Werk

Titel: Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen

Ort: Berlin

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0055|log69

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Formen $F_{K_a} \in (K_a, -k)$ werden zu einem Formenvektor $\mathfrak{F} = \{F_{K_1}(\tau), \ldots, F_{K_h}(\tau)\}$ zusammengefaßt. Die volle Schar $\{K, -k\}$ dieser Formenvektoren wird in gewisser Weise in Teilscharen $\{K, -k, \chi, \psi\}$ aufgespalten, wobei χ einen biquadratischen Einheitencharakter und ψ einen Charakter der Zahlklassengruppe bezeichnet. Auf $\{K, -k\}$ wird in Verallgemeinerung eines Ansatzes von de Bruijn (dies. Zbl. 28, 56) ein Operator $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}|T(\sigma)$ für ganzes $\sigma \in Z$, $\sigma \neq 0$ erklärt, der auf $\{K, -k, \chi, \psi\}$ der Multiplikationsregel $T(\Sigma)\, T(\sigma) = \sum_{(\vartheta)} N(\vartheta)^{k-1} \psi(\vartheta)\, T\left(\frac{\Sigma\sigma}{\vartheta^2}\right)$ genügt, wobei über alle ganzen Ideale (ϑ) summiert wird, die (Σ, σ) teilen. Damit ist die Grundformel der Heckeschen Operatorentheorie (dies. Zbl. 15, 402) sinnvoll verallgemeinert. Mit Hilfe des Metrisierungsprinzips, angewendet auf die Schar $\{K, -k, \chi, \psi\}_s$, die sich aus den Spitzenformenvektoren in $\{K, -k, \chi, \psi\}$ zusammensetzt, wird gezeigt, daß $\{K, -k, \chi, \psi\}_s$ von Eigenvektoren aller T-Operatoren aufgespannt wird. Es sei $\mathfrak{F} \in \{K, -k\}$. Dann gibt es zu $\omega \in Z$, $\omega \neq 0$ einen Koeffizienten $a_0(\omega)$ und zu $\mu \in Z$, $\mu \neq 0$, $\partial\mu \equiv 0\,(1)$ einen Koeffizienten $a(\mu)$, so daß die zur Klasse K_a gehörige Komponente von $\mathfrak{F}$ für $\tau \in \mathfrak{T}_\omega$ mit $\omega \in K_a$ die Entwicklung (1) hat. Man bilde mit einem beliebigen Zahlklassencharakter $\Lambda(\sigma)$ die Dirichletreihen $D(s, \Lambda) = \sum_{(\sigma)} a(\sigma)\, \Lambda(\sigma)\, N(\sigma)^{-s}$, wobei über alle ganzen Ideale $(\sigma) \neq (0)$ summiert wird. Es zeigt sich dann, daß ein Formenvektor $\mathfrak{F} \in \{K, -k, \chi, \psi\}$ genau dann ein normierter Eigenvektor aller T-Operatoren ist, wenn die Dirichletreihen $D(s, \Lambda)$ eine Eulersche Produktentwicklung $D(s, \Lambda) = \prod_{(\varrho)} (1 - a(\varrho)\, \Lambda(\varrho)\, N(\varrho)^{-s} + \psi(\varrho)\, N(\varrho)^{k-1-2s})^{-1}$ besitzen, wobei (ϱ) alle Primideale durchläuft. Zahlreiche Sätze der Heckeschen Theorie werden auf Formenvektoren verallgemeinert. Der Fortschritt, der über die Ergebnisse von de Bruijn entscheidend hinausführt, liegt darin, daß Verf. nicht nur Formen zur Gruppe $\Gamma_1(K)$, sondern zu allen Gruppen $\Gamma_1(K_a)$ $(a = 1, 2, \ldots, h)$ gleichzeitig betrachtet. *H. Maaß.*

Kaluza jr., Theodor: Zur Existenz stetiger grenzperiodischer Funktionen mit formal vorgegebener Fourierreihe. Arch. der Math. 5, 344—346 (1954).

For a given almost periodic function $f(x)$ the limit-periodic component of $f(x)$ which in Bochner's sense belongs to a given limit-period is expressed by $f(x)$. It is noted that the series formed by the limit-periodic components generally does not converge uniformly to $f(x)$. *E. Følner.*

Doss, Raouf: On generalized almost periodic functions. Ann. of Math., II. Ser. 59, 477—489 (1954).

Dann und nur dann läßt sich eine Funktion $f(x) \in L^p$ durch trigonometrische Polynome $p(x) = \Sigma A_\nu \exp(i \lambda_\nu x)$ beliebig genau im Sinne der B^p-Norm approximieren, also $\bar{M}_x \{|f(x) - p_\varepsilon(x)|^p\}^{1/p} < \varepsilon$, wenn gilt: (1) $\lim \bar{M}_x \{|f(x+\tau) - f(x)|^p\} = 0$ für $\tau \to 0$, (2) Die ε-Fastperioden τ mit $\bar{M}_x \{|f(x+\tau) - f(x)|^p\} < \varepsilon$ liegen relativ dicht, (3) Für jedes a existiert eine Funktion $f^{(a)}(x) \in L^p$ mit der Periode a, so daß $\lim \bar{M}_x \left\{\left|n^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\,a) - f^{(a)}(x)\right|^p\right\} = 0$ für $n \to \infty$. — Hiermit [insbesondere durch (3)] ist eine neue und natürliche Charakterisierung der B^p-fastperiodischen Funktionen gegeben. Der Beweis des angegebenen Theormes ist nicht einfach. Das ist aber sehr verständlich, falls man berücksichtigt, wie kompliziert die ursprüngliche Bohr-Besicovitchsche Theorie dieser Funktionen ist. *W. Maak.*

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

● **Petrowski, I. G.: Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.** 4. Aufl. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954. 198 S. DM 7.80.

Si tratta della traduzione dal russo in lingua tedesca di un volume di I. G. Petrowski sulle equazioni differenziali ordinarie, giunto già in quindici anni alla sua quarta edizione. La trattazione moderna e sintetica orienta rapidamente il lettore tanto sulla parte classica e moderna della materia quanto sui vari metodi di indagine. Sono da notare tra l'altro le dimostrazioni dei teoremi di esistenza ottenute col teorema del punto invariante, la dipendenza degli integrali dai parametri fondata su un lemma di J. Hadamard, e un teorema di S. A. Tschaplygin per la limitazione delle soluzioni delle equazioni differenziali. La prima parte, sulle equazioni del primo ordine con una funzione incognita, comprende tre capitoli sui concetti generali, sulle più semplici equazioni e sulla teoria generale; la seconda parte, sui sistemi di equazioni differenziali

ordinarie, comprende pure tre capitoli sui teoremi generali, sui sistemi lineari, sui sistemi a coefficienti costanti. A ciascun capitolo seguono questioni ben scelte. Un capitolo aggiuntivo riguarda le equazioni alle derivate parziali del primo ordine con una funzione incognita. Il volume, che si presenta in ottima veste tipografica, è raccomandabilissimo ai giovani dei secondi bienni dei nostri corsi universitari. *G. Sansone.*

Makal, E.: A note on the solution of Heun's differential equation in a spezial case. Publ. math., Debrecen **3**, 140—143 (1954).

Verf. untersucht zunächst die Funktion

$$w = y^{-b}(z-x)^{-b}\, F(a, b, c, y^{-1}(z-y)\, x(z-x)^{-1}),$$

wobei $F(a, b, c, \xi)$ die Gaußsche hypergeometrische Funktion bedeutet. Er betrachtet w als Funktion von x mit den Parametern y und z oder als Funktion von y mit den Parametern z und x oder schließlich als Funktion von z mit den Parametern x und y. In jedem Falle genügt w einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung vom Heunschen Typ. Im ersten Falle sind $0, y, z, \infty$ die Singularitäten, im zweiten $0, z, x, \infty$ und im dritten $0, x, y, \infty$. w genügt außerdem zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. — Es gibt auch andere Beispiele dafür, daß die Lösungen gewisser Systeme von partiellen Differentialgleichungen auch bestimmte gewöhnliche Differentialgleichungen befriedigen, welche alle von derselben Struktur sind, und zwar so, daß die Singularitäten der einen Differentialgleichung bei der anderen die Rolle der Variablen spielen usw. Verf. führt das für die homogenen Lösungen (d. h. $x\, u_x + y\, u_y + \alpha\, u = 0$) der von Riemann, Darboux und Appell untersuchten Differentialgleichung $(x-y)\, u_{xy} - \beta'\, u_x + \beta\, u_y = 0$ und weiterhin für die homogenen Lösungen eines Systems von drei partiellen Differentialgleichungen aus. *Johannes Nitsche.*

Campbell, J. G. and Michael Golomb: On the polynomial solutions of a Riccati equation. Amer. math. Monthly **64**, 402—404 (1954).

Es wird nach den Lösungen der Differentialgleichung $A\, y' = B_0 + B_1\, y + B_2\, y^2$ (A, B_0, B_1, B_2 Polynome) gefragt, die Polynome sind. In Ergänzung früherer Resultate des ersten Verf. (dies. Zbl. **49**, 68) wird bewiesen, daß die Grade der Polynom-Lösungen einer aus vier möglichen explizit angegebenen Klassen von je höchstens drei Elementen angehören. Drei verschiedene Grade können nur vorkommen, wenn der Grad von A um 1 größer ist als der von B_1, unter zusätzlichen Bedingungen, die mit Hilfe des „singulären Exponenten" ausgedrückt werden. Mit besonderer Berücksichtigung des letzteren Falles wird ein Algorithmus zur Bestimmung der Polynom-Lösungen angegeben. *M. J. De Schwarz.*

Ženchėn, O.: Über eine Methode zum Beweis der Lösbarkeit des Cauchyschen Problems. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 143—146 (1954) [Russisch].

Diese Methode beruht auf der bekannten Umwandlung des Anfangswertproblems in eine nichtlineare Integralgleichung. Derartige Integralgleichungen hat der Verf. in mehreren Arbeiten untersucht [vgl. dies. Zbl. **47**, 346; Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **91**, 1261—1262 (1953)]. *W. Thimm.*

Wintner, Aurel: Remarks to an earlier note. (Vol. 57, 539—540). Amer. J. Math. **76**, 717—720 (1954).

Der Ref. hat früher (S.-Ber. Heidelberger Akad. Wiss., math. naturw. Kl. **1919**, 8. Abhandl.) die Differentialgleichung $y' = \Sigma\, f_k(x)\, y^k$ dadurch integriert, daß er die Gleichung $y' = \Sigma\, f_k(x)\, t^k\, y^k$ betrachtete, das Integral nach Potenzen des Parameters t entwickelte und dann $t = 1$ setzte. Er fand so, wenn etwa $|f_k(x)| \leq M\, b^{-k}$ ist (Voraussetzung A), z. B. für das am Nullpunkt verschwindende Integral eine Gültigkeit im Intervall $0 \leq x < \frac{1}{2}\, b/M$, und zwar ist das das bestmögliche Intervall. Dem Verf. gefällt aber der Faktor $\frac{1}{2}$ nicht. Deshalb ändert er die Voraussetzung A ab in B: $|\Sigma\, f_k(x)\, y^k| \leq M$ im Kreis $|y| \leq b$. Dann ist nach dem Cauchyschen Koeffizientensatz die Voraussetzung A von selbst erfüllt. Aber es wird doch wesentlich mehr verlangt und das obige Intervall ist infolgedessen nicht mehr das bestmögliche. Verf. findet jetzt das Intervall $0 \leq x < b/M$. *O. Perron.*

Nehari, Zeev: On the zeros of solutions of second-order linear differential equations. Amer. J. Math. **76**, 689—697 (1954).

The present paper concerns the behavior of the solutions of the differential equation (1) $w''(z) + p(z)\,w(z) = 0$ in a half-strip $S(a) = [0 \leq x < +\infty, -a \leq y \leq a]$, $a > 0$, of the complex z-plane, $z = x + i\,y$. Here are some of the results. I. If $p(z)$ is regular in $S(1)$ and $|p(x + i\,y)| \leq x\,\varepsilon(x)$ in $S(1)$, where $\varepsilon(x) \to 0$ as $x \to +\infty$, and if $\int_0^{+\infty} x\,|p[x + i(1-\eta)]|\,dx < +\infty$ for all $0 < \eta < 1$ small enough, then every solution $w(z)$ of (1) has at most a finite number of zeros in any strip $S(1-\delta)$, $0 < \delta < 1$. II. If $p(z)$ is regular in $S(1)$ and $z_n = a_n + i\,b_n$, $z_n \in S(1)$, $n = 1, 2, \ldots$, are all the zeros of $w(z)$ in $S(1)$, then the assumption $|p(x + i\,y)| < C/x^\sigma$ for $z \in S(1)$, $1 < \sigma < 2$, is incompatible with $a_n = o(n^{1/(2-\sigma)})$ as $n \to \infty$. Theorem II extends a previous result of P. Hartman and A. Wintner for the real case (this Zbl. **43**, 87). *L. Cesari.*

Evans, Robert L.: Asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 89—92 (1954).

The author considers the differential equation (*) $\sum_{\beta=0}^{n} P_\beta(x)\,y^{(n-\beta)} = 0$ where $P_\beta(x) = \sum_{\mu=-m(\beta)} p_{\beta,\mu}\,x^{-\mu}$ $(p_{\beta,m(\beta)} \neq 0,\ \beta = 0, 1, \ldots, n)$ converge for $|x| > x_0$ (and $|x| > x_0$ contains no finite singular points of (*)). For this equation E. Fabry obtained n linearly independent formal solutions which involve series that are generally asymptotic but not convergent. In the present paper the asymptotic series are replaced by convergent factorial series. *M. M. Peixoto.*

Latyševa, K. Ja.: Über ein Resultat von B. S. Popov. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **96**, 695—696 (1954) [Russisch].

Eine von Popov (dies. Zbl. **51**, 319) angegebene Bedingung dafür, daß die Gleichung $y'' + (a\,e^x + b)\,y' + (A\,e^{2x} + B\,e^x + C)\,y = 0$ durch Quadraturen lösbar ist, läßt sich aus allgemeineren Sätzen der Verf. ableiten (vgl. z. B. dies. Zbl. **52**, 90). *W. Hahn.*

Sears, D. B.: Some properties of a differential equation. II. J. London math. Soc. **29**, 354—360 (1954).

In Verallgemeinerung eines in I. (dies. Zbl. **48**, 64) erzielten Resultates zeigt Verf. hier: Die Differentialgleichung $y'' = f(x)\,y$ kann keine Lösung $y = \varphi(x)$ mit $0 < \int^{\infty} |\varphi(x)|^p\,dx < \infty$ $(p \geq 1)$ besitzen, wenn für ein $x_0 > 0$ und ein $n \geq 0$

$$|f(x)| \leq \frac{p+1}{x^2\,p^2} + \frac{p+2}{x^2\,p^2} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{\log x \log_2 x \cdots \log_r x} + \sigma(x)$$

mit $x\,\sigma(x) \in L(x_0, \infty)$ bei $x \geq x_0$ gilt. Für $n = 0$ fehlen die log-Glieder. Die Konstanten $(p+1)/p^2$, $(p+2)/p^2$ sind bestmöglich. *F. W. Schäfke.*

Barbuti, Ugo: Su alcuni teoremi di stabilità. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. **8**, 81—91 (1954).

L'A. stabilisce il seguente criterio di stabilità, comprensivo di risultati di altri AA. Nell'equazione (1) $y'' + [B_1(x) + B_2(x)]\,y = 0$, sia $B_1(x)$ a variazione limitata in (x_0, ∞) e $\lim_{x\to\infty} B_1(x) = \alpha^2$, $0 < \alpha < \infty$; $B_2(x)$ sia limitata tra due numeri positivi e la sua derivata $B_2'(x)$ risulti a variazione limitata in (x_0, ∞). In queste ipotesi tutti gli integrali della (1) e le loro derivate sono stabili in (x_0, ∞). *G. Sansone.*

Fisher, Edward: The period and amplitude of the van der Pol limit cycle. J. appl. Phys. **25**, 273—274 (1954).

The amplitude and period of the limit cycle for the van der Pol equation, $\ddot{y} + \dot{y} = \nu\,\dot{y}\,(1 - y^2)$, are found for all values of ν by joining graphically the results of solutions about $\nu = 0$ and $\nu = \infty$. Autoreferat.

Cunningham, W. J.: A non-linear differential-difference equation of growth. Proc. nat. Acad. Sci. USA **40**, 708—713 (1954).

L'équation (*) $dx/dt = [a - b\,x(t-\tau)]\,x(t)$, $a, b, \tau > 0$ peut posséder, pour $x > 0$, des solutions oscillantes. Pour discuter ce point, l'A. transforme (*) en développant $x(t-\tau)$ selon les puissances de τ et en négligeant les termes à partir de τ^3; il obtient l'équation (**) $x'/x = a - b\,x + b\,\tau\,x' - b\,\tau^2\,x''/2$ qui est facile à discuter dans le plan (x, x'). Il y a un point singulier pour $x = a/b$, $x' = 0$ dont la nature dépend du produit $a\,\tau$. L'A. compare les solutions de (*) et (**): il donne les résultats d'intégrations faites avec une machine analogique; ils sont en bon accord si $a\,\tau$ est assez petit. *Ch. Blanc.*

Putnam, C. R.: On the continuous spectra of singular boundary value problems. Canadian J. Math. **6**, 420—426 (1954).

Let $p(t) > 0$ and $f(t)$ be continuous on $0 \leq t < \infty$ and suppose that the differential equation (1) $[p(t)\,x'(t)]' - f(t)\,x(t) + \lambda\,x(t) = 0$ is of the limit-point type, so that (1) and a linear homogeneous boundary condition (2_α) $x(0)\cos\alpha + x'(0)\,p(0)\sin\alpha = 0$ $(0 \leq \alpha < \pi)$ determine a boundary value problem on $0 \leq t < \infty$ for every fixed α. Let $\varrho_\alpha(\lambda)$ denote the unique continuous monotone basis function on $-\infty < \lambda < \infty$, normalized by $\varrho_\alpha(0) = 0$, determining the eigendifferentials associated with the continuous spectrum, C_α. A problem raised by H. Weyl is as to whether C_α is independent of α (in standard examples, f. i. if $f(t)$ is periodic, this is the case; cf. A. Wintner, this Zbl. **29**, 186). A step toward the solution of this problem is made in this paper by proving the following Theorem: Suppose $C_{\alpha_1} \cap C_{\alpha_2}$ $(\alpha_1 \neq \alpha_2)$ contains an interval Δ, and that $\varrho_{\alpha_1}(\lambda)$ is absolutely continuous with respect to $\varrho_{\alpha_2}(\lambda)$ on Δ. Then (i) $\Delta \subseteq C_\alpha$ for every α, $0 \leq \alpha < \pi$; (ii) $\varrho_{\alpha_1}(\lambda)$ is absolutely continuous on Δ with respect to each function $\varrho_\alpha(\lambda)$. *B. Sz.-Nagy.*

Briš, N. I.: Über Randwertaufgaben für die Gleichung $\varepsilon y'' = f(x, y, y')$ bei kleinem ε. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **95**, 428—432 (1954) [Russisch].

A number of theorems are announced concerning the convergence of a solution $y = y_\varepsilon$ of the equation $\varepsilon\,y'' = f(x, y, y')$ in an interval $a < x < b$ satisfying (1) $y(a) = y(b) = 0$ to a solution u of $f(x, u, u') = 0$ satisfying $u(b) = 0$. The principal theorem assumes that $\partial f/\partial y' < k < 0$ and this condition is later relaxed. The situation when (1) is replaced by a general linear boundary condition is also studied. The case when f is linear in y' has been treated before by R. v. Mises (this Zbl. **37**, 64) and by Coddington and Levinson (this Zbl. **46**, 95). The case when f differs from a function linear in y' by a bounded function was treated by O. A. Olejnik and A. I. Žižina (this Zbl. **47**, 328). *L. Gårding.*

Babkin, B. N.: Lösung einer gewissen Randwertaufgabe für eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung nach der Methode von Čaplygin. Priklad. Mat. Mech. **18**, 239—242 (1954) [Russisch].

Es wird die Randwertaufgabe $y'' - f(x, y) = 0$, $y(a) = A$, $y(b) = B$ betrachtet. Wenn die Funktion $v(x)$ im Intervall $[a, b]$ den Randbedingungen und der Differentialungleichung $v'' - f(x, v) \leq 0$ genügt, dann gilt im Intervall (a, b) die Ungleichung $v(x) \geq y(x)$, wo $y(x)$ Lösung der Randwertaufgabe ist. Unter Benutzung dieses Satzes werden Folgen oberer und unterer Funktionen konstruiert, die gegen die Lösung konvergieren. *W. Schulz.*

Levinson, Norman: The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators. Ann. of Math., II. Ser. **59**, 300—315 (1954).

Unter Benutzung der Levitanschen Ergebnisse (dies. Zbl. **41**, 57) bewies Coddington (dies. Zbl. **49**, 71) für die selbstadjungierten Differentialoperatoren $L = p_0 \cdot (d/dt)^n + p_1\,(d/dt)^{n-1} + \cdots + p_n$, $a < t < b$, beliebiger Ordnung u. a. unter gewissen Voraussetzungen über die Singularitäten an den Intervallenden Sätze über die Spektraldarstellung und die bei Levitan fehlende Eindeutigkeit der Spektralmatrix. In der vorliegenden Arbeit werden die Levitanschen Ergebnisse und Beweise angeführt und mit ihrer Hilfe der Coddingtonsche Entwicklungssatz erneut hergeleitet.

Es wird kein Gebrauch von der Theorie des Hilbertraumes und der singulären Integralgleichungen gemacht. Die Beweismethode ist ähnlich der in einer früheren Arbeit vom Autor für den Fall $n = 2$ (dies. Zbl. 44, 313) benutzten Methode.

H. Krumhaar.

Franklin, Joel: On the existence of solutions of systems of functional differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 5, 363—369 (1954).

Siano $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ m funzioni continue note della x definite in $(0, x_1)$, con $x_1 > 0$, e ivi soddisfacenti le limitazioni $u_k(x) \leq x$, $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Posto $x_{0,k} = \min\limits_x u_k(x)$, $x_0 = \min(x_{0,1}, \ldots, x_{0,m})$, $(x_0 \leq 0)$, siano $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ n funzioni (funzioni iniziali) continue note definite in $(x_0, 0)$, senza escludere che sia $x_0 = 0$, nel qual caso le $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ si riducono alle costanti $g_1(0), \ldots, g_n(0)$. Se $y^1_{h,k} = \min\limits_x g_h(x)$ per $x_{0,k} \leq x \leq 0$, $y^1_{h,k} = \max\limits_x g_h(x)$ per $x_{0,k} \leq x \leq 0$, le n funzioni $f_\nu(x; y_{1,1}, \ldots, y_{1,m}; \ldots; y_{n,1}, \ldots, y_{n,m})$ siano definite nel dominio rettangolare R: $0 \leq x \leq x_1$, $\eta_{h,k} \leq y_{h,k} \leq \zeta_{h,k}$, dove $\eta_{h,k} = \min[g_h(0) - p, y^0_{hk}]$, $\zeta_{h,k} = \max[g_h(0) + p, y^1_{hk}]$, $p > 0$, e continue in R. Se $M > 0$ è una costante tale che $|f_\nu(x; \{y_{h,k}\})| \leq M$ in R e $\delta = \min(x_1; p/M)$ esiste allora almeno un sistema di n funzioni $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ definite in (x_0, δ), che in $(x_0, 0)$ coincidono rispettivamente con $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ e soddisfano per $0 \leq x \leq \delta$ il sistema di equazioni funzionali differenziali

$$dy_\nu(x)/dx = f_\nu(x; y_{1,1}, \ldots, y_{1,m}; \ldots; y_{n,1}, \ldots, y_{n,m}); \quad y_{h,k} = y_h(u_k(x)), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

e le limitazioni $|y_\nu(x) - g_\nu(0)| \leq p$. L'A. considera dapprima il caso che le f_ν siano lipschitziane rispetto alle $y_{h,k}$, caso in cui vale il teorema di esistenza e di unicità e prova successivamente il teorema esistenziale enunciato.

G. Sansone.

Hayashi, Kyûzô: On transformations of differential equations. Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A. 28, 313—325 (1954).

L'A. indica una transformazione di un sistema del tipo (1) $y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, con le f_i continue nell'insieme E_{n+1} definito dalle $0 \leq x \leq a$, $|y_i| < +\infty$, in un sistema del tipo (2) $Y_i' = h_i(x, Y_1, \ldots, Y_{n+1})$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, con le h_i continue nell'insieme S_{n+1} definito dalle $0 \leq x \leq a$, $Y_1^2 + \cdots + Y_{n+1}^2 = 1$, le Y che compaiono nelle (2) essendo appunto assogettate alla ulteriore condizione $Y_1^2 + \cdots + Y_{n+1}^2 = 1$. L'A. utilizza questa trasformazione per indicare condizioni necessarie e sufficienti affinché ogni soluzione del sistema (1) abbia un punto terminale (end point) di ascissa $x = a$; a ciò, per esempio, è necessario e sufficiente che in E_{n+1} esista una funzione continua e positiva $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$, dotata di derivate prime continue nell'interno di E_{n+1}, uniformemente infinitesima al divergere di $(y_1^2 + \cdots + y_n^2)^{1/2}$ siffatta da aversi $\partial\varphi/\partial x + (\partial\varphi/\partial y_1) f_1 + \cdots (\partial\varphi/\partial y_n) f_n \geq 0$. L'A. tratta quindi l'analogo problema per l'equazione $y'' = f(x, y, y')$, data in un insieme del tipo $0 \leq x \leq a$, $\underline{w}(x) \leq y \leq \bar{w}(x)$, $-\infty < y' < +\infty$.

G. Scorza Dragoni.

Sibuya, Yasutaka: Sur un système des équations différentielles ordinaires non linéaires à coefficients constants ou périodiques. I, II. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I 7, 19—32, 107—127 (1954).

I. L'A. considère le système des équations différentielles

$$(1) \qquad dx_j/dt = \lambda_j x_j + \Sigma'' a_{j p_1 \ldots p_n}(t)\, x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \quad (j = 1, \ldots, n),$$

où les $a_{j p_1 \ldots p_n}(t)$ sont des fonctions périodiques de la période ω et les λ_j sont des constantes purement imaginaires. Il suppose de plus qu'une transformation formelle à coefficients périodiques (2) $x_j = y_j + \Sigma'' \gamma_{j p_1 \ldots p_n}(t)\, y_1^{p_1} \cdots y_n^{p_n}$ $(j = 1, \ldots, n)$ amène le système (1) en un système $dy_j/dt = \lambda_j y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. On peut alors déterminer les constantes contenues dans les $\gamma_{j p_1 \ldots p_n}(t)$ de manière que les séries formelles (2) soient convergentes, si l'une des deux conditions suivantes est remplie: (i) Les $\omega\lambda_j/i\pi$ sont des nombres rationnels; (ii) toute solution de (1) prenant des valeurs assez petites reste bornée pour $t \to +\infty$. — On établit encore parallèlement les propositions analogues dans le cas où les $a_{j p_1 \ldots p_n}(t)$ sont indépendants de t. — II. L'A. étudie, comme dans le premier mémoire, un système des équations différentielles périodiques, en supposant l'existence d'une transformation formelle périodique qui amène le système donné en un système $dy_j/dt = \lambda_j y_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Supposons que la partie réelle de λ_j soit $=, >, < 0$ suivant que $j \leq s$, $s < j \leq \tau$, $j > \tau$, et de plus que les $\omega\lambda_j/i\pi$ soient des nombres rationnels pour $j = 1, \ldots, r$ $(\leq s)$. Il existe alors une solution développable en des séries entières convergentes de $C_j e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \ldots, r, \tau + 1, \ldots, n)$ à coefficients périodiques. Si l'on suppose

l'existence des relations analytiques $\xi_j = \xi_j(\xi_1, \ldots, \xi_\tau)$ $(j = \tau + 1, \ldots, n)$ entre les valeurs initiales ξ_j telles que la solution correspondante reste bornée pour $t \to -\infty$, il existe une solution développable en des séries entières convergentes de $C_j e^{\lambda_j t}$ $(j = 1, \ldots, s)$ à coefficients périodiques.
M. Hukuhara.

Urabe, Minoru and Shôichirô Katsuma: Generalization of Poincaré-Bendixson theorem. J. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A **17**, 365—370 (1954).

Per il sistema di equazioni differenziali ordinarie (1) $dx/dt = X(x, y)$, $dy/dt = Y(x, y)$ l'A. dà un'estensione del teorema di Poincaré-Bendixson, rilevando che, sotto opportune condizioni di derivabilità, in un campo R privo di punti critici esiste almeno un ciclo limite anche nel caso in cui il campo di direzioni definito dal sistema (1) è tangente in qualche punto alle curve che limitano il campo R.
S. Cinquini.

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On curves defined by binary non-conservative differential systems. Amer. J. Math. **76**, 497—501 (1954).

Betrachtet wird das System $x' = \alpha x + \beta y$, $y' = \gamma x + \delta y$, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stetige Funktionen von t sind und der Strich Differentiation nach t angibt. Dabei wird angenommen, daß diese Funktionen für $t \to \infty$ die Grenzwerte a, b, c, d haben. Verff. untersuchen das Verhalten des Winkels $\theta = \operatorname{arctg} y/x$ einer Lösungskurve für $t \to \infty$ und zeigen: Sind die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 1. reell und verschieden, so existiert für jede Lösung (*) $\lim\limits_{t \to \infty} \theta(t) = \theta_0$; 2. konjugiert komplex, so gilt (**) $|\theta(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$; 3. gleich und hat die Matrix mehrfache Elementarteiler, so gilt entweder (*) für alle Lösungskurven oder aber (**). Dabei bestimmt sich θ_0 aus $c \cdot \cos^2 \theta_0 + \frac{1}{2}(d - a) \cdot \sin \theta_0 \cdot \cos \theta_0 - b \cdot \sin^2 \theta_0 = 0$. — Zum Schluß Aussdehnung der Ergebnisse auf das System $x = a x + b y + f(x, y; t)$, $y = c x + d y + g(x, y; t)$. Im 3. Fall gilt jetzt die Alternativaussage nicht mehr gleichzeitig für alle Lösungskurven.
Joachim Nitsche.

Bautin, N. N.: Über periodische Lösungen eines gewissen Differentialgleichungssystems. Priklad. Mat. Mech. **18**, 128 (1954) [Russisch].

Für das System $dx/dt = x(a_{00} + a_{10} x + a_{01} y)$, $dy/dt = y(b_{00} + b_{01} x + b_{10} y)$, das in der Theorie der nicht-linearen Schwingungen auftritt, kann man die Frage nach der Existenz von Grenzzyklen der Trajektorien auf Grund einer Bemerkung von Dulac (dies. Zbl. **16**, 400) negativ beantworten.

Mikołajska, Z.: Sur l'équation généralisée des oscillations entretenues. Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III **2**, 309—313 (1954).

Das System (1) $\dot{x} = v$, $\dot{v} = g(x, v)$ habe nur periodische Lösungen. (1) und (2): $\dot{x} = v$, $\dot{v} = g(x, v) + p(x, v)$ haben nur um Nullpunkt der (x, v)-Ebene einen singulären Punkt. p, g seien stetig. $W(x, v) \in C^1$ sei ein erstes Integral von (1). Es gelte $W(0, 0) = 0$ und $\operatorname{sign} W_v = \operatorname{sign} v$ für $v \neq 0$, $W_x \Rightarrow 0$ für $|v| \to \infty$ und $W_v \Rightarrow \pm 1$ für $v \to \pm \infty$. Die gleichmäßige Konvergenz beziehe sich auf ein Intervall $\Delta: (-x_1, x_1)$. Weiter sei $W_v p \leq 0$ für $|x| \geq x_1$. Es mögen ein $\eta > 0$ und zwei im Lebesgueschen Sinne in Δ integrable Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ existieren, so daß $p(x, v) \leq v\, a(x)$ für $|x| \leq x_1$, $v \geq \eta$ und $p(x, v) \geq -v\, b(x)$ für $|x| \leq x_1$, $v \leq -\eta$ sowie $\int\limits_{-x_1}^{x_1} a(x)\, dx < \int\limits_{-x_1}^{x_1} b(x)\, dx$. In der Umgebung einer Kurve $W(x, v) = k_0 > 0$ sei $v p(x, v) \geq 0$. Dann gilt: 1. Die Klasse aller periodischen Integrale von (2) ist leer, oder alle Integrale sind beschränkt. 2. Es existiert mindestens ein nichtkonstantes periodisches Integral. — In einem zweiten Satz werden andere, umfangreichere Bedingungen formuliert, bei deren Erfüllung (2) die gleichen Eigenschaften wie im hier angegebenen Satz hat.
W. Haacke.

Graffi, Dario: Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. **16**, 176—180 (1954).

L'A. considera il sistema di equazioni differenziali

$$L\,\ddot{y}_1 + M\,\ddot{y}_2 + g_1(\dot{y}_1) + K_1\,y_1 = -\,\omega\,e_1 \sin(\omega\,t + \gamma_1),$$
$$M\,\ddot{y}_1 + L_2\,\ddot{y}_2 + g_2(\dot{y}_2) + K_2\,y_2 = -\,\omega\,e_2 \sin(\omega\,t + \gamma_2)$$

il quale, sotto certe condizioni, ammette soluzioni periodiche di periodo $T = 2\pi/\omega$ (D. Graffi, questo Zbl. **43**, 312). È possibile stabilire delle limitazioni per i valori quadratici medi in un periodo T di codeste soluzioni (y_1, y_2) e anche delle derivate prime $(\dot{y}_1, \dot{y}_2)$ dalle quali si deduce talvolta la stabilità o l'instabilità delle soluzioni medesime. *G. Lampariello.*

Gillies, A. W.: On the transformations of singularities and limit cycles of the variational equations of van der Pol. Quart. J. Mech. appl. Math. **7**, 152—167 (1954).

The paper considers the differential system $\dot{b} = b(1 - b^2) - F\cos\Phi$, $\dot{\Phi} = -\,b\,x\,F \operatorname{sen}\Phi$ from the point of vue of the variation of its singularities and limit cycles with the parameters F and x. This system appears as the variational equations of the van der Pol equation with a forcing term and has been considered by Cartwright (this Zbl. **39**, 99). The author's contribution consists in finding out and suggesting a way to correct a mistake in Cartwright's work. As a consequence certain hysteresis effects to be expected from a van der Pol oscillator are less complicated than it was suggested by Cartwright's solution. *M. M. Peixoto.*

Ajzerman, M. A. und F. R. Gantmacher: Existenzbedingungen für das Stabilitätsgebiet für ein einläufiges automatisches Regelungssystem. Priklad. Mat. Mech. **18**, 103—122 (1954) [Russisch].

Ein Regelkreis heißt strukturell instabil, wenn seine charakteristischen Gleichung bei beliebiger Wahl der (stets positiven Zeitkonstanten und Verstärkungskoeffizienten) mindestens eine Nullstelle mit nichtnegativem Realteil besitzt. Die Verff. beweisen hierfür einige teils notwendige, teils hinreichende Kriterien. Man muß dazu wissen, wieviel Glieder der einzelnen Grundtypen (Schwinger, Speicher, astatisch) in dem Regelkreis enthalten sind, und Ungleichungen zwischen den verschiedenen Anzahlen nachprüfen. Die Beweise beruhen auf den Ortskurvenkriterien und erfordern eine große Zahl von Fallunterscheidungen. — Die Verff. formulieren zum Schluß das Problem, von dessen allgemeiner Lösung man noch weit entfernt ist, in abstrakter Form: Es sei ein System von Differentialgleichungen $\sum_{j=1}^{m} (\alpha_{ij}\,a_{ij}\,p^2 + \beta_{ij}\,b_{ij}\,p + \gamma_{ij}\,c_{ij})\,x_j = 0$ $(p = d/dt)$ $(i = 1, \ldots, m)$ gegeben. Darin sind die a, b, c beliebig positiv, die α, β, γ sind nur der Werte $+1, 0, -1$ fähig, diese Werte sind vorgegeben zu denken und bestimmen den Typ des Systems. Man soll bei gegebenem Typ entscheiden, ob im Raum der Parameter a, b, c ein Gebiet stabiler Lösungen existiert oder nicht. *W. Hahn.*

Spasskij, R. A.: Über eine Klasse von Regelsystemen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 329—344 (1954) [Russisch].

Verf. geht von dem Differentialgleichungssystem $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}\,x_j + \sum_{s=1}^{m} h_{si}\,f_s(\sigma_s)$ $(i = 1, \ldots, N)$, $\sigma_s = \sum_{j=1}^{N} p_{sj}\,x_j$ $(s = 1, \ldots, m)$ aus, das eine regeltechnische Deutung zuläßt: das Regelsystem hat m Stellglieder, und die Funktionen f sind die (i. a. nichtlinearen) Charakteristiken der Stellmotoren. Für diese gilt die Monotoniebedingung $f_s(0) = 0$, $y\,f_s(y) > 0$ für $y \neq 0$. Die Matrix (b_{ij}) habe k verschwindende Eigenwerte, die übrigen Eigenwerte sollen negative Realteile haben. Verf. führt das System in die „kanonische Gestalt" mit den Variablen z_i (vgl. Luře, dies. Zbl. **31**, 183) über. Er leitet zunächst zwei Bedingungen dafür ab, daß die triviale Gleichgewichtslage $z_1 = \cdots = z_N = 0$ die einzig mögliche ist (notwendig hierfür ist $m \geq k$) und untersucht die Stabilität der trivialen Gleichgewichtslage mit Hilfe der zweiten Ljapunovschen Methode, und zwar durch zwei verschiedene Ansätze zur Konstruktion einer Ljapunovschen Funktion V für das kanonische System. Der erste Ansatz (Luře, dies. Zbl. **42**, 179) lautet: V = quadratische Form in den Variablen mit unbestimmten Koeffizienten, über die später verfügt wird, minus lineare Verbindung der z_i^2. Im zweiten Ansatz (Malkin, dies. Zbl. **42**, 98) ist der Subtrahend eine lineare Verbindung der Integrale $\int_0^{\sigma_s} f_s(y)\,dy$. Durch Auswertung der üblichen Bedingungen (V muß positiv, $\frac{dV}{dt}$ negativ definit sein) ergeben sich für die

unbestimmten Koeffizienten des Ansatzes Gleichungen, deren Erfüllbarkeit hinreichend für asymptotische Stabilität der Null-Lösung ist. Verf. formuliert zum Schluß die im allgemeinen Fall sehr unhandlichen Bedingungen für spezielle Fälle, wo sie einfacher werden. [Vgl. auch die vom Verf. noch nicht berücksichtigten Arbeiten von Letov, Priklad. Mat. Mech. **17**, 401—410 (1953); Duvakin-Letov, folgend. Referat]. *W. Hahn.*

Duvakin, A. P. und A. M. Letov: Über die Stabilität von Regelsystemen mit zwei regulierenden Organen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 163—166 (1954) [Russisch].

Die Verff. untersuchen die Stabilität der trivialen Lösung bei einem Gleichungssystem von der im vorsteh. Referat aufgeführten Art für $m = 2$, und zwar ohne erst die „kanonische Form" herzustellen. Sie setzen eine Ljapunovsche Funktion in der von Malkin (vgl. vorsteh. Referat) gegebenen Form an und erhalten für asymptotische Stabilität der Null-Lösung verhältnismäßig einfach formulierbare hinreichende Bedingungen. Das Verfahren wird an einem einfachen Beispiel erläutert. *W. Hahn.*

Krasovskij, N. N.: Über die Stabilität einer Bewegung im großen bei dauernd wirkenden Störungen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 95—102 (1954) [Russisch].

Es sei ein System der Gestalt (1) $\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ vorgelegt, das die triviale Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$ besitzt. Diese sei „im großen" stabil, d. h. jede Lösung strebt für $t \to \infty$ gegen das System $0, \ldots, 0$. Neben (1) wird (2) $\dot{x}_i = X_i(x_1, \ldots, x_n) + R_i(x_1, \ldots, x_n, t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ betrachtet, wobei die R_i an der Stelle $x_1 = \cdots = x_n = 0$ i. a. von null verschieden sind. Nach Ljapunov heißt die triviale Lösung von (1) „stabil bei dauernd wirkenden Störungen", wenn bei gegebenem $\varepsilon > 0$ und von ε abhängigen $\eta_1(\varepsilon)$ und $\eta_2(\varepsilon)$ jede Lösung $(x_1, \ldots, x_n)$ von (2), für die $|x_i(t_0)| < \varepsilon$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt, der Ungleichung $|x_i(t)| < \eta_1(\varepsilon)$ $(t > t_0)$ genügt, sofern nur die Störungen in Bereich $|x_i(t)| < \varepsilon$ den Ungleichungen $|R_i| < \eta_2(\varepsilon)$ genügen. Verf. erweitert diesen Begriff zur „Stabilität im großen bei dauernd wirkenden Störungen", indem er fordert: jede Lösung von (2) soll der Forderung $\limsup |x_i(t)| < \varepsilon$ für $t \to \infty$, genügen und zwar bei beliebigen R_i, sofern diese im Gebiet $|x_i(t)| < \varepsilon$, $t > t_0$ den Ungleichungen $|R_i(x_1, \ldots, x_n, t)| < \eta(\varepsilon) f(r)$ $(r^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2)$ genügen; $f(r)$ ist eine vorgegebene Funktion. Verf. stellt nun für einige Systeme zweiter Ordnung hinreichende Bedingungen für die erklärte Art der Stabilität auf (mittels der „zweiten Methode von Ljapunov") und vervollständigt damit Untersuchungen, die, ursprünglich von einem Problem aus der Theorie der automatischen Regelungen ausgehend, von Barbašin (dies. Zbl. **47**, 86), Erugin (dies. Zbl. **47**, 179), Malkin (dies. Zbl. **48**, 72) und dem Verf. [Priklad. Mat. Mech. **17**, 339 (1953)] durchgeführt worden sind. Vgl. auch folgend. Referat. *W. Hahn.*

Eršov, B. A.: Ein Satz über die Stabilität der Bewegung im großen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 381—383 (1954) [Russisch].

Bei einem im speziellen Teil des vorsteh. Ref. behandelten Gleichungssystem kann man eine Voraussetzung sparen. *W. Hahn.*

Malkin, I. G.: Zur Frage der Umkehrbarkeit des Satzes von Ljapunov über die asymptotische Stabilität. Priklad. Mat. Mech. **18**, 129—138 (1954) [Russisch].

Es sei $\dot{x}_s = X_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ $(s = 1, \ldots, n)$ im Bereich $t \geq 0$, $\Sigma x_s^2 \leq H^2$ definiert. Das System besitze die triviale Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Diese ist bekanntlich asymptotisch stabil, wenn eine Ljapunovsche Funktion V existiert (d. h. es ist dV/dt negativ definit und $\limsup \dot{V} = 0$ für $t \to \infty$). Dagegen kann man nicht ohne weiteres aus der asymptotischen Stabilität der Nullösung auf die Existenz einer Ljapunovschen Funktion schließen, sondern dies ist nur unter speziellen Annahmen für die X_s oder unter Zusatzvoraussetzungen für die Lösungen zulässig. Verf. beweist über die bisherigen Ergebnisse hinaus unter Verwendung Masseraschen Sätze (vgl. dies. Zbl. **38**, 250): Es sei $F_s(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, t^0)$ diejenige Lösung, die für $t = t^0$ die Werte x_s^0 annimmt. Es existiere eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß für $t^0 \geq 0$, $\Sigma (x_s^0)^2 \leq \delta^2$ die Beziehung $\lim F_s = 0$ (die aus der asymptotischen Stabilität folgt) gleichmäßig bezüglich der x_s^0, t^0 gilt. Dann existiert eine Ljapunovsche Funktion, und dieser Satz ist umkehrbar. Er gilt auch für etwas allgemeinere Systeme (mit beständig wirkenden Störungen, vgl. z. B. die oben besprochene Arbeit von Krasovskij). *W. Hahn.*

Barbašin, E. A. und N. N. Krasovskij: Über die Existenz der Ljapunovschen Stabilität im ganzen. Priklad. Mat. Mech. **18**, 345—350 (1954) [Russisch].

Die Verff. zeigen, daß die im vorsteh. Referat gewonnenen Sätze von Malkin bei sinngemäßer Übertragung auch für die asymptotische Stabilität im ganzen (also bei beliebigen Anfangswerten) richtig bleiben. Zur genauen Formulierung ist eine neue Modifikation des Stabilitätsbegriffs, die „gleichmäßige Stabilität im ganzen" erforderlich. Wenn die Nullösung des Systems gleichmäßig stabil im ganzen ist, dann kann man auch eine Stabilitätsaussage über ein System von Differential-Differenzengleichungen machen, das aus dem Ausgangssystem durch Einführung verzögerter Argumente hervorgeht. *W. Hahn.*

Kamenkov, G. V.: Über die Stabilität der Bewegung in einem endlichen Zeitintervall. Priklad. Mat. Mech. **17**, 529—540 (1953) [Russisch].

Verf. beschäftigt sich mit einer Modifikation des Stabilitätsbegriffes, der für spätere Anwendungen der Theorie von größerer Wichtigkeit sein dürfte als manche andere Spielart. Es sei ein System von nichtstationären Differentialgleichungen nach Absonderung der linearen Teile in der Form

$$\dot{x}_i = p_{i1}(t)\, x_1 + \cdots + p_{in}(t)\, x_n + X_i(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

gegeben. $x_1 = \cdots = x_n = 0$ sei die „ungestörte Bewegung". Wenn sich zu jedem System t_0, $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ von Anfangswerten, die der Bedingung $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}\, x_{10} + \cdots + a_{in}\, x_{n0})^2 \leq A$ genügen (die a_{ij} reelle Zahlen mit nicht verschwindender Determinante, A eine „hinreichend kleine" Zahl), ein Intervall $(t_0, t_0 + \tau)$ derart finden läßt, daß für $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ beständig $\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}\, x_1(t) + \cdots + a_{in}\, x_n(t))^2 \leq A$ ist, dann heißt die ungestörte Bewegung stabil in dem endlichen Intervall. Kriterien hierfür liefern die Wurzeln der Gleichung $\det((p_{ij}(t_0)) - \lambda E) = 0$. Sie müssen alle negative Realteile haben; wenn mehrfache Wurzeln auftreten, kommen noch weitere Bedingungen hinzu. Die Beweise verlaufen ähnlich wie die der Ljapunovschen Theorie. Es wird eine Art Ljapunovscher Funktion konstruiert, nämlich der „Abstand" der gestörten Bewegung von der ungestörten im Phasenraum. — Vgl. auch das folgende Referat. *W. Hahn.*

Lebedev, A. A.: Zum Problem der Stabilität der Bewegung in einem endlichen Zeitintervall. Priklad. Mat. Mech. **18**, 75—94 (1954) [Russisch].

Verf. führt die Untersuchungen der vorstehend besprochenen Arbeit fort. 1. Er gibt ein Verfahren an, die Zahl τ, d. h. die Länge des Intervalls, zu bestimmen bzw. abzuschätzen. 2. Er leitet Kriterien dafür ab, daß Stabilität bei endlichen Anfangsbedingungen vorliegt, d. h. die in der Definition auftretende Zahl A ist nicht „hinreichend klein", sondern fest gegeben. 3. Er läßt „ständig wirkende Störungen" zu; d. h. die rechten Seiten des Gleichungssystems verschwinden nicht notwendig für $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. 4. Er beweist einige Sätze, die auf Stabilität in einem endlichen Zeitintervall schließen lassen, wenn man Aussagen über das Verhalten der Lösungen in Teilintervallen machen kann. 5. Er erläutert die Ergebnisse an einigen Beispielen, und zwar für $n = 2$. *W. Hahn.*

Vinograd, R. E.: Ein neuer Beweis eines Satzes von Perron und gewisse Eigenschaften regulärer Systeme. Uspechi mat. Nauk **9**, Nr. 2 (60), 129—136 (1954) [Russisch].

Definitionen aus der Ljapunovschen Theorie. 1. „Charakteristische Zahl" einer Funktion f: $X(f) = -\limsup_{t \to \infty} t^{-1} \ln |f(t)|$. 2. Es sei $dx_s/dt = p_{s1}\, x_1 + \cdots + p_{sn}\, x_n$ $(s = 1, \ldots, n)$ ein System linearer Differentialgleichungen mit beschränkten Koeffizienten. Ein Fundamentalsystem von Lösungen heißt „normal", wenn die charakteristischen Zahlen in ihrer Gesamtheit die möglichen Maximalwerte haben. 3. Die Gesamtheit der charakteristischen Zahlen eines normalen Systems sind die char. Z. des Systems von Differentialgleichungen. 4. Ein System von Differentialgleichungen heißt „regulär" (pravil'nyj), wenn die Summe seiner charakteristischen Zahlen gleich der charakteristischen Zahl der Funktion $\exp\left(\int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right)$ und gleichzeitig gleich der negativen charakteristischen Zahl von $\exp\left(-\int_0^t \sum_{s=1}^{n} p_{ss}\, dt\right)$ ist. Verf. schreibt das Ausgangssystem vektoriell: $x' = A(t)\, x$ und zeigt: a) Bei einem regulären System existiert für jeden Lösungsvektor der Ausdruck $\lambda[x] = \lim t^{-1} \ln |x(t)|$. b) Es sei $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ ein normales