Werk

Titel: Funktionalanalysis. Abstrakte Räume

Ort: Berlin

Jahr: 1958

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0058|log27

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

● **Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis.** Ins Deutsche übertragen von L. Boll und U. Roth. (44. Beiheft zur „Sowjetwissenschaft") Berlin: Verlag Kultur und Fortschritt 1954. 274 S., DM, 20.—.

Die Arbeiten werden in dies. Zbl. einzeln angezeigt.

Mikulik, Miloslav: Metric lattices. Czechosl. math. J. **4 (79)**, 364—370 und engl. Zusammenfassg. 370—371 (1954) [Russisch].

Sia dato un reticolo S il quale goda delle seguenti proprietà: (U_1) S è un reticolo completo; (U_2) In S esiste una metrica ϱ rispetto alla quale S è compatto; (U_3) Dato un insieme non vuoto $A \subset S$, siano $l = \bigwedge_{t \in A} t$, $L = \bigvee_{t \in A} t$ il minimo e il massimo assoluto di A (certo esistenti per U_1); si ha allora: $d(A) = \varrho(l, L)$, essendo $d(A)$ il diametro di A rispetto alla metrica ϱ. [L'A. è stato condotto allo studio di reticoli S siffatti da un esempio particolare: quello dell'insieme M delle soluzioni di una equazione differenziale del tipo $x' = f(t, x)$, f uniformemente continua e limitata in un opportuno campo; M può infatti essere trasformato in un reticolo del tipo S qualora in esso si introducano, nel modo più „naturale", un ordinamento parziale e una metrica.] In un reticolo completo, come è noto, si dice che la successione $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o-converge a x ($x_n \underset{o}{\to} x$), se $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \bigvee_{k=n}^{\infty} x_k = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigwedge_{k=n}^{\infty} x_k = x$; si dirà poi che la medesima successione $*$-converge a x ($x_n \underset{*}{\to} x$), se da ogni successione parziale $\{x_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ si può estrarre una subsuccessione $\{x_{n_{i_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ la quale o-converge ad x. Nella presente nota l'A. dimostra innanzitutto che: (teor. 1) In un reticolo S convergenza, o-convergenza e $*$-convergenza coincidono. Un subreticolo $A \subset S$ non vuoto si dice convesso se, contenendo due elementi x, y, contiene anche ogni z tale che: $x \leq z \leq y$; si dice chiuso se, contenendo un sottoinsieme X, contiene il suo massimo e minimo assoluto. Si ha allora che: (teor. 2) Un subreticolo non vuoto convesso $A \subset S$ è chiuso quando e soltanto quando A è compatto. *L. Lombardo-Radice.*

Grothendieck, Alexandre: Sur les espaces (F) et (DF). Summa Brasil. Math. **3**, 57—121 (1954).

Les résultats principaux de cet important travail ont été annoncés en 1950 (ce Zbl. **37**, 80); il se divise en 3 parties. La première est consacrée à l'étude des duals forts d'espaces (F) et à une catégorie plus générale que l'A. appelle espaces (DF): ce sont les espaces localement convexes admettant une suite fondamentale de parties bornées et tels que toute intersection dénombrable de voisinages convexes cerclés fermés de 0, qui absorbe les parties bornées, est elle-même un voisinage. Le premier résultat de l'A. est qu'un dual fort d'espace (F) satisfait à cette dernière condition (moins restrictive que la propriété d'être quasi-tonnelé.) Tout espace quotient d'un espace (DF) par un sous-espace fermé est un espace (DF), ainsi que toute limite inductive d'une suite d'espaces (DF) [mais un sous-espace fermé d'un espace (DF) n'en est pas nécessairement un]; tout espace de Banach est (DF), ce qui montre qu'effectivement on a une catégorie plus vaste que celle des duals d'espaces (F). Si E est un espace (DF), G un espace localement convexe quelconque, pour qu'une application linéaire u de E dans G soit continue, il suffit que sa restriction aux parties bornées de E le soit; en particulier, si G est complet, l'espace $L(E, G)$ est complet pour la topologie de la convergence bornée, et plus particulièrement le dual fort de E est complet. En outre, si F est un sous-espace fermé de E, sur F^0 la topologie induite par la topologie forte de E', et la topologie de dual fort de E/F, coïncident (propriété connue seulement jusqu'ici pour les espaces normés); de même la topologie quotient de la topologie de E' fort par F^0 et la topologie de dual fort de F' coïncident sur E'/F^0 lorsque F est lui aussi un espace (DF). Cette dernière proposi-

tion ne suppose d'ailleurs pas que E soit lui-même un espace (DF), et elle est encore vraie lorsque F est métrisable et distingué. Un espace (DF) dans lequel il y a une suite partout dense, ou dont les parties bornées sont métrisables, est quasi-tonnelé. En outre, pour un dual fort E' d'espace (F), E' est bornologique si et seulement si il est tonnelé (ou encore si E est distingué); mais un exemple de G. Köthe reproduit par l'A. montre qu'il n'en est pas toujours ainsi. La seconde partie contient une série de contre-exemples très ingénieux d'espaces (LF), répondant par la négative à la plupart des questions posées par le Réf. et L. Schwartz [Ann. Inst. Fourier, **1**, 61—101 (1949); ce Zbl. **35**, 355]. L'A. donne aussi un exemple d'espace de Montel métrisable et complet (donc réflexif) dont un quotient est l'espace de Banach (l^1) non réflexif! Il montre enfin que pour une catégorie étendue d'espaces (F), il y a dans le dual E' un sous-espace V et un point x' fortement adhérent à V qui n'est faiblement adhérent à aucune partie bornée de V. Enfin la troisième partie est consacrée à la définition et l'étude de deux nouvelles classes d'espaces localement convexes, les espaces quasi-normables et les espaces de Schwartz; des exemples ont été rencontrés par ce dernier en théorie des distributions, et l'A. a montré depuis que ces catégories d'espaces comprennent plus généralement ses espaces nucléaires [Mem. Amer. math. Soc. **16** (1955); ce Zbl. **55**, 97; **64**, 355]. Un espace E est quasi-normable si pour toute partie équicontinue A de E' il y a un voisinage V de 0 dans E tel que la topologie induite sur A par la topologie forte de E' soit identique à la topologie de la convergence uniforme dans V. Un espace de Schwartz est un espace quasi-normable dont les parties bornées sont précompactes. Toute application linéaire continue d'un espace quasi-normable semi-réflexif E dans un espace de Banach F transforme un certain voisinage de 0 dans E en une partie relativement faiblement compacte de F. Les espaces de Schwartz sont remarquablement stables pour les opérations usuelles: sous-espace, espace quotient, produit quelconque, limite inductive dénombrable. Le mémoire se termine par une liste de questions non résolues. *J. Dieudonné.*

Kasahara, Shouro: A characterization of Hilbert space. Proc. Japan Acad. **30**, 846—848 (1954).

Let E be a Banach space in which the norm satisfies the following condition. (*) There is a constant α not exceeding 1/2, and for each pair x, y of points of E there is at least one λ with $\alpha \leqq \lambda \leqq 1-\alpha$, such that

$$\lambda\,||x||^2 + (1-\lambda)\,||y||^2 \geq \lambda(1-\lambda)\,||x-y||^2 + ||\lambda\,x + (1-\lambda)\,y||^2.$$

It is proved that, given any closed subspace M of E, there is a projection of E onto M with norm 1. Using a result of Kakutani (this Zbl. 22, 150), this shows that the condition (*) characterizes Hilbert space. *F. F. Bonsall.*

Blanuša, D.: Plongement isométrique de l'espace de Hilbert généralisé dans une hypersphère de l'espace de Hilbert. Conseil Acad. RPF Yougoslavie, Bull. sci. **2**, 10 (1954).

Froda, Alexandru: Ensembles de distances dans l'espace Euclidien total. Acad. Republ. popul. Romîne, Studii Cerc. mat. **5**, 29—67, russ. und franz. Zusammenfassg. 67—69, 69—71 (1954) [Rumänisch].

Die Teilmenge des cartesischen Produktes abzählbar vieler Geraden, die aus den Punkten besteht, die nur endlich viele von Null verschiedene Koordinaten besitzen, wird mit T bezeichnet und mit der üblichen euklidischen Metrik versehen. Für $E \subset T$ wird die Menge aller Entfernungen $d(P,Q)$, $P \in E$, $Q \in E$, $P \neq Q$, mit $D(E)$ bezeichnet; E heißt „mit ungleichen Entfernungen", falls aus $d(P,Q) = d(R,S) \neq 0$ mit $P, Q, R, S \subset E$ entweder $P = R$ und $Q = S$ oder $P = S$ und $Q = R$ folgt. Minimal heißt E, falls je endlich viele Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ mit $P \in E$, $Q \in E$, linear unabhängig sind. — Hauptergebnis: Es gibt abzählbare, in $(0, +\infty)$ dichte Mengen L mit der Eigenschaft, daß jedes $E \subset T$ mit ungleichen Entfernungen

minimal ist, sobald $D(E) \subset L$ gilt. Die Menge aller solchen L wird mit $\mathfrak{L}$ bezeichnet. Jede in $(0, +\infty)$ dichte Teilmenge einer Menge aus $\mathfrak{L}$ gehört zu $\mathfrak{L}$. Jede in $(0, +\infty)$ dichte Menge besitzt eine dichte, zu $\mathfrak{L}$ gehörende Teilmenge. Die Menge aller rationalen Zahlen aus $(0, +\infty)$ gehört nicht zu $\mathfrak{L}$. Gesättigt heißt $L \in \mathfrak{L}$, falls aus $t \in (0, +\infty)$ und $t \notin L$, $L \cup t \notin \mathfrak{L}$ folgt. Jede Menge aus $\mathfrak{L}$, deren Mächtigkeit kleiner ist als das Kontinuum, ist Teilmenge einer gesättigten Menge L aus $\mathfrak{L}$, die im folgenden Sinne stark nicht meßbar ist: für jedes Intervall J ist das äußere Maß von $J \cap L$ dem von $J - L$ gleich, und beide sind dem Maß von J gleich. Für jedes $L \in \mathfrak{L}$ ist die Komplementärmenge $(0, +\infty) - L$ von zweiter Baireschen Kategorie in jedem Intervall. *T. Ganea.*

Berge, Claude: Sur un théorème de la convexité régulière non linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris **238**, 2485—2486 (1954).

Die in dem Separationssatz der Arbeit des Verf., dies. Zbl. **57**, 352, angegebene Funktion $f(x)$ läßt sich so wählen, daß die dortigen Ungleichungen für diese scharf bestehen. *W. Gaschütz.*

Christescu, Romulus: Espaces partiellement ordonnés pseudo-normés. Comun. Acad. Republ. popul. Romîne **4**, 15—19, russ. u. französ. Zusammenfassg. 19, 19—20 (1954) [Rumänisch].

This paper covers much the same ground as another communication by the same author (this Zbl. **57**, 338). *E. Hewitt.*

Gillman, Leonard and Melvin Henriksen: Concerning rings of continuous functions. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 340—362 (1954).

Es bezeichne X einen vollständig regulären, separierten Raum und $C = C(X, R)$ den Ring aller stetigen, reellen (nicht notwendig beschränkten) Funktionen auf X. Im ersten Teil der Arbeit werden die Beziehungen zwischen den maximalen Idealen und den Primidealen von C studiert. Besondere Bedeutung kommt hierbei den wie folgt definierten pseudo-diskreten Räumen (kurz: P-Räumen) zu. X heißt P-Raum, wenn jede Nullstelle $x \in X$ einer beliebigen Funktion $f \in C$ eine Umgebung besitzt, auf welcher f identisch verschwindet. Verff. beweisen u. a. die Gleichwertigkeit folgender Aussagen: (1) X ist P-Raum; (2) der Durchschnitt einer jeden Folge offener Teilmengen von X ist offen; (3) C ist ein regulärer Ring; (4) jedes Primideal in C ist maximal; (5) jedes Ideal in C ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale, die es enthalten. Eingehend untersucht werden sodann die linear geordneten P-Räume. — In einem zweiten, vom ersten im wesentlichen unabhängigen Teil werden diejenigen linear geordneten Räume untersucht, die zugleich Q-Räume im Sinne von E. Hewitt (vgl. dies. Zbl. **32**, 286) sind. Es zeigt sich, daß ein linear geordneter Raum X dann und nur dann Q-Raum ist, wenn X parakompakt und jeder abgeschlossene (diskrete) Unterraum von X ein Q-Raum ist. Allgemein erweist sich jeder linear geordnete Raum als „abzählbar parakompakt". *H. Bauer.*

Yamamuro, Sadayuki: Modulared sequence spaces. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 1—12 (1954).

Verf. geht aus von einer Folge $\{f_\nu\}$ monoton wachsender, konvexer reeller Funktionen einer reellen Variabeln mit folgenden Eigenschaften: 1. $f_\nu(0) = 0$, 2. $\lim_{\xi \to \alpha - 0} f_\nu(\xi) = f_\nu(\alpha)$, 3. $\lim_{\xi \to \infty} f_\nu(\xi) = +\infty$, 4. $f_\nu(\xi)$ ist nicht für alle $\xi > 0$ gleich $+\infty$. Für jede Folge $x = \{\xi_\nu\}$ von reellen Zahlen wird nun $m(x) = \sum_\nu f_\nu(\xi_\nu)$ gebildet. Bezeichnet man mit $l(f_\nu)$ die Menge aller Folgen x, für die $\alpha > 0$ existiert, so daß $m(\alpha x)$ endlich ist; setzt man ferner $\|x\| = \inf \eta$ $(\eta > 0,\ m(x/\eta) \leq 1)$, so wird $l(f_\nu)$ mit $\|x\|$ als Norm ein Banachscher Raum. Es werden nun notwendige und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß a) $l(f_\nu)$ die summierbaren Folgen enthält und b) $l(f_\nu)$ nur beschränkte Folgen enthält. Für die Gültigkeit des Schurschen Satzes, wonach starke und schwache Konvergenz in $l(f_\nu)$ äquivalent sind, ist (unter

gewissen zusätzlichen Forderungen an die f_ν) a) hinreichend die Bedingung: $\lim_{\nu\to\infty} \chi^{f_\nu} = 1$, b) notwendig die Bedingung: für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\chi_{f_\nu} < 1 + \varepsilon$ für fast alle ν. (Hier ist χ^{f_ν} [χ_{f_ν}] = inf [sup] p ($p \geq 1$, $f_\nu(\xi)/\xi^p$ monoton abnehmend [monoton zunehmend]). *W. Nef.*

Yamamuro, Sadayuki: On finite modulars. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 13—21 (1954).

Sei R ein teilgeordneter Vektorraum und $m(a)$ eine auf R definierte reelle Funktion mit folgenden Eigenschaften (vgl. Nakano, Modulared semi-ordered linear spaces, dies. Zbl. **41**, 234): 1. $0 \leq m(a) \leq +\infty$, 2. $m(\xi a) = 0$ (für alle $\xi > 0$) $\to a = 0$, 3. Zu $a \in R$ existiert $\xi > 0$, so daß $m(\xi a) < +\infty$, 4. Für jedes $a \in R$ ist $m(\xi a)$ eine konvexe Funktion von $\xi > 0$, 5. $|a| \leq |b| \to m(a) \leq m(b)$, 6. $a \cap b = 0 \to m(a + b) = m(a) + m(b)$, 7. $0 \leq a_\lambda \uparrow_{\lambda \in \Lambda} a \to m(a) = \sup_{\lambda \in \Lambda} m(a_\lambda)$. $a \in R$ heißt endlich, wenn $m(\xi a) < +\infty$ für alle $\xi > 0$. Wenn jedes $a \in R$ endlich ist, so heißt m endlich. Wenn $\gamma > 0$ existiert, so daß $m(2\xi a) \leq \gamma\, m(\xi a)$ (für alle $\xi > 0$), so heißt a nach oben beschränkt. Wenn alle $a \in R$ mit demselben γ nach oben beschränkt sind, so heißt m nach oben beschränkt. Die Endlichkeit von m folgt aus der Beschränktheit nach oben. Daß die Umkehrung falsch ist, wird durch ein Beispiel belegt. Hingegen folgt aus der Endlichkeit die Beschränktheit nach oben in einem etwas schwächeren Sinn. Falls R insbesondere ein Folgenraum ist (siehe vorhergehend. Referat), wird dieses Ergebnis mit Resultaten von Orlicz und Birnbaum in Beziehung gesetzt. *W. Nef.*

Amemiya, Ichiro: A characterization of the modulars of L_p type. J. Fac. Sci., Hokkaido Univ., Ser. I **12**, 22—33 (1954).

Sei R ein teilgeordneter Vektorraum und $m(x)$ eine auf R definierte reelle Funktion mit denselben Eigenschaften wie im vorhergehenden Referat. Es lassen sich dann auf R die folgenden beiden Normen bilden: 1. $|||x||| = \inf \eta$ ($\eta > 0$, $m\left(\frac{x}{\eta}\right) \leq 1$). 2. $\|x\| = \inf_{\xi > 0} \frac{1 + m(\xi x)}{\xi}$. — Ist $R = L_p$ ($p \geq 1$), so ist $\|x\| = \alpha\, |||x|||$, wo $\alpha = p^{1/p} \cdot q^{1/q}$ ($1/p + 1/q = 1$). Nakano hat vermutet, daß hiervon auch die Umkehrung gilt und die vorliegende Arbeit dient der Aufklärung dieser Frage. *W. Nef.*

Krasnosel'skij, M. A. und Ja. B. Rutickij: Über lineare Funktionale in Orliczschen Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 581—584 (1954) [Russisch].

Let M and N be two complementary N'-functions (see Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, this Zbl. **3**, 252). The Orlicz class L_M is the set of all measurable functions $u(x)$ (defined on a fixed compact subset of an Euclidean space) such that $\varrho(u, M) = \int M(u(x))\, dx < \infty$. The Orlicz space L_M^* is the least linear set containing L_M, with the norm $\|u\|_M = \sup_{\varrho(v, N) \leq 1} \left|\int u(x)\, v(x)\, dx\right|$. Let E_M denote the greatest linear subspace of L_M. A sequence $u_n \in L_M^*$ is said to be (o)-weakly convergent if the sequence $\int u_n(x)\, v(x)\, dx$ converges for every $v \in E_N$. — The following theorems are proved: (1) Every linear functional $F(u)$ on E_M is of the form $F(u) = \int u(x)\, v(x)\, dx$ where $v \in L_N^*$. (2) If every linear functional $F(u)$ on L_M^* is of the above form, then M satisfies the condition Δ_2, i. e. $\limsup_{t\to\infty} M(2t)/M(t) < \infty$ (this theorem is converse to a theorem of Orlicz, this Zbl. **6**, 315). (3) The set E_M is the closure in L_M^* of the set of bounded functions. (4) For each $u \in L_M$, the distance between u and E_m is ≤ 1. (5) If $u_0 \in E_M$, then the sphere $\|u - u_0\|_M < 1$ is contained in L_M. (6) L_M^* is (o)-weakly compact and (o)-weakly complete. — The paper contains also a criterion for an integral operation from $L_{M_1}^*$ into $L_{M_2}^*$ to be completely continuous. *R. Sikorski.*

Rutickij, Ja. B.: Über eine Eigenschaft eines vollstetigen linearen Integraloperators, der in einem Orliczschen Raume wirkt. Uspechi mat. Nauk **11**, Nr. 2 (68), 201—208 (1956) [Russisch].

We assume the same terminology and notation as in the preceding review. M, N and M_i, N_i $(i = 1, 2, 3)$ denote some pairs of complementary N'-functions. The following theorems are proved: (1) A linear functional F on L_M^* is of the form $F(u) = \int u(x)\, v(x)\, dx$ where $v \in E_N$ if and only if it is (o)-weakly continuous. (2) Suppose that $\iint |K(x, y)\, u(y)\, v(x)|\, dx\, dy < \infty$ for $u \in L_{M_1}^*$ and $v \in L_{N_2}^*$, and that the operation $A\, u(x) = \int K(x, y)\, u(y)\, dy$ from $L_{M_1}^*$ into $L_{M_2}^*$ is completely continuous. The operation A transforms every (o)-weakly convergent sequence into a strongly convergent one if and only if the adjoint operation $A^* v(x) = \int K(y, x)\, v(y)\, dy$ transforms E_{N_2} into E_{N_1}. (3) Suppose that $||u(x)\, v(y)||_{M_3} \leq C\, ||u||_{M_1}\, ||v||_{N_2}$ for $u \in L_{M_1}^*$ and $v \in L_{N_2}^*$, and that $K(x, y)$ belongs to $L_{N_3}^*$. Then the operation A defined in (2) is completely continuous and transforms every (o)-weakly convergent sequence into a strongly convergent one. (4) If the operator $\mathfrak{f}$ defined by the formula $\mathfrak{f}(u\, x) = f(x, u(x))$ (where f is continuous) transforms the open unit sphere S of $L_{M_1}^*$ into L_{M_2}, then $u_n \to u_0$ $(u_n, u_0 \in S)$ implies $\mathfrak{f}\, u_n \to \mathfrak{f}\, u_0$ (o)-weakly. — Some application of the last theorem to the proof of the complete continuity of an operator of the Hammerstein type $B\varphi(x) = \int K(x, y)\, f(y, \varphi(y))\, dy$ is also discussed.

R. Sikorski.

Krasnosel'skij, M. A.: Die Zerspaltung linearer Integraloperatoren, die aus einem Orliczschen Raum in einen anderen operieren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97**, 777—780 (1954) [Russisch].

Let M, N, P, Q be some N'-functions (see Z. W. Birnbaum und W. Orlicz, this Zbl. **3**, 252). Suppose that M and N are complementary and that $M(u)$ increases more rapid than u^2 as $u \to \infty$. Let $L_M^*, L_N^*, \ldots$ denote the Orlicz spaces (defined on a compact subset of an Euclidean space) determined by $M, N, \ldots$ respectively. Let A be a linear (= additive and continuous) integral transformation of L_N^* into L_M^* with a symmetric, positive definite kernel $K(s, t)$ where $\iint |K(s, t)|^2\, ds\, dt < \infty$. Obviously, A can be also interpreted as an endomorphism in the Hilbert space L^2; let $H = A^{1/2}$. The following theorems are announced: (1) If $M(u) = (P(u))^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, then H is a continuous transformation from L^2 into L_P^*. If M satisfies the condition Δ_2 (i. e. $\limsup_{u \to \infty} M(2u)/M(u) < \infty$), then H is completely continuous. (2) If M satisfies the condition Δ^2 (i. e. there are positive constants a, b such that $M(a\, u) < M^2(u) < M(b\, u)$ for $u > u_0$), then H is a continuous transformation of L^2 into L_M^*. (3) If $M(u) = (P(Q(u))^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ or if $M(u)\, P(Q(u))$ where P satisfies the condition Δ^2, then H is a completely continuous transformation of L^2 into L_P^*. (4) If $M(u) = P(Q(u))$ and P and Q satisfy the condition Δ^2, then H is a completely continuous transformation of L^2 into L_P^*. (5) If H is a continuous transformation from L^2 into L_M^*, then $A\, \varphi = H\, H^*\, \varphi$ for φ belonging to the closure of $L_N^* \cap L^2$ (H^* is the transformation adjoint to H). (6) If $M(u)$ satisfies the condition Δ^2 and $\iint M(Q(K(s, t)))\, ds\, dt < \infty$, then $A = H\, H^*$ and H is a completely continuous transformation of L^2 into L_M^*. — As an application of the above results the author quotes a theorem on existence of a solution of the non-linear integral equation $\varphi(s) = \int K(s, t)\, f(t, \varphi(t))\, dt$.

R. Sikorski.

Marinescu, G.: Sur la différentielle et la dérivée dans les espaces normés. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. ştiinţ., Secţ. Ştiinţ. mat. fiz. **6**, 213—217, russ. u. französ. Zusammenfassg. 218, 218—219 (1954) [Rumänisch].

E sei ein normierter reeller linearer Raum, F ein Banachscher Raum, x_0 ein Punkt von E, und T ein Operator, der eine Umgebung $U(x_0)$ in F abbildet. $\delta\, T(x_0; h)$

bezeichne das Gâteauxsche Differential von T, $dT(x;h)$ das Fréchetsche Differential von T. Satz: $\delta T(x;h)$ existiere für alle $x \in U(x_0)$, und $\delta T(x;h)$ sei stetig für $x = x_0$ für alle $h \in E$, ferner sei $\delta T(x_0;h)$ stetig für $h = 0$. Dann ist $\delta T(x_0;h)$ linear und stetig als Funktion von h. Aus diesem Satz erhält Verf. zwei Sätze, die hinreichende Bedingungen für die Identität $\delta T(x;h) = dT(x;h)$ geben. Schließlich kündigt er einen Satz an, unter der Voraussetzung, daß die schwache Topologie in F dieselbe wie die normierte ist. Dies impliziert natürlich, daß F endlichdimensional st. *E. Hewitt.*

Scarfiello, R.: Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de Fourier. Nuovo Cimento, IX. Ser. **12**, 471—482 (1954).

Die Distributionen (über dem R^n) kann man bekanntlich sowohl als verallgemeinerte Funktionen wie auch als verallgemeinerte Maße deuten; bei jeder dieser Auffassungen wird man ihnen bei Variablentransformationen das angemessene Transformationsverhalten beilegen. Verf. gelangt zu diesen Transformationsweisen, indem er die Distributionen als de Rhamsche Courants, einerseits vom Grade 0 und andererseits vom Grade n, auffaßt und für Courants von beliebigem Grade das Transformationsverhalten bei Isomorphismen des R^n in sich (es wird nicht gesagt, was hierunter genau zu verstehen ist) in natürlicher Weise rekursiv nach ihrem Grad definiert. — Weiter wird die Fouriertransformation $\boldsymbol{F}$ für Courants definiert und die für Courants $\overset{0}{T}$ vom Grade 0 gültige Relation $\boldsymbol{F}\, H\, \overset{0}{T} = \overset{v}{H}\, \boldsymbol{F}\, \overset{0}{T}$ (H Isomorphismus des R^n auf sich, $\overset{v}{H}$ kontragredienter Isomorphismus) auf solche beliebigen Grades ausgedehnt. Anwendungen werden auf die Diracdistribution und die Pseudofunktionen gemacht. *H. König.*

Pitcher, Tom: Sets of „positive" functions in H-systems. Trans. Amer. math. Soc. **77**, 481—489 (1954).

Es sei G eine separable, lokalkompakte unimodulare Gruppe, $L^2(G)$ der Raum der bezüglich des Haarschen Maßes quadratisch integrierbaren Funktionen, und P die Gesamtheit der f. ü. nichtnegativen Elemente auf $L^2(G)$. Es sei ferner M der durch die Operatoren $(U_g f)(x) \equiv f(g^{-1}x)$ $(f \in L^2(G),\ g \in G)$ erzeugte Operatorring in $L^2(G)$. Es wird bewiesen, daß in M die U_g $(g \in G)$ die einzigen unitären Operatoren sind, die P in sich transformieren. Es sei ferner $\mathfrak{H}$ ein H-System im Sinne von W. Ambrose (dies. Zbl. **32**, 356). Eine Untermenge P' von $\mathfrak{H}$ wird Menge von positiven Funktionen genannt, wenn der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Hilbertraum als der L^2-Raum eines Maßraumes dargestellt werden kann, so daß P' mit der Menge der f. ü. nichtnegativen Funktionen desselben zusammenfällt. Verf. gibt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß $\mathfrak{H}$ mit dem L^2-System einer lokalkompakten unimodularen Gruppe identifiziert werden kann, so daß P in die Menge der f. ü. nichtnegativen Funktionen übergeht. *L. Pukánszky.*

Fleming, W. H.: On a class of games over function space and related variational problems. Ann. of Math., II. Ser. **60**, 578—594 (1954).

Setting. X: compact subset of euclidean k-space R^k. Y: compact subset of R^l. T: compact metric space. W: non-negative, finite, non-atomic Radon measure on T with $W(T) = 1$. $\mathfrak{N}$: family of the W-nullsets. $K(x, y, t)$: continuous (numerical) function defined on $X \times Y \times T$. φ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$: continuous functions defined on $X \times T$. ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$: continuous functions defined on $Y \times T$. A play of the game G consists of the choice of a (Borel) measurable mapping $x(t)$ of T into X by player I and of a (Borel) measurable mapping $y(t)$ of T into Y by player II. The payoff (to I) is $M(x(t), y(t)) = \int_T K(x(t), y(t), t)\, dW$. The strategies $x(t)$, $y(t)$ are subjected to the following constraints: $\int_T \varphi_i(x(t), t)\, dW = a_i$, $\int_T \psi_j(y(t), t) = b_j$.

Definition of a mixed strategy. To any measurable mapping $x = x(t, u)$ of $T \times [0, 1]$ into X there corresponds an element f of the conjugate C_1^* of the Banach space C_1 of all real valued continuous functions φ on $X \times T$ defined by $f(\varphi) = \int_0^1 \int_T \varphi(x(t, u), t)\, dW\, du$. $x(t, u)$ is called a description of f. S_1 denotes the set of all elements of C_1^* admitting such descriptions $x(t, u)$. The Radon measure $\gamma = \gamma_f$ on $X \times T$ corresponding to $f \in S_1$ possesses the following property $(\mathcal{P})$: for all Borel subsets E of T, $\gamma(X \times E) = W(E)$. Lemma 1: To any Radon measure γ on $X \times T$ with property $(\mathcal{P})$ there exists a conditional probability distribution α_t on X unique mod $\mathfrak{N}$ such that $\int_{X \times T} \varphi(x, t)\, d\gamma = \int_T \int_X \varphi(x, t)\, d\alpha_t\, dW$ and the linear functional so defined belongs to S_1. The mixed strategy space $\hat{S}_1$ is defined as the set of all $f \in S_1$ for which $f(\varphi_i) = a_i$. Similarly for $\hat{S}_2$. The payoff $M(f, g)$ for $f \in S_1$, $g \in S_2$ with descriptions $x(t, u)$, $y(t, v)$ is defined as $\int_0^1 \int_0^1 \int_T K(x(t, u), y(t, v), t)\, dW\, du\, dv$. It is independent the particular descriptions used. Theorem 1. The game G has a solution f_0, g_0 in mixed strategies. Hint to the proof: $\hat{S}_1$ and $\hat{S}_2$ are convex and weakly compact. $M(f, g)$ is bilinear and weakly continuous in f and in g. A special case of a theorem by Ky Fan (this Zbl. **50**, 65) is applied. Lemma 3: For $f \in S_1$ there exists a description $x(t, u)$ such that for almost all u, $f(\varphi_i) = \int_T \varphi_i(x(t, u), t)\, dW$. Hint to the proof: If $x_1(t, u)$ is a description of $f \in S_1$ and $Z(t, u)$ a measurable function defining for each t a rearrangement of $[0, 1]$, then $x(t, u) = x_1(t, Z(t, u))$ is also a description of f. $Z(t, u)$ has to be suitably chosen. Actual playing of (f_0, g_0). Player I determines first a description $x_0(t, u)$ of f_0 according to Lemma 3, chooses $u = u_0$ at random (e. g. by spinning a pointer) and plays pure strategy $x_0(t, u_0)$. Similarly for player II. Theorem 2 asserts that, under an interiority requirement for the constraints, $\alpha_{0,t}$ and $\beta_{0,t}$ corresponding to f_0 and g_0 are W-almost everywhere on T a mixed strategy solution for the game over $X \times Y$ with payoff $K(x, y, t) + \Sigma \lambda_i^0 \varphi_i(x, t) + \Sigma \mu_j^0 \psi_j(y, t)$ for suitable multipliers λ_i^0 and μ_j^0. Particular cases. (1) K does not contain y. (2) K does not contain t. (3) K is a function of (x, t) alone, $T = [0, 1]$, W is the Lebesgue measure. The game reduces to a 1-dimensional calculus of variation problems if we regard $x(t)$ as derivative of a function $\xi(t)$. The comparison functions $\xi(t)$ are uniformly Lipschitzian. Using Th. 1 and Lemma 3 a solution $\xi_0(t)$ is shown to exist (without concavity assumptions on K). (4) One dimensional variational problems in parametric form are treated similarly. [Remarks by the reviewer. In the proof of the existence of α_t corresponding to γ fulfilling $(\mathcal{P})$, the only properties of the family Γ of the Borel subsets Γ of X used are the existence of an enumerable Boolean algebra $\Gamma^0 \subset \Gamma$ generating Γ (in the sense of Borel) and of an enumerable family $\mathfrak{F}$ of decreasing evanescent sequences of Γ^0-sets such that every sequence of Γ^0-sets with the empty set as Borel limit is dominated by an $\mathfrak{F}$-sequence. The procedure followed to attach to α_t a description $x(t, u)$ rests on the existence of a homomorphism H of the Boolean σ-ring of the Borel sets Θ of $[0, 1]$ onto the Boolean σ-ring Γ (in the paper $H(\Theta) = X \cap B^{-1}(\Theta)$, B denoting a Borelian biunique mapping of R^k onto R^1. As in a paper by Hewitt and Savage, Trans. Amer. math. Soc. **80**, 470—501 (1955), the requirement of compact topologies (here on X, Y and T) aims at the use of weak topologies (namely of C_1^* and C_2^*). Topology could be removed from the paper reviewed in case of a positive answer to Hewitt's problem: Can the bounded measures defined on a Boolean σ-algebra $\mathfrak{M}$ of sets with unit U (without topology) be interpreted as elements of the dual space of a Banach space C of $\mathfrak{M}$-measurable functions on U ?]. *Chr. Pauc.*

Neumark, M. A.: Involutive Algebren. Sowj. Arb. Funktionalanalysis, Beiheft zur Sowjetwiss. **44**, 89—196 (1954).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. **33**, 67.

Neumark, M. A.: Operatorenalgebren im Hilbertschen Raum. Sowj. Arb. Funktionalanalysis, Beiheft zur Sowjetwiss. **44**, 197—274 (1954).

Vgl. die Besprechung des russ. Originals in dies. Zbl. **33**, 67.

Umegaki, Hisaharu: Conditional expectation in an operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 177—181 (1954).

Es sei A eine W^*-Algebra von Operatoren in einem Hilbertschen Raum H mit einer normalen treuen Spur μ, wobei $\mu(1) = 1$, und A_1 eine W^*-Unteralgebra von A. Ferner bedeute $L^1(A)$ den Raum aller im Sinne von Segal (dies. Zbl. **51**, 342) mit A assoziierten und integrierbaren Operatoren in H. Aus dem verallgemeinerten Radon-Nikodýmschen Satz von Segal (loc. cit.) folgt die Existenz einer eindeutig bestimmten linearen, strikt positiven, mit * vertauschbaren und in $L^1(A_1)$ konstanten Abbildung $x \to x^e$ von $L^1(A)$ auf den Unterraum $L^1(A_1)$ mit gewissen Stetigkeitseigenschaften und derart, daß $\mu(|x^e|) \leq \mu(|x|)$, wenn $x \in A$, $(x^e\, y)^e = (x\, y^e)^e = x^e\, y^e$, wenn $x \in L^1(A)$ und $y \in A$, und $(x\, y)^e = (y\, x)^e$, wenn $x \in L^1(A)$ und $y \in A_1' \cap A$, wobei A_1' den Kommutor von A_1 bezeichnet. Gewisse dieser Eigenschaften, die nicht Bezug auf A_1 nehmen, reichen bereits aus, Abbildungen dieser Art, sogenannte bedingte Erwartungen, zu charakterisieren, und ähnlich können die in der Form $x \to (x\, r)^e$ mit einem festen positiven Operator r aus $L^1(A)$ darstellbaren Abbildungen charakterisiert werden. Diese Charakterisierungen sind Verallgemeinerungen von Ergebnissen von Shu-Teh Chen Moy (dies. Zbl. **55**, 125), wo die üblichen bedingten Erwartungen als Transformationen eines Raums meßbarer reeller Funktionen aufgefaßt werden. *K. Krickeberg.*

Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru: Expectations in an operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 182—188 (1954).

Als Quasierwartung bezeichnen die Verff. eine lineare positive und mit * vertauschbare Abbildung $x \to x^e$ einer C^*-Algebra A in sich mit $(x^e\, y)^e = (x\, y^e)^e = x^e\, y^e$. Hat A eine Einheit und ist außerdem $1^e = 1$, so sprechen sie von einer Erwartung. Betrachtet werden die Konjugierte einer Erwartung und die C^*-Unteralgebra der Fixpunkte einer Quasierwartung. Ist A eine W^*-Algebra und folgt aus $x_\alpha \nearrow x$, daß $x_\alpha^e \nearrow x^e$, so bildet die Menge der Fixpunkte eine W^*-Unteralgebra. Schließlich werden Theoreme der im vorangegangenen Referat besprochenen Art behandelt. *K. Krickeberg.*

Kaplansky, Irving: Ring isomorphisms of Banach algebras. Canadian J. Math. **6**, 374—381 (1954).

The author proves the following theorem. If Φ is a ring-isomorphism from one semi-simple Banach algebra A onto another, then A is a direct sum $A_1 \oplus A_2 \oplus A_3$ with A_1 finite dimensional, Φ linear on A_2 and Φ conjugate linear on A_3. This is a generalization of a result of Rickert (this Zbl. **65**, 347). On a finite dimensional A_1 there are many non-linear isomorphisms as we can see by the automorphisms of the complex number field. There are lemmas for this theorem. One of them states that any primitive Banach algebra A over a field F is central in the sense that every additive endomorphism of A commuting with all left and right multiplications by elements of A is a scalar multiplication. *Y. Kawada.*

Shirota, Taira: On completely continuous operators on locally convex vector spaces. Proc. Japan Acad. **30**, 837—840 (1954).

The classical theory of Riesz and Schauder concerning completely continuous operators on Banach spaces was extended on locally convex vector spaces by J. Leray (this Zbl. **37**, 357). However the proof of the Fredholm alternative was based on the invariance of the domain and the theory of Schauder for the conjugate space was incomplete. In the present note the author gives a simple, direct proof of the Fred-

holm alternative and establishes the Riesz-Schauder theory in Leray's setting. Reference is taken to a paper by M. Altman (this Zbl. **52**, 120). [Reviewer's note. In a paper by J. H. Williamson (this Zbl. **55**, 109) Leray's theory is extended to general linear topological spaces. A simple, direct proof for the Fredholm alternative is given in that setting.] *Chr. Pauc.*

Miyadera, Isao: On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 38—52 (1954).

Extension of the theory of semi-group $\{T_t\}$, $t \geq 0$ of linear operators in a Banach space X to X, strongly continuous to the identity at $t = 0$ (E. Hille: Functional analysis and semi-groups, this Zbl. **33**, 65; the reviewer: this Zbl. **37**, 353). He deals with the generation of the semi-group which is strongly ergodic to the identity at $t = 0$ in the Abel sense:

$$\int_0^1 ||T_t||\, dt < \infty \quad \text{and} \quad \operatorname*{strong\,lim}_{\lambda \to \infty} \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, T_t\, x\, dt = x,$$

and in the $(C, 1)$ sense: $\int_0^1 ||T_t||\, dt < \infty$ and $\operatorname*{strong\,lim}_{s \downarrow 0} s^{-1} \int_0^s T_t\, x\, dt = x$.

These classes are just the classes $(0, C)$ and $(0, A)$ respectively in R. S. Phillips' paper [Ann. of Math., II. Ser. **59**, 325—356 (1954)] which appeared almost at the same time as the present paper. Thus the results in the present paper are closely similar to those due to Phillips. The main difference is that the present author did not consider the notion of the „complete infinitesimal generator", introduced in Phillips' paper. *K. Yosida.*

Miyadera, Isao: On the generation of a strongly ergodic semi-group of operators. Proc. Japan Acad. **30**, 335—340 (1954).

Preliminary report of the results given in the paper reviewed above. *K. Yosida.*

Phillips, R. S.: A note on the abstract Cauchy problem. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 244—248 (1954).

The abstract Cauchy problem discussed here is somewhat different from that inaugurated by E. Hille (this Zbl. **49**, 90; **55**, 345) in that the author relies upon the semi-groups of class (C_0) and $(0, A)$ [Ann. of Math., II. Ser. **59**, 325—356 (1954)]. Thus it is shown that if the „Cauchy problem" is solvable in his sense with respect to a given closed linear operator U for all initial values in the domain of U, then U is the infinitesimal generator of a semi-group yielding the same solutions to the „Cauchy problem". Also it is shown that the existence of a unique solution to the „Cauchy problem" for all initial values in the domain of U implies that the solutions depend continuously on the initial data. *K. Yosida.*

Elliott, Joanne: The boundary value problems and semi-groups associated with certain integro-differential operators. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 300—331 (1954).

The paper deals with the initial value problems for the pair of equations

$$(1) \qquad u_t(x, t) = \pi^{-1} \bar{P} \int_{-1}^{1} (\xi - x)^{-1} u_\xi(\xi, t)\, d\xi = \Omega u \quad (\text{in } C[-1, 1]),$$

$$(2) \qquad v_t(x, t) = \pi^{-1} \frac{d}{dx} \bar{P} \int_{-1}^{1} (\xi - x)^{-1} v_\xi(\xi, t)\, d\xi = \Omega^* v \quad (\text{in } L_1(-1, 1)),$$

where $\bar{P}$ denotes the Cauchy's principal value for $-1 < x < 1$ and the essential limits of such integrals for $x = \pm 1$. The author shows, by virtue of the semi-group theory, that all the admissible „lateral conditions" for the backward diffusion equation in Feller's theory (this Zbl. **47**, 93) have analogues for (1). Thus the contraction of Ω subject to the lateral condition gives the infinitesimal generator of a contraction

semi-group. For example, the resolvent equation $f - \Omega f = h$ with the boundary condition $f(1) = f(-1) = 0$ is, for $\lambda > 0$, solved by $f(x) = \int \Gamma(x, y, \lambda)\, h(y)\, dy$, where the non-negative kernel $\Gamma(x, y, \lambda)$ is symmetric and continuous in y for fixed x except when $x = y$. In this case the points ± 1 are „absorbing barriers" in Feller's terminology. The author gives also the similar integral representations of the resolvent equation subject to the „one absorbing barrier" or „one free boundary" condition. Finally, as in Feller's paper loc. cit., it is shown that the infinitesimal generator of the „adjoint semi-group" is given by a contraction of Ω^* plus an additional „boundary operator". *K. Yosida.*

Kato, Tosio: On the semi-groups generated by Kolmogoroff's differential equations. J. math. Soc. Japan **6**, 1—15 (1954).

The author discusses, by making use of the semi-group theory, the pair of differential equations

$$p'_{ij}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\, a_{kj}, \quad p'_{ij}(t) = \sum_k a_{ik}\, p_{kj}(t), \quad \lim_{t \downarrow 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij},$$

for an assigned Kolmogoroff matrix $a_{jk} \geqq 0$ $(j \neq k)$, $a_{jj} \leqq 0$, $\sum_k a_{jk} = 0$. Let the operator A be defined for those $x = \{\xi_k\} \in (l)$ for which $A x = y = \{\eta_k\}$, $\eta_k = \sum_j \xi_j a_{jk}$ belongs to (l), and let A_0 be the contraction of A to the subspace D_0 [of the domain $D(A)$] spanned by the canonical base of (l). It is shown that there exists at least one positivity-preserving semi-group of operators on (l) whose infinitesimal generator is an extension of A_0. Among these semi-groups, there is a uniquely defined minimal one, $P(t)$, which is a contraction semi-group with the infinitesimal generator G such that $A \supset G \supset A_0$. This $P(t)$ is defined by $P(t) = \lim_{r \uparrow 1} P_r(t)$, where $P_r(t) = \lim_{n \to \infty} [n\, t^{-1} R_r(n\, t^{-1})]^n$ with $R_r(\lambda) = (\lambda I + H)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} r^n B(\lambda)^n$. Here $-H$ is defined for those $x = \{\xi_k\} \in (l)$ for which $-H x = \{a_{kk}\, \xi_k\} \in (l)$, and $K x = \{\eta_k\}$, $\eta_k = \sum_{j \neq k} \xi_j a_{jk}$ for $x = \{\xi_k\}$ in the domain $D(H)$ of H. $B(\lambda)$ is defined by $B(\lambda) = K(\lambda I + H)^{-1}$. It is also proved that $P(t)$ is norm-preserving, i. e. $\sum_j p_{ij}(t) = 1$ if and only if $\lim_{n \to \infty} B(\lambda)^n x = 0$ (in (l)) for every $\lambda > 0$. *K. Yosida.*

Barrett, J. H.: Differential equations of non-integer order. Canadian J. Math. **6**, 529—541 (1954).

Zunächst werden über den Holmgren-Rießschen Operator

$$I(\alpha; a, x|f) = \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, dt$$

zur Definition der Integration der Ordnung α $(\mathrm{Re}\,\alpha > 0)$ und damit der beliebigzahligen Differentiation durch $I(\alpha) = D^n I(\alpha + n)$ [n = kleinste ganze Zahl $\geqq -\mathrm{Re}(\alpha)$] behandelt: Existenz, Stetigkeit der entstehenden Funktionen, Stetigkeit, Iterations- und Umkehrungseigenschaften des Operators. Für $\alpha > 0$ wird dann die Gleichung $I(-\alpha; a, x|y) + \lambda\, y(x) = h(x)$ mit gewissen n Anfangsbedingungen durch Anwendung des inversen Operators von $I(-\alpha)$ und die Neumannsche Reihe gelöst. Die wegen der Randbedingungen mögliche Lösung Y der homogenen Gleichung wird mit der oft behandelten Funktion $E_\alpha(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\Gamma(z\alpha + 1)}$ in Zusammenhang gebracht. *D. Morgenstern.*

Hayes, R. M.: Iterative methods of solving linear problems on Hilbert space. National Bureau of Standards; Appl. Math. Ser. Nr. **39**, 71—103 (1954).

Es werden iterative Methoden zur Lösung linearer Probleme $\mathfrak{A} x = b$ bespro-

chen. $\mathfrak{A}$ ist ein linearer Operator im Hilbert-Raum, und zwar ein „Legendrescher Operator", der sich als Summe eines positiv definiten und eines vollstetigen Operators darstellen läßt. — Im Teil I wird auf die Definition des Hilbertraumes, starke und schwache Konvergenz, die Definition und die Fundamentaleigenschaften der Operatoren in diesem Raume eingegangen. Danach folgen in Teil II die grundlegenden Konvergenzbeweise für das iterative Vorgehen. Die Beweise werden in mehreren Schritten geführt, zunächst für einen positiv definiten Operator, anschließend für den nichtsingulären Legendre-Operator, dann für den nichtnegativen Operator und schließlich für den allgemeinen Legendre-Operator. In einem weiteren Abschnitt wird auf die Konvergenzfragen bei Eigenwertproblemen — ebenfalls unter Zugrundelegung eines Legendre-Operators — eingegangen. — Teil III behandelt iterative Vorgehensweisen. Diese werden als Relaxationsmethoden bezeichnet und arbeiten nach der Vorschrift: $x_{n+1} = x_n + a_n p_n$ mit $a_n = (p_n, r_n)/(p_n, \mathfrak{A} p_n)$ und $r_n = b - \mathfrak{A} x_n$. Folgende Methoden werden unterschieden: 1. Gradientenmethode $p_i = r_i$, 2. Konjugierte Richtungsmethode $(p_i, \mathfrak{A} p_j) = 0$ für $i \neq j$, 3. Konjugierte Gradientenmethode p_i aus $p_{i+1} = r_{i+1} + b_i p_i$ mit $b_i = -(r_{i+1}, \mathfrak{A} p_i)/(p_i, \mathfrak{A} p_i)$. Von der dritten Methode wird gezeigt, daß die Bildung der p_i so vorgenommen wird, daß es sich um einen Spezialfall von 2. handelt. Der letzte Teil der Arbeit bringt Anwendungen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Integralgleichungen und partiellen Differentialgleichungen. *H. Unger.*

Gavurin, M. K.: Über die Genauigkeit der Näherungsmethoden zum Aufsuchen der Eigenwerte von Integraloperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **97,** 13—15 (1954) [Russisch].

Das in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. **56**, 112) betrachtete Störungsproblem wird in dem speziellen Fall näher untersucht, daß der Operator $A = A_0 + B$ der Hilbert-Schmidtschen Klasse angehört und A_0 von endlichem Rang ist: $A_0 f = \sum_{i=1}^{n} (f, \alpha_i)\, \beta_i$. Die in den Formeln des Verf. auftretenden Größen γ_0, $||R||$ werden mit Hilfe matrizentheoretischer Betrachtungen bestimmt bzw. abgeschätzt.

B. Sz.-Nagy.

Fichera, Gaetano: Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36,** 273—296 (1954).

Verf. leitet eine Reihe interessanter Abschätzungen der Quadratintegrale der Lösungen linearer elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen her. Diese erweisen sich als Folgerung eines bemerkenswerten Abschätzungstheorems des Funktionals: $J(u) = ||u||^2/||T(u)||^2$ einer gewissen linearen Transformation T, definiert im Hilbertraum der quadratisch integrablen Funktionenvektoren. Zu der Voraussetzung, T^{-1} existiert, tritt u. a. noch, daß $T(E(u), L(u))$ sich aus zwei linearen Transformationen $E(u)$, $L(u)$ auf einen Produktraum zusammensetzt und mit einer anderen invertierbaren Transformation $T^*(E^*(u), L^*(u))$ durch eine gewisse Bilinearrelation verknüpft wird. Diese entspricht bei der obigen Anwendung der Greenschen Formel, welche einen elliptischen Differentialoperator mit dem zugehörigen adjungierten verbindet. *H. Beckert.*

Hosszú, M.: Some functional equations related with the associative law. Publ. math., Debrecen **3,** 205—214 (1954).

Im Anschluß an T. Faragó (dies. Zbl. **56**, 21) und A. R. Schweitzer [Bull. Amer. math. Soc. **18**, 192 (1912); **19**, 66—70 (1913)] untersucht der Verf. die aus dem Assoziativitätsgesetz durch Verschiebung der Faktoren und Klammern entspringenden Multiplikationsregeln, und zwar in den §§ 1—2 rein algebraisch, indem er sie zum Teil unter Lösbarkeitsbedingungen auf das gewöhnliche Assoziativitätsgesetz bzw. auf das Bisymmetriegesetz (vgl. Ref., dies. Zbl. **30**, 27) zurückführt, in § 3 elementar analytisch, indem er die diesen Regeln genügenden stetigen und streng monotonen Operationen bestimmt. Z. B. sind die allgemeinsten stetigen und streng