Werk

Titel: Zahlentheorie

Ort: Berlin

Jahr: 1955

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?245319514_0055|log60

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

these L (dies. Zbl. **41**, 482) gezeigt hat, auch folgendermaßen definiert werden kann: a) als Körper aller rationalen Funktionen auf einer irreduziblen algebraischen Mannigfaltigkeit V_π, welche eine π-gliedrige kontinuierliche abelsche Gruppe Γ von birationalen Transformationen in sich besitzt, die im allgemeinen, aber nicht ausnahmslos, transitiv ist; — b) als Körper aller rationalen Funktionen auf dem Produkt $V_p \times S_\delta$ einer Picardschen Mannigfaltigkeit V_p und eines linearen Raumes S_δ. — Verf. beweist hier, ohne Benützung der Hypothese L, daß beide Definitionen äquivalent sind. Verf. bemerkt außerdem, daß ein quasiabelscher Funktionenkörper auch als Funktionenkörper von π reellen Variablen charakterisiert werden kann, der von π stetigen und stetig differenzierbaren (unabhängigen) Funktionen erzeugt werden kann, die ein Additionstheorem im Sinne von Weierstraß besitzen. *W. Gröbner.*

Zahlentheorie:

James, R. D. and Ivan Niven: Unique factorization in multiplicative systems. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 834—838 (1954).

Verff. untersuchen die Frage, in welchen Unterhalbgruppen der hinsichtlich der Multiplikation als Halbgruppe aufgefaßten Menge $\mathfrak{Z}$ aller positiven ganzen Zahlen der ZPE-Satz (d. h. eindeutige Zerlegung in Primelemente) gilt. Verf. beweisen: Besteht die Halbuntergruppe $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{Z}$ genau aus den Positivteilen gewisser Restklassen nach einem festen Modul n (n sei dabei minimal gewählt), so gilt in $\mathfrak{M}$ dann und nur dann der ZPE-Satz, wenn $\mathfrak{M}$ gleich der Menge aller zu n teilerfremden positiven ganzen Zahlen ist. Der Beweis verläuft elementar. *H. Ostmann.*

Carlitz, L.: Congruence properties of the ménage polynomials. Scripta math. **20**, 51—57 (1954).

Il s'agit du polynôme $U_n(t)$ qui intervient dans le problème des ménages et de deux polynômes étroitement associés $V_n(t)$ et $W_n(t)$. Riordan (ce Zbl. **46**, 8) a prouvé successivement les deux congruences où p est premier et m arbitraire: $U_{p^2+n} \equiv (t^{p^2}-1)\,U_n \pmod p$ et $U_{m^2+n} \equiv (t-1)^{m^2} U_n \pmod m$. L'A. prouve pour les trois polynômes en question deux congruences plus générales; nous les donnons pour U_n: $U_{m+n} \equiv (t-1)^m U_n \pmod{m'}$, où $m = \prod_{p \mid m} p^e$ et $m' = \prod_{p \mid m} p^{e-1}$. En posant $\Delta f(n) = f(n+m) - (t-1)^m f(n)$ et $\Delta^r f(n) = \Delta\,\Delta^{r-1} f(n)$: $\Delta^{2r} U_n \equiv \Delta^{2r+1} U_n \equiv 0 \pmod{m^r m'}$, pour m impair et $r \geqq 1$. Pour m pair le module est à remplacer par $2^{1-r} m^r m'$. *S. Bays.*

Carlitz, L.: Hankel determinants and Bernoulli numbers. Tôhoku math. J., II. Ser. **5**, 272—276 (1954).

Verf. weist darauf hin, daß sich aus bekannten Kongruenzrelationen bez. Eulerscher und Bernoullischer Zahlen sowie aus (auf den Verf. zurückgehenden) Kongruenzen hinsichtlich der Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktionen unmittelbar Kongruenzrelationen gewisser Hankelscher Determinanten angeben lassen. Beispielsweise gilt nach Kummer

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^{r-s} \binom{r}{s} E_{m+sb} \equiv 0 \pmod{p^{er}},\ m \geqq er,\ e \geqq 1,\ (p-1)\,p^{e-1} \mid b,\ p \geqq 3 \text{ Primzahl};$$

setzt man $a_i = E_{m+ib}$ ($i = 0, 1, \ldots$), so ist die linke Seite der Kongruenz offenbar gleich $\Delta^r a_0$, so daß sich für die Hankelsche Determinante $|a_{i+j}| = |\Delta^{i+j} a_0|$ ($i, j = 0, 1, \ldots, r$) leicht $\equiv 0 (p^{er(r+1)})$ ergibt (allgemein folgt aus $\Delta^i a_0 \equiv 0 (M^i)$ leicht $|a_{i+j}| \equiv 0 (M^{r(r+1)})$ ($i, j = 0, 1, \ldots, r$)). *H. Ostmann.*

Carlitz, Leonard: The coefficients of singular elliptic functions. Math. Ann. **127**, 162—169 (1954).

Fortsetzung früherer Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **50**, 39) über die Kongruenzeigenschaften der Koeffizienten der Jacobischen elliptischen Funktion $\operatorname{sn} x = \sum_{m=0}^{\infty} A_{2m+1}(k^2) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$ und der „reziproken Funktion“ $\frac{x}{\operatorname{sn} x} = \sum_{m=0}^{\infty} B_{2m}(k^2) \frac{x^{2m}}{(2m)!}$ für den Fall, daß k^2 ein singulärer Modul ist, somit $\operatorname{sn} x$ eine komplexe Multiplikation zuläßt. [Dabei sind die $A_m(k^2)$ und $B_m(k^2)$ Polynome in k^2 mit ganzen rationalen

bzw. rationalen Koeffizienten, insbesondere $A_1(k^2) = B_0(k^2) = 1$.] Es bezeichnet α (<0) die Diskriminante des imaginären quadratischen Zahlkörpers, in dem k^2 liegt. Es werde $\alpha_m = A_m(k^2)$, $\beta_m = B_m(k^2)$, $\tau_m = \beta_m/m$ gesetzt. Ist p eine ungerade Primzahl mit $(\alpha/p) = -1$, so gilt $\alpha_m \equiv 0 \pmod{p^r}$ $(m \geqq p\,r)$. Wenn ferner $p^2 - 1 \nmid m$ ist, so ist τ_m für p ganz, und es gilt sogar $\tau_m \equiv 0 \pmod{p^r}$ $(m > p\,r)$. Es folgen noch einige Ergänzungen für den Fall $p^2 - 1 \mid m$ und Bemerkungen über die Koeffizienten der Lemniskatenfunktion (Fall $\alpha = -4$). *L. Rédei.*

Sierpiński, W.: Remarques sur les racines d'une congruence. Ann. Polon. math. **1**, 89—90 (1954).

Let $f(x)$ be a polynomial where the coefficients are integers in $R(1)$. Let further $m \neq 4$ be a composite number. Then there exist two integers $a_i \not\equiv 0 \pmod{m}$, $(i = 1, 2)$, such that if $f(a_1) \equiv f(a_2) \equiv 0 \pmod{m}$, then $f(0) \equiv 0 \pmod{m}$. This generalizes a proposition due to M. Chojnacka (not yet published). As a consequence it is easily found, that the well-known theorem of Lagrange, concerning the number of incongruent roots of the congruence $f(x) \equiv 0 \pmod{m}$, m a prime, cannot be extended to composite moduli m, except $m = 4$. *W. Ljunggren.*

Whiteman, A. L.: The sixteenth power residue character of 2. Canadian J. Math. **6**, 364—373 (1954).

Nach Gauß ist für eine Primzahl $p \equiv 1 \bmod 4$ genau dann $(2/p)_4 = 1$, wenn $p = x^2 + 64\,y^2$ ganzzahlig lösbar ist. Ähnliche Kriterien bestehen nach Western [Proc. London math. Soc., II. Ser. **9**, 244—272 (1911)] und Aigner (dies. Zbl. **20**, 291) für $p \equiv 1 \bmod 8$, $(2/p)_8 = 1$ und $p \equiv 1 \bmod 16$, $(2/p)_{16} = 1$. Verf. gibt für diese Kriterien neue Beweise, die sich auf die Jacobischen Summen zur Kreisteilung und die zugeordneten Kongruenzlösungsanzahlen stützen. *H. Hasse.*

● **Gelfond, A. O.: Die Auflösung von Gleichungen in ganzen Zahlen (Diophantische Gleichungen).** (Kleine Ergänzungsreihe zu den Hochschulbüchern für Mathematik. Bd. V.) Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften 1954. 59 S. Vgl. dies. Zbl. **48**, 28.

Mills, W. H.: A method for solving certain Diophantine equations. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 473—475 (1954).

The author gives a complete solution of the Diophantine equation (1) $x^2 + xyz + \varepsilon\,y^2 + a\,x + b\,y + c = 0$, where $\varepsilon = \pm 1$ and a, b, c are integers. The special case $a = b = 0$, $\varepsilon = 1$ has been treated by Barnes (this Zbl. **50**, 37). The case $\varepsilon = c = 1$, $a = b$ has been treated independently but by the same method by the author (this Zbl. **50**, 36). In the proof use is made of a modification of the methods of these two papers. Of special interest is the following corollary: If $x^2 + a\,x + c$ and $\varepsilon\,y^2 + b\,y + c$ are both irreducible over the field of rational numbers, then (1) has integral solutions x and y for only a finite number of values of z. *W. Ljunggren.*

Moessner, Alfred and George Xeroudakes: On some sets of integers with equal sums of like powers. Acad. Serbe Sci., Publ. Inst. math. **6**, 125—136 (1954).

Wiman, A.: Über die Punkte mit ganzzahligen Koordinaten auf gewissen Kurven dritter Ordnung. 12. Skand. Mat.-Kongr., Lund **1953**, 317—323 (1954).

Selmer, Ernst S.: A conjecture concerning rational points on cubic curves. Math. Scandinav. **2**, 49—54 (1954).

On the basis of his earlier work on the Diophantine equation (*) $X^3 + Y^3 = A\,Z^3$ (this Zbl. **42**, 269) and subsequent computations the author makes some interesting conjectures. If the equation (*) is factorised in the Eisenstein field of cube roots of unity there result a number of Diophantine equations of the type (*II*) $w^3 = f(u, v)$, where f is a homogeneous cubic with integer coefficients. The number of these which are soluble is related to the number of generators in the group of solutions in the usual sense. Often some of the equations (*II*) can be shown insoluble by simple congruence considerations (the „first descent"). The equation (*II*) may now be again factorised in the relevant cubic field defined by the right hand side and there result equations $\Phi(u', v', w') = 0$ where Φ is a homogeneous cubic with integer coefficients. Sometimes some of these may be shown insoluble by congruence considerations (the „second descent"). The author conjectures that the „second descents" always exclude the existence of an even number

of generators over the number excluded by the first descent. He also constructs a second descent for $Y^2 = X^3 - A X - B$ and makes similar conjectures. *J. W. S. Cassels.*

Roth, K. F.: On certain sets of integers. II. J. London math. Soc. **29**, 20—26 (1954).

A set of distinct positive integers is called an $\mathfrak{A}$-set if the l equations $\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu = 0$, $\mu = 1, \ldots, l$, where $a_{\mu\nu}$ are integers, are never satisfied simultaneously by distinct integers $x_1, \ldots, x_n$ of the set. $A(x)$ denotes the greatest number of integers x forming an $\mathfrak{A}$-set. In an earlier paper (this Zbl. **46**, 43) the author proved that if the matrix $(a_{\mu\nu})$ is the 1×3 matrix $(1, -2, 1)$ then $x^{-1} \cdot A(x) \to 0$ as $x \to \infty$. In the present paper he generalizes this result to any $l \times n$ matrix satisfying the conditions 1. $n > 2l$, 2. $\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} = 0$ for $\mu = 1, \ldots, l$ 3. Among the columns of the matrix, there exist l linearly independent columns such that if any one of these l columns is excluded the remaining $n - 1$ columns of the matrix can be divided into two sets so that among the columns of each set there are l linearly independent columns. (Cf. Part I, this Zbl. **50**, 40.) *S. Selberg.*

Cohen, Eckford: Rings of arithmetic functions. II. The number of solutions of quadratic congruences. Duke math. J. **21**, 9—28 (1954).

(Part I, this Zbl. **46**, 260.) Let r be an odd positive integer. In this paper the author discusses the number of solutions $N_s(n, r)$ of $n \equiv a_1 x_1^2 + \cdots + a_s x_s^2 \pmod r$ $(a_i, r) = 1$, $i = 1, \ldots, s$, and deduces certain arithmetic properties of $N_s(n, r)$. *L. K. Hua.*

Pol, Balth. van der: The representation of numbers as sums of eight, sixteen and twenty-four squares. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **57**, 349—361 (1954).

Verf. zeigt, daß die (bekannten) Formeln für die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl n als eine Summe von 8, 16 oder 24 Quadraten aus einigen früher von ihm erhaltenen Formeln (dies. Zbl. **42**, 273) leicht hergeleitet werden können. *H. D. Kloosterman.*

Johnson, S. M.: On the representations of an integer as the sum of products of integers. Trans. Amer. math. Soc. **76**, 177—189 (1954).

Let $R(N)$ be the number of representations of an integer as a sum of three products of three numbers. The author proves that $R(N) = \frac{1}{2} \mathfrak{S}(N) N^2 \log^6 N + O(N^2 \log^5 N)$ where

$$\mathfrak{S}(N) = \prod_p (1 - V(p)) \sum_{d \mid N} d \prod_{p^m \mid d,\, p^{m+1} \nmid d} \left(\frac{V(p^m) - V(p^{m+1})}{1 - V(p)} \right)$$

and $V(p^m) = ((m+1) p^{-m} - m p^{-m-1})^3$.

Several generalizations are stated. *L. K. Hua.*

Briggs, W. E.: An elementary proof of a theorem about the representation of primes by quadratic forms. Canadian J. Math. **6**, 353—363 (1954).

H. Weber [Math. Ann. **20**, 301—329 (1882)] was the first to prove that every primitive binary quadratic form is capable of representing infinitely many prime numbers. The author gives a new, elementary, proof based upon the methods used by Atle Selberg in his elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression (this Zbl. **36**, 306). *S. Selberg.*

Sierpiński, W.: Remarques sur les progressions arithmétiques. Colloquium math. **3**, 44—49 (1954).

Die Arbeit behandelt einige Probleme betreffs der arithmetischen Progression, die dem Verf. von C. Zarankiewicz gestellt worden sind. Von ungelösten Problemen sind u. a. das folgende erwähnt: Gibt es für jede natürliche Zahl n n Primzahlen, die eine arithmetische Progression bilden? Zu den bewiesenen Sätzen gehört der folgende: In der Folge der natürlichen Zahlen kann man eine unendliche wachsende

Zahlenfolge $\{v_n\}$, die schneller wächst als eine gegebene Folge $\{u_n\}$ von natürlichen Zahlen, auslassen, so daß die übrigbleibende Zahlenfolge keine unendliche arithmetische Progression enthält. Dies folgt einfach, indem man $n = 2^{p_n-1}(2q_n - 1)$ und $v_n = p_n u_n^2 + q_n$ setzt. Dann ist $v_n > u_n^2$. Es sei nun $ak + b$ $(k = 1, 2, \ldots)$ eine gegebene arithmetische Progression, worin a und b natürliche Zahlen sind. Wählen wir dann $n = 2^{a-1}(2b - 1)$, so ist $v_n = a u_n^2 + b$ ein Element der arithmetischen Progression $ak + b$, woraus der Satz folgt. *S. Selberg.*

Knobloch, Hans-Wilhelm: Über Primzahlreihen nebst Anwendung auf ein elementares Dichteproblem. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 1—13 (1954).

Es handelt sich um die Dirichletsche Dichte der Menge $\mathfrak{M}_2$ derjenigen Primzahlen p, für welche $p - 1$ quadratfrei ist. Durch L. Mirsky (dies. Zbl. **33**, 162) wurde allgemein die natürliche Dichte der Menge $\mathfrak{M}_k$ derjenigen Primzahlen p bestimmt, für welche $p - 1$ frei von k-ten Potenzen ist, und zwar gestützt auf die asymptotische Formel für die Anzahl der Primzahlen $p \leq n$ aus einer primen Restklasse a mod. m mit in a, m gleichmäßiger Restabschätzung. Wenn Verf. dem Spezialfall $k = 2$ dieses Ergebnisses eine eigene Untersuchung gewidmet hat, so ist das aus den folgenden beiden methodischen Gründen geschehen. Erstens wurde Verf. durch das noch ungelöste Problem der Dichte der Primzahlen p mit vorgegebener Primitivwurzel a (Artinsche Vermutung) veranlaßt, nach einer Dichtefrage zu suchen, bei der einerseits der kombinatorische Ansatz noch ebenso kompliziert ist (Durchschnittsbildung aus unendlich vielen Primzahlmengen mit elementar bestimmbarer Dichte), andererseits aber der analytisch-zahlentheoretische Ansatz statt der bei der Artinschen Vermutung heranzuziehenden L-Funktionen zu den nicht-abelschen Normalkörpern $\mathsf{P}\left(\sqrt[m]{1}, \sqrt[m]{a}\right)$ nur solche zu den abelschen Normalkörpern $\mathsf{P}\left(\sqrt[m]{1}\right)$, also gewöhnliche Dirichletsche L-Funktionen erfordert. Als eine diesen Bedingungen genügende Dichtefrage erkannte Verf. gerade die für die Menge $\mathfrak{M}_2$; bei ihr stellt sich übrigens auch als Dichtewert genau dasselbe Produkt $\prod_q (1 - [q(q-1)]^{-1})$ über alle Primzahlen q heraus wie bei der Artinschen Vermutung im allgemeinen Falle (a keine Potenzzahl). Zu alledem siehe eine inzwischen erschienene Arbeit des Ref. (dies. Zbl. **47**, 42). Zweitens wollte Verf. zeigen, wie man bei Beschränkung der Frage auf die Dirichletsche Dichte statt der natürlichen die erforderliche in a, m gleichmäßige Restabschätzung gewinnt, und daß diese Restabschätzung für die Dirichletsche Dichte der Primzahlen $p \equiv a$ mod. m mit durchaus elementar-analytischen Hilfsmitteln wesentlich schärfer gegeben werden kann als für die natürliche Dichte nach dem analytisch tieferliegenden Beweisschema des Primzahlsatzes. — Die vom Verf. gewonnene Restabschätzung für die Dirichletsche Dichte der Primzahlen $p \equiv a$ mod. m bezieht sich auf die Dirichletschen Reihen $f(s|a, m) = \sum'_{p^\nu \equiv a \bmod m} \frac{1}{\nu p^{\nu s}}$, wo der Strich am Summenzeichen bedeutet, daß die kleinste positive Zahl aus der primen Restklasse a mod. m (falls sie eine Primzahlpotenz p^ν ist) unberücksichtigt bleiben soll; von dieser für das nachstehende Ergebnis wesentlichen, im Falle $a \equiv 1$ mod. m von selbst erfüllten Summationseinschränkung abgesehen handelt es sich um die Logarithmen der Zetafunktionen zu den primen Restklassen a mod. m. Für die so „beschnittenen" Zetafunktionslogarithmen wird mit durchaus elementar-analytischen Hilfsmitteln bewiesen: Bei festem $s_0 > 1$ und $\varepsilon > 0$ gibt es eine von a, m und s unabhängige Konstante $C = C(\varepsilon, s_0)$ derart, daß $1 < s \leq s_0$ gilt:

$$0 \leq f(s|a, m) - f(s_0|a, m) < C m^{\varepsilon - 1} \log (1 - s^{-1})^{-1}.$$

Hieraus ergibt sich dann nach dem geläufigen kombinatorischen Schema (siehe die zitierte Arbeit des Ref.) der angegebene Wert für die Dirichletsche Dichte der Primzahlmenge $\mathfrak{M}_2$.

H. Hasse.

Beyer, Gudrun: Über eine Klasseneinteilung aller kubischen Restcharaktere. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 115—116 (1954).

Es handelt sich um die Kummersche Vermutung, daß die drei Klassen von Primzahlen $p \equiv 1$ mod 3, definiert durch die Sektorenlage der zugeordneten normierten Gaußschen Summe, die Dichten $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ haben. Kummer hatte diese Vermutung auf numerische Berechnung für alle $p < 500$ gestützt. Die kürzlich von J. v. Neumann-H. H. Goldstine (dies. Zbl. **51**, 281) für alle $p < 10000$ durchgeführte Berechnung ergibt die relativen Häufigkeiten 0.4452, 0.3290, 0.2258, in beträchtlicher Abweichung von den von Kummer vermuteten Dichten 0.5000 ..., 0.3333 ..., 0.1666 ... Verf. bemerkt, daß diese relativen Häufigkeiten vielmehr auf die Dichten $\frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}$ hinweisen. Sie hat nun die entsprechenden Rechnungen auch für die Gaußschen Summen mit zusammengesetztem Führer f durchgeführt, und

zwar soweit der Jacobische Canon arithmeticus ausreichte, also für alle Führer f die aus Primfaktoren $p \leqq 7057$ zusammengesetzt sind. Unter Beiseitelassung der a. a. O. behandelten Primführer p ergaben sich für die verbleibenden 1115 zusammengesetzten Führer f die relativen Häufigkeiten 0.4458, 0.3318, 0.2224 in guter Übereinstimmung mit den von Verf. vermuteten neuen Dichten 0.4444 . . ., 0.3333 . . ., 0.2222 . . .. *H. Hasse.*

Haselgrove, C. B. and H. N. V. Temperley: Asymptotic formulae in the theory of partitions. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 225—241 (1954).

Es wird eine asymptotische Formel hergeleitet für die Anzahl der Partitionen der natürlichen Zahl n in Summanden aus einer Folge $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots$ von ganzen Zahlen. Es möge in den folgenden Bezeichnungen immer r von 1 bis ∞ gehen; sei $\Sigma \lambda_r^{-2} < \infty$; $\psi(\omega) = \Sigma \exp(-\lambda_r \omega)$, $(\omega = \xi + i\eta, \quad \xi > 0)$, $\Psi(\omega) = \Sigma r^{-1} \psi(r\omega)$, $m_0 = m_0(\xi) = \Sigma (e^{\lambda_r \xi} - 1)^{-1}$, $K(\alpha) = \prod \left(1 + \frac{\alpha}{\lambda_r}\right)^{-1} e^{\alpha/\lambda_r}$, $F(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} K(\alpha) e^{\alpha y} dx$. ψ soll nun folgende Bedingungen erfüllen: $\Sigma r^2 \psi'''(r\xi) = O(\psi'''(\xi))$ für $\xi \to 0$; $(\psi'(\xi))^2 < \theta \psi(\xi) \psi''(\xi)$ für passendes, festes, $\theta < 1$ und genügend kleines ξ; $\xi \psi'''(\xi) = O(\psi''(\xi))$ wenn $\xi \to 0$; für genügend kleines ξ soll $|\psi(\omega)| < \theta_1 \psi(\xi)$ sein in $\xi\Delta < |\eta| \leq \pi$, für jedes feste Δ und ein passendes $\theta_1 = \theta_1(\Delta) < 1$. Dann gilt: Die Anzahl aller Partitionen von n in Summanden λ_r ist $p(n) \sim (2\pi \Psi''(\xi))^{-1/2} \cdot \exp(\Psi(\xi) + n\xi)$, wo $\Psi'(\xi) + n = 0$ und in m Summanden λ_r $p_m(n) \sim \xi F((m - m_0)\xi)\, p(n) + o(\xi\, p(n))$. Allgemein werden für $\Delta_m^r \Delta_n^s p_m(n)$ (wo Δ_m^r r-fache Differenzenbildung nach m bedeutet) analoge Beziehungen bewiesen. Ferner wird skizziert, wie man für $\Sigma \lambda_r^{-2} = \infty$ mit der Sattelpunktmethode zum Ziel kommen kann. Der allgemeine Satz wird dann auf $\lambda_r = n$, n^k, p (p Primzahlen) angewendet. Ferner wird eine Vermutung von Auluck, Chowla und Gupta bewiesen, welche besagt, daß $p_m(n)$ für festes genügend großes n sein Maximum für höchstens 2 Werte von m annehmen kann. *K. Prachar.*

Cohen, Eckford: A finite analogue of the Goldbach problem. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 478—483.

In R_m, dem Restklassenring mod m ($m \geqq 2$ ganz) hat bekanntlich jeder Nichtnullteiler ein Inverses, ist also Einheit, und die Primelemente (= unzerlegbare Nichteinheiten) sind genau die Restklassen q mod m, q gewöhnlicher Primteiler von m, bzw. die zu q mod m assoziierten Restklassen. Verf. beweist elementar im wesentlichen die folgenden beiden Sätze: (1) Dann und nur dann existiert ein $G(m) > 0$ derart, daß sich jedes $a \in R_m$ als Summe von (genau) $G(m)$ Primelementen darstellen läßt, wenn m mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt. Ist $g = G(m)$ minimal gewählt, so gilt: $g = 2$, wenn $m \equiv 1(2)$; $g = 3$, wenn $m \equiv 0(2)$ mindestens zwei ungerade Primteiler hat oder $m = 2p^\lambda$ ($p \geqq 3$ Primzahl) ist; $g = 4$, wenn $m = 2^\mu p^\lambda$ ($\mu \geqq 2$; $p \geqq 3$ Primzahl). — (2) Jedes $a \in R_m$ ist dann und nur dann als Summe von höchstens drei Primelementen darstellbar, wenn m mindestens zwei verschiedene Primteiler besitzt; und als Summe von höchstens zwei Primelementen, wenn $n \equiv 1(2)$ wenigstens zwei verschiedene Primteiler hat oder $m = 2^\mu p$ ($\mu \geqq 1$; $p \geqq 3$ Primzahl) ist. *H. Ostmann.*

Chevallier, J.-M.: Essai de systématisation des méthodes concernant les nombres premiers. Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **23**, 125—140 (1954).

The author considers pairs of numbers (a, b) and introduces addition and multiplication between systems of these pairs. The pairs with $b \neq 0$ are called integers and some of them prime numbers. He derives laws which resemble the Taylor series for $1/(1 + x)$, e^x and $\log(1 + x)$. The whole representation does not give rise to a closer inspection here. *W. Verdenius.*

Cugiani, Marco: Sulle „catene" di numeri primi consecutivi a differenza limitata. Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. **36**, 121—132 (1954).

Es werden Sätze folgender Art über k-tupel aufeinanderfolgender Primzahlen bewiesen: (1) Sei ξ hinreichend groß und $c < f(\xi) < c^{-1} \log \xi$ für ein gewisses $c > 0$; dann existiert zu jedem $0 < \eta \leqq 1$ ein $C > 0$ derart, daß $C f(\xi)$ aufeinanderfolgende Primzahlen $p_\lambda, p_{\lambda+1}, \ldots$ mit $p_{\lambda+\nu+1} - p_{\lambda+\nu} > (\log \xi)/f(\xi)$ im

Intervall $((1-\eta)\,\xi, \xi)$ liegen. — (2) Sei $\nu(\xi, \eta)$ die Anzahl der Sequenzen aufeinanderfolgender Primzahlen in $((1-\eta)\,\xi, \xi)$ mit $p_{i+1} - p_i < \log p_i$; dann ist $\nu(\xi, \eta) > e^{\log^{\Theta}\xi}$ mit einem solchen Θ, für das der Primzahlsatz in der Form $\Pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O(x/e^{\log^{\Theta} x})$ gilt. *B. Hornfeck-H. Ostmann.*

Sathe, L. G.: On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. III. J. Indian math. Soc., n. Ser. **18**, 27—42 (1954).

In diesem Teil der Arbeit wird der Induktionsbeweis zu Ende geführt (vgl. dies. Zbl. **50**, 27; **51**, 280). *E. Hlawka.*

● **Chowla, S. and W. E. Briggs: On the number of positive integers $\leq x$ all of whose prime factors are $\leq y$.** Boulder (Colorado): University of Colorado 1954. 6 p. [hektographiert].

Let $f(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$, all of whose prime factors are $\leq y$, and let $g(x, y)$ denote the number of positive integers $\leq x$, all of whose prime factors are $> y$. The authors give a simpler proof of two special cases of de Bruijn's estimation about $f(x, y)$ and $g(x, y)$, namely

$$f(x, (\log x)^h) = O(x^{1-1/h+\varepsilon}),\quad g(x, (\log x)^h) = x \prod_{p \leq (\log x)^h} (1-p^{-1}) + O(x^{1-1/h+2/h^2+\varepsilon}),$$

where ε is an arbitrarily small positive number, p denotes primes and $h \geq 2$. *L. K. Hua.*

Bateman, P. T. and S. Chowla: The equivalence of two conjectures in the theory of numbers. J. Indian math. Soc., n. Ser. **17**, 177—181 (1954).

$\varrho(n)$ ist Anzahl der versch. Primfaktoren von n. $\lambda(n) = (-)^{\varrho n}$. Es wird die Aquivalenz der Vermutung $\sum_1^n \lambda(\nu)\,\nu^{-1} > 0$ mit der Vermutung $\sum_1^n \chi(\nu)\cdot\nu^{-1} > 0$ (für einen beliebigen reellen Residuencharakter χ) gezeigt. Genauer: gilt das erste für alle $n \leqq N$, so folgt das zweite für $n \leqq N$ und alle χ. Und umgekehrt. Wegen $\int_1^{\infty} x^{-\sigma} \sum_{\nu \leqq x} \lambda(\nu)\,\nu^{-1}\,dx = \zeta(2s)\,(s)^{-1}\,\zeta(s-1)^{-1}$ ist der Zusammenhang mit der Riemannschen Vermutung gegeben. *G. Hoheisel.*

● **Vinogradov, I. M.: The method of trigonometrical sums in the theory of numbers. Translated, revised and annotated by K. F. Roth and Anne Davenport.** New York: Interscience Publishers Inc. 1954. X, 180 p. $ 5,00.

Vinogradov's Originalmonographie wurde in dies. Zbl. **41**, 370 besprochen. Hier liegt nicht eine bloße englische Übersetzung vor, sondern eine vorbildlich bearbeitete Wiedergabe. Einige der 11 Kapitel wurden stark verändert und ergänzt; insbesondere wurden die schwierigeren Beweise ausführlicher dargestellt. Jedem Kapitel wurde ein Anhang (Notes) beigegeben, in dem auf die Veränderungen und auf weitere Literatur hingewiesen wird. *H. L. Schmid.*

Fine, N. J.: On the asymptotic distribution of certain sums. Proc. Amer. math. Soc. **5**, 243—252 (1954).

Sia $((t)) = t - [t] - 1/2$, $f(t) = ((t-\beta))$, $0 \leq \beta < 1$, $\beta \neq 1/2$, e si consideri la somma $S_N(f; t) = N^{-1/2} \sum_{n=0}^{N-1} f(2^n t)$, ed il numero $\sigma = \sigma(\beta) > 0$, definito dalla relazione $\sigma^2(\beta) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\left(\frac{1}{2} - |\beta - \beta_n|\right)^2$, dove β_n indica la parte frazionaria di $2^n\beta$. In applicazione di un teorema di M. Kac l'A. dimostra che la misura dell'insieme dei punti t dell'intervallo $(0, 1)$ nei quali $S_N(f; t) < b$, approssima, quando $N \to \infty$, l'integrale $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma} \int_{-\infty}^{b} e^{-u^2/2\sigma^2}\,du$, o, come dicesi, che la distribuzione delle somme $S_N(f; t)$ è asintoticamente normale. L'A. studia inoltre la distribuzione asintotica di somme più generali. *G. Sansone.*

Godwin, H. J.: On the inhomogeneous minima of certain convergent sequences of binary quadratic forms. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **5**, 28—46 (1954).

Let $M(a, b)$ denote the infimum of the values taken by an indefinite binary quadratic form $f(x, y)$ for x and y congruent mod. 1 to given numbers a and b. The inhomogeneous minimum $M(f)$ of f is defined to be the supremum of $M(a, b)$ for all a, b. The value of $M(f)$ is known for many forms f, which have integral coefficients, but which have no rational factors. The author determines the values of $M(f)$ for the following forms:

(1) $\quad f(x, y) = [x + (p_n/q_n)\, y]\, [x - \{p_n/q_n - 1\}\, y], \qquad n = 2, 3, \ldots, ;$

(2) $\quad f(x, y) = [x + (p_n/q_n)\, y]\, [x - (p_n/q_n)\, y], \qquad n = 1, 2, \ldots;$

where p_n/q_n is a convergent of the continued fraction for $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$ in (1) and for $\sqrt{2}$ in (2). In the first case the form of the result depends on the residue of n modulo 3. The author states that he has also found $M(f)$, when f is of the form (1) where p_n/q_n is taken to be a convergent to $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{13}\right)$. *C. A. Rogers.*

Samet, P. A.: The product of non-homogeneous linear forms. I, II. Proc. Cambridge philos. Soc. **50**, 372—379, 380—390 (1954).

A well-known theorem of Remak, conjectured by Minkowski, states that if L_1, L_2, L_3 are three real homogeneous linear forms in variables x, y, z of determinant $\Delta \neq 0$ then the minimum of $|L_1 L_2 L_3|$ for $x \equiv x_0,\ y \equiv y_0,\ z \equiv z_0$ is at most $|\Delta|/8$. Denote this minimum by $M(x_0, y_0, z_0)$. The author considers especially the case $L_j = x + \theta_j y + \theta_j^2 z$ where $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ are the roots of a cubic equation with integer coefficients $\theta^3 + A\,\theta^2 + B\,\theta + C = 0$, say. In the first part he considers the case $\theta^3 - 4\theta + 2 = 0$ and shows that $M(x_0, y_0, z_0) < 1/4$ except when $(x_0, y_0, z_0) \equiv (0, 0, 1/2), (0, 1/2, 0), (0, 1/2, 1/2) \pmod 1$ and then $M = 1/2, 1/4, 1/4$ respectively. This makes more precise a result of Clarke (this Zbl. **42**, 44). In the second part he considers $\theta^3 + a\,\theta^2 - 2\theta - a = 0$, where a is a sufficiently large integer and shows that (i) $M(x_0, y_0, z_0) \leq a^2/8$ if $a \equiv 2 \pmod 4$ with equality if and only if $(x_0, y_0, z_0) \equiv (0, 0, 1/2) \pmod 1$ and (ii) $M(x_0, y_0, z_0) \leq a^2 (1 - a^{-1})^3/8$ if $a \equiv 1 \pmod 2$ with equality if and only if $(x_0, y_0, z_0) \equiv \pm (a^{-1}, 0, (1 - a^{-1})/2) \pmod 1$. The methods involve a considerable amount of calculation and follow closely the paradigm of E. S. Barnes and H. P. F. Swinnerton-Dyer (this Zbl. **46**, 276). *J. W. S. Cassels.*

Pötzl, Hans: Über Sternkörper im dreidimensionalen Raum. Monaths. Math. **58**, 91—102 (1954).

A generalisation of work of Mahler on 2-dimensional regions (this Zbl. **32**, 402) to 3-dimensional regions. The author is apparently unaware of Mahler's later work [Proc. Roy. Soc. London, Ser. A, **187**, 151—187 (1946) and Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A **49**, 331—343, 444—454, 524—532, 622—631 (1946)] in n-dimensions. He also analyses a 2-dimensional method of the reviewer (this Zbl. **30**, 346) and shows why it is unreasonable to expect it to generalize to 3-dimensions.

J. W. S. Cassels.

Mönkemeyer, Rudolf: Über Fareynetze in n Dimensionen. Math. Nachr. **11**, 321—344 (1954).

This paper develops an algorithm related to Farey section for the space of n dimensions. Consider the set of points in n-dimensional space $\mathfrak{c} = \{c_1/c_{n+1}, \ldots, c_n/c_{n+1}\}$, where $c_1, \ldots, c_{n+1}$ are integers without common factor and $1 \leq c_{n+1} \leq m$ for some given integer m (the order of the Farey net). The simplex determined by $n + 1$ points $c_i = (c_{i1}/c_{i,n+1}, \ldots, c_{in}/c_{i,n+1})$ is called an H-simplex if both (i) $\det(c_{ij}) = \pm 1$ and (ii) the vertices are the only net-points in the (closed) simplex. It is shown that each of (i), (ii) can hold without the other, but that if (i) holds and $c_{i,n+1} + c_{j,n+1} > m$ for all i, j $(i \neq j)$ then (ii) holds. The author now considers a process analogous to the interpolation of medians in a Farey section to give a section of higher order: the median of two points $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ being $((c_{11} + c_{21})/(c_{1,n+1} + c_{2,n+1}), \ldots, (c_{1n} + c_{2n})/(c_{1,n+1} + c_{2,n+1}))$. By taking the median of the two points of the simplex with smallest value of c_{n+1} together with one of those two points and the remaining $n - 1$ points one splits the original simplex into two smaller simplices each of which satisfy (i) if the original one did. Hence if $\mathfrak{y}$ is any point with irrational coefficients lying in the original simplex one may construct by taking medians an infinite decreasing sequence of simplices all containing $\mathfrak{y}$; and it may be shown that infinitely many of them are H-simplices if the first is. Further the simplices converge to $\mathfrak{y}$ in an obvious

sense. The proofs are somewhat complicated. With this machinery the author constructs a rather long proof of Hurwitz's $5^{1/2}$-theorem for approximation to one irrational. From the 2-dimensional nets he shows that if y_1, y_2 are irrational there are infinitely many sets of integers a, b, c, d, e, f such that

$$|(y_1 - a/c)(y_2 - e/f) - (y_1 - d/f)(y_2 - b/c)| < 1/K_2 c^{3/2} f^{3/2}$$

where $K_2 = 3 \cdot 1780$. Whether this can be improved, the author does not know.

J. W. S. Cassels.

● **Keller, Ott-Heinrich: Geometrie der Zahlen.** (Enzyklopädie Math. Wiss. 2. völlig neubearb. Aufl. Band I, 2. Teil, Heft 11, Art. 27.) Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1954. 84 S. DM 8,80.

On less than a hundred pages, the author succeeds in giving a clear account of the development of the geometry of numbers and its applications up to the year 1951. In particular, the advances with regard to non-convex bodies are explained in detail. With its many references, the book should prove valuable to anyone working in the subject or just looking for information. — List of Contents: A: Basic Theorems on Convex Bodies in Lattices (Lattices; Minkowski's geometry; the two theorems of Minkowski; critical lattices, and densest packings). B: Star Bodies (Definitions, theorems, conjectures and problems. Special bodies. The theorem of Minkowski-Hlawka). C: Linear Forms (Minkowski's theorem on linear forms; the theorem of Minkowski-Hajós; Diophantine approximations). D: The Minima of Homogeneous Forms (Definite quadratic forms, and densest packings of spheres; higher minima; indefinite quadratic forms and minimal forms, Hermitean forms; binary cubics; sums of powers and products of linear forms). E. Inhomogeneous Forms (Products of linear polynomials; inhomogeneous binary and ternary quadratic forms). F: Definite Quadratic Forms (Reduction theories; the coefficient space; parallelotopes and quadratic forms). G: Continued Fractions (Klein's polygons; the module figure representation of quadratic forms and continued fractions; Euclid's algorithm in quadratic fields; more-dimensional analogues to continued fractions; criteria for algebraic numbers). H: Algebraic Numbers (Discriminants and units; decomposable forms and ideals; Galois theory). I: Partitions and Lattice Figures.

K. Mahler.

Descombes, R.: Étude diophantienne de certaines formes linéaires non homogènes. Bull. Soc. math. France **82**, 197—299 (1954).

This thesis contains a detailed study of three related problems on the approximation of irrational numbers ξ by rational ones. 1. $s \geq 2$ is a given integer; $c(\xi; s) = \limsup |q(q\xi - p)|^{-1}$ extended over integers p, q with $s \nmid q$; $C(s)$ is the lower bound and $\Gamma(s)$ the smallest point of accumulation of $c(\xi; s)$ for all irrational ξ. Then $C(2) = \Gamma(2) = 2$, and $C(s) = \sqrt{5}$ if $s \geq 3$. Let further $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{k+1} = u_k + u_{k-1}$ be the Fibonacci sequence and j the smallest positive integer such that $s | u_j$, so that $j \geq 4$ if $s \geq 3$. Then $\Gamma(s) = 1 + (3/\sqrt{5})$ if j is even (i. e. for $s = 3, 4, 6, 7, 8, 9, \ldots$). The value of $\Gamma(s)$ for odd j ($s = 5, 10, \ldots$) has a more complicated value and tends to $1 + (3/\sqrt{5})$ as $s \to \infty$. The lower bound $C(s)$ of $c(\xi; s)$ is isolated for $s \geq 3$, but not for $s = 2$. For even j, $c(\xi, s)$ assumes no values, and for odd j it assumes an infinity of values, between $C(s)$ and $\Gamma(s)$. — 2. Next let $s \geq 2$, $(s, t) = 1$, $G(\xi; t/s) = \liminf_{p, q \neq 0} |q(q\xi - p - t/s)|$, and $G(t/s) = \sup_{\xi} G(\xi; t/s)$. Let further $(a, b, s) = 1$, $H(\xi; s, a, b) = \liminf |v(v\xi - u)|$ extended over all u, v with $u \equiv a$, $v \equiv b \pmod s$, $v \neq 0$, and $H(s) = \sup_{\xi} H(\xi; s, a, b)$. Then $G(t/s)$ is independent of t, and $H(s)$ of a and b, and $H(s) = s^2 G(t/s)$. It is found that $H(2) = 1$ and $H(s) = s(s-2)/4$ for even $s \geq 4$; these bounds are assumed by $H(\xi; s, a, b)$ for non-enumerable sets of irrationals ξ, and they are points of accumulation of $H(\xi; s, a, b)$. On the other hand, $H(s) = 3/\sqrt{5}$, $(43\sqrt{5})/(3\sqrt{46})$, $(83\sqrt{7})/(2\sqrt{114})$, $294/(5\sqrt{11})$, $(305\sqrt{55})/(4\sqrt{434})$, for $s = 3, 5, 7, 9$, and 11, while $H(s) = (s^2 - 2s - 1)/4\sqrt{1 - 2/s}$ for odd $s \geq 13$. All these values are attained and isolated in the set of values of $H(\xi; s, a, b)$. — 3. Let finally $K(\xi; s, a, b) = \liminf |v(v\xi - u)|$ extended over all $u \equiv a$, $v \equiv b \pmod s$ with $v > 0$, with the same assumptions on ξ, s, a, b as before. $K(\xi; s, a, b)$ depends only on ξ and s; put $K(s) = \sup_{\xi} K(\xi; s, a, b)$. Then $s^2/4 \leq K(s) \leq 2s^2/5$, and there are infinitely many s with $K(s) > s^2/3$. In particular, for $s = 2, 3, \ldots, 10$, $s^2/K(s) = 4$, $\sqrt{10}$, $16\sqrt{2}/7$, $5\sqrt{26}/8$, $12\sqrt{29}/23$, $28\sqrt{11130}/979$, $96\sqrt{2}/47$, $27\sqrt{38}/53$, $10\sqrt{110}/37$. These bounds are attained, and they are isolated except for $s = 2$.

K. Mahler.

Günther, Alfred: Über transzendente $\mathfrak{p}$-adische Zahlen. II. Zur Approximation transzendenter $\mathfrak{p}$-adischer Zahlen durch rationale. J. reine angew. Math. **193**, 1—10 (1954).

(Part I, this Zbl. **55**, 45). Let p be a rational prime, and $\mathfrak{p}$ a prime ideal in a finite algebraic field such that $\mathfrak{p}^e || p$, $e \geq 1$. Let further α and β be two $\mathfrak{p}$-adic numbers