Werk

Titel: Spezielle Funktionen

Ort: Berlin

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0057|log22

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

where in (a, b). If also f is continuous in (a, b), then $S(f)$ converges uniformly in every $\langle a+\varepsilon, b-\varepsilon\rangle$. If the above condition is satisfied uniformly for all x, and if f is continuous everywhere, then $S(f)$ converges uniformly everywhere. A second theorem deals with the case $O\left(\frac{1}{\log 1/h}\right)$, satisfied uniformly for all x: If $s_n(x)$ is the n-th partial sum of $S(f)$, then $|s_n(x)| < g(x)$, where $g \in L^{1-\varepsilon}$ for every $\varepsilon > 0$. If $f \log^+|f| \in L$, then $g \in L$; if $f \in L^r$, $r > 1$, then $g \in L^r$. *W. W. Rogosinski.*

Hille, Einar and George Klein: Riemann's localization theorem for Fourier series. Duke math. J. **21**, 587—591 (1954).

Die n-te Partialsumme der Funktion $f \in \mathfrak{L}$ sei $S_n(x; f)$, ferner sei $\omega_1(h, f) = \operatorname{Max}_{|t| \leqq h} \int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|\, dx$, $m_1(h, f) = \operatorname{Max} \int_0^{h} |f(x+t)|\, dt$ und $||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx$; behauptet wird

$$(*) \qquad \left| S_n(x, f) - \frac{1}{\pi} \int_{-\delta}^{+\delta} f(x+t)\, t^{-1} \sin n\, dt \right| \leqq K\, \delta^{-1}\, [||f||_1 + 1]\, \omega_1(n^{-1}, f).$$

Beim Beweise wird die an sich interessante Ungleichung $(**)$ $m_1(h, f) \leqq K_1\, \omega_1(h, f)$ angewandt, die durch Approximation mit trigonometrischen Polynomen bewiesen wird. Bemerkungen des Ref.: Im Lemma (S. 587) fehlt die notwendige Voraussetzung $v(\pi) \geqq 0$. Statt Ungleichung $(**)$ behaupten die Verff. $m_1(h, f) \leqq K_1\, ||f||_1\, \omega_1(h, f)$. In dieser Form ist die Ungleichung unrichtig; man setze $f = c\, \bar{f}$ und $c \to 0$! Ebenso kann die rechte Seite von $(*)$ durch $K\, \delta^{-1}\, \omega_1(n^{-1}, f)$ ersetzt werden. *C. Freud.*

Chen, Kien-Kwong: The coefficients of Denjoy-Fourier series. Acta math. Sinica **4**, 263—277 und engl. Zusammenfassg. 277—278 (1954) [Chinesisch].

Corresponding to a number $\delta < \frac{1}{2}$, there exists an elementary function $f(x)$ such that (i) $f(x)$ is absolutely continuous in every interval $(\varepsilon, 2\pi)$, where $0 < \varepsilon < 2\pi$; (ii) $\lim_{\varepsilon \to +0} \int_{\varepsilon}^{2\pi} f(x)\, dx$ exists; (iii) $\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx = \infty$; (iv) $n^{\delta} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n\, x\, dx = o(1)$, $n^{\delta} \int_0^{2\pi} f(x) \sin n\, x\, dx = o(1)$ as $n \to \infty$. Aus der Zusammenfassg. des Autors.

Spezielle Funktionen:

Hill, E. L.: The theory of vector spherical harmonics. Amer. J. Phys. **22**, 211—214 (1954).

Definition und einige Eigenschaften der Vektor-Kugelfunktionen, der orthonormalen Lösungen von Vektorfeldgleichungen in Kugelkoordinaten, werden angegeben. *B. Stech.*

Mohr, Ernst: Die Maxwellsche Erzeugung der Kugelfunktionen. Math. Nachr. **12**, 273—282 (1954).

Analytischer Beweis des Maxwellschen Satzes über die Erzeugung einer homogenen, ganzen rationalen Kugelfunktion vom Grade n durch wiederholte Differentiation des Elementarpotentials $1/r$ nach n Richtungen, der sich auf das Induktionsverfahren und eine Minimumseigenschaft von $K_n = a_n^2 + b_n^2$ (a_n, b_n Koeffizienten in der Darstellung der entsprechenden flächenhaften Kugelfunktion) stützt. Verf. unterläßt es, Literaturangaben über den Maxwellschen Satz und seine bisherigen Beweise zu machen. *O. Volk.*

Nostrand, Robert G. van: The orthogonality of the hyperboloid functions. J. Math. Physics **33**, 276—282 (1954).

Verf. bezeichnet die Kugelfunktionen $P^{(m)}_{ip-1/2}(\eta)$ ($\eta > 1$; p reell; m positiv

und ganz) als Hyperboloidfunktionen; er leitet die Orthogonalrelation

$$\int_1^\infty P^{(m)}_{ip-1/2}(\eta)\, P^{(m)}_{iq-1/2}(\eta)\, d\eta$$
$$= \frac{\mathfrak{C}\mathrm{otg}(\pi p)}{p}\left(p^2+\frac{1}{4}\right)\left(p^2+\frac{9}{4}\right)\cdots\left(p^2+\frac{(2m-1)^2}{4}\right)\delta(p-q),$$

δ die Dirac-Funktion, ab mit Anwendung auf die Entwicklung der reziproken Entfernung zweier Punkte nach diesen Funktionen. [Ref.: Vgl. Erdélyi, Magnus, Oberhettiger, Tricomi, dies. Zbl. **51**, 303, S. 174, wo diese Funktionen als Kegelfunktionen bezeichnet sind, und S. 163f; 169f.). *O. Volk.*

Carlitz, L.: Note on Legendre polynomials. Bull. Calcutta math. Soc. **46**, 93—95 (1954).

Es wird gezeigt: 1. die Legendreschen Polynome $P_n(x)$ sind eindeutig aus der Rekursion $(1-x^2)(P_n'^2(x)-P'_{n+1}(x)P'_{n-1}(x))=n(x+1)(P_n^2(x)-P_{n+1}(x)P_{n-1}(x))$, $n=1,2,\ldots$, $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_n(x)$ ein Polynom vom Grade n, bestimmt.

2. $$(d/dx)^r\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|_{x=1} = (n+\alpha+\beta+1)_r\,(n+\alpha)_{n-r}/2^r(n-r),$$
$$(d/dx)^r\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x)|_{x=-1} = (-1)^{n-r}(n+\alpha+\beta+1)_r\,(n+\beta)_{n-r}/2^r(n-r),$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}$ Jacobische Polynome. *O. Volk.*

González, M. O.: Elliptic integrals in terms of Legendre polynomials. Proc. Glasgow math. Assoc. **2**, 97—99 (1954).

Entwicklung der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung nach den Polynomen $P_k(\lambda)$, $\lambda = k'^2 - k^2$. *O. Volk.*

Singer, C. P.: A new expansion for the modified Bessel function $K_0(z)$. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **5**, 301—303 (1954).

Für $K_0(z)$ wird die Entwicklung

$$K_0(z) = -\left(\gamma + \log\frac{z}{2}\right) I_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} I_{2n}(z)$$

(γ: Eulersche Konstante) mit den modifizierten Besselfunktionen I_n angegeben und bewiesen. Weiter wird gezeigt, daß K_{n+1} aus K_0 und I_ν mit $\nu = 0, 1, \ldots, n+1$ bestimmt werden kann (n ganze positive Zahl). *H. Unger.*

Chak, A. M.: A generalisation of Bessel-Maitland function. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. **68**, 145—156 (1954).

Mittels des Operatorenkalküls werden die Funktionen

$$J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu x^\nu}{\nu!\prod_{\alpha=1}^{n}\Gamma(\lambda_\alpha+\mu_\alpha\nu+1)}$$

und die entsprechend definierten ber-, bei-Funktionen für reelle, nicht negative $\mu_1, \ldots, \mu_k$ untersucht; es werden verschiedene Relationen unter ihnen, Rekursionsformeln, Differentialgleichung und Differentiationsformeln nach den Indizes $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ abgeleitet. *O. Volk.*

Abramowitz, Milton: Regular and irregular Coulomb wave functions expressed in terms of Bessel-Clifford functions. J. Math. Physics **33**, 111—116 (1954).

Die Lösungen der Differentialgleichung

(1) $$d^2y/d\varrho^2 + [1 - 2\eta/\varrho - L(L+1)/\varrho^2]\, y = 0$$

($L = 0, 1, 2, \ldots$) werden für reelle η, ϱ mit $|\eta| \gg \varrho > 0$ in Reihen der Gestalt

(2) $\varrho^{-L}\sum_{n=2L+1}^{\infty} c_n\, \varrho^{n/2}\, Z_n\left(2i\sqrt{2\eta\varrho}\right)$ entwickelt. Z_n ist ein Satz von Zylinderfunktionen. Einsetzen von (2) in (1) liefert ein Rekursionssystem für die c_n. Sind die Z_n gleich den Bessel-Funktionen J_n, so konvergiert die Reihe (2) für alle endlichen

ϱ absolut gleichmäßig. Sind die Z_n etwa Hankelsche Funktionen erster Art, so konvergiert zwar die Reihe (2) nicht, hat aber asymptotischen Charakter; das Restglied wird abgeschätzt. Das Ziel ist, ein Verfahren zu gewinnen, das für die numerische Berechnung und Tabulierung der in $\varrho = 0$ singulären Lösungen von (1) im Falle $|\eta| > \varrho$ (η reell, $\varrho > 0$) geeignet ist. *J. Meixner.*

Schöbe, Waldemar: Eine an die Nicholsonformel anschließende asymptotische Entwicklung für Zylinderfunktionen. Acta math. **92**, 265—307 (1954).

Die Nicholsonsche Formel zur näherungsweisen Darstellung einer Zylinderfunktion $Z_\nu(z) = \alpha J_\nu(z) + \beta Y_\nu(z)$ für ganzzahlige positive Werte der Ordnung ν war bisher nur unzureichend hergeleitet. Vor allem fehlten Angaben über die Größenordnung des Fehlers. Da die Hankelschen asymptotischen Entwicklungen, die Debyesche Ausnahme- und Hauptreihe gerade im Anwendungsbereich der Nicholsonschen Formel für $z - \nu$ in der Größenordnung $z^{1/3}$ oder $\nu^{1/3}$ versagen, war eine eingehende Begründung und Weiterentwicklung letzterer Beziehung gerade für numerische Belange von großer Bedeutung. Verf. stellt die für beliebige komplexe z und ν in gewissen Winkelräumen gültige Nicholsonreihe auf, eine asymptotische Entwicklung im Bereiche $z - \nu = O(z^{1/3})$. Das Hauptglied dieser Reihe stellt die bekannte Nicholsonsche Fomel dar, die so ihre ordnungsgemäße Einordnung gefunden hat. Im Hinblick auf die numerische Auswertung erfolgt die Darstellung in verschiedener Weise. Unter Verwendung der Airyschen Integrale $\mathrm{Ai}(\xi)$, $\mathrm{Bi}(\xi)$ [British Assoc. Math. Tables, Partvolume B, The Airy Integral, Cambridge 1946] erhält man:

$$\begin{matrix} J_\nu(z) \\ -Y_\nu(z) \end{matrix} \sim \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \left(\frac{z}{2}\right)^{-(2\mu+1)/3} \left[P_\mu(\xi) \begin{matrix} \mathrm{Ai} \\ \mathrm{Bi} \end{matrix}(\xi) + Q_\mu(\xi) \begin{matrix} \mathrm{Ai}' \\ \mathrm{Bi}' \end{matrix}(\xi) \right], \quad \xi = (\nu - z)\left(\frac{z}{2}\right)^{-1/3}.$$

Die Polynome $P_\mu(\xi)$ und $Q_\mu(\xi)$, deren exakte Koeffizienten für $\mu = 0(1)4$ mitgeteilt werden, ergeben sich aus einer Entwicklung, in der die zweiten und höheren Ableitungen von Ai und Bi mittels der Differentialgleichung, der die Airyschen Integrale genügen, durch Ai und Ai′ bzw. Bi und Bi′ ersetzt werden. Zieht man an Stelle der $\mathrm{Ai}(\xi)$ und $\mathrm{Bi}(\xi)$ Zylinderfunktionen der Ordnung $1/3$ und $-2/3$ heran, dann erhält man z. B.:

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{1/2} \sum_{\mu=0}^{\infty} (2\gamma z)^{-\mu/2} \left[S_\mu(y)\, H_{1/3}^{(1)}(y) + T_\mu(y)\, H_{-2/3}^{(1)}(y) \right] e^{i\pi/6}$$

mit $\gamma = z - \nu$ und $3z^{1/2} y = (2\gamma)^{3/2}$. Auch die Polynome S_μ und T_μ sind für $\mu = 0(1)4$ angegeben. Entsprechende asymptotische Formeln findet man für $J_\nu'(z)$, $Y_\nu'(z)$ und $Z_\nu'(z)$ mit den dazugehörigen Polynomen. Eine weitere Darstellung der Nicholsonreihe, ausgehend von einer verbesserten Nicholsonformel, ist folgende:

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{1/3} Z_\nu(z) = \left(\sum_{\varkappa=0}^{m} (-1)^\varkappa p_\varkappa(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\varkappa/3} \right) \mathfrak{Ai} \left(\sum_{\lambda=0}^{m} (-1)^\lambda q_\lambda(\xi) \left(\frac{z}{2}\right)^{-2\lambda/3} + O\left(z^{-(2m+2)/2}\right) \right)$$

mit $\mathfrak{Ai}(\xi) = \alpha\, \mathrm{Ai}(\xi) - \beta\, \mathrm{Bi}(\xi)$. Die Polynome $p_\varkappa$ und $q_\varkappa$ sind wieder für $\varkappa = 0(1)4$ mit exakten Koeffizienten angeführt. An diese Entwicklung für Z_ν anschließend wird für komplexes ν vom großen Absolutbetrage die Existenz von Nullstellen der Zylinderfunktionen der Ordnung ν im Bereiche $z - \nu = O(z^{1/3})$ bewiesen und eine asymptotische Entwicklung aufgestellt. — In der Debyeschen Ausnahmereihe treten als Koeffizienten Polynome $B_l(\gamma)$ auf, deren Bildungsgesetz — bisher nicht bekannt — hergeleitet wird. Dabei zeigt sich ein enger formaler Zusammenhang zwischen der Ausnahmereihe und der Nicholsonschen Formel bzw. Nicholsonreihe. Die $B_l(\gamma)$ sind für $l = 0(1)13$ mit exakten Koeffizienten angegeben, ebenso noch Polynome, die für die Auswertung der Debyeschen Ausnahmereihe von Wert sind. Zahlenbeispiele mit Vergleich zwischen Näherungswerten und wahren Werten zeigen die Anwendungsmöglichkeiten der angegebenen Beziehungen. *H. Unger.*

Erdélyi, A., M. Kennedy and J. L. McGregor: Parabolic cylinder functions of larger order. J. rat. Mech. Analysis **3**, 459—485 (1954).

Verff. behandeln die Differentialgleichung $y'' - 4\nu^2(x^2-1)\,y = 0$ für komplexe x und ν, $|\nu| \gg 1$. Methodisch schließen sich die Untersuchungen an die von Langer-Cherry (vgl. dies. Zbl. **36**, 61) an. Für die Gewinnung der asymptotischen Formeln für jede der vier Lösungen dient als Vergleichsdifferentialgleichung die der Airyschen Funktionen. Die für die Lösungen $D_{\nu-1/2}\left(\pm 2x\sqrt{\nu}\right), D_{-\nu-1/2}\left(\pm 2xi\sqrt{\nu}\right)$ gewonnenen asymptotischen Darstellungen gelten in Bereichen für x, die zusammen die ganze x-Ebene bedecken, und gelten in jedem Bereiche gleichmäßig für x, wenn ν längs $\arg \nu = \text{const}$ ins Unendliche geht. Für $\arg \nu = \pi/6$ ist der Verlauf der Bereiche aufgezeichnet. Eingangs werden die asymptotischen Eigenschaften der parabolischen Zylinder- und Airyschen Funktionen zusammengestellt. *O. Volk.*

Poli, L.: Polynomes d'Hermite et équations différentielles. Mathesis **63**, 319—325 (1954).

Verf. zeigt, daß die Differentialgleichungen von der Form

$$P_0(x)\,y^{(n)} + c_n^1\,P_1(x)\,y^{(n-1)} + \cdots + c_n^n\,P_n(x)\,x = 0,$$

$P_0(x), P_1(x) \cdots$ Appellsche oder Ceschinosche Polynome, n partikuläre Integrale von der Form $e^{rz-z^2/2}$ (r eine zu bestimmende Konstante) besitzen. Anwendung zur Entwicklung eines Produktes zweier Hermitescher oder Ceschinoscher Polynome nach diesen Polynomen. *O. Volk.*

Ossicini, Alessandro: Polinomi associati alle funzioni ultrasferiche di seconda specie. Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. **9**, 170—177 (1954).

Für die ultrasphärischen Funktionen zweiter Art wird die Beziehung hergeleitet

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda)}\left\{P_n^{(\lambda)}(x)\int_x^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^{\lambda+\frac{1}{2}}} - \frac{W_{n-1}^{(\lambda)}(x)}{(x^2-1)^{\lambda-\frac{1}{2}}}\right\},$$

$\lambda \leq \frac{1}{2}$, $n \leq 0$ (ausgenommen $n = \lambda = 0$), x beliebig komplex ausgenommen $-1 \leq x \leq +1$. Einige Rekursionsformeln werden gegeben, und das zugeordnete Polynom $W_n^{(\lambda)}$ wird als Polynom in $(1-x)/2$ dargestellt. *K. Prachar.*

Burchnall, J. L.: A method of evaluating certain determinants. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **9**, 104 (1954).

Aus dem vom Verf. bereits früher (dies. Zbl. **43**, 74; **47**, 71) implizite angewandten Determinantensatze: Es ist $|a_{st}| = \prod_{\nu=0}^{n} c_\nu$, wenn $a_{st} = \sum_{\nu=0}^{\mathrm{Min}(s,t)} c_\nu\,p_{\nu s}\,q_{\nu t}$, $s, t = 0, 1, 2, \ldots, n$ mit $p_{\nu\nu} = q_{\nu\nu} = 1$ für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, werden die Determinanten bestimmt:

$$|H_{s+t}| = (-1)^{(n+1)n/2}\prod_{\nu=1}^{n}\nu!, \quad |P_{s+t}(x)| = 2^{-n^2}(x^2-1)^{(n+1)n/2},$$

(H_n, P_n Hermitesche bzw. Legendresche Polynome), und $|F^{(i)}(s,t)|$, $i = 1, 2, 3$, [$F^{(i)}(s,t)$ spezielle Appellsche hypergeometrische Funktionen mit zwei Veränderlichen] mit einigen Folgerungen. *O. Volk.*

Gupta, H. C.: An operational relation. Math. Z. **61**, 70—74 (1954).

Ausgehend von einer Darstellung der Bildfunktion

$$f(p) \equiv \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\left(G(r)\,\Gamma(-\nu r-\varrho)\,p^{\nu r+\varrho+1} + \frac{1}{\nu}\,\Gamma\left(\frac{\varrho-r}{\nu}\right)G\left(\frac{r-\varrho}{\nu}\right)p^{r+1}\right),$$

$$G(r) \equiv \prod_{q=1}^{m}\left(\Gamma(a_q+\alpha_q r)\right)\Big/\prod_{q=1}^{n}\left(\Gamma(b_q+\beta_q r)\right)\cdot$$

durch ein Barnes-Integral zeigt Verf., daß die Bildfunktion ist

$$h(x) \equiv \sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\,G(r)/(r!\,x^{\nu r+\varrho+1}),$$

wo $\Re(\nu a_q/\alpha_q - \varrho) > 0$, β_q reell, ν, α_q positiv und reell und $-1 < \Sigma\beta_q - \Sigma\alpha_q$, $\Sigma|\beta_q| - \Sigma\alpha_q < 1$ ist. Spezielle Wahl der Parameter führt auf bekannte Bezie-

hungen zwischen den Besselschen, Whittakerschen, Humbertschen und verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen. *O. Volk.*

Lambe, C. G.: Integral equations satisfied by Lamé-Wangerin functions. Proc. Edinburgh math. Soc., II. Ser. **10**, 71—75 (1954).

Verf. knüpft an die Arbeiten von Lambe-Ward (dies. Zbl. 9, 164) und Erdélyi [Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 13, 107 (1942)] an und verwendet den dort entwickelten allgemeinen Satz über Integralrelationen zwischen den betrachteten Funktionen zur Herleitung spezieller solcher Relationen, insbes. mit den Kernen $(1 - z\,t/a)^{2n}$ und $(z - t)^{2n}$. *F. W. Schäfke.*

Ragab, F. M.: Further integrals involving E-functions. Proc. Glasgow math. Assoc. **2**, 77—84 (1954).

Im ersten Teil gibt Verf. eine Darstellung der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1}E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:\lambda^m z)\,d\lambda,\quad \int_0^1 \lambda^{\alpha-1}(1-\lambda)^{\varrho-\alpha-1}E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z\lambda^m)\,d\lambda,$$

$|\mathrm{amp}\,z| < \pi$, m natürliche Zahl, $p \geqq q+1$, $\Re(m\alpha_r + k) > 0$, bzw. $\Re(\alpha + m\alpha_r) > 0$, $\Re(\varrho - \alpha) > 0$, $r = 1, 2, 3, \ldots, p$ durch zwei E-Funktionen mit Zurückführung von 4 Doppelintegralen auf die obige Form, und im zweiten Teile eine solche der Integrale $\int_0^\infty e^{-\mu}\mu^{-m-1}I_n(\mu)E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z\mu^{\pm 2})\,d\mu$, $I_n(\mu) = (\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2}))^{-1}(\mu/2)^n \int_{-1}^{+1} e^{-\mu\lambda}(1-\lambda^2)^{n-1/2}\,d\lambda$ durch drei E-Funktionen (bei ähnlichen Bedingungen wie oben). *O. Volk.*

Ragab, F. M.: Integrals involving E-functions and Bessel functions. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 414—423 (1954).

Darstellung der Integrale

$$\int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1}E(p;\alpha_r:q;\varrho_1:z\lambda^{\pm 1/2})\,d\lambda,\quad \int_0^\infty e^{-\lambda}\lambda^{k-1}E(\gamma,\delta::\lambda^2)E(p;\alpha_r:q;\varrho_s:z\lambda^{\pm 1})\,d\lambda$$

durch E-Funktionen. Durch Spezialisieren werden Integrale mit den Besselfunktionen $J_n(z)$, $K_n(z)$ gewonnen. *O. Volk.*

Ragab, F. M.: Linear relations between E-functions and Bessel functions. Acta math. **92**, 1—11 (1954).

Verf. gibt sechs lineare Beziehungen zwischen E-Funktionen, von denen die folgenden

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r\binom{u}{r}\frac{(\alpha_1;n)}{(\alpha_1;r)}x^{-r}E(\alpha_1+r,\ldots,\alpha_p+r:q;\varrho_s+r:x) = E(\alpha_1+r,\alpha_2,\ldots,\alpha_p:q;\varrho_s:x),$$

$$\Gamma(\varrho_1)\sum_{r=0}^n (-1)^r\binom{n}{r}\frac{1}{\Gamma(\varrho_1-n+r)}x^{-r}E(\alpha_1+r,\ldots,\alpha_p+r:\varrho_1+r,\ldots,\varrho_q+r:x)$$
$$= E(p;\alpha_r:\varrho_1-n,\varrho_2,\ldots,\varrho_q:x),$$

die einfachsten sind. Durch Spezialisieren werden hieraus Entwicklungen für die Besselfunktionen gewonnen. *O. Volk.*

Huzino, Seiiti: Summation of some series containing solutions of the F-equation. Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A **8**, 181—186 (1954).

Darstellung der Summen

$$\sum_{n=0}^\infty F_1(x,\alpha-n)F_2(y,\alpha+n)z^n \quad\text{und}\quad \sum_{n=0}^\infty F_1(x,\alpha+n)F_2(y,\alpha+n)\frac{z^n}{n!}$$

durch bestimmte Integrale, wo $F_1(x,\alpha)$, $F_2(y,\alpha)$ Lösungen der F-Gleichung von Truesdell sind, die gewisse Bedingungen erfüllen. *O. Volk.*

Jackson, Margaret: Transformations of series of the type ${}_3\Psi_3$. Pacific J. Math. **4**, 557—562 (1954).