Werk

Titel: Funktionalanalysis. Abstrakte Räume

Ort: Berlin

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0057|log80

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

troduction to the theory of Fourier integrals, Oxford 1948) und eine weitere Arbeit der Verff. [Rec. Inst. math. de l'Acad. Serbe **43**, 15—25 (1955)].

A. Peyerimhoff.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Fichera, Gaetano: Lezioni sulle trasformazioni lineari. I.: Introduzione all' analisi lineare. (Prima ristampa.) Trieste: Istituto Matematico-Università 1954. XIX, 502 p.

Les „Leçons sur les transformations linéaires" de l'A. comprendront trois volumes dont celui-ci est le premier. Les têtes de chapitres en sont les suivantes: I. Ensembles abstraits. Théorie des limites et espaces topologiques. II. Espaces métriques. III. Ensembles linéaires. Espaces linéaires de Fréchet. IV. Espaces de Banach. V. Espaces de Hilbert. VI. Théorie de la mesure. VII. L'intégration. VIII. La dérivation et les fonctions absolument continues. IX. Espaces fonctionnels. — Le traité est rédigé en vue des applications, qui seront surtout développées dans les deux tomes suivants (le troisième, en particulier, sera consacré aux équations différentielles), mais dont certaines apparaissent déjà à la fin des chapitres du présent tome. Dans ce premier volume, l'A. étudie cependant la plupart des questions d'un point de vue abstrait, non, remarque-t-il judicieusement, par un amour stérile de la généralité, mais précisément pour être en mesure de résoudre un plus grand nombre des problèmes posés par les applications. Cette double exigence, de mener aux applications et d'exposer les questions d'un point de vue moderne, confère à l'ouvrage une tonalité très agréable. On peut seulement regretter que le point de vue „moderne" ait été, semble-t-il, moins complètement adopté dans les premiers chapitres que dans ceux qui sont relatifs à la mesure et à l'intégration. Puisque le premier chapitre traite des espaces topologiques généraux, pourquoi ne pas utiliser le mot „compact" dans le sens moderne à peu près universellement adopté à l'heure actuelle, et en garder une définition qui n'a d'utilité, que dans les espaces métriques (où elle n'est alors que celle des espaces relativement compacts) ? Y a-t-il lieu d'accorder encore beaucoup de soin à la distinction de ce qui peut être démontré sans l'axiome de Zermelo et de ce qui en est conséquence ? N'est-ce pas une complication artificielle ? L'axiome de Zermelo a précisément „fait ses preuves" dans la théorie des espaces vectoriels topologiques. Sans lui, pas de théorème de Hahn-Banach et la théorie est irrémédiablement mutilée. L'A. utilise sous le nom de „groupe d'ensembles" la notion de base de filtre et pense fournir ainsi un exposé plus simple que celui de Bourbaki de la notion de limite. L'économie ainsi realisée de la notion de filtre est-elle payante quant à la compréhension de la notion de limite ? Ne vaudrait-il pas, mieux d'autre part, laisser au terme de „groupe" son seul sens algébrique ? Ces quelques critiques, que le rapp. se permet de formuler, demeurent évidemment assez minimes au regard des qualités de rigueur et de précision si largement répandues dans ce volume de plus de cinq cents pages, dont la richesse offrira à l'étudiant une base extrêmement solide pour aborder la question, fondamentale dans l'Analyse moderne, des transformations linéaires. *A. Revuz.*

Kolmogorov, A. N. und S. V. Fomin: Elemente der Theorie der Funktionen und der Funktionalanalysis. Bd. I: Metrische und normierte Räume (Vorlesungen). Moskau: Verlag der Universität zu Moskau 1954. 154 S. R. 5,— [Russisch].

This admirable book presents within its brief compass most of the elements of the theory of metric spaces and normed linear spaces. It combines courses given by the authors for students of mathematics and of physics. While rigor is maintained at a high level, the needs of mathematical physicists have evidently been kept in view. The present volume is elementary in the sense that Lebesgue measure is neither assumed nor discussed. Later fascicules are promised, in which Lebesgue integration, Hilbert space, integral equations with symmetric kernel, and applications

to computational mathematics will be dealt with. The scope of the present fascicule is indicated by the following summary. Ch. I. Elements of the theory of sets. Intuitive set theory and operations on sets; cardinal numbers; functions. Ch. II. Metric spaces. Elementary definitions and examples; topology associated with a metric; completeness and completion; compactness; Arzela's theorem; continuous curves. The elementary theorem is proved that if a mapping A of a complete metric space into itself has the property that $\varrho(A\,x, A\,y) \leq \alpha\,\varrho(x, y)$ for all x, y and some α, $0 < \alpha < 1$, then A has a unique fixed point. This theorem is applied to a number of existence theorems in differential and integral equations. The discussion of continuous curves also contains much non-standard material. Ch. III. Normed linear spaces. Elementary definitions and examples; convex sets; linear functionals; conjugate spaces; the Hahn-Banach theorem (proved only for real separable normed linear spaces); weak sequential convergence of elements and linear functionals; linear operators. The discussion of adjoint operators is particularly clear. An appendix gives a brief discussion of the „generalized functions" of Sobolev (i.e., Schwartz's distributions), with emphasis on their applications in physics. Ch. IV. Equations in linear operators. Spectra and resolvents for continuous linear operators in a complex Banach space; completely continuous operators; Fredholm's theorems.

E. Hewitt.

Pinsker, A. G.: Verbände, die mit K-Räumen äquivalent sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 503—505 (1954) [Russisch].

L'A. énonce, seulement en termes de la théorie des lattices, les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une lattice soit isomorphe à un espace de Kantorovitch avec un élément unité. Essentielle est l'existence de l'élément 0, des éléments positifs et de leurs symétriques et d'une famille $\{1_\lambda\}$ isomorphe à la droite réelle.

G. Marinescu.

Pinsker, A. G.: Über Bedingungen für die Äquivalenz eines Banachschen Raumes mit einem L-Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 677—679 (1954) [Russisch].

Soit E un espace L de Kakutani. L'A. observe que les composantes X de E, definies par l'ordre, sont caractérisées par la propriété suivante: il existe $X' \subset E$ tel que $E = X' \oplus X$ et $||x + x'|| = ||x|| + ||x'||$ pour $x \in X$, $x' \in X'$. En conservant cette définition pour un espace de Banach E, on démontre qu'il devient un espace L si et seulement si les conditions suivantes sont remplies. 1. Si X et Y sont deux composantes, $X + Y$ et $X \cap Y$ sont composantes et l'on a $X \cap (Y + Z) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$. 2. Tout élément $x \in E$ est une unité pour la composante minimale qui le contient (l'unité étant définie seulement à l'aide de composantes).

G. Marinescu.

Hukuhara, Masuo: Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I **7**, 129—192 (1954).

Il s'agit en partie d'un article d'exposition, car de nombreux résultats, très connus, d'algèbre linéaire sont démontrés avec beaucoup de détails (moyennant l'hypothèse, en général inutile, de la commutativité du corps de base $\mathfrak{K}$). Soient $\mathfrak{R}$ un espace vectoriel sur $\mathfrak{K}$, L un endomorphisme de $\mathfrak{R}$, $N_n = L^n(\mathfrak{R})$, $N^n = L^{-n}(0)$, μ (resp. ν) le plus petit entier tel que $N^\mu = N^{\mu+1}$ (resp. $N_\nu = N_{\nu+1}$) (éventuellement, $\mu = +\infty$, ou $\nu = +\infty$). Si $\mu < +\infty$ et $\nu < +\infty$, on a $\mu = \nu$, et c'est ce cas qu'étudie principalement l'A. Il existe alors des sous-espaces (non uniques) N_k^j ($j \geq 1$, $k \geq 0$, $j + k \leq \nu$), dont la somme est directe et vaut N^ν, tels que $N^j = \sum_{p \leq j} N_q^p$, $N_k = N_\nu + \sum_{q \geq k} N_q^p$, avec en outre $L(N_k^j) = N_{k+1}^{j-1}$ ($j > 1$, $k \geq 1$, $j + k \leq \nu$). Soit $\mathfrak{R}^*$ un espace en dualité avec $\mathfrak{R}$, et L^* le transposé de L, supposé exister. L'A. donne les relations qu'on peut établir entre les N_k^j et les sous-espaces analogues relatifs à L^*. Soit $\boldsymbol{L}$ un autre endomorphisme de $\mathfrak{R}$, $\boldsymbol{N}^n$ et $\boldsymbol{N}_n$ les sous-

espaces correspondants. L'A. dit que L est supplémentaire de L si $LL = 1$ dans N_1 et $LL = 1$ dans N_1, $L(N^n) \subset N^{n+1}$, $L(N^n) \subset N^{n+1}$, $L(N_n) \subset N_{n-1}$, $L(N_n) \subset N_{n-1}$. L possède au moins un supplémentaire; l'adjoint du supplémentaire est supplémentaire de l'adjoint. Généralisation au cas où μ ou ν est infini; de nouvelles notions sont alors introduites. *J. Dixmier.*

Shirota, Taira: On locally convex vector spaces of continuous functions. Proc. Japan Acad. **30**, 294—298 (1954).

L'A. démontre essentiellement (et indépendamment) les mêmes résultats que L. Nachbin (ce Zbl. **55**, 98). Soit E un espace complètement régulier, $C(E)$ l'espace des fonctions continues numériques définies dans E, qui est localement convexe quand on le munit de la topologie de la convergence compacte. Alors: I. Pour que $C(E)$ soit tonnelé, il faut et il suffit que pour toute partie fermée et non compacte X de E, il existe une fonction $f \in C(E)$ non bornée dans X. II. Pour que $C(E)$ soit bornologique [ou „clos" („boundedly closed") au sens de Mackey] il faut et il suffit que E soit un Q-espace de Hewitt, c'est-à-dire qu'il soit complet pour la structure uniforme la moins fine rendant uniformément continues les fonctions de $C(E)$. L'A. donne un exemple (distinct de celui de Gillman-Henriksen donné par Nachbin) d'espace vérifiant la condition de I et qui n'est pas un Q-espace. Il montre enfin que si E est localement compact, la condition de I est nécessaire et suffisante pour que le sous-espace $K(E)$ des fonctions continues à support compact (avec la topologie induite par $C(E)$) soit bornologique, ou quasi-tonnelé. *J. Dieudonné.*

Christescu, Romulus: Sur une notion de convergence. Acad. Republ. popul. Romîne, Bul. ştti., Secţ. Şti. mat. fiz. **6**, 297—303, russ. Zusammenfassg. 303—304 u. franz. Zusammenfassg. 304 (1954) [Rumänisch].

L'A. définit les espaces VP par une famille dirigée de semi-normes des complexes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (voir B. Vulich, ce Zbl. **16**, 63; I. Maddaus, ce Zbl. **26**, 130) et observe que dans l'espace M des fonctions mesurables et bornées presque partout, les suites VP-convergentes sont les suites convergentes et également bornées presque partout. *G. Marinescu.*

Raman, P. K.: On a class of linear spaces in function theory. J. Indian math. Soc., n. Ser. **18**, 127—130 (1954).

Let π_r denote the class of power series with radius of convergence $\geq r$ and ϱ_r the class of power series with radius of convergence $> r$. If $x = \Sigma x_n z^{n-1} \in \pi_r$ and $u = \Sigma u_n z^{n-1} \in \varrho_{1/r}$, then $u\,x = \Sigma u_n x_n$ defines a bilinear functional on $\pi_r \times \varrho_{1/r}$. This bilinear functional induces a locally convex topology on π_r. For $x = \Sigma x_n z^{n-1}$, let $(x)_p = \Sigma x_n^p z^{n-1}$. The author proves that in the locally convex topology on π_r described above, the closed linear subspace generated by $(x)_p$, $p = 1, 2, \ldots$, will be π_r provided $r > 1$, the x_n's are different and no x_n is zero and conversely. This completes and extends a result of the reviewer for the space of integral functions (this Zbl. **55**, 99). The author also shows that the conditions are necessary for $r = 1$ but gives an example to show that they are not sufficient in this case.
V. Ganapathy Iyer.

Tandori, K.: Über einen speziellen Banachschen Raum. Publ. math., Debrecen **3**, 263—268 (1954).

L_0 denotes the Banach space of all $f \in L$ on $\langle 0, 1\rangle$ satisfying $f(0) = 0$ and $\int_0^h |f(t)|\,dt = o(h)$ as $h \to 0$; the norm is $\|f\| = \sup_{0<h\leq 1} \frac{1}{h} \int_0^h |f(t)|\,dt$. It is proved that every bounded linear functional on L_0 is of the form $\Phi(f) = \int_0^1 f(t)\,\varphi(t)\,dt$ where φ is measurable and satisfies $\int_0^1 \psi(t)\,dt < \infty$ with $\psi(t) = \sup_{t\leq y\leq 1} |\varphi(y)|$. Also

$||\Phi|| = \int_0^1 \psi(t)\, dt$. (Compare, for the corresponding space L_0^p, $p > 1$, Korenbljum, Krejn und Levin, this Zbl. **31**, 168.) *W. W. Rogosinski.*

Lorch, Edgar R.: L'integrazione e gli ideali massimi. Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **13**, 33—38 (1954).

L'A. rileva alcune applicazioni di un teorema enunciato in altra conferenza [non ancora uscita: L'integrazione e i funzionali lineari, Rend. Sem. mat. fis. Milano **25** (1954)]. Si considera un anello complesso commutativo che contiene tutte le funzioni costanti, rilevando che gli ideali massimi danno luogo a funzionali lineari F, e si studia il comportamento di F rispetto alla trasformazione P definita nel lavoro citato. *S. Cinquini.*

Ishihara, Tadashige: On multiple distributions. Osaka math. J. **6**, 187—205 (1954).

Es wird der Zusammenhang von „parametric distributions" (das sind im einfachsten Falle von einem reellen Parameter t abhängige Scharen von n-dimensionalen Distributionen $U_t \in D'_{R^n}$) und „proper distributions" [in diesem Falle $(n+1)$-dimensionalen Distributionen $U \in D'_{R^{n+1}}$] untersucht; hierauf, im Hinblick auf die Untersuchungen von L. Schwartz (dies. Zbl. **42**, 331) über Evolutionsgleichungen, der Zusammenhang von „parametric differential equations" (das sind diese Evolutionsgleichungen) und den zugehörigen „proper differential equations". *H. König.*

Tsurumi, Shigeru: On ergodic theorems. Proc. Japan Acad. **30**, 331—334 (1954).

The present note is a summary of the author's paper reviewed in this Zbl. **56**, 277. *Chr. Pauc.*

Tsurumi, Shigeru: On general ergodic theorems. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 264—273 (1954).

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ = measure space, μ is σ-finite. m, n: positive integers. $\mathcal{N} = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$: any finite sequence of positive integers with $n_1 < n_2 < \cdots < n_m$. $(n_1, n_2, \ldots)$: any infinite sequence of positive integers with $n_1 < n_2 < \cdots$. Two sequences of measurable functions $\{f_j(x)\}$ and $\{g_j(x)\}$, $j = 1, 2, \ldots$ have the „combined homogeneity property" (shortly c. h. p.) if, for any $\mathcal{N}$ and any Borel set A in $2m$-dimensional euclidean space S_{2m}, $\mu(E(\mathcal{N}, h, A))$ where $E(\mathcal{N}, h, A) = \{x;\ (f_{n_1+h}(x), g_{n_1+h}(x), \ldots, f_{n_m+h}(x), g_{n_m+h}(x) \in A\}$, is independent of h. The paper contains the following extension of ergodic theorems of J. L. Doob, E. Hopf and A. Khintchine: Theorem 1. Assumptions: $\{f_j(x)\}$ and $\{g_j(x)\}$ are two sequences of measurable functions with c. h. p. $f_1(x)$ is μ-summable. $g_1(x)$ is > 0. $\sum \min\{g_j(x), k\} = +\infty$ μ-almost everywhere on X for some $k > 0$. $p(j)$ and $q(j)$ are two periodic functions of j. $q(j)$ is > 0, for all j. Assertion:

$$\lim \left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x)\, p(j) \right) \Big/ \left(\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\, q(j) \right)$$

exists and is finite for μ-almost every $x \in X$. Sketch of the proof of Th. 1. Ω: space of the infinite sequences $\omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ of real numbers. $F_{2j-1}(x) = f_j(x)\, p(j)$, $F_{2j}(x) = g_j(x)\, q(j)$. $\varphi x = (F_1(x), F_2(x), \ldots)$. An auxiliary measure α is defined on the cylindric Borel sets A^0 of Ω by $\alpha(A^0) = \mu(\varphi^{-1} A^0)$, then by a sophisticated procedure a measure γ on all Borel sets A. t: least common multiple of the periods of $p(j)$ and $q(j)$. S is the shift transformation of Ω into itself defined by $(\xi_1, \xi_2, \ldots) \to (\xi_{2t+1}, \xi_{2t+2}, \ldots)$. On account of the c. h. p. of $\{f_j(x)\}$ and $\{g_j(x)\}$, $\alpha(S^{-1} A^0) = \alpha(A^0)$, $\gamma(S^{-1} A) = \gamma(A)$. $\tilde{\Omega}$: set of the points $\omega = (\xi_1, \xi_2, \ldots)$ such that corresponding to any j there exists an odd integer $2m - 1 > j$ for which $\xi_{2m-1} \neq 0$. Thus $S^{-1}(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}$. An ergodic theorem of E. Hopf slightly generalized yields the

existence and finiteness γ-almost everywhere of $\lim\left(\sum_{j=1}^{nt}\xi_{2j-1}(\omega)\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{nt}\xi_{2j}(\omega)\right)$ for $\omega\in\Omega$; this limit clearly exists and vanishes for $\omega\in\Omega-\tilde{\Omega}$. Transferring back to space X yields the existence and finiteness of $\lim\left(\sum_{j=1}^{nt}f_j(x)\,p(j)\right)\Big/\left(\sum_{j=1}^{nt}g_j(x)\,q(j)\right)$ μ-almost everywhere on X. In deducing Th. 1 the assumption $\sum\min\{g_j(x),k\}=\infty$ μ-almost everywhere on X is used (not only, as it was before, $\sum g_j(x)=\infty$ μ-a. e.) [Remark by the reviewer. It seems to the reviewer that $\gamma(\Lambda)=\mu(\varphi^{-1}\Lambda)$ for all Borel sets Λ of Ω]. Finally Th. 1. is generalized, replacing the c. h. p. by the following „weak combined homogeneity property": for any $\mathcal{H}$, any Borel set A of S_{2m} and any positive integer k, there exists a constant K such that

$$\limsup\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n-1}\mu(E(\mathcal{H},h\,k,A))\leq K\cdot\mu(E(\mathcal{H},0,A)).$$

(this Zbl. 56, 277). *Chr. Pauc.*

Tsurumi, Shigeru: Note on an ergodic theorem. Proc. Japan Acad. **30**, 419—423 (1954).

$(X,\mathcal{B},m)$: measure space, m is σ-finite. T: single-valued transformation of X onto itself such that for $B\in\mathcal{B}$, both $T(B)$ and $T^{-1}(B)$ belong to $\mathcal{B}$. T is „non-singular" if $E\in\mathcal{B}$ and $m(E)=0$ imply $m(TE)=m(T^{-1}E)=0$, „incompressible" if $E\in\mathcal{B}$ and $T^{-1}E\supset E$ imply $m(T^{-1}E-E)=0$. If T is non-singular, $w_1=w$ denotes any $\mathcal{B}$-measurable function for which $m(E)=\int_{T^{-1}E}w(x)\,dm$ for every $E\in\mathcal{B}$. $w_n(x)=w(x)\ldots w(T^{n-1}x)$ for $n=2,3,\ldots$. Example 1 of the note provides a negative answer to a question raised by Y. N. Dowker (this Zbl. **35**, 360) concerning the divergence a. e. of the series $\sum_{i=0}^{\infty}g(T^ix)\,w_i(x)$ for any non-singular and incompressible (not necessarily 1-1) transformation T and any measurable, a. e. positive, $\mathcal{B}$-measurable function g. Example 1. X is a subset of the (s,t)-plane. $J_{1,k}=\{(s,k):0\leq s<1/2^{2k+1}\}$, $J_{2,k}=\{(s,k):1/2^{2k+1}\leq s<1/2^{2k}\}$, $J_k=J_{1,k}\cup J_{2,k}$, $X=\bigcup J_k$ for $k=0,1,2,\ldots$. m: linear Lebesgue measure. $T(s,t)=(2^{2k+1}s,0)$ if $(s,t)\in J_{1,k}$, $=(\frac{1}{2}(s-1/2^{2k+1}),k+1)$ if $(s,t)\in J_{2,k}$. Assertion: The series $\sum_0^{\infty}w_n((s,t))$ converges a. e. Hints to the proof: $\mu(E)=\sum 2^k m(E\cap J_k)$ is a T-invariant to m equivalent measure, therefore T is incompressible. $w((s,t))=3/2$ if $(s,t)\in\bigcup J_{1,k}$, $=1/2$ if $(s,t)\in\bigcup J_{2,k}$. For any s between 0 and 1, whose binary extension has the same density 1/2 of zeros and ones, $w_n((s,0))=O((3/4)^n)$. For any point (s,t) of X, there exists a positive integer $p=p(s,t)$ such that $T^n(s,t)\in J_0$ for $n>p$. Example 2. Similar to Ex. 1 but k takes all integral values. The measure is σ-finite but not finite. $\sum_0^{\infty}w_n((s,t))$ is ≤ 5 a. e.

Chr. Pauc.

Gladysz, S.: A random ergodic theorem. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 411—413 (1954).

$(S,\mathcal{B},m)$, $m(S)=1$, $(X,\mathcal{L},\mu)$, $\mu(X)=1$, : measure spaces. T: an $\mathcal{L}$-measurable and μ-preserving transformation of X into itself. $\Phi=\{\varphi_x\,|\,x\in X\}$: a $(\mathcal{B}\times\mathcal{L})$-measurable family of $\mathcal{B}$-measurable and μ-preserving transformations of S into S. Theorem I: If $f(s,x)\in L(S\times X)$ then for $(m\times\mu)$-almost all (s,x)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}f(\varphi_{T^{k-1}x}\cdot\ldots\cdot\varphi_{Tx}\,\varphi_x\,s,T^kx)=F(s,x)\in L(S\times X).$$

Th. II is deduced from Th. I choosing as $(S,\mathcal{B},m)$ the unit circumference C: $|z|=1$, while $f(s,x)$ is of the form $s\,f(x)$ and $\varphi_x(s)=s\,q(x)$ where $q(x)\in C$. Th. III generalizes a „random" ergodic theorem of Kakutani (this Zbl. **44**, 339).

$\{X_r^*, \mathcal{C}_r^*, \mu_r^*)$ and $(X^*, \mathcal{C}^*, \mu^*)$ denoting the rth and the $\aleph^0$th power of $(X, \mathcal{C}, \mu)$ respectively, $\Phi_r = \{\varphi_{x_r^*} | x_r^* \in X_r^*\}$ is a $(\mathcal{B} \times \mathcal{C}_r^*)$-measurable family of $\mathcal{B}$-measurable m-preserving transformations of Σ into itself. T is the shifting operator $(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_r, \ldots) \to (x_2, x_3, \ldots, x_{r+1}, \ldots)$, Th. III like Th. II involves a $(\mathcal{B} \times \mathcal{C}_r^*)$-measurable complex-valued multiplicator $q(s; x_r^*)$ of norm $= 1$. In the course of iteration the successive r-slices $x_{k+1}, \ldots, x_{k+r}$ take the place of x_r^*. Th. IV and V express conditions of indecomposability and mixing property for Φ_r. No proofs are given. *Chr. Pauc.*

Sakai, Shôichiro: On the representations of semi-simple Lie groups. Proc. Japan Acad. **30**, 14—18 (1954).

Soit G un groupe de Lie réel connexe semi-simple, avec $G = K\,S$ $(K \cap S = e)$, où K est un sous-groupe compact maximal et N un sous-groupe quasi-nilpotent. Soit $U(G)$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie complexifiée de G. L'A. étudie notamment les rapports entre les représentations de $U(G)$, de G, et leurs fonctions sphériques, en relation étroite avec les mémoires de Harish-Chandra (ce Zbl. **51**, 340) et Godement (ce Zbl. **49**, 201). Les démonstrations ne sont pas données, mais l'A. introduit apparemment plusieurs idées nouvelles. Notons seulement ceci: $U(G)$ est considérée comme une *-algèbre topologique [l'involution sur $U(G)$ est classique; la topologie est obtenue en mettant $U(G)$ en dualité avec l'espace des fonctions analytiques sur G]; une forme linéaire continue φ sur $U(G)$ est appelée un état si $\varphi(\alpha^*\alpha) \geq 0$ pour $\alpha \in U(G)$; un tel état définit un idéal à gauche $\mathfrak{M}_\varphi$ de $U(G)$ et une représentation ϱ_φ de $U(G)$ dans $U(G)/\mathfrak{M}_\varphi$; si $U(G)/\mathfrak{M}_\varphi = \sum_{d \in P} (U(G)/\mathfrak{M}_\varphi)_d$ et $\dim (U(G)/\mathfrak{M}_\varphi)_d < +\infty$ pour $d \in P$ (P est l'ensemble des classes de représentations irréductibles de K), alors ϱ_φ est la représentation de $U(G)$ correspondant à la représentation unitaire de G définie par φ, qui s'identifie à une fonction analytique de type positif sur G. *J. Dixmier.*

Sakai, Shôichiro: On infinite-dimensional representations of semi-simple Lie algebras and some functionals on the universal enveloping algebras. I. Proc. Japan Acad. **30**, 305—312 (1954).

Soient $\mathfrak{G}_0$ une algèbre de Lie réelle semi-simple, $\mathfrak{k}_0$ une sous-algèbre telle que le sous-groupe correspondant du groupe adjoint de $\mathfrak{G}_0$ soit compact, $\mathfrak{G}$ la complexifiée de $\mathfrak{G}_0$, $U(\mathfrak{G})$ son algèbre enveloppante, $U^0(\mathfrak{G})$ le commutant de $\mathfrak{k}_0$ dans $U(\mathfrak{G})$, π une représentation de $\mathfrak{G}$ dans l'espace vectoriel complexe V telle que $V = \sum_{d \in \Omega} V(d)$ et $\dim V(d) < +\infty$ pour toute $d \in \Omega$ (Ω: ensemble des classes de représentations irréductibles de $\mathfrak{k}_0$). L'A. donne divers résultats liés aux mémoires de Harish-Chandra et Godement (cf. la revue précédente). Par exemple [on pose $\varphi_d^\pi(\alpha) =$ trace $(E(d)\,\pi(\alpha)\,E(d))$ pour $\alpha \in U(\mathfrak{G})$, où $E(d)$ est le projecteur correspondant à $V(d)$]: supposons $\dim d_1 = 1$; pour que $\varphi_{d_1}^\pi(\alpha^*\alpha) \geq 0$ pour $\alpha \in U(\mathfrak{G})$, il suffit que $\varphi_{d_1}^\pi(\alpha^*\alpha) \geq 0$ pour $\alpha \in U^0(\mathfrak{G})$; s'il en est ainsi, et si $\varphi_{d_1}^\pi \neq 0$, on a $\varphi_d^\pi(\alpha^*\alpha) \geq 0$ pour $\alpha \in U(\mathfrak{G})$ quelle que soit $d \in \Omega$. *J. Dixmier.*

Matsushita, Shin-ichi: Sur le théorème de Plancherel. Proc. Japan Acad. **30**, 557—561 (1954).

Soient G un groupe localement compact, $L(G)$ l'espace des fonctions continues à support compact sur G. L'A. obtient par les méthodes habituelles un résultat analogue au théorème de Plancherel; l'espace „dual" de G est l'adhérence faible de l'ensemble des fonctions élémentaires de type positif (diminué de 0); la valeur en $\varphi \in V$ de la „transformée de Fourier" de $f \in L(G)$ est la classe de f dans l'espace préhilbertien déduit de $L(G)$, quand on munit $L(G)$ du produit scalaire classique défini par φ. L'A. donne aussi une généralisation de la formule d'inversion de Fourier. *J. Dixmier.*

Charles, B.: Sur l'algèbre des opérateurs linéaires. J. Math. pur. appl., IX. Sér. **33**, 81—145 (1954).

In dieser Arbeit studiert der Verf. die linearen Operatoren nach dem Vorbild der Krullschen Theorie der verallgemeinerten abelschen Gruppen, d. h. der Vektorräume mit einem Operator. Es sei $E = E_R$ ein Vektorraum (eine Gruppe) über einem Hauptidealring R mit Eins und ohne Nullteiler derart, daß entweder (1) E eine Torsionsgruppe ist, d. h. jedes Element u aus E durch einen Operator $A \neq 0$ aus R in 0 übergeführt wird: $A\,u = 0$, oder (2) E eine verallgemeinerte zyklische Gruppe ist, d. h. jede durch endlich viele Elemente erzeugte Untergruppe zyklisch ist. (1) ist eine Verallgemeinerung des Operators endlicher Dimension. (2) ist eine Verallgemeinerung des Operators endlicher Dimension, dessen Minimalpolynom mit dem charakteristischen übereinstimmt. Ein solcher Operator heißt „non dérogatoir". Gibt es für jedes Element u aus E ein primes A mit $A\,u = 0$, so heißt E primär. Eine Torsionsgruppe E läßt sich als die direkte Summe von primären Gruppen darstellen. Das Zentrum R'' des Endomorphismenringes R' von E stimmt mit der abgeschlossenen Hülle von R nach einer endlichen Topologie überein. Eine verallgemeinerte zyklische Gruppe ist entweder eine Torsionsgruppe oder eine Gruppe ohne Torsion. E ist dann und nur dann eine verallgemeinerte zyklische Gruppe, wenn der Verband der Untergruppen distributiv ist. Ferner sind die folgenden drei Aussagen für einen Torsionsoperator A äquivalent: A ist non dérogatoir. Die Gesamtheit der mit A vertauschbaren Operatoren bildet die abgeschlossene Hülle des durch A und I erzeugten Ringes $r(A, I)$. Der Verband der A-Untergruppen ist distributiv. — Die Theorie der Operatoren des Vektorraumes endlicher Dimension wird nach der analogen Überlegung direkt einfach entwickelt. Es sei nun E ein Vektorraum über einem kommutativen Körper K. Ein Operatorring R, der durch einen vollständigen Verband von miteinander vertauschbaren Projektionen erzeugt wird, ist stets vollständig reduzibel und R'' stimmt mit der abgeschlossenen Hülle von $r(R, I)$ überein. Dabei versteht man unter R' die Gesamtheit der mit R elementweise vertauschbaren Operatoren und $R'' = (R')'$. Im Fall der endlichen Dimension, etwa n, läßt sich ein kommutativer Operatorring in die direkte Summe von primären Ringen zerlegen unter Benützung der minimalen Projektionen. Ist K perfekt, so reduziert sich die Struktur des primären Ringes auf die des nilpotenten Ringes. Dadurch kann man 29 maximale nilpotente Ringe $n \leq 5$ bestimmen. Der Verf. betrachtet auch das Problem von Frobenius, zwei vertauschbare Matrizen als Polynom einer einzigen Matrix darzustellen, und gibt eine notwendige Bedingung dafür an im Fall, daß K algebraisch abgeschlossen und von der Charakteristik 0 ist. *K. Shoda.*

Misonou, Yosinao: On the direct product of W^*-algebras. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 189—204 (1954).

Soient M_1 et M_2 deux W^*-algèbres dans des espaces hilbertiens H_1, H_2. Dans l'espace hilbertien $H_1 \otimes H_2$, on forme le produit tensoriel algébrique de M_1 et M_2; son adhérence faible est notée $M_1 \otimes M_2$. Théorème 1: le type algébrique de $M_1 \otimes M_2$ ne dépend que du type algébrique de M_1 et du type algébrique de M_2. Théorème 3: si M_1 et M_2 sont semi-finies, $M_1 \otimes M_2 = (M_1 \otimes M_2)'$. (Problème: ceci est-il vrai sans hypothèse sur M_1 et M_2?) Théorème 4: si M_1 et M_2 sont finies, $M_1 \otimes M_2$ est finie. (Les théorèmes 3 et 4 sont prouvés par usage des algèbres hilbertiennes; dans la démonstration du théorème 4, il faudrait, semble-t-il, préciser que les algèbres hilbertiennes considérées ont un élément unité.) Théorème 5: si M_1 et M_2 sont de type I, $M_1 \otimes M_2$ est de type I; si M_1 est de type II et M_2 semi-finie, $M_1 \otimes M_2$ est de type II. Etude de l'application $\natural$ de $M_1 \otimes M_2$ quand M_1 et M_2 sont finies. Cas où M_1 et M_2 sont des facteurs approximativement finis. *J. Dixmier.*

Takeda, Zirô: On the representations of operator algebras. II. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 212—219 (1954).

Suite d'un article antérieur (ce Zbl. **57**, 98). Soient A une B^*-algèbre, ϱ_1 et ϱ_2 des $*$-représentations fidèles de A dans des espaces hilbertiens, M_1 et M_2 les adhérences faibles de $\varrho_1(A)$ et $\varrho_2(A)$. L'A. donne notamment des conditions, faisant

intervenir les „états distingués" de A relativement à ϱ_1 et ϱ_2, pour que M_1 et M_2 soient algébriquement isomorphes. Application: si A_1 et B_1 (resp. A_2 et B_2) sont des anneaux d'opérateurs algébriquement isomorphes, les anneaux d'opérateurs $A_1 \otimes A_2$ et $B_1 \otimes B_2$ sont algébriquement isomorphes [Misonou, Proc. Japan. Acad. **30**, 189—204 (1954)]. Si un facteur F est isomorphe, comme espace de Banach, au bidual d'une B^*-algèbre, F est de type I. *J. Dixmier.*

Ogasawara, Tôzirô and Kyôichi Yoshinaga: A characterization of dual B^*-algebras. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **18**, 179—182 (1954).

Soit A une *-algèbre de Banach avec $||x||^2 \leqq k||x^* x||$ pour tout x. Pour que A soit dual au sens de Kaplansky, il faut et il suffit que tout élément hermitien de A ait un spectre sans point d'accumulation (compte tenu de la multiplicité) autre que 0. L'A. étudie aussi les A^*-algèbres (Rickart, ce Zbl. **37**, 200) satisfaisant à cette condition. *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru: On extension of pure states of an Abelian operator algebra. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 253—257 (1954).

Soient A une C^*-algèbre abélienne dans un espace hilbertien H, π un état pur de A. Les AA. disent que π est du type onde (of wave type) si $\pi(x) = \langle x\varphi, \varphi\rangle$ pour un $\varphi \in H$, et que π est du type idéal si π se prolonge en un état pur de $L(H)$ (algèbre de tous les opérateurs de H) nul sur les opérateurs complètement continus de H. Exemple de résultat: si π est du type idéal et si x est un élément hermitien de A, $\pi(x)$ appartient au spectre condensé de x. § 3: Correction à une démonstration antérieure d'un théorème de Rosenberg (ce Zbl. **52**, 343). § 4: Généralisation d'un théorème d'Ogasawara (ce Zbl. **56**, 109) sur la caractérisation des opérateurs complètement continus dans l'algèbre des opérateurs d'un espace hilbertien. *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro: On the direct product of finite factors. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 205—207 (1954).

Soient A un facteur fini, B et C deux facteurs contenus dans A, permutables, et engendrant la W^*-algèbre A. Alors, la W^*-algèbre A est algébriquement isomorphe à la W^*-algèbre $B \otimes C$. (L'A. explicite un isomorphisme spatial de A sur $B' \otimes C'$, où B' et C' sont algébriquement isomorphes à B et C.) *J. Dixmier.*

Turumaru, Takasi: On the direct-product of operator algebras. III. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 208—211 (1954).

(Voir part I, II; ce Zbl. **49**, 87, **51**, 343). Soient A_1, A_2 des W^*-algèbres, $A_1 \otimes A_2$ la W^*-algèbre produit tensoriel de A_1, A_2; A_{1*}, A_{2*} les espaces de formes linéaires ultrafaiblement continues sur A_1, A_2. Détermination de $(A_1 \otimes A_2)_*$ à partir de A_{1*} et A_{2*}. En corollaire, on retrouve le fait que le type algébrique de $A_1 \otimes A_2$ ne dépend que de ceux de A_1, A_2 [grâce à la détermination, due à Kadison (ce Zbl. **45**, 62), des isométries entre W^*-algèbres]. *J. Dixmier.*

Nakamura, Masahiro and Takasi Turumaru: Completely continuous operators with property F. Tôhoku math. J., II. Ser. **6**, 174—176 (1954).

Es seien a, b vollstetige Operatoren auf einem Hilbertraum. Die Verff. zeigen: Eine Numerierung α_i, β_i der Eigenwerte von a, b derart, daß die Eigenwerte jedes Polynoms $p(a, b)$ durch $p(\alpha_i, \beta_i)$ gegeben werden, existiert genau dann, wenn der Kommutator $a\,b - b\,a$ dem Radikal der von a, b erzeugten Banach-Algebra angehört. Ist sowohl a wie b hermitesch, so ist die Bedingung gleichwertig mit der Vertauschbarkeit von a und b. *H. Wielandt.*

Jamison, S. L.: On analytic normal operators. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 288—290 (1954).

Relying upon a result due to Fuglede (this Zbl. **35**, 358) concerning the commutativity associated with normal operators, the following result is proved: If $N(z) = N_0 + z\,N_1 + z^2 N_2 + \cdots$ converges for $|z| < \varrho$, then $N(z)$ is normal for $|z| < \varrho$ if and only if $N_0, N_1, \ldots$ form an abelian system of normal operators. *K. Yosida.*

Jamison, S. L.: Perturbation of normal operators. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 103—110 (1954).

The regular perturbation theory due to F. Rellich (this Zbl. **16**, 62) and Bela v. Sz.-Nagy [Commentarii math. Helvet. **19**, 347—366 (1946)] is extended to the case of normal operators by making use of a relationship between a normal operator and a pair of self-adjoint operators. The possibility of such extension was conjectured and later proved by F. Wolf (this Zbl. **46**, 124) in another way.

K. Yosida.

Lax, Peter D.: Symmetrizable linear transformations. Commun. pure appl. Math. **7**, 633—647 (1954).

Es sei möglich, in einem komplexen Banachraum B ein bilineares (hermitesch) symmetrisches positiv definites und stetiges inneres Produkt (x, y) einzuführen. H sei der so entstehende Hilbertraum, $|x|$ die Norm in B, $||x||$ die Norm in H. Es gibt ein k, so daß (1) $||x|| \leqq k|x|$. Sei weiter T eine in B beschränkte lineare Transformation, welche symmetrisch ist $((x, T\,y) = (T\,x, y))$. Dann wird gezeigt: 1. T ist auch bezüglich H beschränkt. 2. Das Spektrum von T über H ist im Spektrum von T über B enthalten. 3. Gehört λ zum Punktspektrum von B (also auch von H), so ist die Lösungsmannigfaltigkeit von $T - \lambda I = 0$ für B und H die gleiche. Die letztere Behauptung gilt bei gewissen Abänderungen der Bedingungen auch noch, wenn H durch einen Banachraum B ersetzt wird. Als Folgerung ergibt sich, daß, wenn alle $\lambda \neq 0$ dem Punktspektrum angehören, die Eigenelemente von T auch in H den Bereich von T aufspannen, und daß Vollstetigkeit in B Vollstetigkeit in H nach sich zieht. Dies ist z. B. von Nutzen beim Beweis der Vollstetigkeit, insofern sich der Beweis unter Umständen zunächst für eine andere Norm leichter erbringen läßt. Diese Sätze enthalten als Spezialfall einige Resultate über symmetrisierbare Operatoren (wenn B selbst ein Hilbertraum ist). Weiterhin läßt sich mittels dieser Sätze z. B. beweisen, daß bei elliptischen linearen Operatoren, falls der Koeffizient von u nicht positiv ist, die Eigenfunktionen der ersten Randwertaufgabe ($u = 0$ auf dem Rande) die Werte Null punktweise annehmen und nicht bloß im Mittel.

G. L. Tautz.

Citlanadze, E. S.: Die Methode der orthogonalen Trajektorien für nicht-lineare Operatoren vom Variations-Typus im Raume L_p. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **20**, 245—278 (1954) [Russisch].

Es handelt sich in der vorliegenden Arbeit hauptsächlich um Operatoren, die $\mathfrak{L}_p(0, 1) = \mathfrak{L}_p$ in $\mathfrak{L}_q(0, 1) = \mathfrak{L}_q$ abbilden ($p > 1$, $q = p/(p-1)$). Sei zuerst f ein nicht notwendig lineares Funktional auf $\mathfrak{L}_p$, für welches das Fréchetsche Differential $df(x; h)$, wobei

$$f(x + h) - f(x) = d\,f(x; h) + \omega_f(x; h), \quad \lim_{||h|| \to 0} ||h||_p^{-1} |\omega_f(x; h)| = 0,$$

existiert und ein beschränktes lineares Funktional von h ist. Sei ferner f schwach stetig, $f(x) > 0$ für $x \neq 0$, $f(\theta_p) = 0$, und $f(-x) = f(x)$. Sei $df(x; h) = (L\,x, h)$, wobei $L\,x \in \mathfrak{L}_q$ (Rieszsche Darstellung von $df(x; h)$). Satz: Sei f, L wie oben und gelte die Ungleichung $|f(x + h) - f(x) - (L\,x, h)| \leq c\,||h||_p^2$, wobei c eine Konstante ist. Dann ist $L\{x: ||x||_p \leq 1\}$ kompakt. Umgekehrt, nehmen wir an, daß $L(x) = \theta_p$ dann und nur dann, wenn $x = \theta_p$, daß $||L\,x_1 - L\,x_2||_q \leqq M\,||x_1 - x_2||_p$, und daß f allen Voraussetzungen mit Ausnahme der schwachen Stetigkeit genügt. Sei ferner $L\{x: ||x||_p \leq 1\}$ kompakt. Dann ist f schwach stetig. Zunächst betrachtet Verf. den Operator N; $N\,x(t) = |x(t)|^{p/q} \operatorname{sign} x(t)$. Eine Eigenfunktion von L ist eine Funktion $x \in \mathfrak{L}_p$, so daß $L\,x = \lambda\,N\,x$, für den Eigenwert λ. Verschiedene Sätze über dieses Thema werden bewiesen, wobei eine Differentialgleichung im Operator $N^{-1}\,L\,x - (N^{-1}\,L\,x, N\,x)\,x$ eine entscheidende Rolle spielt. Zuletzt diskutiert Verf. kritische Punkte des Funktionals f und wendet dabei die Ideen der Ljusternik-Schnirelman-Kategorie an.

E. Hewitt.

Vajnberg, M. M.: Variationstheorie der Eigenfunktionen nichtlinearer Integral- und anderer Operatoren. Trudy Moskovsk. mat. Obšč. **3**, 375—406 (1954) [Russisch].

Ce mémoire contient la plupart des résultats annoncés antérieurement par l'A. sur le même sujet, avec démonstrations et quelques nouvelles propositions. Il s'agit des opérateurs de la forme $\Gamma u = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 u, \ldots, \Gamma_n u)$ où

$$\Gamma_i u = \int_B K_i(x, y)\, g_i(u_1(y), u_2(y), \ldots, u_n(y), y)\, dy$$

définis dans un espace $L_{p,n}$ et prenant les valeurs dans $L_{q,n}$ $(1/p + 1/q = 1)$, ou de produits de tels opérateurs avec un opérateur complètement continu ou autoadjoint. L'existence des valeurs propres est déduite de l'existence des points critiques pour certaines fonctionnelles définies dans l'espace hilbertien. Les propositions fondamentales utilisées sont: 1. Le gradient fort d'une fonctionnelle faiblement continue admet une infinité d'éléments propres, s'il laisse invariant l'élément nul. 2 Le gradient fort positif d'une fonctionnelle faiblement continue a des éléments à direction invariante sur chaque sphère $||x|| = r$. *G. Marinescu.*

Povolockij, A. I.: Über die Existenz unzusammenhängender Spektren bei nicht-linearen vollstetigen Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **99**, 345—348 (1954) [Russisch].

Soit E un espace de Banach réel, A un opérateur (non linéaire) dans E, Λ le spectre de E, $\Pi_{r,R} = \{x \mid r < ||x|| < R\}$, $\Lambda_{r,R}$ l'intersection de $\Pi_{r,R}$ avec l'ensemble des éléments propres $(\neq 0)$ de A. Suppons qu'il existe un opérateur linéaire complètement continu B, tel que $||A x - B x|| \leq K ||x||$ $(x \in \Pi_{r,R})$. L'A. énonce plusieurs théorèmes, dont nous réproduisons Théorème 1: Soit $\mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \cdots$ $\cdots < \mu_{n-1} < \lambda_n < \mu_n$ où λ_i $(i = 1, \ldots, n)$ sont les valeurs propres de B, supposées de multiplicité paire et

$$l_i = ||(\mu_i I - B)^{-1}||^{-1} - K > 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Alors $(\mu_i - l_i, \mu_i + l_i) \cap \Lambda_{r,R} = \emptyset$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et $\Delta_i = (\mu_i + l_i, \mu_{i+1} + l_{i+1}) \supset \Lambda_{r,R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. L'ensemble $\mathfrak{N}_{\Delta_i}$ d'éléments propres correspondant aux valeurs propres $\in \Delta_i$ est une branche dans $\Pi_{r,R}$. — De ce théorème et d'un autre où intervient la dérivée de Fréchet et la dérivée asymptotique, on déduit l'existence d'une classe d'opérateurs avec le spectre non connexe et dont les composantes contiennent des intervals réels. On étudie aussi le cas où les valeurs propres de B sont de multiplicité impaire. *G. Marinescu.*

Charazov, D. F.: Über eine Verallgemeinerung der Methode von Kantorovič zur Lösung von Funktionalgleichungen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **20**, 279—296 (1954) [Russisch].

L'A. étend la méthode des équations approchées de L. V. Kantorovič (ce Zbl. **34**, 212) aux opérateurs de la forme $H_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k$ où les H_k satisfont aux conditions de Kantorovič. Les solutions de l'équation $(I - \lambda H_\lambda)\, x = y$ sont approximées par les solutions des équations $\left(I - \lambda H_\lambda^{(n)}\right) \bar{x} = \bar{y}$, où $H_\lambda^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k H_k^{(n)}$, $H_k^{(n)}$ étant les opérateurs approchés aux opérateurs H_k. On obtient des résultats généralisant ceux de L. V. Kantorovitch et on prolonge aussi les applications de celui-ci: équations à une infinité d'inconnues, équations intégrales, la méthode des noyaux décomposables, etc. *G. Marinescu.*

Charazov, D. F.: Zur Theorie der polynomial von einem Parameter abhängenden Operatoren in Hilbertschen Räumen. Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze **20**, 297—315 (1954) [Russisch].

On considère l'équation (1) $x - \lambda A_1 x - \lambda^2 A_2 x = y$ où A_1, A_2 sont des opérateurs autoadjoints, ayant les normes absolues $N(A_1)$ et $N(A_2)$ finies. L'A. démontre que les valeurs propres de l'équation homogène sont réelles et peuvent être obtenues comme limites des valeurs propres des équations de la forme $(I - \lambda A_{1p}$