechendes Kodifferential eingeführt werden. Dasselbe kann mit Hilfe der von Y. Katsurada (s. dies. Zbl. **45**, 434—435) eingeführten erweiterten kovarianten Ableitung genau so definiert werden, wie im klassischen Falle. Eine erweiterte p-Form heißt dann wie im klassischen Falle harmonisch, wenn sie gleichzeitig geschlossen und kogeschlossen ist, d. h. ihre äußere Ableitung und die Koableitung verschwinden. Als erste Folgerung ergibt sich hieraus, daß mit jedem erweiterten harmonischen Integral auch das ursprüngliche Integral harmonisch ist und umgekehrt. Bei Heranziehung der von Y. Katsurada eingeführten erweiterten Lieschen Ableitung (s. dies. Zbl. **49**, 121) ergeben sich folgende Sätze, die klassischen Ergebnissen entsprechen. Die erweiterte Liesche Ableitung einer geschlossenen erweiterten Form ist nullkohomolog. Die erweiterte Liesche Ableitung ist ein Operator, der sowohl mit dem erweiterten äußeren Differential wie mit dem Kodifferential vertauschbar ist. Die erweiterte Liesche Ableitung einer erweiterten harmonischen Form ist harmonisch. *O. Varga.*

Nasu, Yasuo: On the normality in Minkowskian spaces. Kumamoto J. Sci., Ser. A **2**, Nr. 1, 11—17 (1954).

The author studies the concept of normality in Minkowski spaces in the sense of H. Busemann (this Zbl. **40**, 375) analytically under certain differentiability hypothesis. The same problem was studied by Barthel (this Zbl. **51**, 396), but there was a case overlocked by him. The author completes his results. *S. Sasaki.*

Rapcsák, András: Eine neue Definition der Normalkoordinaten im Finslerschen Raum. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth **1**, 109—116 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfassg. ibid., Addit. ad **1**, 17 (1955).

Verf. beweist, daß die von Ref. (dies. Zbl. **49**, 119) für einen Finslerschen Raum eingeführten Normalkoordinaten eine entsprechende Deutung zulassen, wie dies für Riemannsche Normalkoordinaten zuerst von H. S. Ruse (dies. Zbl. **1**, 169) gezeigt wurde. Es sei $(\overset{0}{x}, \overset{0}{v})$ das Bezugselement der Normalkoordinaten des Finslerschen Raumes und $\overset{1}{x}^i$ ein zu $\overset{0}{x}^i$ genügend benachbarter Punkt. Dann gibt es genau eine zum Bezugselement $(\overset{0}{x}, \overset{0}{v})$ gehörende Quasigeodätische durch $\overset{1}{x}^i$. Ist die von $\overset{0}{x}^i$ bis $\overset{1}{x}^i$ gemessene Bogenlänge dieser Quasigeodätischen $s - s_0$, dann sind die zum Bezugselement $(\overset{0}{x}, \overset{0}{v})$ gehörenden Normalkoordinaten durch

$$\bar{x}^i = -\tfrac{1}{2}\, g^{ki}\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(s - s_0)^2\right]_{x^k = \overset{0}{x}{}^k}$$

bestimmt. *O. Varga.*

Takasu, Tsurusaburo: Connection spaces in the large. X: A new view on the relation between the „Erlanger Programm" and the linear connections. Yokohama math. J. **2**, 81—94 (1954).

Das Ziel dieser Arbeit ist es, einen neuen Gesichtspunkt zu formulieren, was den

Zusammenhang zwischen dem „Erlanger Programm" und der Theorie des linearen Zusammenhanges betrifft. Die Idee wurzelt in der Tatsache, daß das System der geodätischen Linien, die mit Hilfe der Parameter der linearen Übertragung definiert sind, durch das System der „geodätischen Linien zweiter Art" ersetzt wird. Das letztere ist mit Hilfe von n Pfaffschen Ausdrücken $(d\xi)^l = \omega^l_\mu(x^j)\,dx^\mu$ gegeben. Nicht alle Auseinandersetzungen des Verf. sind nach der Meinung des Ref. ganz klar.

S. Gołąb.

Laptev, B. L.: Die Liesche Ableitung im Raum der Stützelemente. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 3 (61), 238—240 (1954) [Russisch].

Man betrachtet in jedem Punkte x^i von X_n die Menge der differentialgeometrischen Objekte ω^i. Einen Punkt mit dem Objekt, $(x;\omega)$, nennt man das Stützelement. Das topologische Produkt von X_n und der lokalen Mannigfaltigkeit der Objekte ω^i nennt man Raum der Stützelemente. Den Linienelementenraum, den Hyperebenenelementenraum, u. a. kann man als besondere Fälle des Raumes der Stützelemente betrachten. Verf. definiert die Liesche Ableitung eines Objektes $\Omega^i(x;\omega)$ im Raume der Stützelemente und gibt dann Anwendungen auf die Theorie der Automorphismen.

W. Wrona.

Postelnicu, Tiberiu: Espaces A_2 à connexion affine linéaire localements euclidiens. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. **3**, Nr. 4/5, 101—130 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 131 (1954) [Rumänisch].

Dans ce travail, on étudie le problème d'équivalence globale d'un espace à connexion affine linéaire à deux dimensions $A_2(x^1, x^2)$, localement euclidien, avec l'espace euclidien affine $E_2(u^1, u^2)$. En utilisant un sous-groupe du groupe affine à deux variables, on établit un certain nombre de formes canoniques de la connexion de l'espace A_2, et on donne un criterium algébrique de reconnaître si deux formes canoniques sont ou non distinctes. Pour chaque forme déterminée, un système de coordonnées affines dans E_2 est défini par deux solutions linéaires indépendantes du système d'équations aux dérivées partielles $\partial^2 u/\partial x^j\,\partial x^k + \Gamma^i_{jk}\,\partial u/\partial x^i = 0$ $(i, j, k = 1, 2)$ et l'équivalence globale dépend de la nature des intégrales de ce système. Le Ref. observe que dans certains cas, comme c'est le dernier, l'affirmation où l'A. dit que l'on a équivalence globale n'est pas justifié, car la variable u^1 est toujours positive.

G. Vranceanu.

Vrănceanu, G.: Sur les espaces A_n non projectivement euclidiens, sans torsion avec group maximum. Revista Univ. C. I. Parhon Politehn. Bucureşti, Ser. Şti. Natur. **3**, Nr. 4/5, 87—99 u. russ. u. französ. Zusammenfassg. 100 (1954) [Rumänisch].

Précédemment, l'A. avait montré que l'espace à connexion affine non projectif euclidien pouvait avoir tout au plus un groupe de mouvement avec $m = n^2 - 2n + 5$ paramètres at que ce maximum était atteint par les espaces de Kagan ayant les composantes Γ^i_{jk} de la connexion, nulles, sauf $\Gamma^1_{22} = x^3$. Dans le présent travail, l'A. montre qu'un espace, possédant un groupe de mouvements G_m, peut être réduit, par une transformation de variables, à l'espace dont les composantes de connexion sont celles susmentionnées. On y montre d'abord qu'un espace, correspondant aux conditions requises, a les tenseurs contractés de courbure nuls et ensuite on montre que l'espace est symétrique. Aprés avoir démontré les propriétés envisagées, on donne quelques propriétés différentielles globales. On y montre notamment que les courbures autoparallèles sont des courbes planes de 3e degré (pouvant se réduire, dans des cas spéciaux, à des paraboles ou à des droites). Par un changement convenable de variables on arrive à donner à l'espace la connexion définie par les formules

$$\Gamma^1_{22} = \tfrac{2}{3}\,y^3,\quad \Gamma^1_{32} = \Gamma^1_{23} = -\tfrac{1}{3}\,y^2,\quad \Gamma^1_{33} = \Gamma^i_{jk} = 0,\quad (i \neq 1;\ j, k \neq 2, 3)$$

d'où il résulte que par deux points de l'espace passe une seule courbe autoparallèle et aussi une seule géodésique.

Gh. Th. Gheorghiu.

Kurita, Minoru: Realization of a projectively flat space. Tensor, n. Ser. **3**, 128—130 (1954).

Gegeben sei ein torsionsfreier affinzusammenhängender n-dimensionaler Raum L_n mit inhaltstreuer Übertragung. Der Raum sei ferner projektiv eben. Verf. beweist, daß man den L_n durch eine Hyperfläche S in einem gewöhnlichen euklidisch-affinen Raum realisieren kann. Dies bedeutet, daß es ein $(n + 1)$-Bein gibt, von dem n Vektoren Tangentenvektoren des S sind, während der $(n + 1)$-te Vektor von einem festen Raumpunkt nach S führt; die infinitesimale Bewegung des $(n + 1)$-Beines bestimmt den affinen Zusammenhang des L_n. *O. Varga.*

Varga, Ottó: Eine Charakterisierung der Finslerschen Räume mit absolutem Parallelismus der Linienelemente. Acta Univ. Debrecen. Ludovico Kossuth **1**, 105—108 (1954) [Ungarisch], deutsche Zusammenfassg. ibid., Addit. ad **1**, 16 (1955).

Ungarische Übersetzung des in dies. Zbl. **55**, 157 besprochenen Aufsatzes des Verf. *A. Moór.*

Kawaguchi, Akitsugu: On the theory of non-linear connections. Convegno Internaz. Geometria differenz., Italia, 20—26 Sett. 1953, 27—32 (1954).

Verf. gibt einen Überblick über seine Theorie des nicht-linearen Zusammenhangs (zur ausführlichen Darstellung vgl. dies. Zbl. **48**, 404): Jedem Punkt einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit X_n sei ein N-dimensionaler Vektorraum E_N zugeordnet. Das absolute Differential δv^I eines kovarianten Vektors v^I des E_N sei durch $\delta v^I = dv^I + \omega_i^I(x, v)\, dx^i$ gegeben, wobei die Funktionen ω_i^I homogen vom 1. Grade in den Komponenten v^I des Vektors sind. Diese Begriffsbildungen lassen sich insbesondere auf die Finsler-Geometrie anwenden. *W. Klingenberg.*

Mizoguti, Yukitoyo: Theory of path structures. I. Japanese J. Math. **24**, 53—147 (1954).

Diese umfangreiche Abhandlung enthält eine ausführliche Darstellung der früher unter demselben Titel veröffentlichten Ergebnisse (s. dies. Zbl. **58**, 162). *A. Kawaguchi.*

Kovancov, N. I.: Die räumliche Indikatrix der geodätischen Torsionen eines triorthogonalen Systems anholonomer Flächen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 773—776 (1954) [Russisch].

Verf. zeigt, daß für ein dreifach orthogonales System anholonomer Flächen eine Indikatrix (Fläche zweiten Grades) existiert, die die geodätischen Torsionen ebenso bestimmen läßt wie die Normalkrümmungen von Flächenkurven mit Hilfe der Dupinschen Indikatrix. *Joachim Nitsche.*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Kirkor, A.: Antoine phenomena and geometric properties of simple arcs. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 257—260 (1954).

Verf. konstruiert eine perfekte 0-dim. Menge im E_3, deren Komplement nicht einfach zusammenhängend ist, und die (im Gegensatz zum Beispiel von Antoine) auf einem Kurvenbogen liegt, der endliche Länge und eine stetige orientierte Tangente fast überall im Baireschen Sinne besitzt. Zuvor werden folgende Eigenschaften einfacher Kurvenbögen im E_3 verglichen: 1. Besitz einer stetigen orientierten Tangente, 2. Besitz einer stetigen nicht-orientierten Tangente, 3. Wilde Einbettung, 4. Umfassen einer perfekten 0-dim. Menge, deren Komplement bezüglich E_3 nicht einfach zusammenhängend ist. *Horst Schubert.*

Wunderlich, W.: Irregular curves and functional equations. Ganita **5**, Nr. 2, 215—230 (1954).

Ausgehend von einem einfach zusammenhängenden beschränkten und abgeschlossenen Bereich in einem euklidischen Raum E und einer geordneten Menge von endlich vielen topologischen Abbildungen $A_1, \ldots, A_r$ $(t \geqq 2)$ von E auf sich,

welche drei Bedingungen unterworfen sind, entsteht ein geometrisches Konstruktionsverfahren, das je nach der Wahl des Bereiches und der Abbildungen zu einer ganzen Menge von bekannten irregulären Kurven führt. Die A_j liefern automorphe Transformationen der zugehörigen Kurve C, und damit ebenso viele C vollständig charakterisierende Funktionalgleichungen, die unter Anwendung geschickt gewählter nicht-dekadischer Zahlensysteme zu einer Parameterdarstellung von C führen. Durch Spezialisierung erhält man stetige Funktionen ohne Ableitung oder ohne endliche Ableitung (Knopp, Steinitz, Bolzano usw.), die von Kochsche Jordan-Kurve ohne Tangenten, die Sierpinskische Kurve mit ausschließlich Doppelpunkten, die ein Quadrat auffüllenden Kurven von Peano und Hilbert, schließlich eine von de Rham konstruierte Kurve mit Tangente in jedem Punkt, aber unendlicher Krümmung in den Punkten einer überall dichten Teilmenge. *J. Ridder.*

Gergely, E.: La classification des surfaces sur la base de leur géométrie intrinsèque. Acad. Republ. popul. Romîne, Fil. Cluj, Studii Cerc. şti., Ser. I **5**, Nr. 3/4, 27—42, russ. und französ. Zusammenfassg. 42—43, 43—44 (1954) [Rumänisch].

Les surfaces envisagées sont des variétés à 2 dimensions dans l'espace euclidien à 3 dimensions, sur lesquelles deux points quelconques peuvent être joints par une courbe de longueur finie; d'autres hypothèses sont introduites au cours de l'exposé. Un domaine convexe d'une surface est une composante connexe de l'ensemble des points ayant un voisinage à métrique convexe, au sens d'A. D. Alexandrov (Géométrie intrinsèque des surfaces convexes, ce Zbl. **38**, 352). Les courbes et points isolés qui composent la frontière d'un domaine convexe constituent les „courbes et points isolés de séparation" de la surface. L'A. étudie les propriétés de l'ensemble de séparation ainsi défini et introduit une classification des surfaces basée sur la structure topologique de cet ensemble et sur la nature, convexe ou non convexe, des domaines „attachés" aux diverses courbes de séparation. Il décrit une série de domaines „élémentaires", convexes ou non, à partir desquels on peut construire une surface de classe donnée quelconque. Certaines imprécisisons dans le langage, les hypothèses faites et l'exposé des buts poursuivis, rendent difficile la compréhension détaillée de l'article.

J. Tits.

Rešetnjak, Ju. G.: Isotherme Koordinaten in Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **94**, 631—633 (1954) [Russisch].

Verf. betrachtet die durch A. D. Aleksandrov eingeführten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung und beweist den folgenden Satz: Sei R eine Mannigfaltigkeit von beschränkter Krümmung und M ein dem euklidischen Kreise homöomorphes Gebiet in R, dessen Rand eine Schwenkung von beschränkter Variation hat, dann kann man im Gebiete M solche Koordinaten x und y (x und y variieren in einem beschränkten ebenen Bereiche D) einführen, daß die Metrik durch das Linienelement $\lambda(z)\,(dx^2 + dy^2)$ bestimmt wird. Dabei ist

$$\lambda(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint_D \log\frac{1}{|z-\zeta|}\;\omega(dE_\zeta) + h(z)\right\},$$

$z = x + iy$, $\omega(E)$ die Krümmung von $E \subset M$, dE_ζ das Element der Ebene und ζ die Integrationsveränderliche. Das Integral ist im Sinne von Lebesgue-Stieltjes zu verstehen und $h(z)$ bedeutet eine harmonische Funktion im Bereiche D.

W. Wrona.

Biernacki, Mieczysław: Sur quelques propriétés des ovales. Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A **7**, 103—111, poln. und russ. Zusammenfassg. 111—112 (1954).

Die Arbeit enthält interessante Resultate über konvexe Kurven von verschiedenartigem Charakter. 1. Eine Übertragung eines Ergebnisses von Polya (Isoperimetric inequalities in mathematical physics, dies. Zbl. **44**, 383) auf Rotationskörper und einen einbeschriebenen Zylinder. 2. Einen einfachen Beweis des Satzes, wonach einer

Eilinie mindestens zwei Quadrate einbeschrieben werden können. 3. Es seien d der Durchmesser einer gegebenen Eilinie und P, Q zwei Punkte derselben mit der Entfernung d. Die die Punkte P und Q verbindende Strecke möge C in zwei konvexe Kurvenbögen mit der Länge L' bzw. L'' teilen. Dann gilt $\mathrm{Min}\,\{L'/L, L''/L\} \geq 1/(1+\frac{2}{3}\pi)$ $(L'+L''=L)$ 4. Es sei P ein Punkt auf C und r die Entfernung von P von einem festen Punkt von C. Dann gilt $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{d^2}\int_C r\,ds \leq \pi$. Dabei bedeutet ds das Bogenelement von C. Es wird gezeigt, daß die untere Grenze exakt ist.

A. Dinghas.

Matsumura, Sōji: Beiträge zur Theorie der Kurven und geometrische Anwendungen von Fourierschen Reihen. J. Osaka Inst. Sci. Technol., Part. I **5/6**, 45—46 (1954).

„Satz 3: Wenn zwei Eilinien eine beschränkte Anzahl von Tangenten haben, dann haben sie auch eine gerade Anzahl von gemeinsamen Tangenten." — Vermutlich sind auch im ersten Teil des Satzes gemeinsame Tangenten gemeint. Sodann denke man zur Illustration an einen Kreis, der von einem kleineren von innen berührt wird. *H. Gericke.*

Bieri, H.: Ein Minimum-Maximumproblem über konvexe Rotationskörper. Commentarii math. Helvet. **28**, 149—154 (1954).

Es wird gezeigt, daß in der Menge der polygonalen konvexen Rotationskörper bei gegebener Körperlänge l und Meridianlänge L die Zylinder und nur diese das kleinste Integral der mittleren Krümmung M und die symmetrischen Doppelkegel und nur diese größtes M besitzen. Da ein beliebiger konvexer Rotationskörper sich durch Polygonalkörper approximieren läßt und die auftretenden Größen stetig vom Körper abhängen, gilt diese Aussage auch für die volle Klasse der konvexen Rotationskörper. *R. Inzinger.*

Topologie:

Monteiro, António A.: L'arithmétique des filtres et les espaces topologiques. 2° Sympos. Probl. mat. Latino-América, Villavicencio-Mendoza 12—25 Julio 1954, 129—162 (1954).

Verf. berichtet (mit entsprechenden Literaturangeben) über die Verbandseigenschaften von Filtern, insbesondere von Filtern von abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes. U. a. werden besprochen Charakterisierungen des Verbandes aller Filter eines mit einem kleinsten und größten Element (0 bzw. 1) versehenen Verbandes, eines vollständigen, distributiven und kompakten Verbandes, des Verbandes aller abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Hausdorffschen Raumes. Für die Gültigkeit des Satzes von den Primfiltern (Jeder eigentliche Filter ist obere Grenze von Primfiltern) werden notwendige und hinreichende Bedingungen genannt, ebenso für die analogen Sätze von den Ultrafiltern und Ultraidealen. Für Boolesche Verbände gelten die beiden letzgenannten Sätze; es ist aber nicht bekannt, ob dies die einzigen derartigen distributiven Verbände sind. Die Begriffe Normalität, vollständige Normalität, Hypernormalität werden durch sie betreffende Sätze einander gegenübergestellt; insbesondere erweist sich der Verband aller abgeschlossenen Teilmengen eines topologischen Raumes genau dann als hypernormal, wenn der Raum vollständig normal und total-unzusammenhängend ist. In normalen Verbänden lassen sich die Begriffe „Mannigfaltigkeit" und „Radikal" eines Filters F studieren; das erste ist die Menge aller „Umgebungen" aller Elemente von F, das zweite ist die obere Grenze aller Ultrafilter, die F teilen. (v ist „Umgebung" von a, wenn es ein w gibt mit $v \vee w = 1$ und $a \wedge w = 0$.) Weiter befaßt sich der Bericht mit den verschiedenen Methoden der Kompaktifizierung von topologischen Räumen, mit „Booleschen", d. h. kompakten und total-unzusammenhängenden Räumen und mit Brouwerschen Algebren im Sinne der mathematischen Logik. *G. Aumann.*

Inagaki, Takeshi: Contribution à la topologie. III. Math. J. Okayama Univ. **4**, 79—96 (1954).

Verf. betrachtet einen „espace quantitatif“ (s. Teil II, dies. Zbl. **53**, 302) mit einem „Charakter“ (universellen Indexbereich für die Umgebungen) $\mathfrak{A}$ von der Mächtigkeit $\aleph_\xi$. Wie üblich von offenen und abgeschlossenen Mengen ausgehend, verallgemeinert Verf. in für solche Räume sinnvoller Weise den Begriff des Borelschen Mengenkörpers und damit der Borelschen Mengen und ihrer Klassifikation, indem er statt abzählbarer Vereinigungs- und Durchschnittsabgeschlossenheit eine solche mit der Mächtigkeit $\aleph_\xi$ fordert. Für Abbildungen zwischen Räumen gleichen Charakters werden dem üblichen Vorgehen analog (B)-meßbare oder Bairesche Funktionen definiert und klassifiziert; die Funktionen 0-ter Klasse sind die stetigen. Es bestehen die üblichen Zusammenhänge zwischen verallgemeinerten Borelschen Mengen- und verallgemeinerten Baireschen Funktionenklassen. Insbesondere führt die gleichmäßige Konvergenz einer (nicht zu großen) Funktionenfolge nicht in eine höhere Klasse hinein. Es wird der Bairesche Satz über die Menge der Unstetigkeitsstellen einer Funktion der ersten Klasse verallgemeinert. *Jürgen Schmidt.*

Papić, Pavle: Sur la séparation des ensembles. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **6**, 158—161 u. serb. Zusammenfassg. 161 (1954).

Pour abréger disons qu'un espace est s-normal si pour chaque couple A, B de ses ensembles fermés et disjoints il y a un couple A_0, B_0 d'ensembles ouverts disjoints contenant respectivement A et B et tels que $A_0 \cup B_0 =$ l'espace (si l'on barre la dernière condition, on a affaire à la normalité de l'espace). R-espace est chaque espace définissable par une base ramifiée de voisinages et verifiant l'axiome T_1 de séparation. Chaque R-espace est s-normal (Th. 1). Pour qu'un espace distancié à 0 dimension soit s-normal, il faut et il suffit qu'il soit un R-espace (Th. 2) respectivement totalement ordonnable (Th. 3). *G. Kurepa.*

Iséki, Kiyoshi: On hypocompact spaces. Portugaliae Math. **13**, 149—152 (1954).

Hypokompakt heißt ein Raum, falls jede seiner offenen Überdeckungen eine Stern-endliche Verfeinerung besitzt. Es wird bewiesen: 1. die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossenen Teilmengen eines hypokompakten Raumes ist hypokompakt; 2. das topologische Produkt eines hypokompakten Raumes und eines Raumes, der Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen ist, ist hypokompakt. *T. Ganea.*

Baum, John D.: Asymptoticity in topological dynamics. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 506—519 (1954).

Se limitant essentiellement au cas des groupes abéliens engendrés par un voisinage compact de l'unité l'A. analyse la notion de trajectoires P-asymptotiques (où P réfère à un semi-groupe replet). L'A. étudie une relation entre la P-limite d'une trajectoire et l'ensemble des trajectoires asymptotes à cette dernière. — L'existence de couples de trajectoires asymptotes est établie par certains systèmes instables. L'article utilise les définitions et notions de l'ouvrage déjà classique de Hedlund et Gottschalk. L'article se termine par la discussion de nombreux exemples puisés dans la „dynamique symbolique“. *G. Reeb.*

Cartwright, M. L. and J. E. Littlewood: Some fixed point theorems. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 1—37 (1951).

Le résultat essentiel s'énonce ainsi: soit T un homéomorphisme direct de R^2 sur R^2 qui laisse invariant un continu M (où M ne sépare pas R^2); alors T admet au moins un point fixe. Ce résultat est important dans l'étude des solutions périodiques de certains systèmes différentiels. Depuis les démonstrations des AA. ont été simplifiées (voir le rapport suivant). *G. Reeb.*

Hamilton, O. H.: A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point theorem. Canadian J. Math. **6**, 522—524 (1954).

Il s'agit du théorème Cartwright-Littlewood (voir le rapport précédent). La démonstration utilise le lemme suivant (démontré dans la présente note): Si T est un homéomorphisme direct de R^2 sur R^2 laissant invariant un continu M, sans point

fixe sur M, (où M ne sépare pas R^2) il existe un homéomorphisme T' de R^2 sur R^2 sans point fixe, qui coïncide sur M avec T'. *G. Reeb.*

Aleksandrov, P.: Über einige neue Ergebnisse in der kombinatorischen Topologie der nicht-abgeschlossenen Mengen. Fundamenta Math. **41**, 68—88 (1954) [Russisch].

In dieser Arbeit gibt Verf. eine zusammenfassende Übersicht über einige der wichtigsten von ihm und Sitnikov erzielten Ergebnisse in der kombinatorischen Topologie der nicht-abgeschlossenen Mengen im R^n. Zunächst wird berichtet über den allgemeinen Hindernis- und den Deformationssatz sowie über die übrigen Ergebnisse von Sitnikov zur Dimensionstheorie, von denen inzwischen die ausführlichen Beweise erschienen sind (Sitnikov, dies. Zbl. **65**, 161). Dann folgt eine Übersicht über den ersten Dualitätssatz von Sitnikov (dies. Zbl. **55**, 163) sowie ein eingehender Vergleich mit dem Dualitätssätz von Verf., der auch an anderer Stelle (Verf., dies. Zbl. **53**, 126) zu finden ist. Zum Schluß werden einige Fragen formuliert, die inzwischen zum Teil durch weitere Arbeiten von Sitnikov, insbesondere seinen zweiten Dualitätssatz (Sitnikov, dies. Zbl. **55**, 163) beantwortet wurden (vgl. auch Verf., dies. Zbl. **55**, 164). *E. Burger.*

Berikašvili, N. A.: Über Dualitätssätze für beliebige Mengen. Soobščenija Akad. Nauk Gruzinskoj SSR **15**, 407—414 (1954) [Russisch].

Verf. beweist einen Dualitätssatz für beliebige Mengen in der Sphäre, in dem Ref. eine Wendung des Sitnikovschen Dualitätssatzes (der eigentlich ein Isomorphiesatz ist) in einen echten Dualitätssatz zu erkennen meint. Bekanntlich betrachtet K. Sitnikov (dies. Zbl. **43**, 383) einerseits zu einer Menge A Vietoris-Homologiegruppen mit Zyklusfolgen, die kompakte Träger (in A) besitzen, andererseits zu der Komplementärmenge B Čech-Kohomologiegruppen mit unendlichen Kozyklen auf sternendlichen Überdeckungen (mit den Überdeckungsfolgen wird direkt zum Limes übergegangen). Zwischen solchen Gruppen wird Isomorphie konstatiert, wenn die Koeffizientengruppen diskret sind. Verf. ersetzt die zweite Gruppe nun durch eine, die man erhält, wenn man erst eine Überdeckung betrachtet, Čech-Homologiegruppen auf endlichen Teilkomplexen dieser Überdeckung bildet und direkt zum Čogošvili-Limes übergeht und danach längs der Überdeckungen invers den Limes bildet. Er konstatiert Dualität (wenn der zweite Koeffizientenbereich dual zum ersten ist). — Verf. behandelt ähnlich auch den Alexandrov-Čogošvilischen Dualitätssatz (G. Čogošvili, dies. Zbl. **42**, 169). *H. Freudenthal.*

Gordon, W. L.: On the coefficient group in cohomology. Duke math. J. **21**, 139—153 (1954).

The author discusses the effect of the use of various coefficient groups in the Alexander-Spanier cohomology theory (Spanier, this Zbl. **35**, 248). The exact sequence of coefficients, the direct product theorem etc. are proved. *Atuo Komatu.*

Vázquez García, R.: Die i-Produkte von Koketten in der kubischen singulären Theorie. Bol. Soc. mat. Mexicana **11**, 9—32 (1954) [Spanisch].

L'A. étend à la théorie de l'homologie singulière cubique (mod 2) introduite par J. P. Serre (ce Zbl. **45**, 260) la notion de produit $\smile_i$ (cup-i) de Steenrod (ce Zbl. **30**, 416) et en donne la construction explicite. Il montre que les i-carrés Sq_i basés sur cette définition coïncident avec les i-carrés de Steenrod (mod 2) parce qu'ils vérifient les conditions données par Serre (ce Zbl. **52**, 195) qui caractérisent ces derniers. *G. Hirsch.*

Heller, Alex: Homological resolutions of complexes with operators. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 283—303 (1954).

Es werden Homologieeigenschaften von Komplexen mit Operatoren untersucht mit Hilfe von entsprechenden homologie-algebraischen Strukturen, insbesondere der „resolutions". Diese werden durch einen rekursiven Prozeß erklärt, der ein Homologie-Analogon zu den Konstruktionen von Postnikov (dies. Zbl. **42**, 172) über den

Homotopietypus eines Polyeders darstellt. Er verläuft auf der Grundlage der Homologiealgebra von Cartan-Eilenberg (Homological Algebras, Princeton 1956). Als topologische Anwendung wird eine Verallgemeinerung des P. A. Smithschen Fixpunktsatzes über periodische Abbildung von Sphären angegeben. Besonders betrachtet wird der Fall, daß der Operatorenbereich der Gruppenring einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung ist. *Wolfgang Franz.*

Adem, José: Algebraische Operationen in der Topologie und einige Anwendungen auf geometrische Probleme. 2° Sympos. Probl. mat. Latino América, Villavicencio-Mendoza 21—25 Julio 1954, 179—189 (1954) [Spanisch].

Der Vortrag gibt einen gedrängten Überblick über bekannte Methoden der algebraischen Topologie; zur Illustration werden Anwendungen dieser Methoden auf einige geometrische Probleme besprochen. In den einzelnen Abschnitten des Vortrags werden folgende Themen behandelt: Homologie- und Cohomologie-Gruppen. Homotopie-Gruppen. Hopfsche Invariante. p-Potenzen von Steenrod. Homologie von Mannigfaltigkeiten. Abbildungen von Sphären in Sphären. Composition von Sphären-Abbildungen. *H. Bauer.*

Noguchi, Hiroshi: A characterization of homotopically labil points. Kōdai math. Sem. Reports **1954**, 13—16 (1954).

Sind A ein metrischer Raum und p ein Punkt aus A, so heiße p ein „labiler" Punkt im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz, wenn zu jeder in A offenen Menge $U \ni p$ eine Homotopie $\{f^\tau\}$ stetiger Abbildungen von $\overline{U}$ in sich existiert, die die Eigenschaften hat: es ist f^0 die Identität, $f^\tau(p) = p$ in allen (p, τ) mit $p \in \overline{U} - U$ und $0 \leq \tau \leq 1$, schließlich $f^1(U) \neq U$. Ersetzt man die Beziehung $f^1(U) \neq U$ durch die Beziehung $p \notin f^1(U)$, so erhält man die Erklärung eines labilen Punktes im Sinne von K. Borsuk. Ein simplizialer Komplex heiße „kontrahierbar", wenn seine sämtlichen Homologiegruppen verschwinden und seine Fundamentalgruppe lediglich das Einselement enthält. Hiernach ist der Punkt q des Polyeders B genau dann bezüglich B labiler Punkt im Sinne von B. Borsuk, wenn eine simpliziale Zerlegung K von B existiert, so daß gilt: bedeuten C den offenen Stern von q in bezug auf (B, K) und L die von K in dem Polyeder $\overline{C} - C$ induzierte simpliziale Zerlegung, so ist L kontrahierbar. Die obigen Definitionen und der letzte Satz werden in verschiedener Richtung abgewandelt und ergänzt. *J. Weier.*

Noguchi, Hiroshi: On the problem of the invariance of homotopical stability of points under Cartesian multiplication. Proc. Amer. math. Soc. **6**, 651—655 (1955).

Sind A ein Polyeder, K eine simpliziale Zerlegung von A, a ein Eckpunkt von K, ferner U der offene Stern von a bezüglich (A, K) und K_a die von K in dem Polyeder $\overline{U} - U$ induzierte simpliziale Zerlegung, so heiße K_a „Nachbarschaftskomplex" von a in K. Ein Punkt aus A, welcher nicht labil ist im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz (im Sinne von K. Borsuk), heiße „stabil" im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz (im Sinne von K. Borsuk). Es seien B ein weiteres Polyeder, L eine simpliziale Zerlegung von B, b ein Eckpunkt von L, L_b der Nachbarschaftskomplex von b in L. Aus K_a und L_b werde der Produktkomplex $K_a \times L_b$ gebildet. Dann gilt: Der Punkt (a, b) des Polyederproduktes (A, B) ist genau dann stabil im Sinne von K. Borsuk, wenn eine ganze Zahl $n \geq 0$ existiert derart, daß die n-te ganzzahlige Homologiegruppe von $K_a \times L_b$ nicht Null ist. Ist (a, b) stabil bezüglich (A, B), wenn a stabil bezüglich A und b stabil bezüglich B ist, die Stabilität im Sinne von K. Borsuk verstanden? Diese Frage ist zu verneinen, wie Verf. an einem Beispiel zeigt. Hingegen ist die Stabilität im Sinne von H. Hopf und E. Pannwitz gegenüber Multiplikationen invariant, sobald man sich auf homogene Komplexe beschränkt. *J. Weier.*

Bartholomay, A. F.: Type-invariance and h-retraction. Portugaliae Math. **13**, 105—110 (1954).

Some connections of a very general nature between retraction, homotopy equivalence, etc., are established. For instance, the subset A_0 of A is called a homotopic retract of A if there exists a map r of A onto A_0, whose restriction to A_0 is homotopic to the identity map of A_0. It is pointed out that, if B is homotopically equivalent to a homotopic retract of A, then there exists a map of A onto B which admits a right inverse. *T. Ganea.*

James, I. M.: On the homotopy groups of certain pairs and triads. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **5**, 260—270 (1954).

Wenn man die Homotopiegruppen eines Komplexes induktiv über die Dimensionszahlen berechnen will, dann ist Information über die relativen Homotopiegruppen des n-Skeletts modulo dem $(n-1)$-Skelett wesentlich. Verf. verfeinert die Resultate von Blakers und Massey (dies. Zbl. **53**, 129) und benutzt auch die Methode der Triaden. Es wäre zu kompliziert, die Hauptsätze des Verf. im einzelnen hier anzugeben. Ref. begnügt sich damit, zwei exakte Sequenzen des Verf. zu beschreiben: Es sei Y ein 1-zusammenhängender CW-Komplex. $Y^* = Y \cup e^n$ entstehe durch Ankleben einer n-Zelle vermöge der Abbildung $\alpha\colon S^{n-1} \to Y$. Es sei H die verallgemeinerte Hopfsche Invariante (dies. Zbl. **45**, 442) und E^n die n-fache Einhängung:

$$\pi_r(S^n) \xrightarrow{H} \pi_r(S^{2n-1}) \xleftarrow{E^n} \pi_{r-n}(S^{n-1}) \xrightarrow{\alpha_*} \pi_{r-n}(Y).$$

Es sei $n \geqq 3$ und $n+2 \leqq r \leqq 3n-4$. Es sei $H_\alpha = \alpha_* E^{-n} H$. Es sei χ: $\pi_r(Y^*, Y) \to \pi_r(S^n)$ der durch Zusammenziehen von Y induzierte Homomorphismus. Es sei Q: $\pi_{r-n}(Y) \to \pi_{r-1}(Y^*, Y)$ durch $Q(\gamma) = [\gamma, i]$ definiert [relatives Whitehead-Produkt, i erzeugendes Element von $\pi_n(Y^*, Y)$]. Es sei Y nun m-zusammenhängend und $p = \min(3n-4,\ 2m+n)$. Dann ist die folgende Sequenz exakt.

$$\pi_p(Y^*, Y) \xrightarrow{\chi} \cdots \longrightarrow \pi_r(Y^*, Y) \xrightarrow{\chi} \pi_r(S^n) \xrightarrow{H_\alpha} \pi_{r-n}(Y) \xrightarrow{Q} \pi_{r-1}(Y^*, Y) \longrightarrow \cdots.$$

Die zweite exakte Sequenz werde ohne explizite Beschreibung der Homomorphismen angegeben. Y^* sei l-zusammenhängend und sei $q = \min(3n-4,\ 2l+n-1)$. Dann hat man eine exakte Sequenz:

$$\pi_{q-1}(S^{n-1}) \to \cdots \to \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(Y^*, Y) \to \pi_{r-n+1}(Y^*) \to \pi_{r-2}(S^{n-1}) \to \cdots.$$

F. Hirzebruch.

Sugawara, Masahiro: Some remarks on homotopy groups of rotation groups. Math. J. Okayama Univ. **3**, 129—133 (1954).

Denote by R_n the rotation group of the $(n-1)$-dimensional sphere. The 9-dimensional homotopy groups $\pi_9(R_n)$ of R_n are determined. Proposition 3. $\pi_9(R_3) = 3$, $\pi_9(R_4) = 3+3$, $\pi_9(R_5) = 0$, $\pi_9(R_6) = 2$, $\pi_9(R_7) = 2+2$, $\pi_9(R_8) = 2+2+2$, $\pi_9(R_9) = 2+2$, $\pi_9(R_{10}) = 2+\infty$, $\pi_9(R_n) = 2$, $n \geqq 11$. Partial results for $\pi_{10}(R_n)$ and $\pi_{11}(R_n)$ are obtained. Note that the groups $\pi_i(R_n)$ for $i < 9$ were calculated in the author's previous paper (this Zbl. **53**, 301), with the exception $i = 7$, and he determines the groups $\pi_7(R_n)$ in this paper. *A. Komatu.*

Hirsch, Guy: Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés. Bull. Soc. math. Belgique **6**, 79—96 (1954).

Es sei E gefasert mit der Basis B, der Faser F und der Projektion π von E auf B. Für die Cohomologie werde ein Körper K als Koeffizientenbereich zugrunde gelegt. Es werde vorausgesetzt, daß B zusammenhängend ist, daß $H^q(F)$ für jedes q endlichdimensional über K ist und daß die Fundamentalgruppe der Basis trivial auf $H^*(F)$ operiert. Mit $C^*(X)$ sollen die Cokettengruppen von X bezeichnet werden. Es sei U ein Isomorphismus des Vektorraumes $H^*(F)$ in $C^*(E)$ derart, daß $U(x)$ für $x \in H^*(F)$ bei Beschränkung auf F ein Cozyklus ist, der die Klasse x repräsentiert. Man kann dann den Isomorphismus $V = (\pi^* \otimes 1) \cup (1 \otimes U)$ von $C^*(B) \otimes H^*(F)$ in $C^*(E)$ einführen, wo $\cup$ das Cup-Produkt in $C^*(E)$ bezeichnet. Verf. beweist, daß man U so wählen kann, daß das Bild von V unter dem in $C^*(E)$ definierten Corand-Operator δ abgeschlossen ist. Dann kann δ vermöge V auf $C^*(B) \otimes H^*(F)$ übertragen werden,